Лекция 5

1. Преобразование Беклунда

Кроме рассмотренного выше метода Хироты для построения явных решений солитонных уравнений, имеется еще один прямой метод, связанный со специальными нелинейными преобразованиями, отображающими класс решений исходного уравнения в себя. Эти преобразования, как правило, содержат дополнительные произвольные постоянные, так что на каждом шаге получаются существенно новые решения. При этом можно начинать с какого-нибудь тривиального, например, нулевого решения и получить за N шагов N-солитонное решение.

В качестве примера рассмотрим уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{5.1}$$

Введем новую неизвестную функцию $v = v(x,t)$, такую что

$$u = v_x + v^2 + \lambda, \tag{5.2}$$

где λ – некоторая произвольная постоянная. Подставляя (5.2) в уравнение (5.1), получим

$$u_t = \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v\right) v_t,$$

$$-6uu_x + u_{xxx} = 6(v_x + v^2 + \lambda)\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v\right) v_x =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v\right)(v_x(v^2 + \lambda)) + 6v_x v_{xx},$$

откуда для v получается *модифицированное уравнение КдФ*

$$v_t - 6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx} = 0. \tag{5.3}$$

Заметим, что если v – решение уравнения (5.3), то $(-v)$ – тоже его решение. Следовательно, функция

$$u_1 = -v_x + v^2 + \lambda$$

будет удовлетворять уравнению КдФ (5.1). При этом u_1, вообще говоря, не совпадет с исходным решением u.

Для того чтобы исключить промежуточную функцию v из преобразования $u \mapsto u_1$, сделаем замену

$$u = 2w_x, \quad u_1 = 2w_{1x}. \tag{5.4}$$

Тогда

$$\frac{u - u_1}{2} = v_x = (w - w_1)_x, \quad v = w - w_1,$$
$$v^2 + \lambda = (w + w_1)_x,$$

так что для функций w и w_1 получается пара уравнений

$$\begin{cases} (w + w_1)_x = (w - w_1)^2 + \lambda, \\ (w - w_1)_t - 6(w + w_1)_x(w - w_1)_x + (w - w_1)_{xxx} = 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Формулы (5.5) носят название *преобразований Беклунда*.

Для иллюстрации применения этих преобразований положим

$$u = w = 0$$

и вычислим u_1. Система (5.5) преобразуется к виду

$$\begin{cases} w_{1x} = \lambda + w_1^2, \\ -w_{1t} + 6(w_{1x})^2 - (w_1)_{xxx} = 0. \end{cases}$$

Выполняя замену

$$w_t = -\frac{f_x}{f}, \quad w_{tx} = -\frac{f_{xx}}{f} + \frac{f_x^2}{f},$$

получим для f уравнение

$$-\frac{f_{xx}}{f} + \frac{f_x^2}{f^2} = \lambda + \frac{f_x^2}{f^2}$$

или $f_{xx} + \lambda f = 0$.

Его общее решение имеет вид

$$f = \mathrm{e}^{a(x+c)} + \mathrm{e}^{-a(x+c)}, \quad \lambda = -a^2, \quad c = c(t).$$

Тогда для w_1 получаем

$$w_1 = -\frac{f_x}{f} = -\frac{a\mathrm{e}^{a(x+c)} - a\mathrm{e}^{-a(x+c)}}{\mathrm{e}^{a(x+c)} + \mathrm{e}^{-a(x+c)}} = -a\mathrm{th}(a(x+c)) = -a\mathrm{th}\theta,$$

$$w_{1t} = -\frac{a^2 c_t}{\mathrm{ch}^2\theta\mathrm{th}\theta}, \quad w_{1x} = -\frac{a^2}{\mathrm{ch}^2\theta},$$

$$w_{1xxx} = -\frac{4a^4}{\mathrm{ch}^2\theta} + \frac{6a^4}{\mathrm{ch}^4\theta}.$$

Второе уравнение (5.5) дает зависимость константы c от t:

$$\frac{a^2 c_t}{\mathrm{ch}^2\theta} + 6\frac{a^4}{\mathrm{ch}^4\theta} + \frac{4a^4}{\mathrm{ch}^2\theta} - \frac{6a^4}{\mathrm{ch}^4\theta} = 0,$$

откуда

$$c_t + 4a^2 = 0, \quad c(t) = -4a^2 t + \delta.$$

Тем самым окончательно получается односолитонное решение

$$u_1 = 2w_{1x} = -\frac{2a^2}{\mathrm{ch}^2(a(x - 4a^2 + \delta))}.$$

Заметим, что в процессе интегрирования мы получили здесь две произвольных постоянных $\lambda = -a^2$ и δ. Ясно, что эти константы возникнут после применения преобразования Беклунда к произвольному (а не только к нулевому, как выше) решению. Можно показать, что последовательное применение указанной процедуры к вновь полученному решению

$$0 \mapsto u_1 \mapsto u_2 \mapsto \ldots \mapsto u_n \mapsto \ldots$$

даст на N-м шаге N-солитонное решение, содержащее $2N$ произвольных постоянных.

