Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x,t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан
  $\mathscr{L} = \frac{1}{2} w_x w_t + \frac{1}{6} w_x^3 - \frac{1}{2} w_{xx}^2$, $w_x \equiv u$
- Гамільтоніан
  $\mathscr{H} = w_t \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_t} - \mathscr{L} = -\frac{1}{6} w_x^2 + \frac{1}{2} w_{xx}^2$

Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$. Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія
  $\mathscr{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H} \mathrm{d}x = -\frac{36}{5} v^{5/2}.$
- $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{Д.З.}}{=} \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R w_t \mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R u \mathrm{d}x.$

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ru\mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2\mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2\varepsilon v \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню
- Висота шельфу $\sim \epsilon$, довжина $\sim t$, тобто втрачену масу абсорбує шлейф

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням