Глава 3

УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО СОЛИТОНА

Одним из самых значительных достижений нелинейной науки 1970-х годов было постепенное осознание того факта, что у некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных имеется множество различных точных решений. Оказалось, что эти решения можно получить не только для одной уединенной волны (solitary wave)— это было известно еще в девятнадцатом веке из работ Рассела, Базена и Буссинека, — но также и для произвольного числа уединенных волн, движущихся с различными скоростями, имеющими различные амплитуды и испытывающими взаимные столкновения. Уединенные волны стали называться «солитонами», что должно было подчеркивать их корпускулярный характер, поскольку они покидали область взаимодействия в пространстве-времени с теми же скоростями и амплитудами, что характеризовали их в момент входа в эту область [61]. (Как было отмечено во введении, Рассел наблюдал гидродинамические уединенные волны, проходящие одна сквозь другую без изменения, но он не предложил аналитического объяснения этого явления.)

Первые и до сих пор наиболее важные солитонные системы появились задолго до 1970-х годов в ходе исследований широко известных прикладных проблем. Наиболее важными являются следующие три солитонные системы:

1. *Уравнение Кортевега–де Вриза* (*КдВ*). Это уравнение было предложено в 1895 в качестве модели для гидродинамической

[1]) Автор благодарен П.Л. Христиансену за помощь при составлении плана этой главы и за его вклад в материал раздела 3.2.4.

уединенной волны Рассела [36]. В нормализованной форме оно имеет следующий вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{3.1}$$

Интересно отметить, что *Physical Review Letters* с большой неохотой опубликовал конструктивную статью Забуски и Крускала (в которой был предложен термин «солитон»), поскольку существовало мнение, что КдВ-уравнение бесполезно для исследования физических проблем. Несмотря на то, что авторы использовали уравнение (3.1) для исследования ион-акустических волн в плазме [70,75], КдВ-уравнение имеет более широкое научное значение. Фактически КдВ-уравнение возникает в случаях, когда исследуется простейшая нелинейная модель однонаправленного распространения длинных волн в диспергирующей среде с сохранением энергии. Аналогичные модели использовались ранее при исследовании ангармонических решеток [74], волн давления в паро-газовых смесях [72], вращающихся потоков жидкости в трубе [42], и фононных пакетов с тепловой накачкой в низкотемпературных нелинейных кристаллах [68]. Множество подобных систем описываются в книге Наугольных и Островского [48].

2. *Уравнение синус-Гордона* (*СГ-уравнение*). Линейное волновое уравнение с одной из элементарных функций в правой части имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u, \tag{3.2}$$

где значения x, t, и u представлены в нормализованных единицах. Как было отмечено в главе 1, это уравнение имеет множество различных приложений [2], включая распространение дефектов в кристаллах [27] и границ доменов в ферромагнитных и ферроэлектрических материалах [22], скалярную модель элементарных частиц [24,55,64], распространение волн расширения в биологических (липидных) мембранах [25], самонаведенную прозрачность коротких оптических импульсов [37] и распространение квантовых объектов магнитного потока (флаксонов) в длинных (сверхпроводящих) переходах Джозефсона [62]. Все эти приложения были исследованы до того, как в 1970-х годах были заново открыты специальные свойства СГ-уравнения.

3. *Нелинейное уравнение Шредингера* (*НУШ*). В нормализованной форме это уравнение может быть представлено в следующей форме:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0. \tag{3.3}$$

Это уравнение представляет собой модель пакетов гидродинамических волн на большой глубине [7] и носит имя Шредингера вследствие того, что аппроксимация этого уравнения при малой

С учетом этого выражения для f_2 уравнение порядка ε^3 может быть записано в следующей форме:

$$2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)f_3=-B(f_1\cdot f_2+f_2\cdot f_1). \tag{3.42}$$

Можно показать, что правая часть этого равенства равно нулю. Таким образом, можно положить $f_3=f_4=\cdots=0$ и $\varepsilon=1$. Тогда

$$f=1+e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 e^{\theta_1+\theta_2}$$

и это выражение соответствует решению 2-солитона для КдВ-уравнения.

