13. Одержання метрики Шварцшильда у випадку центрально-симетричного гравітаційного поля. Гравітаційний радіус. (36)

Розглянемо розв'язок рівнянь Ейнштейна $R_{ik}=0$ в центрально-симетричному полі. Будемо шукати розв'язок зовні сфери — р-к Шварцшильда. В ССК маємо $ds^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+$ $+r^2\sin^2\theta(d\phi)^2-c^2dt^2$. Тобто $x^1=r, x^2=\theta, x^3=\phi, x^4=ct$. Знайдемо метрику поблизу тіла зовні нього. Будемо шукати метрику у вигляді $ds^2=f_1(r)(dr^2)+r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta(d\phi)^2-f_2(r)c^2(dt)^2$. Невідомі функції будемо шукати у вигляді $f_1(r)=e^{\lambda(r)}$, $f_2(r)=e^{\mu(r)}$, вважаючи, що функції в експоненті прямують до нуля на нескінченності (далі штрихи — похідні по r). Мішаних добутків диференціалів в метриці нема, оскільки інтервал сферично симетричний і не має залежати від їх знаків. Тоді ненульові компоненти метричного тензора мають вигляд $g_{11}=e^{\lambda}, g_{22}=r^2, g_{33}=r^2\sin^2\theta, g_{44}=-e^{\mu}$. Визначник цієї квадратичної форми $g=\prod_i g_{ii}=-e^{\lambda+\mu}r^4\sin^2\theta$. Тоді знаємо контраваріантну форму: $g^{ii}=g_{ii}/g$. Рахуємо коефіцієнти Крістофеля: $\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}\right)$. $\Gamma^1_{11}=0.5\lambda'$, $\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=1/r$, $\Gamma^4_{14}=0.5\mu'$, $\Gamma^1_{22}=-re^{-\lambda}$, $\Gamma^3_{23}=ctg\theta$, $\Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta e^{-\lambda}$, $\Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta$, $\Gamma^1_{44}=0.5\mu' e^{\mu-\lambda}$, всі інші нульові. Підставляємо все це в рівняння Ейнштейна у вигляді $\frac{\partial^2\ln\sqrt{-g}}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma^{\alpha}_{\beta k}\Gamma^{\beta}_{i\alpha}-\Gamma^{\beta}_{ik}\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}=0$. Буде три нетривіальних рівняння: $0.5\mu''+(1/4)(-\lambda'\mu'+\mu'^2)-\lambda'/r=0$, $e^{-\lambda}(1+0.5r(\mu'-\lambda'))-1=0$, $-0.5\mu''+(1/4)(\lambda'\mu'-\mu'^2)-\mu'/r=0$. З першого і третього рівнянь одразу отримуємо $\lambda+\mu=C_1$, а з граничних умов на нескінченності $C_1=0$. Тоді друге рівняння надубе вигляду $e^{\lambda}=1-r\frac{d\lambda}{dr}$. Його легко проінтегрувати. Отримаємо: $e^{-\lambda}=e^{\mu}=1+\frac{C_2}{r}$. Нову невідому сталу знайдемо з вимоги виконання закону Ньютона на великій відстані, тобто має бути $g_{44}=-\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right), \Phi=-\frac{Gm}{r}$. Тут m є повною масою тіла, тобто джерелом гравітаційного поля. Тоді $C_2=-\frac{2Gm}{c^2}$. Вона має розмірність довжини і носить назву гравітаційного радіуса тіла r_g. Отже, просторово-часова метрика набуває вигляду

$ds^2=\frac{dr^2}{1-r_g/r}+r^2(\sin^2\theta d\phi^2+d\theta^2)-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2$. Це єдиний стаціонарний розв'язок рівняння $R_{ik}=0$, який приводить до пласкої псевдоевклідової метрики на нескінченності. Існують інші розв'язки, наприклад Райснера — Нордстрема для зарядженої сфери, р-к Керра для тіла, що обертається, Ньюмана, якщо це тіло ще й заряджене.

