Лекция 13

1. Уравнение синус-Гордон. Три модели

1.1. Модель Скирма в теории поля

Стандартной моделью теории поля в одномерном пространстве-времени является *уравнение Клейна–Гордона*

$$u_{tt} - u_{xx} = \phi'(u), \tag{13.1}$$

где $\phi = \phi(u)$ – некоторая гладкая функция, описывающая потенциальную энергию поля. Уравнение (13.1) выводится из лагранжиана (закона сохранения полной энергии поля u)

$$L = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + \phi(u) \right) dx \tag{13.2}$$

путем стандартной вариации функционала L

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta u_t} - \frac{\delta L}{\delta u} = 0.$$

Здесь плотность лагранжиана $L = T + U$ составляют плотности кинетической и потенциальной энергии поля

$$T = \frac{1}{2} \left(u_t^2 + u_x^2 \right), \quad U = \phi(u),$$

а вариационные производные вычисляются в предположении *стационарного состояния* поля u на бесконечности

$$u_t,\ u_x \to 0, \quad \phi(u) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty. \tag{13.3}$$

В случае квадратичного потенциала $\phi(u) = \frac{1}{2} m^2 u^2$ уравнение (13.1) становится линейным

$$u_{tt} - u_{xx} = m^2 u \tag{13.4}$$

и отвечает *свободному полю*. Можно показать, что оно не имеет нетривиальных (отличных от $u = 0$) решений с конечной энергией, то есть таких, что интеграл (13.2) конечен и выполняются граничные условия (13.3).

В случае существенно нелинейных потенциалов $\phi(u)$ стационарные на бесконечности решения с конечной энергией могут существовать. Они имеют конкретный физический смысл в различных моделях и отвечают в конечном счете частицам или квазичастицам, несущим основную энергию того или иного физического поля. Так, в модели сверхпроводящего контакта Джозефсона говорят о флюксонах, а в теории ферромагнетизма – о домéнах и домéнных стенках.

Впервые подобного рода нетривиальные конфигурации поля были указаны Т. Скирмом [14] в 1958 году, который предложил модель с периодическим потенциалом $\phi(u) = 1 - \cos u$. Соответствующее уравнение (13.1) получило название уравнения синус-Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u.$$

Будем искать его *лоренц-инвариантные решения*, то есть решения, сохраняющие свой вид при замене $x \mapsto x - vt$. Ниже, в Лекции 14, будет показано, что такие решения с граничными условиями (13.3) имеют вид

$$u(x,t) = 4 \operatorname{arctg} \mathrm{e}^{\gamma(x-vt)+\delta}, \quad \gamma^2 = \frac{1}{1-v^2}, \tag{13.5}$$

$$u_x(x,t) = \frac{2\gamma}{\operatorname{ch}\left(\gamma(x-vt)+\delta\right)}, \quad \sin\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{\gamma}{\operatorname{ch}\left(\gamma(x-vt)+\delta\right)}. \tag{13.6}$$

На рис. 13.1 показан вид этих решений в зависимости от x. Они называются кинками[1] или 1-солитонами, поскольку описывают «перескок» полевой переменной u из одного стационарного состояния $u = 0$ в другое, соседнее с данным $u = 2\pi$ (при положительном γ). Состояния $u = 0 \bmod (2\pi)$ имеют нулевую энергию $L = 0$, поэтому физики их назавают *вакуумными решениями*.

Нетрудно из явной формулы (13.5) подсчитать величину энергии кинка. В результате получится $L = 8\gamma$, что доказывает конечность энергии при $v^2 \neq 1$. Заметим, что значение $v^2 = 1$ отвечает «скорости света» в модели Клейна-Гордона, то есть предельной скорости распространения волн в уравнении (13.1). Локализованность перехода от $u = 0$ к $u = 2\pi$ в силу формул (13.6) позволяет говорить о кинках как об «элементарных частицах» в модели Скирма.

