1.2. Пара Лакса для уравнения КдФ

Роль преобразования Фурье в случае (нелинейного) уравнения КдФ

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

будет играть *преобразование рассеяния*, осуществляемое линейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + (\lambda^2 + u)\Phi = 0 \tag{6.4}$$

с коэффициентом $u = u(x,t)$ – решением уравнения КдФ. Предполагая $u \to 0$ при $x \to \pm\infty$, определим *данные рассеяния* $a(\lambda,t)$ и $b(\lambda,t)$ соотношением $\mathscr{S}(u) = \{a,b\}$:

$$\Phi \to \begin{cases} \mathrm{e}^{-i\lambda x}, & x \to -\infty, \\ a(\lambda,t)\mathrm{e}^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)\mathrm{e}^{i\lambda x}, & x \to +\infty. \end{cases} \tag{6.5}$$

Оказывается, что динамика по t так определенных данных рассеяния очень похожа на динамику по t данных Фурье для линеаризованного уравнения КдФ, рассмотренного выше:

$$a(\lambda,t) = a(\lambda,0), \quad b(\lambda,t) = b(\lambda,0)\mathrm{e}^{-8i\lambda^3 t}.$$

Таким образом, общая схема метода обратной задачи рассеяния, которая будет уточнена и обоснована в дальнейшем, выглядит так:

$$\begin{array}{ccc} u(x,0) & \xrightarrow{\quad\mathscr{S}\quad} & \left\{\begin{matrix} a(\lambda,0) \\ b(\lambda,0) \end{matrix}\right\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ u(x,t) & \xleftarrow{\quad\mathscr{S}^{-1}\quad} & \left\{\begin{matrix} a(\lambda,t) = a(\lambda,0) \\ b(\lambda,t) = b(\lambda,0)\mathrm{e}^{-8i\lambda^3 t} \end{matrix}\right\} \end{array}$$

Корректность этой схемы и свойства данных рассеяния будут обсуждены в следующих лекциях. Сейчас важно понять, откуда взялось уравнение (6.4) и какое отношение оно имеет к уравнению КдФ.

Ответ заключается в том, что уравнение (6.4) входит в так называемую *пару Лакса*, определяемую следующим образом[1].

[1]По имени американского математика Питера Лакса, предложившего эту конструкцию в работе [9].

Рассмотрим пару линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi, \\ \Psi_t = A\Psi, \end{cases} \tag{6.6}$$

где неизвестная функция является 2×2-матрицей

$$\Psi = \Psi(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix},$$

так же как и коэффициенты $L = L(t,x,\lambda)$ и $A = A(t,x,\lambda)$, стоящие в правых частях.

Очевидно, L и A не могут быть произвольными, поскольку они задают два независимых уравнения пары Лакса (6.6) на одну неизвестную функцию Ψ. Предполагая все компоненты Ψ, L и A гладкими, а Ψ — фундаментальным решением ($\det \Psi \neq 0$), найдем условие совместности уравнений (6.6).

Дифференцируя первое уравнение по t, а второе – по x, имеем

$$\Psi_{xt} = L_t\Psi + L\Psi_t = \Psi_{tx} = A_x\Psi + A\Psi_x.$$

Выражая далее Ψ_t и Ψ_x из уравнений (6.6) и «сокращая» на Ψ справа, получим окончательно

$$L_t + LA = A_x + AL, \quad \text{или} \quad L_t - A_x = [A,L], \tag{6.7}$$

где $[A,L]$ – коммутатор матриц A и L, то есть $[A,L] = AL - LA$. Уравнение (6.7) и есть необходимое и достаточное условие совместности системы (6.6).

Выберем матрицы A и L в виде

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{6.8}$$

$$A = -4\lambda^2 L - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}, \tag{6.9}$$

где λ – произвольный комплексный параметр, а $u = u(x,t)$ – некоторая функция, не зависящая от λ.

