Перетворення розсіяння

Перетворення розсіяння $\mathscr{S}$

Нехай $u(x,t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + u(x,t)$.

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ — рівняння Шредінгера

Обернене перетворення розсіяння $\mathscr{S}^{-1}$

$$a(\lambda,t), b(\lambda,t) \;\Rightarrow\; \text{«потенціал» } u(x,t)$$

Дані розсіяння

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda,t) = a(\lambda,0),\; b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Перетворення розсіяння

Перетворення розсіяння $\mathscr{S}$

Нехай $u(x,t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + u(x,t)$.

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ — рівняння Шредінгера

Обернене перетворення розсіяння $\mathscr{S}^{-1}$

$$a(\lambda,t), b(\lambda,t) \;\Rightarrow\; \text{«потенціал» } u(x,t)$$

Дані розсіяння

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t\psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda,t) = a(\lambda,0),\; b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Перетворення розсіяння

Перетворення розсіяння $\mathscr{S}$

Нехай $u(x,t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор $L = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + u(x,t)$.

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ — рівняння Шредінгера

Обернене перетворення розсіяння $\mathscr{S}^{-1}$

$$a(\lambda,t), b(\lambda,t) \;\Rightarrow\; \text{«потенціал» } u(x,t)$$

Дані розсіяння

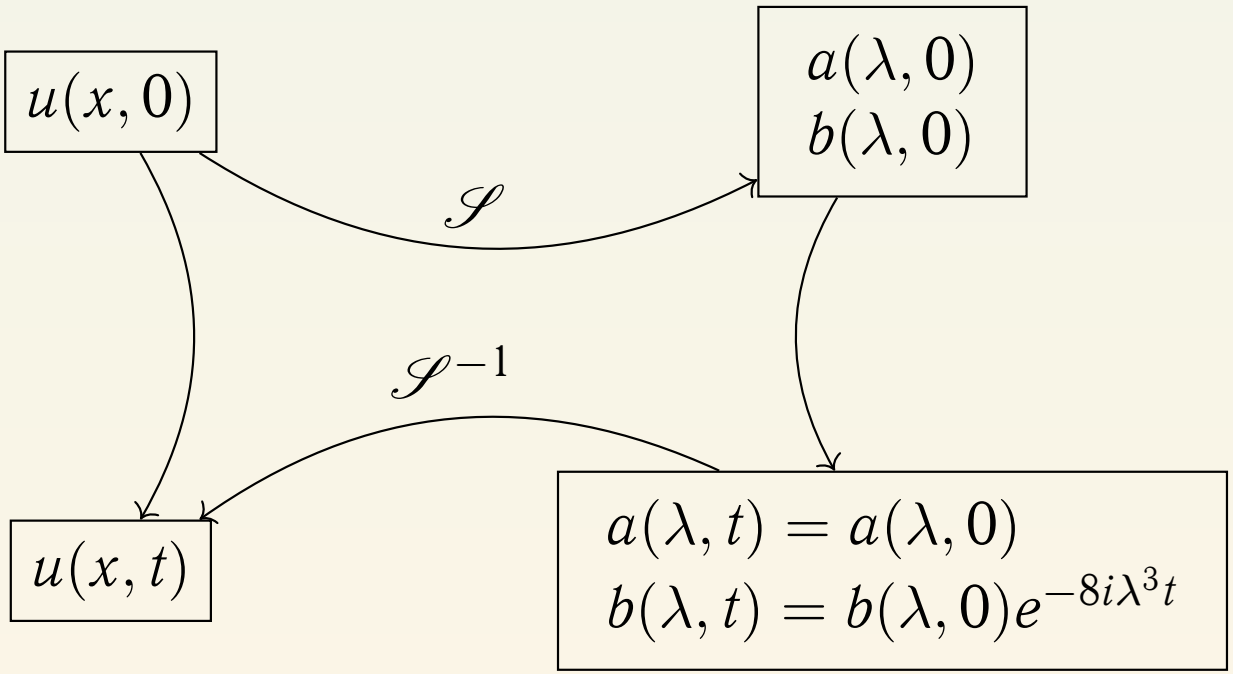
$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t\psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda,t) = a(\lambda,0),\; b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Обернене перетворення розсіяння: діаграма