Другим свидетельством частицеподобного поведения солитонов (13.5) являются их взаимодействия. В 1962 г. Перринг и Скирм нашли в результате

[1] От английского слова «kink» – изгиб, петля

численного эксперимента аналитическое решение, представляющее собой лобовое столкновение двух кинков, движущихся навстречу друг другу с равными скоростями. Этот результат предварил работу Забуски и Крускала, обсуждавшуюся в Лекции 2. Здесь так же как в случае столкновения уединенных волн уравнения КдФ не происходит взаимного уничтожения или расплывания волн, но после взаимодействия солитоны восстанавливают исходную форму.

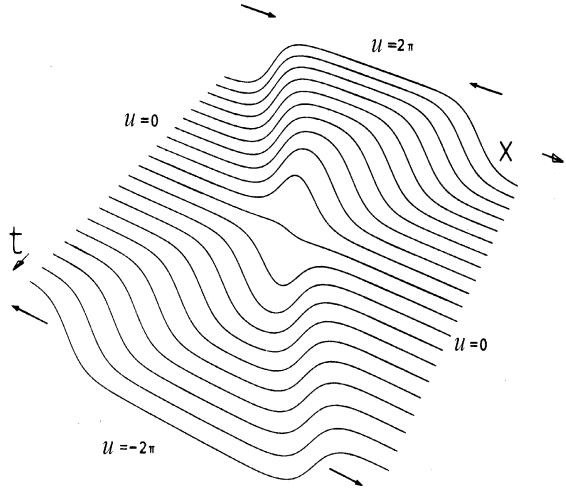


Рис. 5. Столкновение кинка и антикинка в уравнении синус-Гордон

Подробнее процесс рассеяния солитонов уравнения синус-Гордон будет рассмотрен в Лекции 15.

1.2. Поверхности постоянной кривизны

Самое раннее из известных приложений уравнения синус-Гордон связано с описанием двумерных поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Важная работа А. Беклунда о преобразованиях поверхностей в $\mathbb{R}^n$, написанная в 1880 году, была посвящена этому приложению. Приводимое здесь обсуждение проблемы, которое предполагает некоторое знакомство с дифференциальной геометрией, является сокращенным вариантом более подробного обсуждения проблемы из работы Л. Эйзенхарта (см. [7], с.371).

Рассмотрим гладкую двумерную поверхность в трехмерном еклидовом пространстве. Пусть r_i, $i = 1, 2, 3$ обозначают ортогональные декартовы

координаты в трехмерном пространстве, а x, y – координаты на плоскости. Три уравнения вида

$$r_i = r_i(x, y), \quad i = 1, 2, 3,$$

определяют поверхность. Пусть $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ – радиус-вектор точки P, лежащей на поверхности. Если точку P переместить вдоль поверхности на бесконечно малую величину, приращение радиус-вектора определяется формулой

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy.$$

Модуль приращения определяется первой фундаментальной квадратичной формой

$$I = (d\vec{r}, d\vec{r}) = I_1 dx^2 + I_2 dx dy + I_3 dy^2, \tag{13.7}$$

где

$$I_1 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right), \quad I_2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right), \quad I_3 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right).$$

Матрица

$$g = \{g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{pmatrix}$$

называется *метрическим тензором* поверхности. Он служит, например, для измерения длины кривой $\vec{l} = \vec{l}(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ на поверхности:

$$\text{Длина кривой } \vec{l} = \int_a^b \sqrt{g_{11}\dot{x}^2 + 2g_{12}\dot{x}\dot{y} + g_{22}\dot{y}^2}\, dt.$$

Аналогично пусть $\vec{n}$ – единичный вектор, нормальный к поверхности в точке P. При бесконечно малом перемещении P вектор $\vec{n}$ изменится согласно формуле

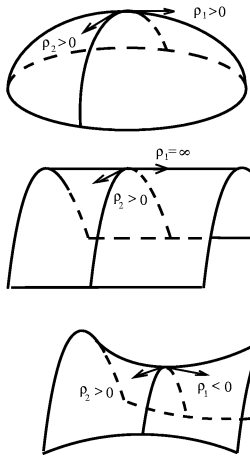
$$d\vec{n} = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{n}}{\partial u_2} du_2.$$

Вторая фундаментальная квадратичная форма имеет вид

$$II = -(d\vec{n}, d\vec{r}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} h_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta, \tag{13.8}$$

где $h_{\alpha\beta}$ – тензор внешней кривизны.

