Глава 3

УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО СОЛИТОНА

Одним из самых значительных достижений нелинейной науки 1970-х годов было постепенное осознание того факта, что у некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных имеется множество различных точных решений. Оказалось, что эти решения можно получить не только для одной уединенной волны (solitary wave)— это было известно еще в девятнадцатом веке из работ Рассела, Базена и Буссинека, — но также и для произвольного числа уединенных волн, движущихся с различными скоростями, имеющими различные амплитуды и испытывающими взаимные столкновения. Уединенные волны стали называться «солитонами», что должно было подчеркивать их корпускулярный характер, поскольку они покидали область взаимодействия в пространстве-времени с теми же скоростями и амплитудами, что характеризовали их в момент входа в эту область [61]. (Как было отмечено во введении, Рассел наблюдал гидродинамические уединенные волны, проходящие одна сквозь другую без изменения, но он не предложил аналитического объяснения этого явления.)

Первые и до сих пор наиболее важные солитонные системы появились задолго до 1970-х годов в ходе исследований широко известных прикладных проблем. Наиболее важными являются следующие три солитонные системы:

1. *Уравнение Кортевега–де Вриза* (*КдВ*). Это уравнение было предложено в 1895 в качестве модели для гидродинамической

[1]) Автор благодарен П.Л. Христиансену за помощь при составлении плана этой главы и за его вклад в материал раздела 3.2.4.

уединенной волны Рассела [36]. В нормализованной форме оно имеет следующий вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{3.1}$$

Интересно отметить, что *Physical Review Letters* с большой неохотой опубликовал конструктивную статью Забуски и Крускала (в которой был предложен термин «солитон»), поскольку существовало мнение, что КдВ-уравнение бесполезно для исследования физических проблем. Несмотря на то, что авторы использовали уравнение (3.1) для исследования ион-акустических волн в плазме [70,75], КдВ-уравнение имеет более широкое научное значение. Фактически КдВ-уравнение возникает в случаях, когда исследуется простейшая нелинейная модель однонаправленного распространения длинных волн в диспергирующей среде с сохранением энергии. Аналогичные модели использовались ранее при исследовании ангармонических решеток [74], волн давления в паро-газовых смесях [72], вращающихся потоков жидкости в трубе [42], и фононных пакетов с тепловой накачкой в низкотемпературных нелинейных кристаллах [68]. Множество подобных систем описываются в книге Наугольных и Островского [48].

2. *Уравнение синус-Гордона* (*СГ-уравнение*). Линейное волновое уравнение с одной из элементарных функций в правой части имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u, \tag{3.2}$$

где значения x, t, и u представлены в нормализованных единицах. Как было отмечено в главе 1, это уравнение имеет множество различных приложений [2], включая распространение дефектов в кристаллах [27] и границ доменов в ферромагнитных и ферроэлектрических материалах [22], скалярную модель элементарных частиц [24,55,64], распространение волн расширения в биологических (липидных) мембранах [25], самонаведенную прозрачность коротких оптических импульсов [37] и распространение квантовых объектов магнитного потока (флаксонов) в длинных (сверхпроводящих) переходах Джозефсона [62]. Все эти приложения были исследованы до того, как в 1970-х годах были заново открыты специальные свойства СГ-уравнения.

3. *Нелинейное уравнение Шредингера* (*НУШ*). В нормализованной форме это уравнение может быть представлено в следующей форме:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0. \tag{3.3}$$

Это уравнение представляет собой модель пакетов гидродинамических волн на большой глубине [7] и носит имя Шредингера вследствие того, что аппроксимация этого уравнения при малой

амплитуде соответствует уравнению, полученному Эрвином Шредингером в январе 1926 года для описания распространения квантового волнового пакета в открытом пространстве. (Если необходимо подчеркнуть степень нелинейности, уравнение (3.3) называют «кубическим уравнением Шредингера».) Начиная с середины 1970-х годов, уравнение (3.3) играло важную роль и представляло собой фундаментальное описание нелинейных импульсов в оптических волокнах [29], но оно имеет существенно большее потенциальное значение. Подобно КдВ-уравнению, уравнение Шредингера представляет собой модель с наименьшей степенью нелинейности, используемую при исследовании однонаправленного распространения волновых пакетов в диспергирующей среде с сохранением энергии. Эти явления возникали ранее при исследовании различных физических приложений, включая двумерную самофокусировку плоской волны [33,36], одномерную автомодуляцию монохроматической волны [29,32,67], распространение теплового импульса в твердых телах [68] и волн Ленгмюра в плазме [28,31].

