$$F(z,t) = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \mathrm{e}^{\frac{it}{2\lambda_j}} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda,t)\mathrm{e}^{i\lambda z} d\lambda,$$

а система уравнений ГЛМ выглядит так:

$$\begin{cases} K_1(x,y,t) + \int\limits_{x}^{+\infty} K_2(x,\xi,t)F(\xi+y,t)d\xi = 0, \\ K_2(x,y,t) + \int\limits_{x}^{+\infty} K_1(x,\xi,t)\overline{F}(\xi+y,t)d\xi = \overline{F}(x+y,t). \end{cases} \tag{15.5}$$

Решение уравнения синус-Гордон находится по формуле обращения

$$u(x,t) = -2K_2(x,x,t).$$

Подобно уравнению КдФ, N-солитонные решения здесь представляют собой *безотражательные потенциалы*, то есть отвечают условию $b(\lambda,t) \equiv 0$ или $r(\lambda,t) \equiv 0$ в ядре уравнения ГЛМ. В этом случае, так же как в Лекции 11, система (15.5) сводится к линейной системе алгебраических уравнений с матрицей

$$\begin{gathered} A(x,t) = \{A_{kj}(x,t)\}, \quad k,j = 1,2,\ldots,N, \\ A_{kj}(x,t) = \frac{\beta_j}{\lambda_k + \lambda_j} \exp\left(i\lambda_j x - \frac{it}{\lambda_j}\right). \end{gathered} \tag{15.6}$$

Тогда N-солитонное решение уравнения синус-Гордон находится по формуле

$$u(x,t) = -\frac{i}{2}\ln\frac{\det(I + A(x,t))}{\det(I - A(x,t))}, \tag{15.7}$$

где I – единичная $N \times N$-матрица, а матрица $A(x,t)$ определена формулами (15.6).

Преобразование Беклунда и солитоны

В конце Лекции 5 было получено преобразование Беклунда (5.10) для уравнения синус-Гордон

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin\dfrac{u+v}{2}, \\ \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\dfrac{1}{\lambda}\sin\dfrac{u-v}{2} \end{cases} \tag{15.8}$$

с произвольным параметром λ.

Построим с его помощью одно- и двухсолитонные решения SG. Стартуем, как всегда, с нулевого решения $u = 0$, тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{2}v_x = \lambda \sin\frac{v}{2}, \\ \frac{1}{2}v_t = \frac{1}{\lambda}\sin\frac{v}{2}. \end{cases} \tag{15.9}$$

Обозначим $\omega = v/2$, тогда первое уравнение запишется в виде

$$\frac{d\omega}{\sin\omega} = \lambda dx.$$

Интегрируя левую часть, получим

$$\int \frac{d\omega}{\sin\omega} = \int \frac{\sin\omega d\omega}{\sin^2\omega} = -\int \frac{d(\cos\omega)}{1-\cos^2\omega} = -\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega},$$

так что общее решение первого уравнения (15.9) найдется в виде

$$\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega} = \mathrm{e}^{-\lambda(x-c)},$$

где c – константа интегрирования.

Воспользовавшись известной формулой из тригонометрии $\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2} = \frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}$, явно выразим v через x

$$\mathrm{tg}\frac{\omega}{2} = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}(x-c)} \Rightarrow \frac{v}{4} = \mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}(x-c)}.$$

Здесь константа интегрирования c должна зависеть от t, так, чтобы удовлетворялось второе уравнение (15.9). Его нетрудно решить, проделав те же выкладки, поскольку по виду оно не отличается от первого уравнения (15.9):

$$\frac{v}{4} = \mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\lambda}(t-t_0)}.$$

Отсюда, выбирая $\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}c(t)} = \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}x_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\lambda}(t-t_0)}$, получим окончательно решение системы (15.9)

$$v(x,t) = 4\mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}(x-x_0)-\frac{1}{2\lambda}(t-t_0)}, \quad x_0, t_0 = \mathrm{const}. \tag{15.10}$$

Здесь мы выбрали ветвь арктангенса от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Другой выбор ветви приводит лишь к сдвигу решения $v \mapsto v + 2\pi n$, где n – целое. Уравнение синус-Гордон инвариантно относительно таких сдвигов, причем константы $u = 2\pi n$ являются устойчивыми невозмущенными решениями (аналог $u = 0$ для уравнения КдФ).

Тем самым построено *односолитонное решение* уравнения синус-Гордон, которое, в отличие от солитонов уравнения КдФ, не стремится к нулю при $x \to \pm\infty$, поскольку $\operatorname{arctg}\phi \to \pm\pi/2$ при $\phi \to \pm\infty$. В зависимости от знака вещественного параметра λ различают два случая: *кинк* ($\lambda < 0$) и *антикинк* ($\lambda < 0$). Эти названия произошли из вида графиков этих решений, изображенных на рисунке (от английского слова «kink» – изгиб, петля).

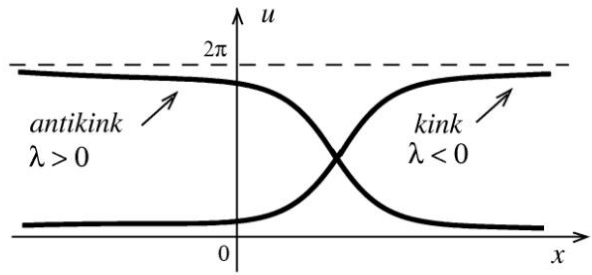


Рис. 7. Односолитонные решения уравнения синус-Гордон

Хотя эта картина слегка противоречит рассуждениям Лекции 3 о солитонах как об уединенных волнах, быстроубывающих на бесконечности, решения (15.10) с полным правом можно называть солитонным, поскольку в них локализована область перехода из одного невозмущенного состояния $u = 0$ в другое $u = 2\pi$. В самом деле, производная (15.10) имеет чисто солитонный вид

$$v_x(x,t) = -\frac{\lambda}{\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{2}(x - x_0) + \frac{1}{2\lambda}(t - t_0)\right)}.$$

Другим отличием от уравнения КдФ является нетривиальный закон сохранения

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x dx, \tag{15.11}$$

принимающий целочисленные значения. Действительно, поскольку согласно предположению (15.3) кратные 2π значения являются устойчивыми со-

стояниями решения, интеграл (15.11) равен

$$Q = \frac{1}{2\pi}(u(+\infty, t) - u(-\infty, t)) = n - m, \quad n, m - \text{целые}.$$

Этот закон сохранения называется *топологическим зарядом* решения $u(x, t)$. Нетрудно подсчитать, что топологические заряды кинка и антикинка равны соответственно $Q_{kink} = 1$ и $Q_{antikink} = -1$. Ниже мы увидим, что при взаимодействии эти солитоны ведут себя как частица и античастица, давая в итоге состояние с нулевым топологическим зарядом. Этим можно объяснить термин «заряд» для закона сохранения (15.11) и приставку «анти-» в названии солитона.