Любая гладкая кривая на поверхности, проходящая через точку P, имеет в этой точке некоторый радиус кривизны (в евклидовом пространстве).



1°. $K > 0$ – эллиптическая точка

2°. $K = 0$ – цилиндрическая точка

3°. $K < 0$ – гиперболическая точка

Рис. 6. Главные кривизны и асимптотические линии

Меняя направление, в котором кривая пересекает точку P, можно найти максимальный (ρ_1) и минимальный (ρ_2) радиусы кривизны, соответствующие двум *главным направлениям* $\vec{\lambda}_1$ и $\vec{\lambda}_2$ в точке P, эти направления ортогональны друг другу. *Полная (гауссова) кривизна* поверхности в точке P определяется формулой

$$K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}. \tag{13.9}$$

Числа ρ_1^{-1}, $\rho_2^{-1} \in \mathbb{R}$, называемые *главными кривизнами*, являются собственными значениями первой квадратичной формы (13.7). Это значит, что матрицу $I = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{pmatrix}$ можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \rho_1^{-1} & 0 \\ 0 & \rho_2^{-1} \end{pmatrix} T^{-1},$$

где T – невырожденная матрица.

Пусть $\vec{\lambda} = \{\nu_1, \nu_2\}$ – единичный касательный вектор к главным направлениям в точке P. Их огибающая C является асимптотической линией, если

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} h_{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta = 0$$

вдоль C. Точку на поверхности пересекают две различные вещественные асимптотические линии тогда и только тогда, когда полная кривизна в этой точке отрицательна. Если вся поверхность целиком имеет отрицательную кривизну, мы можем использовать систему асимптотических линий в качестве внутренних координат на поверхности.

Значения кривизны в точке определяют локальную классификацию точки поверхности как показано на рис. 13.2.

Поверхность имеет отрицательную полную кривизну $(K < 0)$, если главные радиусы находятся с противоположных сторон касательной плоскости в точке P. Раструб духовой трубы, седло и тонкие ломтики жареного картофеля – все это примеры поверхностей с отрицательной кривизной.

Лекция 14

1. Три модели SG (продолжение)

Рассмотрим поверхность постоянной отрицательной кривизны ($K = -1/a^2$) с внутренними координатами, определенными при помощи асимптотических линий. При соответствующем выборе масштаба первая фундаментальная квадратичная форма может быть записана в виде

$$I = a^2(du_1^2 + 2\cos\varphi du_1 du_2 + du_2^2), \tag{14.1}$$

где φ – угол между асимптотическими линиями. В этих координатах уравнение Гаусса превращается в уравнение SG

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1 \partial u_2} = \sin\varphi.$$

Уравнение Гаусса является условием совместности, которому должен удовлетворять произвольный тензор $h_{\alpha\beta}$, для того чтобы он мог быть тензором внешней кривизны поверхности. Таким образом, каждое решение этого уравнения определяет поверхность постоянной отрицательной кривизны $(-1/a^2)$ с первой фундаментальной формой, определяемой формулой (14.1). Такие поверхности называются *псевдосферическими*. Подробности о классификации поверхностей можно найти в учебнике [8].

Эффект самоиндуцированной прозрачности

Иттрий-алюминиевый гранат (Al_2O_3 с примесью ионов Yt^{+3}) представляет собой темный, непрозрачный кристалл. Но он становится прозрачным для пучка лазерного света определенной частоты и интенсивности. Это свойство пропускать мощное оптическое излучение только в некотором узком диапазоне частот называется *самоиндуцированной прозрачностью* (СИП). Эффект был открыт Мак-Коллом и Ханом в 1965 году (см. [7], с. 374). Они экспериментально установили, что показатель преломления (то есть линеаризованное дисперсионное соотношение этого кристалла как идеального диэлектрика) имеет сингулярности на частотах, совпадающих с любой из резонансных частот его атомов. Самоиндуцированная прозрачность

является чисто нелинейным эффектом, возникающим при взаимодействии диэлектрика с электрическим полем на частоте, близкой к резонансу.

