Лекция 16

1. Уравнение синус-Гордон. Взаимодействия солитонов

1.1. Двухсолитонное решение

Воспользуемся снова преобразованием Беклунда. Пусть $u = v_0 = 0$, а v_1 и v_2 – односолитонные решения (15.10) с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Наша цель – найти решение $u = v_3$, связанное преобразованиями Беклунда с v_0, λ_1 и λ_2 по схеме, изображенной на рис. 16.1.

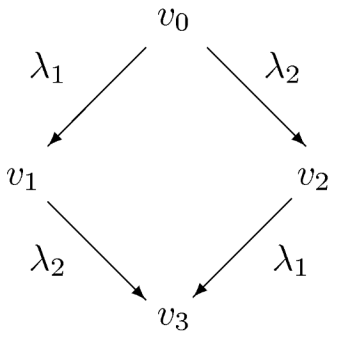


Рис. 8

Уравнения по x (15.8) для $v_j,\ j = 1, 2, 3$ имеют вид

$$\left(\frac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin\frac{v_1}{2}, \quad \left(\frac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin\frac{v_3 + v_1}{2}, \tag{16.1}$$

$$\left(\frac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin\frac{v_2}{2}, \quad \left(\frac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin\frac{v_3 + v_2}{2}. \tag{16.2}$$

Выражая производные v_1 и v_2 из систем (16.1) и (16.2), имеем

$$\left(\frac{v_3}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin\frac{v_3 + v_1}{2} + \lambda_1 \sin\frac{v_1}{2} =$$

$$= \lambda_1 \sin\frac{v_3 + v_2}{2} + \lambda_2 \sin\frac{v_2}{2}.$$

Применяя тригонометрическую формулу для разности синусов, получим из последнего равенства

$$\lambda_2 \sin \frac{v_3 + v_1 - v_2}{4} = \lambda_1 \sin \frac{v_3 + v_2 - v_1}{4}$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{v_3}{4} = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \operatorname{tg}\frac{v_2 - v_1}{2}.$$

Вспоминая явную формулу (15.10) для v_1 и v_2,

$$v_1,\, v_2 = 4\operatorname{arctg}\exp(\theta_{1,2}), \quad \theta_j = \frac{\lambda_j}{2}x + \frac{t}{2\lambda_j} + \delta_j, \quad j = 1, 2,$$

получим окончательно

$$u(x,t) = v_3 = 4\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\theta_1} - \mathrm{e}^{\theta_2}}{1 + \mathrm{e}^{\theta_1 + \theta_2}}\right). \tag{16.3}$$

1.2. Связанные состояния

Покажем сначала, что формула (16.3) описывает пару кинк-антикинк, если «центры ступенек» разнесены достаточно далеко друг от друга. Этот случай отвечает, например, большому значению времени $t \gg 1$.

Подобно тому, как мы поступали в Лекции 4, когда изучали взаимодействие солитонов уравнения КдФ, положим $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ и рассмотрим сначала окрестность первого солитона

$$\theta_1 = O(1), \quad \theta_2 \gg 1.$$

Этого можно добиться, решив относительно x первое уравнение

$$\theta_1 = \frac{\lambda_1}{2}x + \frac{t}{2\lambda_1} + \delta_1 = \text{const}, \quad t \gg 1.$$

Тогда формула (16.3) превращается в формулу для кинка

$$u(x,t) \to 4\operatorname{arctg}\left(-\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \mathrm{e}^{-\theta_1}\right) = 4\operatorname{arctg}\left(-\mathrm{e}^{-\theta_1 + x_0}\right),$$