Метод факторизації і перетворення Дарбу

Рівняння Шредінгера

$$H\psi = E\psi, \qquad H = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$$

Перетворення Дарбу

Факторизація Гамільтоніану: $H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0$:

$$\mathcal{A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x), \qquad \mathcal{A}^\dagger = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x)$$

Перетворення: $\tilde{\psi} = \mathcal{A}\psi$

$$\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}\psi + E_0\psi = E\psi \overset{\mathcal{A}}{\Rightarrow} \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\tilde{\psi} + E_0\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}$$
$$\Rightarrow \widetilde{H}\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}, \qquad \widetilde{H} = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger + E_0$$

Метод факторизації і перетворення Дарбу

Рівняння Шредінгера

$$H\psi = E\psi, \qquad H = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$$

Перетворення Дарбу

Факторизація Гамільтоніану: $H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0$:

$$\mathcal{A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x), \qquad \mathcal{A}^\dagger = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x)$$

Перетворення: $\tilde{\psi} = \mathcal{A}\psi$

$$\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}\psi + E_0\psi = E\psi \overset{\mathcal{A}}{\Rightarrow} \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\tilde{\psi} + E_0\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}$$
$$\Rightarrow \widetilde{H}\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}, \qquad \widetilde{H} = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger + E_0$$

Перетворення Беклунда

Зв'язок між V та $\tilde{V}$

$$\begin{cases} W^2 + W' + E_0 = V \\ W^2 - W' + E_0 = \tilde{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V - \tilde{V} = 2W' \\ V + \tilde{V} = 2(E_0 + W^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{matrix} V = 2\phi' \\ \tilde{V} = 2\tilde{\phi}' \end{matrix} \right| \Rightarrow \begin{cases} \phi - \widetilde{\phi} = W \\ \phi' + \widetilde{\phi}' = E_0 + W^2 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$\phi' + \widetilde{\phi}' = E_0 + \left(\phi - \tilde{\phi}\right)^2$$

Перетворення Беклунда

Зв'язок між V та $\tilde{V}$

$$\begin{cases} W^2 + W' + E_0 = V \\ W^2 - W' + E_0 = \tilde{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V - \tilde{V} = 2W' \\ V + \tilde{V} = 2(E_0 + W^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{matrix} V = 2\phi' \\ \tilde{V} = 2\tilde{\phi}' \end{matrix} \right| \Rightarrow \begin{cases} \phi - \widetilde{\phi} = W \\ \phi' + \widetilde{\phi}' = E_0 + W^2 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$\phi' + \widetilde{\phi}' = E_0 + \left(\phi - \tilde{\phi}\right)^2$$

Суперпотенціал, оператори знищення та народження

Факторизація

Факторизація: $H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0$
Нехай ψ_0 **— власна функція:** $H\psi_0 = E_0\psi_0$

Зв'язок між $\mathcal{A}$ та ψ_0: $\mathcal{A}\psi_0 = 0$

Доведення:

$$H\psi_0 = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}\psi_0 + E_0\psi_0 = E_0\psi_0$$

$\mathcal{A}$ — оператор знищення
$\mathcal{A}^\dagger$ — оператор народження

Суперпотенціал

Визначимо $W(x)$:

$$\mathcal{A}\psi_0 = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x)\right)\psi_0 = 0 \;\Rightarrow\; W(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0$$

Суперпотенціал, оператори знищення та народження

Факторизація

Факторизація: $H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0$
Нехай ψ_0 — власна функція: $H\psi_0 = E_0\psi_0$

Зв'язок між $\mathcal{A}$ та ψ_0: $\mathcal{A}\psi_0 = 0$

Доведення:

$$H\psi_0 = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}\psi_0 + E_0\psi_0 = E_0\psi_0$$

$\mathcal{A}$ — оператор знищення
$\mathcal{A}^\dagger$ — оператор народження

Суперпотенціал

Визначимо $W(x)$:

$$\mathcal{A}\psi_0 = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x)\right)\psi_0 = 0 \;\Rightarrow\; W(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0$$

Суперпотенціал, оператори знищення та народження

Факторизація

Факторизація: $H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0$
Нехай ψ_0 — власна функція: $H\psi_0 = E_0\psi_0$