Все эти три уравнения позволяют описать не только одиночный солитон, но и нелинейные периодические волны, а также вышеупомянутое коллективное движение N-солитонов. Основная цель этой главы состоит в том, чтобы детально исследовать решения этих уравнений и представить некоторые аналитические методы для их нахождения. В каждом случае мы рассмотрим соответствующие физические приложения и затем перейдем к математическому анализу. (Великолепное обсуждение физических моделей для этих трех уравнений включено в книгу Ремуассене [54].) [1)]

3.1. Уравнение Кортевега–де Вриза

3.1.1. Длинные волны на воде

Кортевег и де Вриз исследовали динамику открытых Расселом длинных волн на воде и установили, что при малой амплитуде волны ее распространение вдоль канала может быть приблизительно описано уравнением

$$\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{3}{2h}u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\doteq 0, \tag{3.4}$$

где

- u (в сантиметрах) — вертикальное смещение поверхности воды относительно положения покоя,
- x (в сантиметрах) — расстояние вдоль канала,
- t (в секундах) — время, и

[1)] Прим. ред. перев. — Полезна книга: Э. Инфельд, Дж. Вуланс. *Нелинейные волны, солитоны и хаос*. ФМЛ, Москва, 2006. (Cambridge, 2000).

- h (в сантиметрах) — глубина канала, измеренная когда вода находится в состоянии покоя.

При выводе уравнения (3.4) были сделаны четыре предположения: (i) вода является невязкой жидкостью, т. е. при движении волны энергия не расходуется, (ii) амплитуда волны невелика, т. е. $u \ll h$, (iii) пространственные вариации происходят медленно, т.е $hu_x \ll u$, и (iv) поверхностное натяжение отсутствует.

С учетом предположений (ii) и (iii) становится очевидным, что первые два члена в уравнении (2.3) больше оставшихся двух, поэтому можно считать, что допустима дальнейшая аппроксимация уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}\approx 0.$$

Это справедливо для волны произвольной формы, распространяющейся в $+x$-направлении с постоянной скоростью

$$c=\sqrt{gh},$$

где $g = 980$ см/с^2 — ускорение свободного падения.

Третий и четвертый члены уравнения (3.4) выбраны так, чтобы обеспечить равный порядок малости, т. е.

$$\varepsilon \sim \left|\frac{u}{h}\right| \sim \left|h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right|.$$

Таким образом, символ «$\doteq$» в уравнении (3.4) показывает, что члены высшего порядка по ε не учитывались при выводе этого уравнения. Как было отмечено в главе 1, третий член в уравнении (3.4) делает систему нелинейной, а четвертый учитывает эффекты дисперсии. Баланс между этими двумя эффектами обусловливает возникновение уединенной волны.

Несмотря на то, что уравнение (3.4) может быть исследовано в его изначальной форме, существует более удобная форма его представления, которую можно получить путем исключения члена $\partial u/\partial x$ с использованием замены независимых переменных

$$u(x,t)\to \widetilde{u}(\zeta,\tau),$$

где

$$\zeta = x-ct$$
$$\tau = t.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \zeta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \tau}-c\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \zeta}$$

и при таком преобразовании уравнение (3.4) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \tau} + \frac{3c}{2h}\widetilde{u}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \zeta} + \frac{h^2 c}{6}\frac{\partial^3 \widetilde{u}}{\partial \zeta^3} \doteq 0. \tag{3.5}$$

При соответствующем выборе единиц для $\widetilde{u}$ и ζ уравнение (3.5) может быть приведено к форме уравнения (3.1).