Преобразования Беклунда имеют место для всех солитонных уравнений. Проиллюстрируем их применение на примере цепочки Тоды

$$\ddot{Q}_n = \mathrm{e}^{Q_{n-1}-Q_n} - \mathrm{e}^{Q_n - Q_{n+1}}, \tag{5.6}$$

где $\dot{Q} = \frac{d}{dt}Q$. Ее решение $Q_n = Q_n(t), n = 0, \pm 1, \pm 2...$, однозначно задается начальными условиями

$$Q_n(0) = Q_n^0, \quad \dot{Q}_n(0) = Q_n^1.$$

Возьмем некоторое решение $Q_n(t)$ и рассмотрим следующие преобразования $Q_n \mapsto q_n$:

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = \mathrm{e}^{Q_n - q_n} + \mathrm{e}^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha, \\ \dot{q}_n = \mathrm{e}^{Q_n - q_n} + \mathrm{e}^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha, \end{cases} \tag{5.7}$$

где $\alpha = \mathrm{const}$.

Покажем, что $q_n(t)$ также удовлетворяет цепочке Тоды (5.6). Дифференцируя по t второе уравнение (5.7), получим

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n &= (\dot{Q}_n - \dot{q}_n)\mathrm{e}^{Q_n - q_n} + (\dot{q}_n - \dot{Q}_{n+1})\mathrm{e}^{q_n - Q_{n+1}} = \\ &= (\mathrm{e}^{q_{n-1} - Q_n} - \mathrm{e}^{q_n - Q_{n+1}})\mathrm{e}^{Q_n - q_n} + (-\mathrm{e}^{Q_{n+1} - q_{n+1}} + \mathrm{e}^{Q_n - q_n})\mathrm{e}^{q_n - Q_{n+1}} = \\ &= \mathrm{e}^{q_{n-1} - q_n} - \mathrm{e}^{q_n - q_{n+1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (5.7) задают преобразование Беклунда для цепочки Тоды. Подобно разобранному выше случаю уравнения КдФ, применим преобразование (5.7) к нулевому решению

$$Q_n = 0, \quad \dot{Q}_n = 0 \quad \text{для любого } n.$$

Имеем

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-q_n} + \mathrm{e}^{q_{n-1}} - \alpha = 0, \\ \dot{q}_n = \mathrm{e}^{-q_{-n}} + \mathrm{e}^{q_n} - \alpha. \end{cases} \tag{5.8}$$

Решая второе уравнение, получим

$$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{q_n} = \mathrm{e}^{2q_n} - \alpha \mathrm{e}^{q_n} + 1,$$

или, после замены $u = \mathrm{e}^{q_n}$

$$\dot{u} = u^2 - \alpha u + 1, \quad du = (u^2 - \alpha u + 1)dt.$$

Разделяя переменные, получим табличный интеграл

$$\int\limits_{u_0}^{u} \frac{du}{u^2 - \alpha u + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}} \mathrm{arctg} \frac{u - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}} = t - t_n,$$

где t_n – постоянная интегрирования.

Для построения солитонного решения следует положить $\alpha \geqslant 2$. Удобна следующая параметризация:

$$\alpha = 2\mathrm{ch}\varkappa, \quad \beta = -\mathrm{sh}\varkappa.$$

Тогда

$$\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}} = i\mathrm{sh}\varkappa = -i\beta, \quad u - \frac{\alpha}{2} = \beta\mathrm{th}(\beta(t-t_n)),$$

$$\mathrm{e}^{q_n} = \mathrm{ch}\varkappa + \beta\mathrm{th}(\beta(t-t_n)) = \frac{\mathrm{ch}(\beta t - \beta t_n + \varkappa)}{\mathrm{ch}(\beta t - \beta t_n)}$$

и из второго уравнения (5.8) получим уравнение для t_n:

$$\frac{\mathrm{ch}(\beta t - \beta t_n)}{\mathrm{ch}(\beta t - \beta t_n + \varkappa)} + \frac{\mathrm{ch}(\beta t - \beta t_{n-1} + \varkappa)}{\mathrm{ch}(\beta t - \beta t_{n-1})} - \alpha = 0.$$

Его решение может быть найдено в виде $\beta t_n = \varkappa(n+1)$, что легко проверить:

$$\frac{\mathrm{ch}(\beta t - \varkappa(n+1))}{\mathrm{ch}(\beta t - \varkappa(n+1) + \varkappa)} + \frac{\mathrm{ch}(\beta t - \varkappa n + \varkappa)}{\mathrm{ch}(\beta t - \varkappa n)} - \alpha =$$

$$= \frac{2\mathrm{ch}(\varkappa)\mathrm{ch}(\beta t - \varkappa n)}{\mathrm{ch}(\beta t - \varkappa n)} - \alpha \equiv 0.$$

Окончательно односолитонное решение цепочки Тоды имеет вид

$$\mathrm{e}^{q_n} = \frac{\mathrm{ch}(\beta t - \varkappa n)}{\mathrm{ch}(\beta t - \varkappa(n+1))},$$

$$\alpha = 2\mathrm{ch}(\varkappa), \quad \beta = -\mathrm{sh}(\varkappa), \quad \varkappa - \text{некоторая константа.}$$

Особенно симметрично выглядит преобразование Беклунда для *уравнения синус-Гордон*

$$u_{xt} = \sin u. \tag{5.9}$$

Функции u и v удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \dfrac{u+v}{2}, \\ \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\dfrac{1}{\lambda} \sin \dfrac{u-v}{2} \end{cases} \tag{5.10}$$

с произвольным параметром λ.

Система (5.10) задает преобразование Беклунда для уравнения (5.9), то есть функция $v = v(x,t)$ является решением уравнения синус-Гордон, если выполнены уравнения (5.9) и (5.10).