Начнем с физического описания самоиндуцированной прозрачности. В простейшем случае СИП диэлектрик состоит из двухуровневых атомов, каждый из которых имеет основное и возбужденное состояния. Пусть вначале атомы находятся в основном состоянии, то есть среда является *аттенюатором*, а не усилителем. Падающее электрическое поле, настроенное на резонансную частоту, возбуждает атомы. Такой перенос энергии от электрического поля к веществу обычно необратим и в конце концов истощает энергетический запас электрического импульса.

Тем не менее можно сформировать достаточно мощный и очень короткий падающий импульс так, что фронт импульса отдает энергию (когерентно[1]) в среду, которая запасает ее, а затем возвращает ее (когерентно) назад в импульс. Взаимодействуя с таким импульсом, атомы вещества остаются в своем основном состоянии, суммарный перенос энергии от излучения к веществу равен нулю, а импульс распространяется с постоянной (меньшей, чем скорость света) скоростью сквозь среду, которая становится как бы прозрачной. Это и есть самоиндуцированная прозрачность.

Теперь мы рассмотрим основные уравнения (уравнения Максвелла — Блоха). Для простоты пренебрежем размерными константами и положим скорость света, постоянную Планка и диэлектрическую проницаемость кристалла равными единице: $c = h = \sigma = 1$, а сам кристалл положим одномерным и расположенным вдоль оси x. Считая скорость изменения электрического поля волны много больше скорости поляризации, запишем уравнение Максвелла в среде

$$E_x = \langle P \rangle,$$

где в правой части стоит полная поляризация дипольных атомов среды $p(x, t, \omega)$ на всех частотах ω

$$\langle P \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, t, \omega) g(\omega) d\omega.$$

Предположим, что резонансные диполи распределены так редко, что они, взаимодействуя с внешним полем, не взаимодействуют друг с другом. При таких условиях величина относительной разности заселенностей между возбужденным и основным состояниями

$$\eta(x, t, \omega) = \frac{N_{\text{осн.}} - N_{\text{возб.}}}{N_{\text{возб.}} + N_{\text{осн.}}}$$

[1] «coherent» – согласованно, связанно.

зависит только от поляризации $p(x,t,\omega)$ индивидуального двухуровневого атома с частотой перехода ω и внешнего поля $E(x,t)$. Эта зависимость была найдена Дж. Лэмом (G. L. Lamb) в 1971 году из простых квантовомеханических соображений. Он показал, что p, η удовлетворяют уравнениям типа Блоха (F.Bloch)

$$p_t = E\eta, \quad \eta_t = -\frac{1}{2}(E\overline{p} + \overline{E}p).$$

При $t \to \infty$ в силу сделанных предположений должны выполняться следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{array}{l} E \to 0, \quad t \to \pm\infty, \\ p \to 0, \quad \eta \to 1, \quad t \to -\infty. \end{array} \tag{14.2}$$

Уравнение синус-Гордон является частным случаем системы Максвелла–Блоха в пределе «бесконечно-узкой линии», т. е. когда $\langle P \rangle = p$ или, что то же самое, $g(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$. В самом деле, объединяя последние три уравнения, имеем

$$\begin{cases} E_x = p, \\ p_t = E\eta, \\ \eta_t = -\frac{1}{2}(E\overline{p} + \overline{E}p). \end{cases} \tag{14.3}$$

Умножая второе уравнение на $\overline{p}$ и беря комплексное сопряжение, перепишем его в виде (η – вещественно)

$$\frac{1}{2}(p\overline{p} + \overline{p}p) = \frac{1}{2}(E\overline{p} + \overline{E}p)\eta.$$

Складывая его далее с третьим уравнением, интегрируя по t и учитывая граничные условия (14.2), получим закон сохранения

$$|p|^2 + |\eta|^2 = 1.$$

Это соотношение наводит на мысль о возможности параметризации решений

$$\eta = \cos u, \quad p = \mathrm{e}^{i\theta} \sin u. \tag{14.4}$$

Тогда, если при $t \to -\infty$ фаза E была постоянна $\theta = \mathrm{const}$, то из второго уравнения (14.3)

$$E = \mathrm{e}^{i\theta} u_t, \tag{14.5}$$

а из первого уравнения (14.3) имеем

$$u_{xt} = \sin u.$$

В Лекции 15 будет показано, что это уравнение имеет односолитонное решение вида

$$u(x,t) = 4\operatorname{arctg} \mathrm{e}^{-2\varkappa(x-x_0)-(t-t_0)/2\varkappa},$$