Зв'язок між $\mathcal{A}$ та ψ_0: $\mathcal{A}\psi_0 = 0$

Доведення:

$$H\psi_0 = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}\psi_0 + E_0\psi_0 = E_0\psi_0$$

$\mathcal{A}$ — оператор знищення
$\mathcal{A}^\dagger$ — оператор народження

Суперпотенціал

Визначимо $W(x)$:

$$\mathcal{A}\psi_0 = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x)\right)\psi_0 = 0 \;\Rightarrow\quad W(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0$$

Біографія суперсиметричної квантової механіки

- (1882) Перетворення Дарбу
- (1940) Ідеї методу факторізації (Шредінгер)
- (1951) Теорія методу факторізації (Інфельд і Халл)
- (1981) Суперсиметрична квантова механіка (Віттен)

Основна властивість перетворення Дарбу

$$H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{H} = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger + E_0$$

Перетворення або знищує рівень основного стану (оператор $\mathcal{A}$), або породжує новий рівень (оператор $\mathcal{A}^\dagger$). При цьому решта рівнів не зсувається.

Біографія суперсиметричної квантової механіки

- (1882) Перетворення Дарбу
- (1940) Ідеї методу факторізації (Шредінгер)
- (1951) Теорія методу факторізації (Інфельд і Халл)
- (1981) Суперсиметрична квантова механіка (Віттен)

Основна властивість перетворення Дарбу

$$H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{H} = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger + E_0$$

Перетворення або знищує рівень основного стану (оператор $\mathcal{A}$), або породжує новий рівень (оператор $\mathcal{A}^\dagger$). При цьому решта рівнів не зсувається.

Чому суперсиметрія?

Спектри гамільтоніанів H та $\widetilde{H}$ співпадають, тому комбінований гамільтоніан $\mathcal{H} = H \oplus \widetilde{H}$ вироджений, тобто має певну симетрію.

Супералгебри

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}; \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H - E_0 & 0 \\ 0 & \widetilde{H} - E_0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{Q^+, Q^-\right\} = \mathcal{H}, \quad \left[\mathcal{H}, Q^\pm\right] = 0, \quad \left(Q^\pm\right)^2 = 0$$

$[A, B] = AB - BA$ — комутатор
$\{A, B\} = AB + BA$ — антікомутатор

Чому суперсиметрія?

Спектри гамільтоніанів H та $\widetilde{H}$ співпадають, тому комбінований гамільтоніан $\mathcal{H} = H \oplus \widetilde{H}$ вироджений, тобто має певну симетрію.

Супералгебри

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}; \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H - E_0 & 0 \\ 0 & \widetilde{H} - E_0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{Q^+, Q^-\right\} = \mathcal{H}, \quad \left[\mathcal{H}, Q^\pm\right] = 0, \quad \left(Q^\pm\right)^2 = 0$$

$[A, B] = AB - BA$ — комутатор

$\{A, B\} = AB + BA$ — антікомутатор

Чому суперсиметрія?

Спектри гамільтоніанів H та $\widetilde{H}$ співпадають, тому комбінований гамільтоніан $\mathcal{H} = H \oplus \widetilde{H}$ вироджений, тобто має певну симетрію.

Супералгебри

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}; \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H - E_0 & 0 \\ 0 & \widetilde{H} - E_0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{Q^+, Q^-\right\} = \mathcal{H}, \quad \left[\mathcal{H}, Q^\pm\right] = 0, \quad \left(Q^\pm\right)^2 = 0$$