3.1.2. Решения, соответствующие уединенной волне

Рассмотрим уравнение (3.1)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

при $-\infty < x < +\infty$ и $-\infty < t < +\infty$. Сделав предположение о бегущей волне $u(x,t) = \widetilde{u}(x - vt)$ (где функция $\widetilde{u}$ пока не определена), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(v + 6\widetilde{u})\widetilde{u}' - \widetilde{u}''' = 0. \tag{3.6}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной бегущей волны $\xi = x - vt$. Интегрирование по ξ приводит к равенству

$$(v + 3\widetilde{u})\widetilde{u} - \widetilde{u}'' = \frac{A}{2}.$$

После умножения на $\widetilde{u}'$ и интегрирования получаем

$$(v + 2\widetilde{u})\widetilde{u}^2 - (\widetilde{u}')^2 = A\widetilde{u} + B, \tag{3.7}$$

где A и B — постоянные интегрирования.

При граничных условиях $\widetilde{u}$ и $\widetilde{u}' \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$ уравнение (3.7) принимает вид

$$(\widetilde{u}')^2 = \widetilde{u}^2(2\widetilde{u} + v)$$

или

$$\xi - x_0 = \pm \int^{\widetilde{u}} \frac{dy}{y\sqrt{2y + v}}. \tag{3.8}$$

Этот интеграл может быть вычислен, в результате чего получается решение бегущего импульса

$$u(x,t) = -\frac{v}{2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt - x_0)\right], \tag{3.9}$$

описывающее движение «волны переноса», открытой Расселом в 1834 году и показанной на рисунке 1.1.

Это выражение представляет собой ограниченное решение КдВ-уравнения для всех значений скорости $0 \leqslant v < +\infty$. При увеличении скорости импульс становится более узким и его амплитуда увеличивается. Постоянная интегрирования x_0 соответствует положению импульса в момент времени $t = 0$.

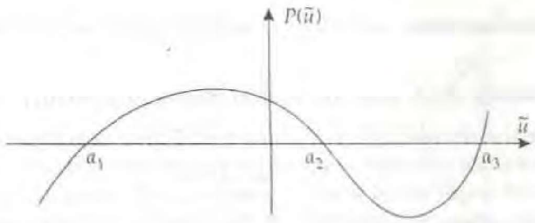


Рис. 3.1. Полином третьей степени $P(\widetilde{u})$ в уравнении (3.10).

Решение уединенного импульса (3.9) представляет собой строительный элемент, с использованием которого могут быть сконструированы точные решения КдВ-уравнения для N-солитонов. Однако, прежде чем получить эти решения, мы рассмотрим возможность существования периодических решений бегущей волны, продолженных на интервал $-\infty < \xi < +\infty$.

3.1.3. Периодические решения

В случае, когда решения являются периодическими, произвольные постоянные интегрирования A и B в обыкновенном дифференциальном уравнении (3.7) для бегущей волны $\widetilde{u}$ не должны быть равны нулю. Это уравнение может быть переписано в следующей форме:

$$\widetilde{u}' = \pm\sqrt{P(\widetilde{u})}, \tag{3.10}$$

где полином третьей степени $P(\widetilde{u})$ имеет вид

$$\begin{aligned} P(u) &= 2(\widetilde{u}^3 + v\widetilde{u}^2/2 - A\widetilde{u}/2 - B/2) \equiv \\ &\equiv 2(\widetilde{u} - a_1)(\widetilde{u} - a_2)(\widetilde{u} - a_3). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Если значения v, A и B таковы, что три корня этого многочлена вещественны при $a_3 > a_2 > a_1$, то из результатов Приложения С следует, что

$$\widetilde{u}(\xi) = a_2 - (a_2 - a_1)\operatorname{cn}^2\left[(\xi - \xi_1)\sqrt{(a_3 - a_1)/2}, k\right], \tag{3.12}$$

где $\operatorname{cn}(\zeta, k)$ — эллиптическая функция Якоби с модулем k и

$$k^2 = (a_2 - a_1)/(a_3 - a_1).$$

На рисунке 3.2 изображено периодическое решение (при $\xi_1 = 0$), которое соответствует полиному $P(\widetilde{u})$. Из этого рисунка видно, что

1. Несмотря на то, что введенная в Приложении С эллиптическая функция позволяет легко получить точное решение (3.12), качественные аспекты поведения $\widetilde{u}(\xi)$ могут быть изучены с использованием рисунка 3.2. Вещественное и ограниченное решение уравнения (3.10) может существовать только при $a_1 \leqslant \widetilde{u} \leqslant a_2$, т.ч. полином $P(\widetilde{u})$ принимает положительные значения. Это решение имеет экстремумы в a_1 и a_2, где $P(\widetilde{u}) = 0$.