где $x_0 = \ln \dfrac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

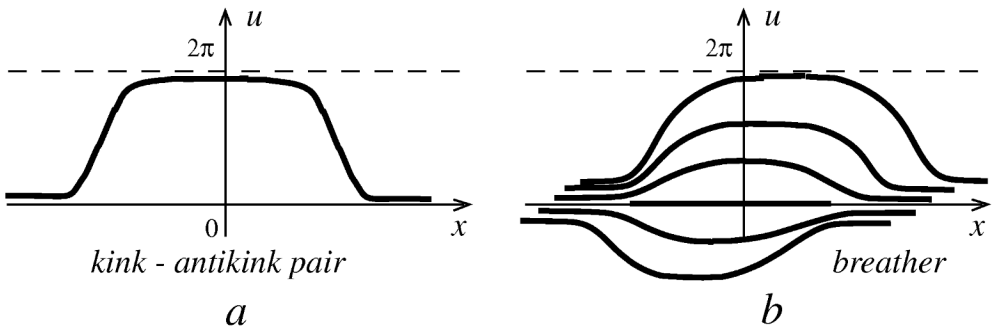


Рис. 9. Связанное состояние кинк-антикинк и бризер в различные моменты времени

Аналогично при $\theta_1 \gg 1, \quad \theta_2 = O(1)$ имеем

$$u(x,t) \to 4\text{arctg}\left(\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot \mathrm{e}^{-\theta_2}\right) = 4\text{arctg}\left(\mathrm{e}^{-\theta_2+x_0}\right),$$

что отвечает формуле (15.10) для антикинка.

Тем самым двойные солитоны уравнения синус-Гордон можно рассматривать как *связанные состояния* одиночных солитонов – кинка и антикинка (рис. 16.2). Топологический заряд этого связанного состояния равен,очевидно, нулю, поскольку в формуле (16.3) $u \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Несколько более экзотично выглядит другое связанное состояние кинка и антикинка, которе получается в случае выбора в формуле (16.3)

$$\begin{cases}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda + i\mathrm{Im}\lambda,\\ \lambda_2 = \mathrm{Re}\lambda - i\mathrm{Im}\lambda,\end{cases} \qquad \begin{cases}\delta_1 = \mathrm{Re}\delta + i\mathrm{Im}\,\delta,\\ \delta_2 = \mathrm{Re}\delta - i\mathrm{Im}\,\delta,\end{cases}$$

который приводит к решению

$$u(x,t) = 4\,\text{arctg}\left(\frac{\mathrm{Re}\lambda}{\mathrm{Im}\lambda}\cdot\frac{\sin\left\{\mathrm{Im}\lambda\left(\frac{x}{2}-\frac{t}{2|\lambda|}\right)+\mathrm{Im}\,\delta\right\}}{\mathrm{ch}\left\{\mathrm{Re}\lambda\left(\frac{x}{2}+\frac{t}{2|\lambda|}\right)+\mathrm{Re}\,\delta\right\}}\right). \qquad (16.4)$$

Это решение называется *бризером* или пульсирующим солитоном (от английского слова «breath» – дышать). Его вид представлен на рис. 16.2 b.

Повторяя вышеприведенные рассуждения, легко убедиться, что бризер также представляет собой связанное состояние двух одиночных солитонов. Выбор параметров λ и δ обеспечивает периодическое изменение профиля этого решения. Проще всего понять эту периодичность в переменных $\xi =$

$= t + x$ и $\tau = t - x$, причем удобно положить $|\lambda| = 1$:

$$u(\xi,\tau) = 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Re}\lambda}{\mathrm{Im}\lambda}\cdot\frac{\sin\left\{-\mathrm{Im}\lambda\frac{\tau}{2}+\mathrm{Im}\,\delta\right\}}{\mathrm{ch}\left\{\mathrm{Re}\lambda\frac{\xi}{2}++\mathrm{Re}\,\delta\right\}}\right).$$

Ясно, что при фиксированном ξ это периодическая фкнкция от τ. С другой стороны, при фиксированном τ она представляет собой неподвижный двойной солитон, изображенный на рис. 16.2 а.

1.3. Взаимодействия солитонов

Как отмечалось в Лекции 13, уравнение синус-Гордон имеет две эвивалентные формы. Одна из них, связанная с (15.2) заменой $\xi = t+x,\ \tau = t-x$

$$u_{\tau\tau} - u_{\xi\xi} + \sin u = 0, \tag{16.5}$$

более удобна для изучения движения и взаимодействия солитонов. В самом деле, кинк и антикинк (15.10) в координатах ξ, τ выглядят так:

$$u(\xi,\tau) = 4\mathrm{arctg}\exp\left(-\epsilon\frac{\xi-\xi_0-v\tau}{2\sqrt{1-v^2}}\right), \tag{16.6}$$

где

$$v = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1},\quad \xi_0 = \frac{2(x_0\lambda^2+t_0)}{\lambda^2+1},\quad \epsilon = \begin{cases} 1, & \lambda > 0,\\ -1, & \lambda < 0.\end{cases}$$

Здесь величину v естественно интерпретировать как скорость солитона, а ξ_0 – как его фазовый сдвиг.

