Глава 8

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА

В гл. 2 мы видели, что решение уравнения Шрёдингера для потенциала $V(x) = -v\,\mathrm{sech}^2 x$ можно выразить через элементарные функции, если $v = n(n+1)$, где n — положительное целое число. Эти специальные значения n соответствуют безотражательным потенциалам и дают также начальные профили импульсов, развивающихся в чисто многосолитонные решения уравнения Кортевега — де Фриза. Начиная с $n = 0$, так что $V(x) = 0$, можно построить эти специальные потенциалы и решения соответствующих уравнений Шрёдингера с помощью простого метода, разработанного в гл. 2.

Представляется естественным вопрос, существует ли простая теория преобразований, связывающих эти решения в *более поздние* моменты времени их эволюции. Мы сейчас изложим такую теорию преобразований не только для уравнения Кортевега — де Фриза, но и для некоторых других наиболее известных солитонных уравнений. Для уравнения sine-Gordon, которое давно возникло в дифференциальной геометрии ([34], с. 284), уравнения соответствующих преобразований были получены А. В. Бэклундом, и преобразования того типа, с которыми мы будем встречаться, стали известны как преобразования Бэклунда. Обзор литературы в этой области, относящийся к более раннему периоду, был дан в статье Гурса [46] и воспроизведен Миурой ([86], с. 77). Надежда на то, что другие солитонные уравнения также будут иметь преобразования Бэклунда, была реализована только недавно, после того как Уолквист и Эстабрук [116] получили преобразование Бэклунда для уравнения Кортевега — де Фриза.

Один из наиболее интересных результатов этой теории преобразований состоит в том, что она приводит к простой формуле суперпозиции — теореме перестановочности, посредством которой из односолитонных решений можно простыми алгебраическими приемами построить многосолитонные решения.

8.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

В разд. 2.6 мы рассмотрели соотношение между потенциалами в двух уравнениях Шрёдингера, которые были связаны таким образом, что решение одного уравнения являлось линейной комбинацией решения другого уравнения и первой производной этого решения. Возникшие в результате потенциалы были начальными

условиями для чисто многосолитонных решений. Распространим теперь эти соображения на случай потенциалов, зависящих от параметра, причем потребуем, чтобы собственное значение от этого параметра не зависело [115]. Из наших предыдущих рассуждений мы знаем, что связь между двумя такими потенциалами означает соответствующую связь между двумя решениями уравнения Кортевега — де Фриза. Мы найдем, что эта связь является связью специального вида; она известна как преобразование Бэклунда.

Рассмотрим два уравнения Штурма — Лиувилля

$$y_{xx} = [\lambda + \varphi(x, t)]\, y, \tag{8.1.1}$$

$$w_{xx} = [\lambda + \psi(x, t)]\, w, \tag{8.1.2}$$

где w и y связаны соотношением

$$w = A(x, t, \lambda)\, y + y_x. \tag{8.1.3}$$

Если $\lambda_t = 0$, функции φ и ψ могут, конечно, быть двумя решениями уравнения Кортевега — де Фриза. Так как в этих уравнениях t является просто параметром, мы можем следовать в точности той же процедуре, которая была использована в разд. 2.6. Замечая, что теперь интегрирование вводит произвольную функцию времени, мы находим, что $A(x, t, \lambda)$ должно удовлетворять уравнениям

$$2A_x + \varphi - \psi = 0, \tag{8.1.4}$$

$$A^2 - A_x - \varphi = \tilde{\lambda}(t), \tag{8.1.5}$$

которые соответствуют уравнениям (2.6.5) и (2.6.6). Если снова ввести линеаризующее преобразование $A = -\tilde{y}_x/\tilde{y}$, мы найдем, что $\tilde{y}$ удовлетворяет уравнению (8.1.1), где λ заменено на $\tilde{\lambda}(t)$. Так как мы налагаем ограничение, состоящее в том, что собственное значение не должно зависеть от времени, мы видим, что $\tilde{\lambda}(t)$ должно быть постоянным.