N-солитон

В общем случае предположим, что в (3.41)

$$f_1=e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+\cdots+e^{\theta_N},$$

где $\theta_i=k_ix-k_i^3t+\alpha_i$ $(i=1,2,\ldots,N)$. Тогда с учетом (3.40) можно получить следующие равенства:

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)f_1&=0\\
2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)f_2&=-B(f_1\cdot f_1)\\
2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)f_3&=-B(f_2\cdot f_1+f_1\cdot f_2)\\
2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)f_4&=-B(f_3\cdot f_1+f_2\cdot f_2+f_1\cdot f_3)\\
&\vdots\\
2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)f_N&=-B(f_{N-1}\cdot f_1+\cdots+f_1\cdot f_{N-1})\\
2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)f_{N+1}&=0\\
2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)f_{N+2}&=0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Таким образом, необходимо решить эту систему уравнений относительно $f_2, f_3, \ldots, f_N$, положить $\varepsilon=1$ и построить решение N-солитона

для КдВ-уравнения

$$u_N(x,t)=-2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(1+f_1+f_2+\cdots+f_N),$$

явный вид которого представлен равенством (B.1) в Приложении B.

3.2. Уравнение синус-Гордона

3.2.1. Длинные переходы Джозефсона

Среди нескольких приложений уравнения синус-Гордона (СГ-уравнения), упомянутых во введении к этой главе, наиболее важным является его использование в качестве модели распространения поперечных электромагнитных волн (ПЭВ) в сверхпроводящей системе передачи электроэнергии («полосковом волноводе»). Схема этой системы изображена на рисунке 3.4: волна распространяется в направлении оси x, электрическое поле E и магнитное поле H направлены соответственно вдоль осей y и z.

В нижней части рисунка показана электрическая цепь, являющаяся эквивалентом режима распространения ПЭВ: величины напряжения V в поперечном сечении изолятора и электрического тока в продольном направлении I связаны между собой законами сохранения для магнитного потока и электрического заряда (законами Кирхгофа [1]) для напряжения и силы тока) [59]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x}&=-L\frac{\partial}{\partial t}\\
\frac{\partial I}{\partial x}&=-C\frac{\partial V}{\partial t}-I_0\sin\phi,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

где L — индукция на единицу длины полоскового волновода и C — емкостное сопротивление на единицу длины.

Член $I_0\sin\phi$ во втором уравнении представляет собой квантово механический тоннельный переход (переход Джозефсона) сверхпроводящих электронных пар через показанный на рисунке 3.4 изолятор [3]. В этом члене ϕ соответствует изменению фазы сверхпроводящей волновой функции в поперечном сечении изолятора. Эта величина связана с напряжением соотношением

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=+\frac{2e}{\hbar}V, \tag{3.44}$$

где e — заряд электрона и $\hbar\equiv h/2\pi$ — постоянная Планка.

[1] Густав Роберт Кирхгоф (1824-1887) — немецкий физик.

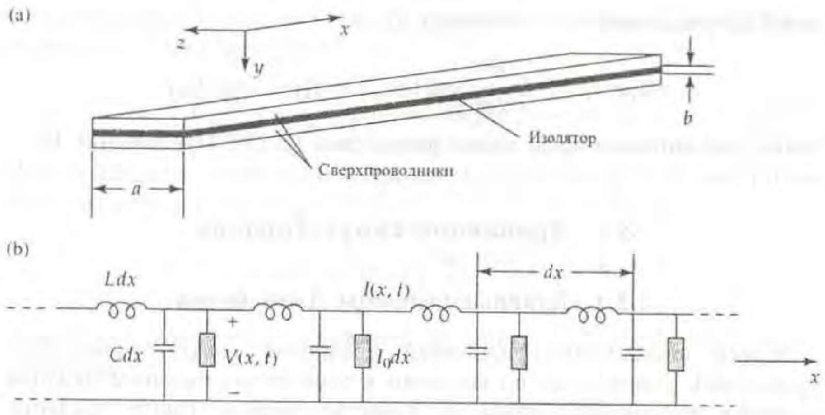


Рис. 3.4. (a) Сверхпроводящий полосковый волновод, в котором происходит распространение ПЭВ в x-направлении. (b) Эквивалентная модель электрической цепи.