Общее двухсолитонное решение (16.3) в переменных ξ,τ переписывается следующим образом:

$$u(\xi,\tau) = \tag{16.7}$$

$$= 4\,\mathrm{arctg}\left\{\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\frac{\exp\left(-\dfrac{\xi-v_1\tau-\xi_1}{2\sqrt{1-v_1^2}}\right)-\exp\left(-\dfrac{\xi-v_2\tau-\xi_2}{2\sqrt{1-v_2^2}}\right)}{1+\exp\left(-\dfrac{\xi-v_1\tau-\xi_1}{2\sqrt{1-v_1^2}}-\dfrac{\xi-v_2\tau-\xi_2}{2\sqrt{1-v_2^2}}\right)}\right\},$$

где $v_i = \dfrac{\lambda_i^2 - 1}{\lambda_i^2 + 1}$. Непосредственный анализ этого выражения (ср. с Лекцией 4) показывает, что (16.7) описывает при $\tau \to \pm\infty$ пару невзаимодействующих солитонов, движущихся со скоростями v_1 и v_2. Действительно, полагая, например, $v_2 > v_1$, рассмотрим асимптотику (16.7) на прямой $\xi = v_1\tau + \xi'$ при $\tau \to -\infty$ как функцию ξ':

$$u(v_1\tau + \xi', \tau) \to 4\,\mathrm{arctg}\left\{\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \exp\left(-\frac{\xi' - \xi_1}{2\sqrt{1 - v^2}}\right)\right\}.$$

Ясно, что в зависимости от знака $\dfrac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ это выражение описывает кинк или антикинк (16.6) с координатой центра

$$\xi_0^{(1)}(-\infty) = \xi_1 + 2\sqrt{1 - v^2}\ln\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Рассматривая, далее, асимптотику (16.7) на той же прямой при $\tau \to +\infty$, находим, используя формулу $\mathrm{tg}\,\phi = \mathrm{tg}^{-1}(\pi/2 - \phi)$:

$$u(v_1\tau + \xi', \tau) \to -4\,\mathrm{arctg}\left\{\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \exp\left(\frac{\xi' - \xi_1}{2\sqrt{1 - v^2}}\right)\right\} =$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\left\{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} \cdot \exp\left(-\frac{\xi' - \xi_1}{2\sqrt{1 - v^2}}\right)\right\}\right) =$$

$$= 2\pi + 4\,\mathrm{arctg}\left\{\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}\right)^2 \cdot \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \exp\left(\frac{\xi' - \xi_1}{2\sqrt{1 - v^2}}\right)\right\}.$$

Тем самым это снова солитон (16.6) с тем же топологическим зарядом, что и на $-\infty$ по τ; его координата есть

$$\xi_0^{(1)}(+\infty) = \xi_0^{(1)}(-\infty) + 2\sqrt{1 - v_1^2}\ln\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}\right)^2.$$

Отсюда видно, что подобно солитонам в уравнении КдФ (см. Лекцию 4), при столкновении со вторым солитоном первый испытывает сдвиг на величину

$$\Delta\xi_0^{(1)} = \xi_0^{(1)}(+\infty) - \xi_0^{(1)}(-\infty) = 2\sqrt{1 - v_1^2}\ln\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}\right)^2 < 0.$$

Совершенно аналогично для второго (быстрого) солитона

$$\Delta\xi_0^{(2)} = 2\sqrt{1-v_2^2}\ln\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}\right)^2 > 0.$$

Мы видим, что быстрый солитон дополнительно сдвигается вперед, а медленный – назад. При этом рассеяние солитонов совершенно не зависит от их зарядов. Это подтверждает концепцию солитонов как квазичастиц, поскольку здесь, так же как в уравнении КдФ, для них выполняются законы сохранения суммарной массы, импульса и энергии. Можно показать, анализируя формулу для N-солитонного решения, что при многосолитонном рассеянии полный сдвиг каждого солитона равен сумме сдвигов при столкновении со всеми остальными по отдельности, то есть многочастичные эффекты отсутствуют.