то

$$u = \lambda + v^2 + v_x \tag{3.19}$$

является решением КдВ-уравнения.

2. Если v является решением уравнения (3.18), то $-v$ также является решением этого уравнения.

Из равенства (3.19) можно получить два различных решения КдВ-уравнения:

$$u_0 = \lambda + v^2 + v_x$$
$$u_1 = \lambda + v^2 - v_x.$$

Сложение и вычитание этих двух равенств приводит к получению следующих:

$$u_0 - u_1 = 2v_x$$
$$u_0 + u_1 = 2(\lambda + v^2). \tag{3.20}$$

Далее, удобно ввести замену независимой переменной

$$u_0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{и} \quad u_1 = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \tag{3.21}$$

где w_0 и w_1 определены с точностью до произвольной функции времени. Тогда равенство (3.20) может быть переписано в следующей форме:

$$w_0 - w_1 = 2v$$

и

$$(w_1 + w_0)_x = 2\lambda + (w_1 - w_0)^2/2. \tag{3.22}$$

С учетом этих результатов, мы можем переписать (3.18) следующим образом:

$$(w_1 - w_0)_t - 3(w_{1,x}^2 - w_{0,x}^2) + (w_1 - w_0)_{xxx} = 0. \tag{3.23}$$

Равенства (3.22) и (3.23) представляют собой преобразование Бэклунда, структура которого задается равенствами (3.14). [На первый взгляд равенство (3.23) не соответствует структуре второго равенства в (3.14), но на самом деле зависимость от $w_{1,x}$ и $w_{1,xxx}$ может быть устранена, т. к. эти величины могут быть получены с использованием (3.22).]

Первым шагом проверки работоспособности преобразования Бэклунда является проверка возможности получения с его помощью элементарного решения (солитона) из решения вакуума. Итак, при подстановке решения вакуума $w_0 = 0$ в равенство (3.22) мы получаем

$$w_{1,x} = 2\lambda + w_1^2/2. \tag{3.24}$$

Полагая

$$\lambda = -\varkappa^2 < 0$$

и интегрируя, получаем промежуточный результат

$$w_1(x,t) = -2\varkappa \operatorname{th}[\varkappa x + f(t)],$$

где $\varkappa$ — вещественное число и $f(t)$ — произвольная функция времени.

Для решения проблемы зависимости w_1 от времени вернемся к равенству (3.23), из которого следует, что

$$w_{1,t} = 3w_{1,x}^2 - w_{1,xxx}. \tag{3.25}$$

Дифференцируя (3.24), получаем

$$w_{1,xx} = w_1 w_{1,x}$$
$$w_{1,xxx} = w_{1,x}^2 + w_1 w_{1,xx}.$$

Тогда (3.25) принимает вид

$$w_{1,t} = 2w_{1,x}^2 - w_1 w_{1,xx}$$
$$= 2w_{1,x}(w_{1,x} - w_1^2/2),$$

или с учетом (3.24)

$$w_{1,t} + 4\varkappa^2 w_{1,x} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что w_1 — решение бегущей волны с функциональной зависимостью

$$w_1(x,t) = w_1(x - 4\varkappa^2 t)$$
$$= -2\varkappa \operatorname{th}[\varkappa(x - 4\varkappa^2 t - x_0)]. \tag{3.26}$$

Поскольку $w_{1,x} \equiv u_1$, то

$$u_1 x, t = -2\varkappa^2 \operatorname{sech}^2[\varkappa(x - 4\varkappa^2 t - x_0)] \tag{3.27}$$