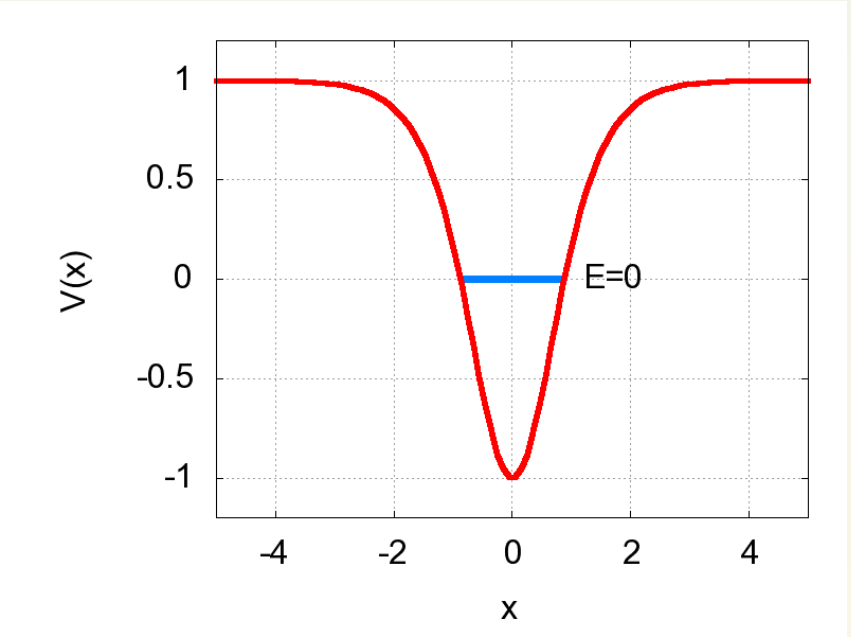
$[A, B] = AB - BA$ — комутатор
$\{A, B\} = AB + BA$ — антікомутатор

Приклад: потенціал солітонного типу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Рівняння Шредінгера

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi = E\psi$$

$$V(x) = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}$$



Суперпотенціал

Основний стан: $\psi_0 = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$, $E_0 = 0$

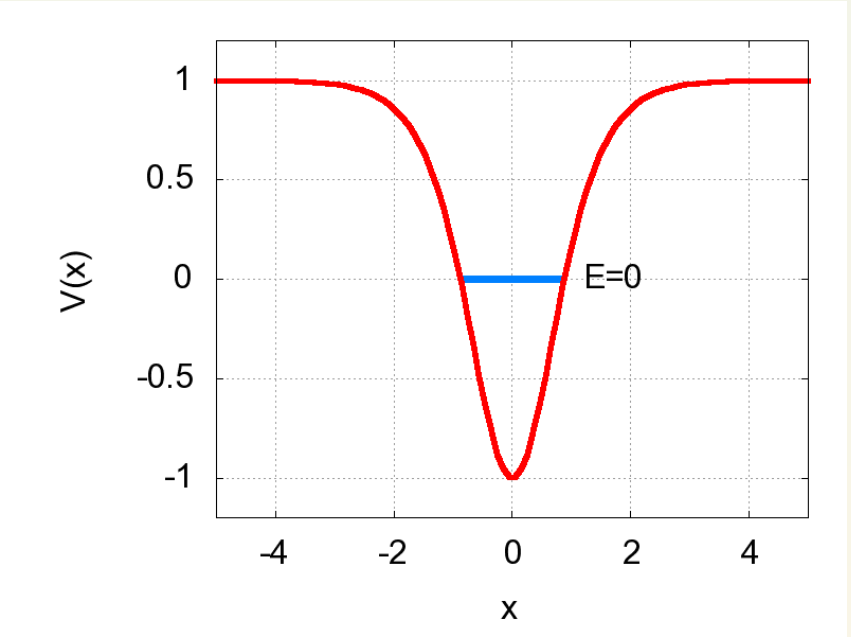
Суперпотенціал: $W(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0 = -\operatorname{th} x$

Приклад: потенціал солітонного типу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Рівняння Шредінгера

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi = E\psi$$

$$V(x) = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}$$



Суперпотенціал

Основний стан: $\psi_0 = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$, $E_0 = 0$

Суперпотенціал: $W(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0 = -\operatorname{th} x$

Перетворення Дарбу для потенціалу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Потенціал суперсиметричного партнера

Суперпотенціал: $W(x) = -\operatorname{th} x$

$$\mathcal{A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x, \quad \mathcal{A}^\dagger = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x$$

$$\Rightarrow \widetilde{V} = W^2 - W' + E_0 = 0$$

Розв'язок задачі для партнера

$$-\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\psi}}{\mathrm{d}x^2} = k^2\tilde{\psi} \;\Rightarrow\; \tilde{\psi}_k(x) = a_k e^{ikx} + b_k e^{-ikx}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{\mathcal{A}^\dagger\tilde{\psi}}{E} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x\right)\tilde{\psi}_k$$