14. Гравітаційний колапс сферичного тіла. (31)

При $r \to r_g = \dfrac{2Gm}{c^2}$ в метриці Шварцшильда $ds^2 = \dfrac{dr^2}{1-r_g/r} + r^2\left(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2\right) - \left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)c^2dt^2$. $g_{11} \to \infty$, а $g_{44} \to 0$. Але оскільки ця особливість ніяк не проявляється в детермінанті $g = -r^4\sin^2\theta$ метричного тензора, трактувати як неможливість ситуації $r < r_g$ буде невірним. Просто в такій ситуації необхідно перейти до нестаціонарної метрики. Розглянемо нестаціонарне грав. поле. Для цього зробимо перетворення координат $c\tau = \pm ct \pm \int \dfrac{f(r)dr}{1-r_g/r}$, $R = ct + \int \dfrac{dr}{\left(1-r_g/r\right)f(r)}$ (знаки можна обирати будь-які, але далі оберемо +). Перейдемо до диференціалів: $cd\tau = \pm cdt \pm \dfrac{f(r)dr}{1-r_g/r}$, $dR = cdt + \dfrac{dr}{\left(1-r_g/r\right)f(r)}$. Віднімемо перше від другого: $dR \mp cd\tau = \dfrac{dr}{1-r_g/r}\left(\dfrac{1}{f} - f\right)$. $dr = \left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)\dfrac{f}{1-f^2}\left(dR \mp cd\tau\right)$. З цих же рівнянь виразимо $dt = \dfrac{cd\tau \mp f^2dR}{\pm c\left(1-f^2\right)}$. Тоді інтервал можна записати у вигляді $ds^2 = r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) - \dfrac{1-r_g/r}{1-f^2} \times$

$\times\left(c^2d\tau^2 - f^2dR^2\right)$. Положим $f(r) = \sqrt{r_g/r}$ (тоді $g_{\tau\tau} = 1$). Тоді $R - c\tau = \int \dfrac{\left(1-f^2\right)dr}{f\left(1-r_g/r\right)} = \dfrac{2}{r}\dfrac{r^{3/2}}{r_g^{1/2}}$ (сталу обрали нульовою, бо це означає лише початок відліку часу). Підставимо це вираз для інтервалу: $ds^2 = -c^2d\tau^2 + \dfrac{dR^2}{\left(3(R-c\tau)/2r_g\right)^{2/3}} + \left(\dfrac{3}{2}(R-c\tau)\right)^{4/3} r_g^{2/3}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$. Це так звані координати Леметра й в них особливість при $3(R-c\tau)/2 = r_g$ відсутня. Ця метрика не є стаціонарною. В ній для заданих r світові лінії є прямими $R - c\tau = const$. В той же час частинки, що нерухомі відносно СВ мають вертикальні світлові лінії на діаграмі: вони за скінченний інтервал свого часу падають в центр поля. Світова лінія для фотонів отримується з умови $ds^2 = 0$. При фіксованих кутах маємо $c\dfrac{d\tau}{dR} = \pm\left(\dfrac{3}{2r_g}(R-c\tau)\right)^{-1/3} = \pm\sqrt{\dfrac{r_g}{r}}$. Світові лінії будь-яких інших об'єктів мають лежати в межах конусу, що обмежений цими твірними. Для $r > r_g$ світова лінія нерухомої частинки як раз знаходиться в конусі (схема правіше на рис. 20). Коли ж $r < r_g$, світова лінія виходить за межі конусу. Це означає, що частинка не може бути нерухомою в цій області, оскільки за межами конусу події, пов'язані причинно-наслідковим зв'язком бути не можуть. Таким чином, всі взаємодії та сигнали поширюються до центру досягаючи його за

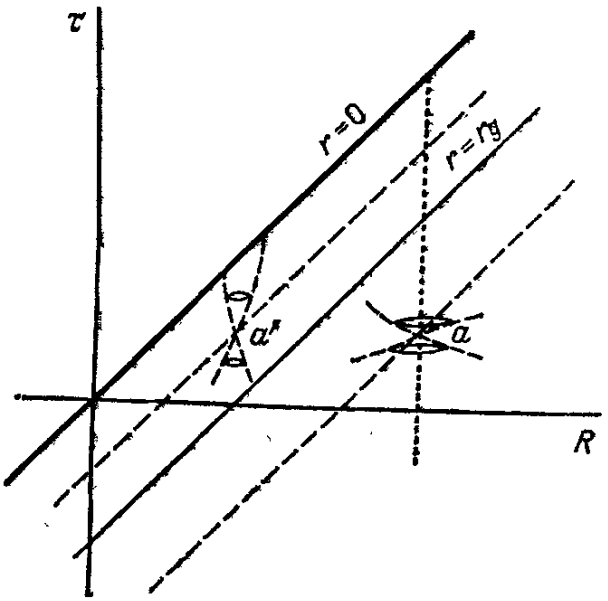


Рис. 20

скінченний час τ. Вибір на самому початку знаку «–» дав би нам систему, що розбігається: в ній рух буде не до центру, а від нього.

