Упражнение 5

Исследуйте рассеяние волн потенциалом $u(x) = A[\delta(x+a) - \delta(x)]$, записав y в виде (2.3.9). Сращивая решения для каждой δ-функции, как в упр. 4, покажите, что

$$R = \beta(\beta + i)\frac{1 - e^{-2ika}}{D},$$

$$T = D^{-1},$$

где $D = 1 + \beta^2(1 - e^{2ika})$ и $\beta = A/2k$.

Положите $A = B/a$ и покажите, что если $a \to 0$ так, что $u(x) \to B\delta'(x)$, мы получим $R = -1$ и $T = 0$.

Упражнение 6

Покажите, что при $\alpha a \ll 1$, т. е. при $k \approx \mu_0$, второй множитель в (2.3.14) обладает решением $ka \approx (i/2) \pm \sqrt{(\mu_0 a)^2 - 1/4}$.

2.4. УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

Хотя случай упруго закрепленной струны может существенно помочь нам понять одномерную теорию рассеяния, в этой задаче есть сильное ограничение, состоящее в том, что $K(x)$, плотность упругой восстанавливающей силы, не может быть отрицательной. Однако в квантовой теории для одномерного рассеяния нет соответствующего ограничения, так как потенциал рассеяния $V(x)$ может быть либо отталкивающим ($V > 0$), либо притягивающим ($V < 0$). Случай $V < 0$ вводит возможность появления локализованных возмущений, или связанных состояний.

Основным уравнением в квантовой теории рассеяния является уравнение Шрёдингера. Для одномерных стационарных задач его можно записать в виде [96]

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi, \tag{2.4.1}$$

где m — масса частицы, E — полная энергия и $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π. Полагая $2E/\hbar^2 = k^2$ и $2mV(x)/\hbar^2 = U(x)$, мы получим стандартное уравнение для описания одномерных волн в неоднородной среде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [k^2 - U(x)]\psi = 0. \tag{2.4.2}$$

Как показано в учебниках по квантовой механике, плотность потока, связанная с частицей, дается формулой

$$\text{поток} = \frac{\hbar}{m}\operatorname{Im}\left(\psi^* \frac{d\psi}{dx}\right); \tag{2.4.3}$$

это выражение нужно сравнивать с выражением для волн на струне (2.1.16).

Задача квантового рассеяния при $U > 0$ здесь рассматриваться не будет, так как анализ в этом случае не отличается от соответствующего анализа для струны. В случае $U < 0$, кроме решений рассеяния, появятся решения уравнения (2.4.2) в виде локализованных возмущений, или связанных состояний. Простейшим для аналитического рассмотрения случаем является притягивающий потенциал в виде δ-функции. Полагая $V(x) = V_0 a\delta(x)$ и следуя процедуре, изложенной в упр. 4, получим

$$R = \frac{-iU_0 a/2}{k + iU_0 a/2}, \qquad T = \frac{k}{k + iU_0 a/2}, \tag{2.4.4}$$

где $U_0 = 2mV_0/\hbar^2$. Запишем теперь решение рассеяния в том виде, который соответствует падающей волне произвольной амплитуды A, т. е.

$$y_< = Ae^{ikx} + ARe^{-ikx}, \qquad y_> = ATe^{ikx}. \tag{2.4.5}$$

Полезно заметить, что здесь могут быть ненулевые решения для $A = 0$, если R^{-1} и T^{-1} также обращаются в нуль. Из (2.4.4) ясно, что это имеет место при $k = -iU_0 a/2$. Тогда $y_< \approx e^{-U_0 ax/2}$ и $y_> \approx \approx e^{U_0 ax/2}$, а это при $U_0 < 0$ является локализованным решением, или связанным состоянием. Следует отметнть, что тогда полюс R и T при $k = -iU_0 a/2$ лежит в верхней полуплоскости. Полученное здесь решение можно также получить, полагая $y_> = e^{-\gamma x}$, $y_< = e^{\gamma x}$ и сращивая решения, как в упр. 4.