Перетворення Дарбу для потенціалу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Потенціал суперсиметричного партнера

Суперпотенціал: $W(x) = -\operatorname{th} x$

$$\mathcal{A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x, \quad \mathcal{A}^\dagger = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x$$

$$\Rightarrow \widetilde{V} = W^2 - W' + E_0 = 0$$

Розв'язок задачі для партнера

$$-\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\psi}}{\mathrm{d}x^2} = k^2\tilde{\psi} \;\Rightarrow\; \tilde{\psi}_k(x) = a_k e^{ikx} + b_k e^{-ikx}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{\mathcal{A}^\dagger\tilde{\psi}}{E} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x\right)\tilde{\psi}_k$$

Перетворення Дарбу для потенціалу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Потенціал суперсиметричного партнера

Суперпотенціал: $W(x) = -\operatorname{th} x$

$$\mathcal{A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x, \quad \mathcal{A}^\dagger = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x$$

$$\Rightarrow \widetilde{V} = W^2 - W' + E_0 = 0$$

Розв'язок задачі для партнера

$$-\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\psi}}{\mathrm{d}x^2} = k^2\tilde{\psi} \;\Rightarrow\; \tilde{\psi}_k(x) = a_k e^{ikx} + b_k e^{-ikx}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{\mathcal{A}^\dagger\tilde{\psi}}{E} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x\right)\tilde{\psi}_k$$

Задача розсіяння для потенціалу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Умови розсіяння

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \to -\infty \\ e^{ikx} & x \to +\infty \end{cases}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x\right)\tilde{\psi}_k = \frac{\operatorname{th} x - ik}{1 - ik}e^{ikx}$$

Асимптотики:

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} \frac{-1-ik}{1-ik}e^{ikx} & x \to -\infty \\ e^{ikx} & x \to +\infty \end{cases}$$

Потенціал $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$ — безвідбивальний

Задача розсіяння для потенціалу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Умови розсіяння

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \to -\infty \\ e^{ikx} & x \to +\infty \end{cases}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x\right)\tilde{\psi}_k = \frac{\operatorname{th} x - ik}{1 - ik}e^{ikx}$$

Асимптотики:

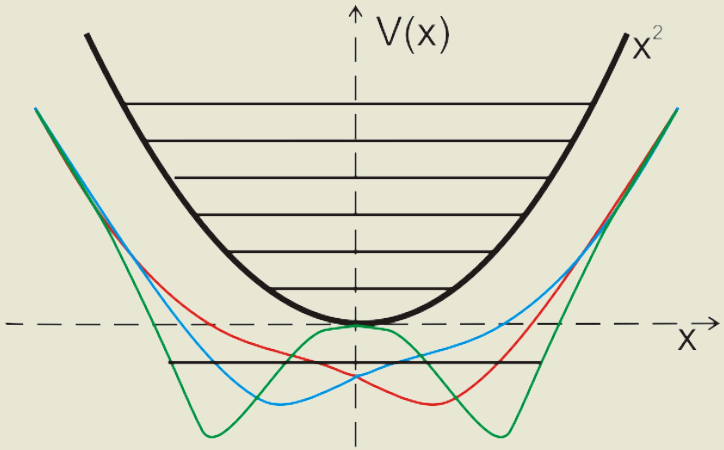
$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} \frac{-1-ik}{1-ik}e^{ikx} & x \to -\infty \\ e^{ikx} & x \to +\infty \end{cases}$$

Потенціал $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$ — безвідбивальний

Суперсиметричні перетворення

$$\mathcal{A}\psi_0 = 0, \quad W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати ізоспектральні потенціали.



