(41) Метод Хіроти полягає у тому, що на першому етапі шукається заміна, що зведе рівняння до білінійної форми. На другому етапі шукається розв'язок у вигляді ряда теорії збурень. Для рівнянь де можливий точний розв'язок ряд обривається. На третьому етапі шукається нове солітонне рівняння.

Рівняння KdV: $u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0$ або $u_t + 6(u^2)_x + u_{xxx} = 0$

Заміною типу $u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\ln f]$ воно зводиться до білінійної форми $ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2 + ff_{xt} - f_x f_t = 0$

Розв'язок шукаємо у вигляді $f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)}$

$$f(f_{xxxx} + f_{xt}) - f_x(4f_{xxx} + f_t] + 3(f_{xx})^2 = 0$$

Нас цікавить односолітонний розв'язок, тому

$f^{(n>1)} = 0 \Rightarrow f = 1 + \varepsilon f^{(1)}$

$$(1+\varepsilon f^{(1)})\varepsilon(f^{(1)}_{xxxx} + f^{(1)}_{xt}) - \varepsilon f_x^{(1)}[4\varepsilon f^{(1)}_{xxx} + \varepsilon f^{(1)}_t] +$$

$$+ 3\left((1+\varepsilon f^{(1)})_{xx}\right)^2 = 0$$

$$3(\varepsilon f^{(1)}_{xx})^2$$

Шукаємо коефіцієнти при ε^1:

$$f^{(1)}_{xxxx} + f^{(1)}_{xt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(f^{(1)}_{xxx} + f^{(1)}_t) = 0$$

Розв'язок цього рівняння задається виразом:

$f^{(1)} = \exp\Theta_1$, де $\Theta_1 = ax - a^3t + \delta$ Переконаємося в цьому

$$f^{(1)}_t = \exp\Theta_1 \cdot \frac{\partial\Theta_1}{\partial t} = -a^3\exp\Theta_1$$

$$f^{(1)}_x = \exp\Theta_1 \cdot \frac{\partial\Theta_1}{\partial x} = a\exp\Theta_1$$

$$f^{(1)}_{xx} = a^2\exp\Theta_1, \quad f^{(1)}_{xxx} = a^3\exp\Theta_1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(a^3\exp\Theta_1 - a^3\exp\Theta_1) \equiv 0$$

Тогда $u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{f}\right) = \frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2} = \frac{f_{xx}}{f} - \left(\frac{f_x}{f}\right)^2$

$f = 1 + \exp\Theta_1$

$f_x = a\exp\Theta_1$

$f_{xx} = a^2\exp\Theta_1$

$$u = \frac{a^2\exp\Theta_1 \cdot (1+\exp\Theta_1) - a^2\exp 2\Theta_1}{1 + 2\exp\Theta_1 + \exp 2\Theta_1} = \frac{a^2\exp\Theta_1}{(1+\exp\Theta_1)^2} =$$

$$= \frac{a^2\exp\Theta_1}{(\exp\frac{\Theta_1}{2})^2(\exp\Theta_1/2 + \exp(-\Theta_1/2))^2} = \frac{a^2}{4\,ch^2(\Theta_1/2)}$$