В качестве несколько более сложного примера рассмотрим притягивающий потенциал в виде прямоугольной ямы. Если взять $V(x) = \hbar^2\mu^2(x)/2m$ и использовать для $\mu(x)$ выражение (2.3.8), то отталкивающий потенциал прямоугольной формы эквивалентен случаю упруго закрепленной струны, поэтому рассматривать этот случай нам не нужно. Чтобы проанализировать роль связанных состояний, появляющихся в случае притягивающего потенциала

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ -V_0, & |x| < a, \end{cases} \tag{2.4.6}$$

где $V_0 = |V_0|$, подставим сначала $\mu_0^2 = -2mV_0/\hbar^2$ в результаты разд. 2.3. Тогда получим выраженне $\alpha = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar^2$, которое является действительной величиной для отрицательных значений E, пока выполняется $E > -V_0$. Соответствующие значения k являются чисто мнимыми, $k = \sqrt{2mE/\hbar^2} = i\varkappa$.

Допустимые значения k можно получить одним из двух способов. Можно непосредственно перейти к решениям, описывающим связанные состояния $e^{-\varkappa|x|}$ для $|x| > a$ и повторить процедуру

сращивания решений, изложенную в разд. 2.3, или, как показано выше для δ-потенциала, можно найти точки в верхней полуплоскости k, для которых знаменатели в выражениях для R и T обращаются в нуль. Первый подход используется в большинстве вводных курсов квантовой механики. Для второго способа нужно просто в выражении для $D(k)$ (2.3.13) положить $\alpha = \sqrt{k^2 + 2mV_0/\hbar^2}$. Опять же легче всего проанализировать множители в выражении (2.3.14). Полный анализ первого из этих выражений был также выполнен Нуссенцвайгом [91]. Кроме некоторого числа связанных состояний (зависящих от значения V_0), снова есть бесконечное число комплексных нулей в нижней полуплоскости плоскости k и так называемых антисвязанных состояний на мнимой оси в нижней полуплоскости.

2.5. РАССЕЯНИЕ ПОТЕНЦИАЛОМ ВИДА sech²

Получение решений уравнения Шрёдингера для потенциалов, отличных от δ-функции или от прямоугольной ямы, представляет собой довольно сложное упражнение по использованию специальных функций. Здесь будет рассмотрен случай потенциала в виде sech², так как этот потенциал будет играть важную роль в дальнейшем изложении. Кроме того, процесс рассеяния выражается с помощью линейных комбинаций решений способом, который затем будет обобщен.

Рассмотрим притягивающий потенциал

$$V(x) = -V_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{d}\right). \quad V_0 > 0. \tag{2.5.1}$$

Полагая в уравнении Шрёдингера (2.4.1) $\varepsilon = 2md^2E/\hbar^2$, $v = 2md^2V_0/\hbar^2$ и $z = x/d$, получим

$$\psi'' + (\varepsilon + v \operatorname{sech}^2 z)\psi = 0, \tag{2.5.2}$$

где штрих означает дифференцирование по z. Это уравнение может быть преобразовано в гипергеометрическое [89]. Сначала, полагая

$$\psi = A \operatorname{sech}^{\beta} z \cdot y(x), \tag{2.5.3}$$

где A — произвольная амплитуда, находим, что если β^2 выбрать равным $-\varepsilon$, то функция $y(z)$ удовлетворяет уравнению

$$y'' - 2\beta \operatorname{th} z \cdot y' + (v - \beta^2 - \beta)\operatorname{sech}^2 z \cdot y = 0. \tag{2.5.4}$$

Последующее преобразование $u = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{th} z) = e^{-z}/(e^z + e^{-z})$ дает

$$u(1-u)\frac{d^2y}{du^2} + [c - (a+b+1)u]\frac{dy}{du} - aby = 0, \tag{2.55}$$

где

$$c = 1 + \beta, \quad a + b + 1 = 2(1 + \beta), \quad ab = \beta^2 + \beta - v. \tag{2.5.6}$$