Если теперь ввести потенциальные функции с помощью определений $\varphi = z'_x$ и $\psi = z_x$, то (8.1.4) можно записать в виде

$$A = \frac{1}{2}(z - z'). \tag{8.1.6}$$

В конечном счете нас интересуют пространственные производные z и z', дающие φ и ψ. Следовательно, можно в уравнении (8.1.6) отбросить произвольную функцию времени. Вводя обозначение $p = z_x$, находим, что уравнение (8.1.5) может быть записано в виде

$$p + p' = m + \frac{1}{2}(z - z')^2, \tag{8.1.7}$$

где $m = -2\tilde{\lambda}$ и, конечно, $p = \psi$, $p' = \varphi$. Таким образом, мы получаем нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

(уравнение Риккати), связывающее две функции, которые тесно связаны с решениями уравнения Кортевега — де Фриза. Если предположить, что ψ удовлетворяет уравнению Кортевега — де Фриза вида $\psi_t - 6\psi\psi_x + \psi_{xxx} = 0$, то z удовлетворяет уравнению

$$z_t - 3(z_x)^2 + z_{xxx} = 0; \tag{8.1.8}$$

аналогично для z'.

Уравнение (8.1.7) дает связь между пространственными производными z и z'. Чтобы получить выражение, связывающее их производные по времени, можно сначала продифференцировать (8.1.7) по времени, а затем проинтегрировать по x:

$$z_t + z'_t = \int dx\,(z - z')(z_t - z'_t). \tag{8.1.9}$$

Используя (8.1.8) и вводя обозначения $u = z + z'$, $v = z - z'$, можно записать

$$z_t + z'_t = \int dx \left[\tfrac{3}{2}(v^2)_x u_x - v v_{xxx}\right]. \tag{8.1.10}$$

С помощью (8.1.7) и интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} z_t + z'_t &= \tfrac{3}{2}(u_x)^2 - v v_{xx} + \tfrac{1}{2}(v_x)^2 = \\ &= 2[p^2 + pp' + (p')^2] - (z - z')(z_{xx} - z'_{xx}). \end{aligned} \tag{8.1.11}$$

Окончательный результат (8.1.11) вместе с (8.1.7) составляет преобразование Бэклунда для уравнения Кортевега — де Фриза. Если известно решение z' уравнения третьего порядка (8.1.8), то другое решение z можно получить, решая уравнения преобразования Бэклунда, т. е. уравнение первого порядка (8.1.7) и уравнение второго порядка (8.1.11).

В качестве простого примера использования теории этого преобразования можно начать с подстановки тривиального решения

$$z_x = m + \tfrac{1}{2}z^2, \tag{8.1.12a}$$

$$z_t = 2p^2 - z z_{xx} = 2m z_x, \tag{8.1.12b}$$

где при получении последнего выражения в (8.1.12b) мы использовали связь $z_{xx} = zp$ из (8.1.12a). После интегрирования (8.1.12a) и определения произвольной функции времени по (8.1.12b), имеем $z' = 0$ в (8.1.7). Находим, что z удовлетворяет уравнениям

$$z = -2\varkappa \operatorname{th}(\varkappa x - 4\varkappa^3 t), \quad |z| < 2\varkappa, \tag{8.1.13a}$$

$$z^* = -2\varkappa \operatorname{cth}(\varkappa x - 4\varkappa^3 t), \quad |z^*| > 2\varkappa, \tag{8.1.13b}$$

где $m = -2\varkappa^2$. Видно, что функция $\varphi = z_x$ является единичным солитоном уравнения Кортевега — де Фриза. Решение z^* в качестве односолитонного не интересно, поскольку при $k_x = 4\varkappa^3 t$ оно расходится, но позже оно окажется полезным.

Полученное решение (8.1.13a) могло бы теперь играть роль решения z' в (8.1.7), а для z могло бы быть получено другое решение. Эта процедура повлекла бы за собой интегрирование более сложного дифференциального уравнения, чем уравнение (8.1.12a). К счастью, более сложные решения можно построить намного проще. Их можно получить с помощью простой формулы суперпозиции, вообще не требующей дополнительного интегрирования. Чтобы получить такую формулу, которая известна для уравнения sine-Gordon как теорема перестановочности ([34], с. 286), мы рассмотрим сначала два решения z_1 и z_2, получающиеся из (8.1.7), если исходить из решения z_0 с двумя различными значениями m. Тогда мы имеем

$$p_1 + p_0 = m_1 + \tfrac{1}{2}(z_1 - z_0)^2, \tag{8.1.14a}$$

$$p_2 + p_0 = m_2 + \tfrac{1}{2}(z_2 - z_0)^2. \tag{8.1.14b}$$

Если снова использовать уравнение (8.1.7), но с p_1 вместо p' и m_2 вместо m и обозначить новое решение через z_{21}, получим

$$p_{12} + p_1 = m_2 + \tfrac{1}{2}(z_{12} - z_1)^2. \tag{8.1.15a}$$

Аналогично можно использовать p_2 вместо p' и m_1 вместо m, чтобы получить решение, которое мы обозначим через z_{12}. Тогда имеем

