За яких умов нелінійне збудження є солітоном?

Означення солітону

Солітон — хвильове збудження $\phi(x,t)$ в нелінійному середовищі, яке задовольняє наступним вимогам:

- поширюється зі сталою швидкістю, не змінюючи при цьому форми: $\phi(x - vt)$
- локалізоване у просторі: $\phi'(x) \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$
- не змінюється при зіткненні з іншим таким збудженням (окрім можливого зсуву фаз)

$$\phi(x,t) \sim \sum_i \phi_s(x - v_i t) \quad \text{при } t \to -\infty,\ v_i = \text{const},$$

$$\phi(x,t) \sim \sum_i \phi_s(x - v_i t + \delta_i) \quad \text{при } t \to +\infty,\ \delta_i = \text{const}$$

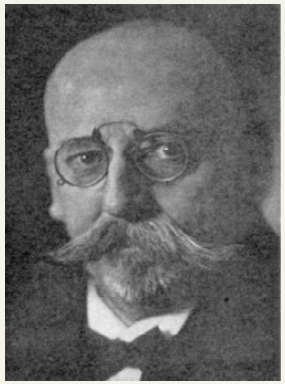
Рівняння Кортвега–де–Вріза (1895)

Рівняння КдВ

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$



Kortweges

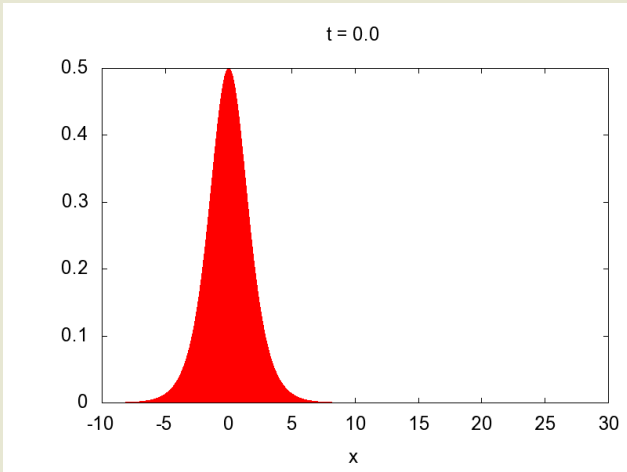


de Vries

Односолітонний розв'язок рівняння КдВ

Біжуча хвиля $\phi(x,t) = u(x - vt) \Rightarrow$
$(v + 6u)u' - u''' = 0 \Rightarrow$

$$\phi(x,t) = -\frac{v}{2}\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt - x_0)\right]}$$



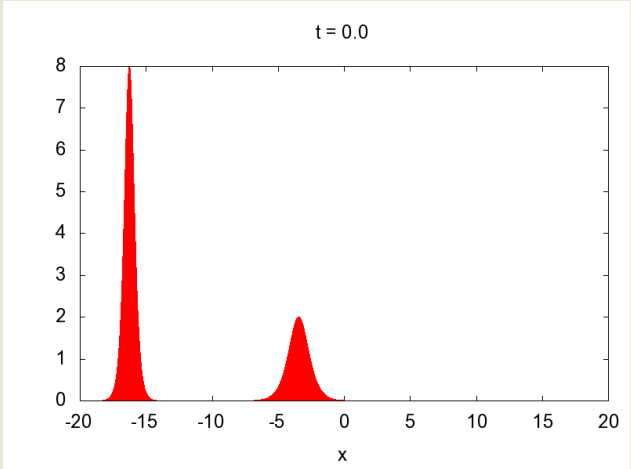
Рівняння Кортвега–де–Вріза

Рівняння КдВ

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$

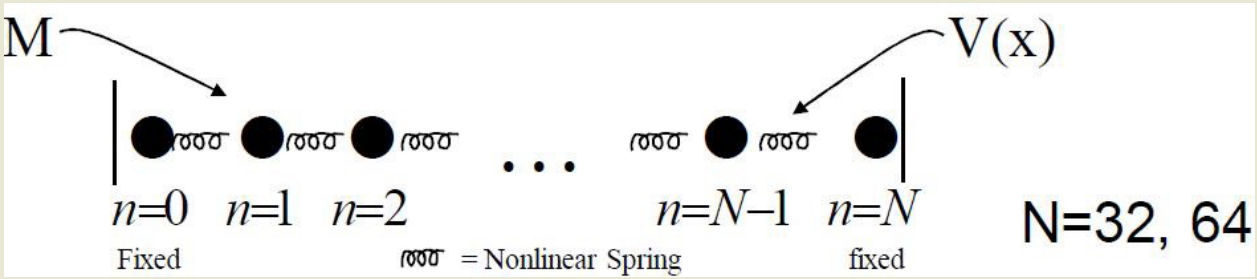
Двохсолітонний розв'язок рівняння КдВ

$$\phi(x,t) = 12\frac{3 + 4\,\mathrm{ch}(2x - 8t) + \mathrm{ch}(4x - 64t)}{\left[3\,\mathrm{ch}(2x - 8t) + \mathrm{ch}(3x - 36t)\right]^2}$$



