Задача розсіяння і асимптотичний розв'язок

Постановка задачі розсіяння

Одновимірне рівняння Шредінгера для $\Phi = \Psi_{21}$

$$\Phi_{xx} + \left[\lambda^2 + u(x,t)\right]\Phi = 0$$

$u(x,t)$ відіграє роль потенціалу (вважаємо, що $u \to 0$ при $x \to \pm\infty$)
λ — спектральний параметр

Асимптотичні стани

$$|x| \to \infty \Rightarrow u \to 0 \Rightarrow \Phi_{xx} + \lambda^2\Phi = 0$$

$$\Rightarrow \Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

$a(\lambda,t)$ — амплітуда проходження
$b(\lambda,t)$ — амплітуда відбиття

Асимптотичні розв'язки

Ψ_{21}

$$\Psi_{21} \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Ψ_{11}

$$\begin{cases} \Psi_{11}' = i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21} \\ \Psi_{21}' = i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21} \end{cases} \Rightarrow \Psi_{11} = \lambda\Psi_{21} - i\Psi_{21}' \Rightarrow \Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \to -\infty \\ 2\lambda b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Еволюція параметрів розсіяння

Часова еволюція: друге рівняння Лакса

$$\Psi_t = A\Psi$$

$$A = -4\lambda^2 \begin{pmatrix} i\lambda & u \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}$$

Еволюція даних розсіяння

$$|x| \to \infty \Rightarrow u \sim u_x \sim u_{xx} \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -4\lambda^2 \begin{pmatrix} i\lambda & 0 \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\Psi}_{11} = -4i\lambda^3 \Psi_{11} \\ \dot{\Psi}_{21} = -4i\lambda^2 \Psi_{11} + 4i\lambda^3 \Psi_{12} \end{cases}$$

Еволюція параметрів розсіяння

Асимптотика розв'язку для b

$$\Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \to -\infty \\ 2\lambda b(\lambda, t) e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Рівняння для $b(\lambda, t)$

$$\dot{\Psi}_{11} = -4i\lambda^3 \Psi_{11}$$

$$\Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \to -\infty \\ e^{4it\lambda^3} 2\lambda b(\lambda, t) e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

$$x \to +\infty: \quad \dot{b} = -8i\lambda^3 b \Rightarrow b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) e^{-8i\lambda^3 t}$$

Рівняння для $a(\lambda, t)$

$$\dot{\Psi}_{21} = -4i\lambda^2 \Psi_{11} + 4i\lambda^3 \Psi_{12} \quad \Psi_{21} \sim \begin{cases} e^{4it\lambda^3} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ e^{4it\lambda^3} \left[a(\lambda, t) e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t) e^{i\lambda x} \right] & x \to +\infty \end{cases}$$

$$x \to +\infty: \quad \dot{a} = 0 \Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0).$$

Властивості даних розсіяння

Еволюція даних розсіяння

$$\begin{cases} a(\lambda, t) & = a(\lambda, 0) \\ b(\lambda, t) & = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t} \end{cases}$$

Закон збереження

$$|a(\lambda, t)|^2 - |b(\lambda, t)|^2 = 1$$