$$p_{21} + p_2 = m_1 + \tfrac{1}{2}(z_{21} - z_2)^2. \tag{8.1.15b}$$

Как мы увидим ниже, можно положить $z_{12} = z_{21}$. Таким образом, если вычесть (8.1.14b) из (8.1.14a), а также (8.1.15b) из (8.1.15a), мы получим два различных выражения для $p_1 - p_2$. Приравнивая два выражения для этой разности и полагая $z_{12} = z_{21} = z_3$, мы придем к чисто алгебраическому соотношению

$$z_3 - z_0 = \frac{2(m_2 - m_1)}{z_1 - z_2}. \tag{8.1.16}$$

Если мы начнем с решения $z_0 = 0$, этот результат сразу же приводит к двухсолитонной формуле для уравнения Кортевега — де Фриза. Более конкретно, предположим, что $\varkappa_1 > \varkappa_2$, и затем используем вместо z_1 величину z^* из (8.1.13b), а вместо z_2 используем (8.1.13a). Такой выбор решений исключает появление нуля в знаменателе формулы суперпозиции (8.1.16). В частности, выбор постоянных $m_1 = -8$ и $m_2 = -2$ дает

$$z_3 = -6[2\operatorname{cth}(2x - 32t) + \operatorname{th}(x - 4t)]^{-1}. \tag{8.1.17}$$

Пространственная производная этого решения является двухсолитонной формулой (1.3.25). Этот метод будет также использован в разд. 8.2 для порождения многосолитонных решений уравнения sine-Gordon.

Справедливость теоремы перестановочности

Любое доказательство теоремы перестановочности основано на равенстве $z_{12} = z_{21}$. Это равенство легко устанавливается, если интерпретировать решения y и w как представительные решения задач рассеяния. Если мы можем показать равенство некоторых данных рассеяния, то на основе теории обратной задачи рассеяния можно подтвердить, что в этом случае равны и сами рассеивающие потенциалы [38].

Предположим, что $y(x)$, решение уравнения (8.1.1), пронормировано так, как в (2.2.1), т. е.

$$\begin{aligned} y_< &= e^{ikx} + R_0(k)\, e^{-ikx}, \quad x \to -\infty, \\ y_> &= T_0(k)\, e^{ikx}, \qquad\qquad x \to +\infty, \end{aligned} \tag{8.1.18}$$

где $k^2 = -\lambda$.

Для локализованных потенциалов при $|x| \to \infty$ уравнение (8.1.5) принимает вид $A^2 - A_x = \tilde{\lambda}$. Записывая $\tilde{\lambda} = k_1^2$, имеем решение для A в виде $A = -k_1 \operatorname{th}[k_1 x + C(t)]$. Таким образом,

$$\begin{aligned} A_< &= k_1, \quad x \to -\infty, \\ A_> &= -k_1, \quad x \to +\infty. \end{aligned} \tag{8.1.19}$$

Можно получить аналогичным образом пронормированное решение для w, соответствующего решению уравнения (8.1.2), записывая $w = K(Ay + y_x)$, где K должно быть выбрано так, чтобы снова получить падающую волну единичной амплитуды. Из (8.1.3) имеем соотношение

$$w_< = K\left[(k_1 - ik)\, e^{ikx} + (k_1 - ik)\, R_0 e^{-ikx}\right], \quad x \to -\infty, \tag{8.1.20}$$

которое показывает, что для получения падающей волны единичной амплитуды нужно выбрать K в виде $K = (k_1 + ik)^{-1}$. Тогда при $x \to +\infty$

$$w_> = -\frac{k_1 - ik}{k_1 + ik} T_0(k)\, e^{ikx} = T_1(k)\, e^{ikx}. \tag{8.1.21}$$

Очевидно, что последующее преобразование решения w в новое решение с $\tilde{k} = k_2$ даст коэффициент прохождения

$$T_{12} = \frac{k_2 - ik}{k_2 + ik} \left(\frac{k_1 - ik}{k_1 + ik}\right) T_0. \tag{8.1.22}$$

Так как алгебраические множители коммутируют, тот же результат получился бы, если бы при получении T_{21} члены k_1 и k_2 были взяты в обратном порядке. Нули двух коэффициентов прохождения также расположены в одних и тех же точках плоскости k (с теми же вычетами), и, следовательно, можно сделать вывод, что рассеивающие потенциалы z_{12x} и z_{21x}, которые можно построить по этим данным рассеяния, также равны.