Лекция 2

1. Задача Ферми–Паста–Улама

Знаменитый физик-ядерщик, лауреат Нобелевской премии по физике Энрико Ферми в середине 50-х годов отошел от дел, связанных с американским атомным проектом. Продолжая работать в ядерном центре в Лос-Аламосе, он получил доступ к первым ЭВМ, только что разработанным и установленным там для сложных физических расчетов. Совместно с двумя своими сотрудниками, Дж. Паста и С. Уламом, он занялся, как в то время казалось, совершенно изолированной проблемой – исследованием поведения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые первоначально были линейными, но в которые была привнесена нелинейность как возмущение. Если бы такого возмущения не было, то энергия каждой нормальной моды линейной системы, то есть колебаний с заданной частотой, была бы постоянной. Можно было надеяться, что нелинейные взаимодействия между модами приведут к тому, что энергия системы равномерно распределится между всеми модами – этот результат был бы в согласии с теоремой о равномерном распределении, которая предсказывает поведение нелинейных систем общего вида. Но полученные результаты противоречили этой идее.

Здесь можно поставить вопрос – какое всё это имеет отношение к уединенной волне Расселла и уравнению КдФ? Оказывается, что самое непосредственное, но, чтобы убедиться в этом, необходимо проделать некоторые выкладки. Важность задачи Ферми–Паста–Улама (ФПУ) обусловлена тем, что неожиданные результаты этой работы стимулировали исследование нелинейных систем такого типа и многие современные работы по солитонам берут свое начало именно оттуда. В связи с этим важно прояснить некоторые детали. В своей оригинальной работе ФПУ приводят результаты громоздких вычислений, которые мы не можем здесь ни привести, ни объяснить. Вместо этого мы дадим короткое резюме для того , чтобы объяснить, как эта нелинейная задача связана с уравнением КдФ.

Рассмотрим динамическую систему, состоящую из N идентичных частиц единичной массы на прямой с фиксированными конечными точками (N велико; ФПУ рассматривали $N = 64$). Предположим, что между ближайшими соседями действуют упругие силы, как если бы они были связаны

пружинками. Будучи отклоненной из положения равновесия, каждая частица приводит в движение соседние, так что вся система в конце концов приходит в сложное колебательное движение.

Для описания этого движения обозначим через Q_n смещение из состояния равновесия n-й частицы. Тогда по второму закону Ньютона уравнение движения этой частицы можно записать

$$Q_n'' = f(Q_{n+1} - Q_n) - f(Q_n - Q_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.1}$$

Здесь $f(Q)$ – упругая сила взаимодействия между ближайшими соседями, которая включает в себя обычный линейный закон Гука для малых колебаний пружинки плюс некоторый малый нелинейный член. ФПУ рассматривали два случая:

$$\begin{aligned} f(Q) &= \gamma Q + \alpha Q^2, \\ f(Q) &= \gamma Q + \beta Q^3. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь γ – линейная константа цепочки, а константы α и β выбираются таким образом, чтобы максимальное смещение Q, вызываемое нелинейным членом, было мало. Если использовать нелинейности такого вида и численно решить уравнение (2.1) с начальными условиями в виде, скажем, синусоидальной волны, то обнаружится, что энергия не распределяется между всеми нормальными модами, а остается в начальной моде и нескольких ближайших.

К тому же плотность энергии в этих ближайших модах имеет почти периодический характер зависимости от времени. Рисунок взят из оригинальной статьи, написанной ФПУ, и представляет собой график зависимости энергии от времени для первых пяти мод с синусоидальными начальными данными.

После большого числа колебаний энергия каждой нормальной моды выглядит как почти периодическая функция от времени, причем энергия не перераспределяется в более высокие моды с течением времени. Строгое объяснение этой периодичности стимулировало более глубокое изучение уравнений типа (2.1). При некоторых приближениях уравнение (2.1) можно преобразовать в уравнение КдФ в континуальном пределе, то есть при переходе к непрерывному случаю.

Введем шаг решетки l и определим переменную $x = nl$ как расстояние вдоль решетки. Для того чтобы заменить члены типа Q_n непрерывными переменными, используем разложение в ряд Тейлора, полагая

$$Q_n(t) = l^r p(x, t), \quad x = nl, \quad l \ll 1. \tag{2.3}$$

Теоретичне пояснення ФПУ: Крускал і Забускі (1965)

Рівняння ФПУ

$$M\ddot{\phi}_n = U'\left(\phi_{n+1} - \phi_n\right) - U'\left(\phi_n - \phi_{n-1}\right), \qquad U(\phi) = \frac{k\phi^2}{2} + \frac{\alpha\phi^3}{3}$$

$$\Downarrow$$

Перехід до неперервного розподілу: $\phi_n(t) = ap(x,t),\ x = an$

$$\Downarrow \qquad u(x,t) = p_x(x,t)$$

Крускал і Забускі запропонували перейти до неперервного розподілу взаємодіючих осциляторів. Це призводить до перетворення вхідного рівняння у рівняння КдВ. Розв'язком КдВ є солітони, які при стиканні один з одним не взаємодіють (не змінюють асимптотичні форми один одного) це пояснює квазіперіодичність спектрів. За короткий час термалізація не може бути досягнута через так звану солітонну симетрію для системи з ергодичною динамікою.

Рівняння Буссінеска

$$u_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{l^2}{12}u_{xx} + \alpha l^4 u^2 + l^2 k u\right)$$

$$u(x,t) = \frac{c^2}{8\alpha}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{cx-\omega t+\delta}{2}\right)}, \qquad \omega^2 = kc^2a^2 + c^4a^4/12.$$