Задача Фермі–Паста–Улама

Модель ФПУ





Fermi, Ulam, Pasta

Рівняння ФПУ:

$$M\ddot{\phi}_n = U'\left(\phi_{n+1} - \phi_n\right) - U'\left(\phi_n - \phi_{n-1}\right)$$

$$F(\phi) = -U'(\phi), \qquad U(\phi) = \frac{k\phi^2}{2} + \frac{\alpha\phi^3}{3} + \frac{\beta\phi^4}{4}$$

Теоретичне пояснення ФПУ: Крускал і Забускі (1965)

Рівняння ФПУ

$$M\ddot{\phi}_n = U'\left(\phi_{n+1} - \phi_n\right) - U'\left(\phi_n - \phi_{n-1}\right), \qquad U(\phi) = \frac{k\phi^2}{2} + \frac{\alpha\phi^3}{3}$$

$$\Downarrow$$

Перехід до неперервного розподілу: $\phi_n(t) = ap(x,t),\ x = an$

$$\Downarrow \qquad u(x,t) = p_x(x,t)$$

Рівняння Буссінеска

$$u_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{l^2}{12}u_{xx} + \alpha l^4 u^2 + l^2 k u\right)$$

$$u(x,t) = \frac{c^2}{8\alpha}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{cx-\omega t+\delta}{2}\right)}, \qquad \omega^2 = kc^2a^2 + c^4a^4/12.$$

Модель Френкеля–Конторової (ФК)

Найпростіша модель, що описує динаміку ланцюжка частинок, що взаємодіють з найближчими сусідами в присутності зовнішнього періодичного потенціалу

$$\ddot{x_n} + \sin x_n - g\left(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n\right) = 0$$

Приклади

- Перше застосування моделі ФК: динаміка дислокацій
- В фізиці поверхні модель ФК використовується для опису динаміки адатомів
- Біофізика: нелінійна модель динаміки ДНК

Рівняння синус–Ґордон (СГ)

Континуальне наближення моделі ФК $\Rightarrow$ рівняння синус–Ґордон

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin\phi = 0$$

Приклади

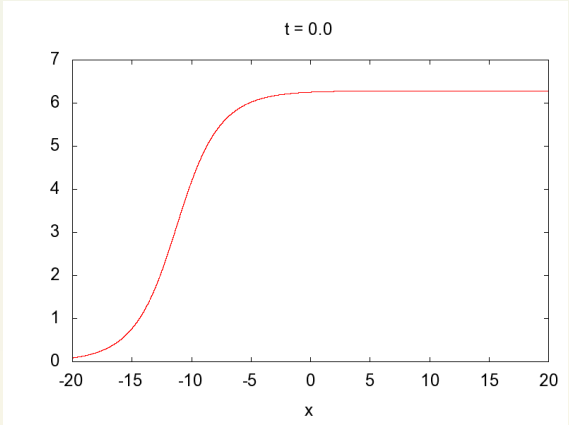
- Надпровідність (джозевсонові контакти): солітон — флюксон
- Магнетизм: солітон — доменна стінка

Солітони рівняння СГ

Кінки — топологічні солітони СГ

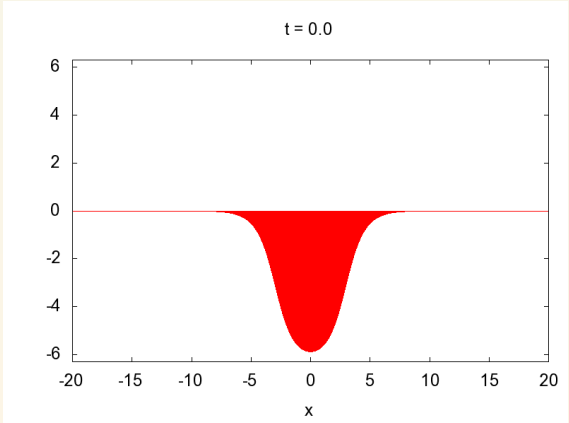
$$\operatorname{tg}\phi(x,t)/4 = \exp\left[-\sigma\gamma(x-vt)\right]$$

$\sigma = \pm 1$ — **топологічний заряд,**
$\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$



Брізери — динамічні солітони СГ

$$\operatorname{tg}\phi(x,t)/4 = \left(\frac{\sqrt{1-\Omega^2}}{\Omega}\right)\frac{\sin\Omega t}{\operatorname{ch}(x\sqrt{1-\Omega^2})}$$



Нелінійне рівняння Шредінгера

$$i\phi_t + \phi_{xx} + \phi|\phi|^2 = 0$$

Приклади

- Оптичне самофокусування
- Ленгмюрівські хвилі в плазмі
- Ниткоутворення (утворення річок, гідродинамічних струменів, шляхів міграцій)
- нелінійні оптичні хвилі