Подставляя (3.44) в первое уравнение (3.43) и интегрируя по времени, получаем

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{2eL}{\hbar} I \tag{3.45}$$

с точностью до произвольной константы, которая в рассматриваемом случае равна нулю.

Тогда второе уравнение в (3.43) может быть переписано в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda_J^2}\sin\phi, \tag{3.46}$$

где

$$c = 1/\sqrt{LC} \tag{3.47}$$

называется скоростью Суихарта [65] и

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\hbar}{2eLI_0}}. \tag{3.48}$$

Нормализация уравнения (3.43) к виду (3.2) может быть осуществлена, если расстояние измерять в единицах λ_J, а время — в единицах λ_J/c.

3.2.2. Уединенные волны

Рассмотрим нормализованное СГ-уравнение (3.2)

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u$$

при $-\infty < x < +\infty$ и $-\infty < t < +\infty$. В условиях предположения о бегущей волне $u(x,t) = \widetilde{u}(x - vt)$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(1 - v^2)\widetilde{u}'' = \sin\widetilde{u}. \tag{3.49}$$

Умножая на $\widetilde{u}'$ и интегрируя по переменной бегущей волны $\xi = x - vt$ получаем

$$\tfrac{1}{2}(1 - v^2)(\widetilde{u}')^2 = A - \cos\widetilde{u}, \tag{3.50}$$

где A — постоянная интегрирования.

Положим $A = 1$ и наложим граничные условия $\widetilde{u} \to 0(\mathrm{mod}2\pi)$ и $\widetilde{u}' \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$. Тогда решение уединенной волны имеет следующий вид:

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left(\pm\frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1 - v^2}}\right)\right]. \tag{3.51}$$

Несмотря на то, что это решение Гудермана является солитоном, оно несколько отличается от рассмотренного в предыдущем разделе КдВ-солитона.

1. *Кинки и антикинки* (*Kinks and antikinks*). Решение (3.51) представляет собой не настоящий импульс, но монотонное изменение амплитуды 2π при увеличении ξ от $-\infty$ до ∞. Решение со знаком $+$ принято называть кинком, а решение со знаком $-$ — антикинком.
2. *Инвариантность относительно преобразования Лоренца.* [1]) Подобно релятивистской частице, СГ-кинк испытывает сжатие Лоренца, т. е. становится более узким при $v \to \pm 1$. Это свойство обусловлено тем, что СГ-уравнение инвариантно относительно замены независимой переменной $(x,t) \to (\xi,\tau)$

$$\xi = (x - vt)/\sqrt{1 - v^2} \quad \text{и} \quad \tau = (t - vx)/\sqrt{1 - v^2}. \tag{3.52}$$

3. *Кинк-антикинк аннигиляция.* При фиксированных граничных условиях в $x = \pm\infty$ величина совокупного изменения уровня решения

$$u(+\infty,t) - u(-\infty,t)$$

остается постоянной. При столкновении кинка с антикинком эта величина становиться равной нулю, т. е. две компоненты волны аннигилируют друг друга, в результате чего происходит высво-

[1]) Хендрик Антуан Лоренц — голландский физик, установивший инвариантность электромагнитных уравнений относительно этого преобразования.