которое в оптике СИП называется «2π-импульсом»

$$E = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{2\varkappa \operatorname{ch}\left(2\varkappa(x-x_0) + \dfrac{t-t_0}{\varkappa}\right)}.$$

Нетрудно проверить, что полная энергия, необходимая для возбуждения этого импульса, должна быть не меньше

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |E(x,t)|dt = 2\pi.$$

Лекция 16

1. Уравнение синус-Гордон. Взаимодействия солитонов

1.1. Двухсолитонное решение

Воспользуемся снова преобразованием Беклунда. Пусть $u = v_0 = 0$, а v_1 и v_2 – односолитонные решения (15.10) с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Наша цель – найти решение $u = v_3$, связанное преобразованиями Беклунда с v_0, λ_1 и λ_2 по схеме, изображенной на рис. 16.1.

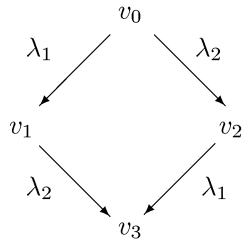


Рис. 8

Уравнения по x (15.8) для $v_j,\ j = 1, 2, 3$ имеют вид

$$\left(\frac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin\frac{v_1}{2}, \quad \left(\frac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin\frac{v_3 + v_1}{2}, \tag{16.1}$$

$$\left(\frac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin\frac{v_2}{2}, \quad \left(\frac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin\frac{v_3 + v_2}{2}. \tag{16.2}$$

Выражая производные v_1 и v_2 из систем (16.1) и (16.2), имеем

$$\left(\frac{v_3}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin\frac{v_3 + v_1}{2} + \lambda_1 \sin\frac{v_1}{2} =$$

$$= \lambda_1 \sin\frac{v_3 + v_2}{2} + \lambda_2 \sin\frac{v_2}{2}.$$

Применяя тригонометрическую формулу для разности синусов, получим из последнего равенства

$$\lambda_2 \sin \frac{v_3 + v_1 - v_2}{4} = \lambda_1 \sin \frac{v_3 + v_2 - v_1}{4}$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{v_3}{4} = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \operatorname{tg}\frac{v_2 - v_1}{2}.$$

Вспоминая явную формулу (15.10) для v_1 и v_2,

$$v_1,\, v_2 = 4\operatorname{arctg} \exp(\theta_{1,2}), \quad \theta_j = \frac{\lambda_j}{2} x + \frac{t}{2\lambda_j} + \delta_j, \quad j = 1, 2,$$

получим окончательно

$$u(x,t) = v_3 = 4\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\theta_1} - \mathrm{e}^{\theta_2}}{1 + \mathrm{e}^{\theta_1 + \theta_2}} \right). \tag{16.3}$$

1.2. Связанные состояния

Покажем сначала, что формула (16.3) описывает пару кинк-антикинк, если «центры ступенек» разнесены достаточно далеко друг от друга. Этот случай отвечает, например, большому значению времени $t \gg 1$.

Подобно тому, как мы поступали в Лекции 4, когда изучали взаимодействие солитонов уравнения КдФ, положим $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ и рассмотрим сначала окрестность первого солитона

$$\theta_1 = O(1), \quad \theta_2 \gg 1.$$

Этого можно добиться, решив относительно x первое уравнение

$$\theta_1 = \frac{\lambda_1}{2} x + \frac{t}{2\lambda_1} + \delta_1 = \text{const}, \quad t \gg 1.$$

Тогда формула (16.3) превращается в формулу для кинка

$$u(x,t) \to 4\operatorname{arctg}\left(-\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \mathrm{e}^{-\theta_1} \right) = 4\operatorname{arctg}\left(-\mathrm{e}^{-\theta_1 + x_0} \right),$$

где $x_0 = \ln \dfrac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$.