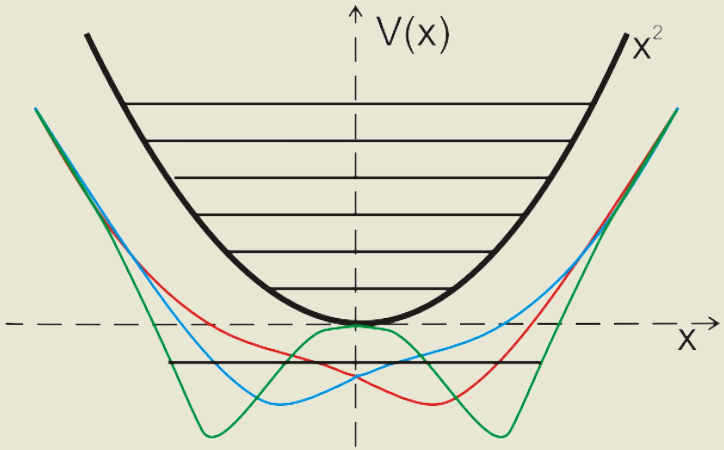
Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Породження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Збуд. первого рівня:
  - Перший крок: факторизація на стани $\mathcal{A}\psi_1 = 0$, де ψ_1 – перший збуджений (не основний)
  - Другий крок: $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\psi_2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\psi_1$

Суперсиметричні перетворення

$$\mathcal{A}\psi_0 = 0, \quad W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати ізоспектральні потенціали.



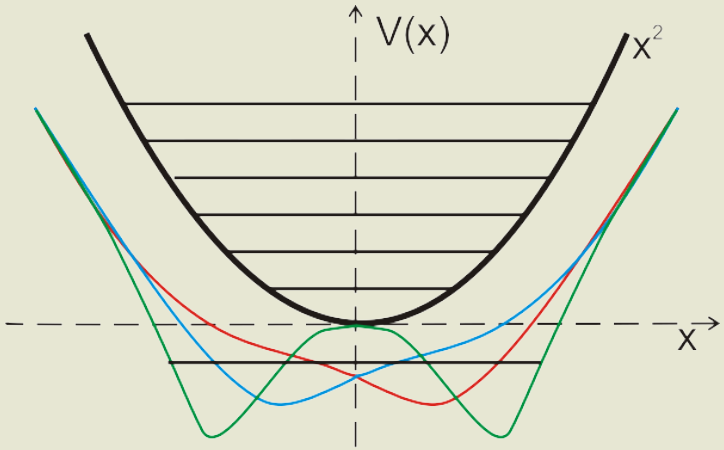
Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Породження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Зсув певного рівня:
  - Перший крок: факторизація на стані $\psi(x, E_n)$, де E_n — певний рівень енергії (не основний)
  - Другий крок: $\tilde{\psi} = \mathcal{A}\psi(x, E)$, де $E = E_n + \Delta$

Суперсиметричні перетворення

$$\mathcal{A}\psi_0 = 0, \quad W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати ізоспектральні потенціали.



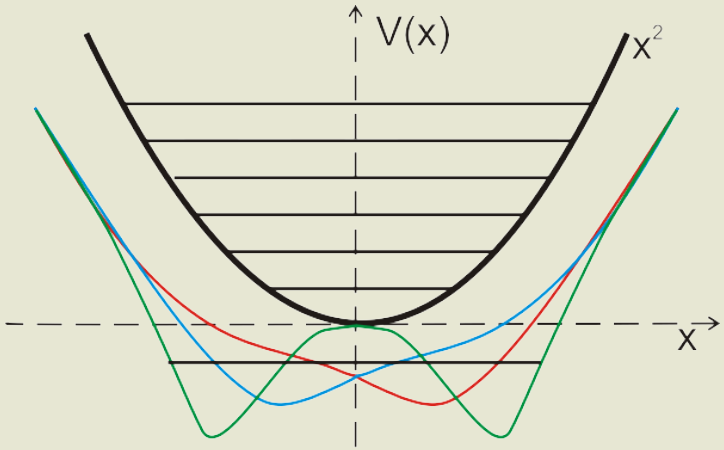
Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Породження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Зсув певного рівня:
  - Перший крок: факторизація на стані $\psi(x, E_n)$, де E_n — певний рівень енергії (не основний)
  - Другий крок: $\tilde{\psi} = \mathcal{A}\psi(x, E)$, де $E = E_n + \Delta$

Суперсиметричні перетворення

$$\mathcal{A}\psi_0 = 0, \quad W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати ізоспектральні потенціали.



Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Породження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Зсув певного рівня:
  - Перший крок: факторизація на стані $\psi(x, E_n)$, де E_n — певний рівень енергії (не основний)
  - Другий крок: $\tilde{\psi} = \mathcal{A}\psi(x, E)$, де $E = E_n + \Delta$