В метриці, яка є галілеєвою на нескінченності, радіус тіла не може стати меншим за r_g. Це означає, що для стороннього спостерігача спостережуваний рух буде асимптотичним наближенням до гравітаційного радіусу. Закон цього наближення має вигляд $r - r_g = const \cdot e^{-ct/r_g}$. Це означає, що швидкість для цього спостерігача зменшуватиметься з часом. Навпаки, у власній СВ швидкість зростатиме, наближаючись до швидкості світла. $r = r_g$ також називають горизонтом подій. З-під нього сигнали назовні вийти не можуть.

Стиснення тіла під радіусом Шварцшильда не може бути спостережуваним зовні. Таким чином, гравітаційний колапс призводить до «самозамикання» тіла, яке взаємодіє із зовнішнім світом лише через своє гравітаційне поле. Таке тіло називають чорною дірою.

Далі трохи вікіпедії про сучасність. Врахування термодинаміки трохи корегує такі уявлення. Хокінг передбачив, що чорна діра має випромінювати частинки у зовнішній простір втрачаючи свою масу через поведінку квантових полів поблизу неї. Тобто поблизу горизонту подій можуть народжуватися пари частинка-античастинка, одна з яких може потрапити за горизонт, а інша — відлетіти геть забравши з собою деяку частину енергії чорної діри. Спектр випромінювання чорної діри досить точно співпадає зі спектром абсолютно чорного тіла, через що можна приписати їй деяку температуру та ентропію. За рахунок Хокінговського випаровування час життя чорної діри виявляється скінченним.

15. Гармонічні координати та їх використання.

Є рівняння $R_{ik} - 0.5 g_{ik} + \Lambda g_{ik} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \equiv G_{ik}$. $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$. Здається, що можна отримати 10 функцій — гравітаційних потенціалів. Але є умова: коваріантні похідні $G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$. Це є аналогом в'язей, що дає додаткові 4 рівняння, тому залишиться лише 6 функціонально незалежних рівнянь. Це означає, що рівнянь Ейнштейна для повного визначення системи недостатньо. Тут можна провести аналогію з електродинамікою, де $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\nu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. До тензора електромагнітного поля F можна написати дуальний тензор у вигляді $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \grave{o}^{\mu\nu\rho\varepsilon} F_{\rho\varepsilon}$. Підстановка дає $\Box A^\nu - \partial^\nu \left(\partial_\mu A^\mu \right) = \frac{1}{c} j^\nu$, $\Box = \frac{\partial^2}{\partial \left(x^\mu \right)^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ — д'Аламбертіан (аналог лапласіана в просторі Мінковського). В електродинаміці в'язі отримуються так само з рівняння неперервності $\partial_\mu \left(\Box A^\nu - \partial^2_{\mu\nu} A^\mu \right) = 0$. Неоднозначності позбувалися калібровкою (Лореца, Кулона тощо). Рівняння ставали однозначними ,а ле не коваріантними, н-д в калібровці Лоренца $\partial_\mu A'_\mu = 0 \Rightarrow \Box \Phi = -\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}$. Для метрики маємо зробити щось подібне. Для цього вводять так звані гармонічні координати. Зробимо згортку, яку зафіксуємо в нулі: $\Gamma^\lambda = g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$. Це не вектор і не тензор. Розв'язком рівняння $\Box \Phi = 0$ є гармонічні функції (звідки й назва координат). $\Gamma^\lambda = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right) =$

(врахуємо, що $g^{\lambda\kappa} g_{\kappa\mu} = \delta^\lambda_\mu \Rightarrow g^{\lambda\kappa} \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} = -g_{\kappa\mu} \frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu}$, $\Gamma^\mu_{\kappa\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\kappa}$)

$= \frac{1}{2} \left(-g^{\mu\nu} g_{\kappa\mu} \frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu} - g^{\lambda\kappa} g_{\kappa\mu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} - 2 g^{\lambda\kappa} \Gamma^\mu_{\kappa\mu} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} - 2 g^{\lambda\kappa} \Gamma^\mu_{\kappa\mu} \right) =$

$= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left(\sqrt{-g} g^{\lambda\mu} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left(\sqrt{-g} g^{\lambda\kappa} \right) = 0$. Оператор називають оператором Лапласа — Бельтрамі дає необхідні в'язі: $\Box \Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left(\sqrt{-g} g^{\lambda\kappa} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\lambda} \right) = g^{\lambda\kappa} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} - \Gamma^\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x^\lambda} = 0$.

Использование Г. к. позволяет в ряде случаев (напр., при выводе уравнений движения в общей теории относительности) с помощью этих условий значительно упростить вычисления.