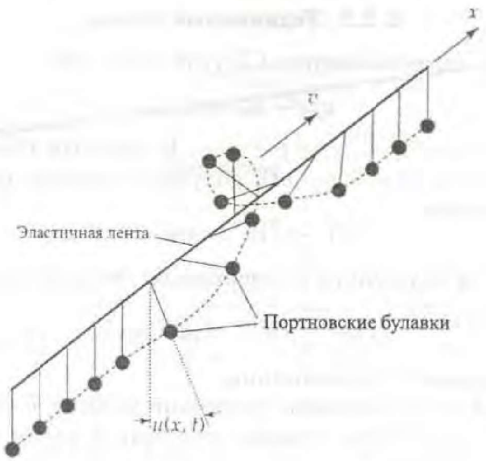


Рис. 3.5. Кинк в простейшей механической модели СГ-уравнения, которая может быть изготовлена с использованием портновских булавок и гибкой ленты. (Иглы вращаются по часовой стрелке в направлении распространения волны.

бождение энергии в виде излучения, описываемого (линейным) уравнением Клейна–Гордона [1] $u_{xx} - u_{tt} \approx u$. Это явление может быть подвержено некоторым диссипативным эффектам, которые будут рассматриваться в главе 7, и аналогично по своей природе аннигиляции элементарной частицы при ее столкновении с соответствующей античастицей (например, при столкновении электрона с позитроном возникает гамма-излучение).

4. *Тахионы.* Кроме волн, описываемых решениями (3.51) при $|v| < 1$, существуют также решения вида

$$u(x,t) = 4\operatorname{arctg}\left[\exp\left(\pm\frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right] + \pi, \tag{3.53}$$

которые имеют место при $|v| > 1$. Эти решения неустойчивы и соответствуют своим электромагнитным аналогам в виде тахионов — гипотетических частиц, скорость движения которых превосходит скорость света.

Все вышеперечисленные явления (исключая тахионы) могут наблюдаться в механических моделях СГ-уравнения [58], простейшая из которых изображена на рисунке 3.5. Эта модель может быть построена путем втыкания множества портновских булавок в гибкую ленту.

[1] В 1920-х годах О. Клейн и В. Гордон независимо друг от друга предложили это уравнение в качестве квантового волнового уравнения. Термин «синус-Гордон уравнение» представляет собой игру слов, основанную на этом более раннем наименовании этого уравнения.

Интересно представить кинк-волну (или антикинк-волну) (3.51) в случае перехода Джозефсона, упомянутого в предыдущем разделе. Первое из уравнений (3.43) представляет собой не что иное, как закон сохранения для магнитного потока

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} LI\,dx,$$

где величина I связана с производной по x (или по u) равенством (3.45). Поскольку ϕ изменяется на 2π при интегрировании по всему кинку, каждый кинк содержит некоторое количество магнитного потока

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{2e} = \frac{\hbar}{2e} \doteq 2.064 \times 10^{-15} Vs,$$

называемое квантом потока.

В настоящее время проводятся активные исследования динамики подобных квантов, часто называемых флаксонами и антифлаксонами по аналогии с кинками и антикинками. Эти исследования связаны с многочисленными экспериментальными, теоретическими и вычислительными аспектами [3,51].

3.2.3. Периодические волны

Кинк-решение (3.51) было получено при значении постоянной интегрирования A равном единице, что обусловило $|v| < 1$. В этом разделе мы исследуем периодические решения

$$u(x,t) = \widetilde{u}(\theta) = \widetilde{u}(\theta + 2\pi) \pmod{2\pi}, \tag{3.54}$$

где θ — переменная бегущей волны

$$\theta = \omega t - \beta x.$$

Локальное значение скорости волны определяется равенством

$$v = \frac{\omega}{\beta}.$$

Используя эти обозначения, рассмотрим следующие решения:

1. $A > 1$ и $|v| < 1$. В этом случае уравнение (3.50) может быть переписано в следующей форме:

$$\sqrt{\beta^2 - \omega^2} \int^{\widetilde{u}} \frac{dy}{\sqrt{2(A - \cos y)}} = \theta. \tag{3.55}$$

Из этого равенства видно, что $\widetilde{u}$ является монотонно возрастающей функцией θ. (В контексте исследований электромагнитных волн в переходе Джозефсона это решение представляет собой одномерный массив флаксонов, движущихся при субкритической скорости.)