Подставим матрицы в условие совместности (6.7), для чего вычислим соответствующие производные и коммутаторы. Имеем

$$L_t = i \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_x = -4\lambda^2 i \begin{pmatrix} 0 & u_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u_x & -iu_{xx} \\ 0 & u_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{xx} & iu_{xxx} + 4iuu_x \\ 2iu_x & -u_{xx} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iu_x & 2u^2 \\ -2u & -iu_x \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -iu_{xx} & -2uu_x \\ 2u_x & iu_{xx} \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Поскольку матрицы L и A являются многочленами по λ, в равенстве (6.7) следует приравнять коэффициенты при одинаковых степенях λ. Имеем равенства

$$\lambda^2 : 4i \begin{pmatrix} 0 & u_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + i(-2i) \begin{pmatrix} 0 & -2iu_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\lambda^1 : 2i \begin{pmatrix} -u_x & -iu_{xx} \\ 0 & u_x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 2iu_{xx} + 4iu^2 \\ -4iu & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+2 \begin{pmatrix} iu_x & 2u^2 \\ -2u & -iu_x \end{pmatrix} = 0,$$

которые выполняются тождественно по u. Последнее равенство при нулевой степени λ дает

$$\lambda^0 : i \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{xx} & iu_{xxx} + 4iuu_x \\ 2iu_x & -u_{xx} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -iu_{xx} & -2uu_x \\ 2u_x & iu_{xx} \end{pmatrix} = 0,$$

$$iu_t - iu_{xxx} - 4iuu_x - 2iuu_x = 0, \quad u_t - u_{xxx} - 6uu_x = 0.$$

Тем самым мы вывели уравнение КдФ из равенства (6.7). Верно и обратное утверждение, то есть если u удовлетворяет уравнению КдФ, тогда имеет место условие совместности (6.7) с матрицами A и L вида (6.8) и (6.9). Доказательство следует непосредственно из алгебраических преобразований, выполненных выше.

Лекция 7

Сейчас достаточно просто вывести уравнение (6.4) из первого уравнения пары Лакса (6.6)

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\Psi_{11}\,\Psi_{12}\\ \Psi_{21}\,\Psi_{22}\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}\Psi_{11}\,\Psi_{12}\\ \Psi_{21}\,\Psi_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\lambda & iu\\ i & -i\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_{11}\,\Psi_{12}\\ \Psi_{21}\,\Psi_{22}\end{pmatrix}.$$

Найдем из этой системы уравнение для Ψ_{21}, для чего перепишем систему в скалярном виде для первого столбца матрицы Ψ.

$$\begin{cases}\Psi_{11}^{'} = i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21},\\ \Psi_{21}^{'} = i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21}.\end{cases}$$

Дифференцируя второе уравнение, получим

$$\Psi_{21}^{''} = i\Psi_{11}^{'} - i\lambda\Psi_{21}^{'} = i(i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21}) - i\lambda(i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21}),$$

откуда

$$\Psi_{21}^{''} + (\lambda^2 + u)\Psi_{21} = 0, \tag{7.1}$$

что совпадает с уравнением (6.4) при $\Psi_{21} = \Phi$.

Таким образом, задача интегрирования уравнения КдФ сведена к задаче интегрирования уравнений пары Лакса (6.6), поскольку, зная решение Ψ, легко найти u из соотношений (6.6) и (6.8)

$$\begin{pmatrix}i\lambda & u\\ 1 & -i\lambda\end{pmatrix} = \Psi_x\Psi^{-1}.$$

1. Прямая задача рассеяния

Обсудим свойства решений уравнения (6.4) при убывающем на бесконечности по x коэффициенте $u(x,t)$.

Уравнение (6.4) играет существенную роль в одномерной квантовой механике, где оно описывает поведение волновой функции Φ одномерной квантовой частицы в потенциальном поле u. Поэтому принято называть уравнение (6.4)

$$\Phi_{xx} + (\lambda^2 + u)\Phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.2}$$