является решением. Очевидно, что это решение идентично ранее полученному решению (3.9) при условии, что скорость бегущей волны удовлетворяет равенству

$$v = 4\varkappa^2 = -4\lambda.$$

Таким образом, преобразование Бэклунда может использоваться для получения решения из решения вакуума, т. е. для операции, которая может быть представлена в виде следующей диаграммы:

$$0 \xrightarrow{\lambda} u_1.$$

Полученный результат подтверждает работоспособность используемого подхода, но не имеет большой ценности, поскольку мы имели формулу для решения КдВ-уравнения до применения метода преобразования Бэклунда и формулы для самого преобразования Бэклунда, позволяющие получить решение уединенной волны из вакуума. Для того, чтобы доказать ценность преобразования Бэклунда, необходимо получить с его помощью решение для более чем одного солитона.

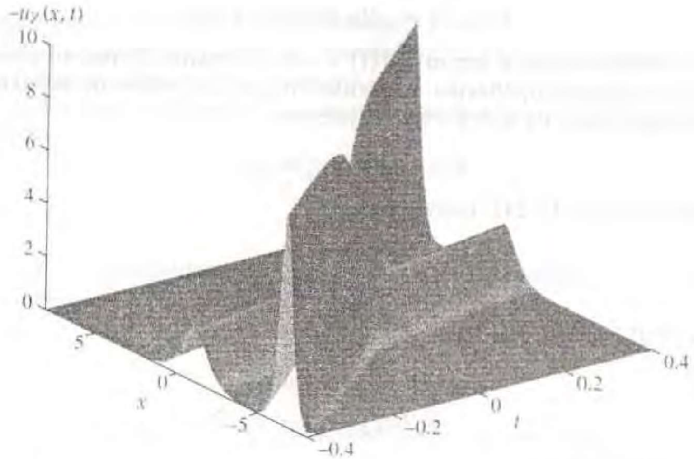


Рис. 3.3. Диаграмма столкновения двух солитонов: $-u_Z(x,t)$ из равенства (3.28).

Построим решение КдВ-уравнения для солитона с двумя компонентами. Первым таким решением, полученным Забуски в 1968 году, было следующее выражение [73]

$$u_Z(x,t) = -12\frac{3+4\,\mathrm{ch}(2x-8t)+\mathrm{ch}(4x-64t)}{[3\,\mathrm{ch}(x-28t)+\mathrm{ch}(3x-36t)]^2}. \tag{3.28}$$

Это выражение представляет собой точное решение уравнения (3.1), описывающее столкновение двух солитонов вблизи начала координат на (x,t)-плоскости. При $t\to-\infty$ мы имеем выражение для суммы двух солитонов перед столкновением:

$$u_Z(x,t)\sim -8\,\mathrm{sech}^2(2x-32t+\tfrac{1}{2}\log 3)-2\,\mathrm{sech}^2(x-4t-\tfrac{1}{2}\log 3). \tag{3.29}$$

При $t\to+\infty$ мы имеем выражение для суммы двух солитонов, расходящихся после столкновения:

$$u_Z(x,t)\sim -8\,\mathrm{sech}^2(2x-32t-\tfrac{1}{2}\log 3)-2\,\mathrm{sech}^2(x-4t+\tfrac{1}{2}\log 3). \tag{3.30}$$

В результате столкновения точка на траектории более быстрого солитона ($v=16$) продвинулась на расстояние $\log 3$, а точка на траектории сравнительно медленного солитона ($v=4$) отстает на расстояние $\log 3$. Все эти результаты и многие другие могут быть получены при моделировании равенства (3.28). Графическое представление решения (3.28) приведено на рисунке 3.3.