Рівняння синус Ґордон (СҐ–рівняння)

СҐ–рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \to x' = x - X$
- Часова трансляція $t \to t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \to x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}$, $t \to t' = \frac{t - xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеґрали руху

Нескінчена кількість інтеґралів руху

- Енергія $H = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) \mathrm{d}x$
- Імпульс $P = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x \mathrm{d}x$
- Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x \mathrm{d}x$

Перетворення Беклунда для СҐ–рівняння

Симетрична форма СҐ–рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u \;\Rightarrow\; \left|\begin{matrix} x \to x - t \\ t \to t + x \end{matrix}\right| \;\Rightarrow$$

$$u_{xt} = \sin u$$

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \dfrac{u+v}{2} \\ \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\dfrac{1}{\lambda} \sin \dfrac{u-v}{2} \end{cases} \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \begin{cases} u_{xt} = \sin u \\ v_{xt} = \sin v \end{cases}$$

Односолітонний розв'язок $N = 1$

$$u = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{v_x}{2} = \lambda \sin \dfrac{v}{2} \\ \dfrac{v_t}{2} = \dfrac{1}{\lambda} \sin \dfrac{v}{2} \end{cases} \;\Rightarrow\; \left|\omega = \frac{v}{2}\right| \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\omega}{\sin \omega} = \lambda \mathrm{d}x \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \operatorname{tg} \frac{v}{4} = e^{-\frac{\lambda}{2}[x - c(t)]}$$

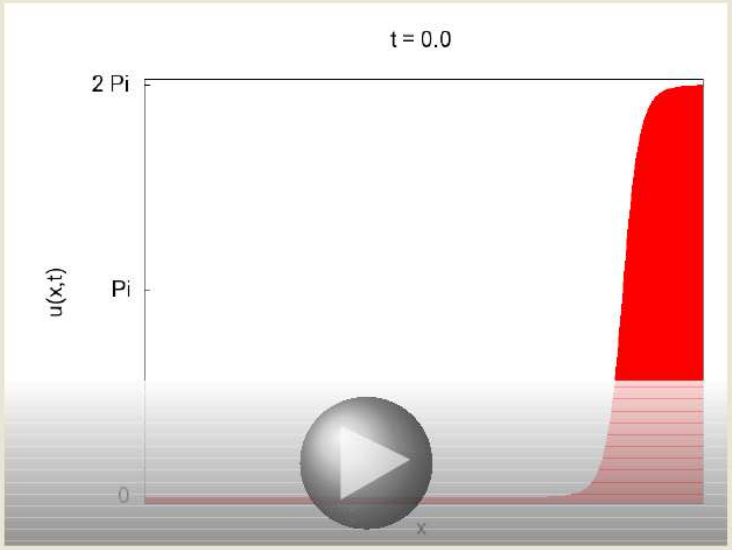
$$c(t): \quad \frac{v_t}{2} = \frac{1}{\lambda} \sin \frac{v}{2} \quad \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \quad v(x,t) = 4 \operatorname{arctg} e^{-\frac{\lambda}{2}(x - x_0) - \frac{1}{2\lambda}(t - t_0)}$$

Односолітонні розв'язки

$$v(x,t) = 4\operatorname{arctg} e^{-\frac{\lambda}{2}(x-x_0)-\frac{1}{2\lambda}(t-t_0)}$$

Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x \mathrm{d}x = \frac{u(+\infty,t)-u(-\infty,t)}{2\pi} = \pm n,\ n \in \mathbb{N}$

Кінк ($\lambda < 0$)



Антикінк ($\lambda > 0$)