Для того, чтобы получить этот результат с использованием преобразования Бэклунда, можно в качестве w_0 рассмотреть одно из решений, изображенных на рисунке 3.3, скажем

$$w_1 = -2\,\mathrm{th}(x-4t),$$

представляющее собой результат применения преобразования

$$w_{1,x} = -2+w_1^2/2$$
$$w_{1,t} = 2w_{1,x}^2 - w_{1,xxx}$$

к вакуум-решению. Тогда, полагая $\lambda=-4$, что соответствует скорости ($v=16$) другого солитона, и интегрируя

$$\begin{aligned}(w_{12}+w_1)_x &= -8+(w_{12}-w_1)^2/2\\ (w_{12}+w_1)_t &= 3(w_{12,x}^2-w_{1,x}^2)-(w_{12}-w_1)_{xxx},\end{aligned} \tag{3.31}$$

можно получить решение для столкновения двух солитонов. Эти равенства могут быть представлены в виде следующей диаграммы:

$$0 \xrightarrow{-1} w_1 \xrightarrow{-4} w_{12},$$

где определенная в (3.31) величина $w_{12,x}$ должна быть равна искомому решению $u_Z(x,t)$. Однако, с вычислительной точки зрения задача интегрирования (3.31) может оказаться слишком трудной. Можно ли найти решение для 2-солитона более простым способом?

Более простой путь существует и он основан на свойстве перестановочности последовательных преобразований Бэклунда. Это свойство было установлено для СГ-уравнения в девятнадцатом столетии [23]. В контексте теории обратного преобразования рассеяния, которая будет рассмотрена в главе 6, каждый новый солитон вводит соответствующий множитель в выражение для коэффициента прохождения в соответствующей задачи рассеяния. Поскольку решение для нелинейной задачи может быть сконструировано из коэффициента прохождения (множители которого могут быть распложены в произвольном порядке), для получения одного и того же результата последовательные преобразования Бэклунда могут быть применены в любом порядке [26,39]. Это свойство может быть представлено в виде следующих диаграмм:

$$w_0 \xrightarrow{\lambda_1} w_1 \xrightarrow{\lambda_2} w_{12}=w_{21},$$

или

$$w_0 \xrightarrow{\lambda_2} w_2 \xrightarrow{\lambda_1} w_{21}=w_{12}.$$

Первая из этих двух диаграмм соответствует паре равенств

$$(w_1+w_0)_x = 2\lambda_1+(w_1-w_0)^2/2$$
$$(w_{12}+w_1)_x = 2\lambda_2+(w_{12}-w_1)^2/2,$$

Рівняння Кортвега–де–Вріза (1895)

Рівняння КдВ

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$



Kortweges

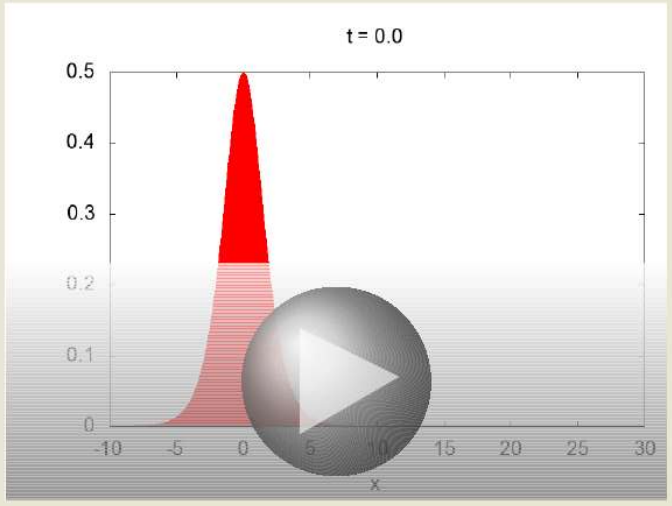


de Vries

Односолітонний розв'язок рівняння КдВ

Біжуча хвиля $\phi(x,t) = u(x - vt) \Rightarrow$
$(v + 6u)u' - u''' = 0 \Rightarrow$

$$\phi(x,t) = -\frac{v}{2}\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt - x_0)\right]}$$



Рівняння Кортвега–де–Вріза

Рівняння КдВ

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$

Двохсолітонний розв'язок рівняння КдВ

$$\phi(x,t) = 12\frac{3 + 4\,\mathrm{ch}(2x - 8t) + \mathrm{ch}(4x - 64t)}{[3\,\mathrm{ch}(2x - 8t) + \mathrm{ch}(3x - 36t)]^2}$$

