9. Рівняння руху матеріальної частинки у гравітаційному полі (34)

Движение свободной материальной частицы в специальной теории относительности определяется принципом наименьшего действия: $\delta S = -mc\delta\int ds = 0$ (87.1) согласно которому частица движется так, что ее мировая линия является экстремальной между двумя заданными мировыми точками, т.е. в данном случае прямой.

Движение частицы в гравитационном поле должно определяться принципом наименьшего действия в той же форме (87.1), так как гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики пространства-времени, проявляющимся только в изменении выражения *ds* через ***dx*^{i}**. Таким образом, в гравитационном поле частица движется так, что ее мировая точка перемещается по экстремальной, или, как говорят, по *геодезической* линии в 4-пространстве ***x*^{0}, *x*^{1} *x*^{2}, *x*^{3};** поскольку, однако, при наличии гравитационного поля пространство-время негалилеево, то эта линия не «прямая», а реальное пространственное движение частицы—не равномерно и не прямолинейно.

(Геодезические, вдоль которых ds=0, называют нулевыми или изотропными.)

Найдем уравнения движения частицы в гравитационном поле путем соответствующего обобщения дифференциальных уравнений свободного движения частицы в специальной теории относительности. Эти уравнения гласят ***du*^{i}*/ds* = 0**, или иначе ***du*^{i} = 0**, где ***u*^{i} =*dxi/ds*** есть 4-скорость. Очевидно, что в криволинейных координатах это уравнение обобщается в $Du^i = 0$ (87.2) Из выражения $DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k\right)dx^l$ для ковариантного дифференциала вектора имеем $du^i + \Gamma^i_{kl}u^k dx^l = 0.$ Разделив это уравнение на *ds*, находим $\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0.$ (87.3) Это и есть **искомые уравнения движения**. Мы видим, что движение частицы в гравитационном поле определяется величинами $\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right)$. Производная ***d*^{2}*x*^{i}*/ds*^{2}** есть 4-ускорение частицы. Поэтому мы можем назвать величину — $m\tilde{A}^i_{kl}u^k u^l$ «4-силой», действующей на частицу в гравитационном поле. Тензор $\boldsymbol{g_{ik}}$. играет при этом роль «потенциалов» гравитационного поля его производные определяют «напряженность» поля $\tilde{A}^s_{kl}$.

Всегда можно обратить все Γ^i_{kl} в нуль в любой заданной точке пространства-времени. Выбор такой локально-инерциальной системы отсчета означает исключение гравитационного поля в данном бесконечно малом элементе пространства-времени.

Вид уравнения движения через ковариантные компоненты 4-ускорения. Из условия $DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}A_k\right)dx^l$, $\Gamma^k_{il} = g^{km}\Gamma_{m,il}$ находим $\frac{du_i}{ds} - \Gamma_{k,il}u_k u_l = 0.$ При подстановке сюда $\Gamma_{k,li} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}\right)$ вторая и третья производная сокращаются *(почему-то)* и получаем $\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}u_k u_l = 0.$ (87.3а).

Четырехмерный импульс частицы в гравитационном поле: $p^i = mcu^i$, $p_i p^i = m^2c^2.$ Подставляя в последнее вместо импульса его выражение через действие, получим уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в гравитационном поле: $g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0.$ (87.6). Для распространения светового сигнала уравнение геодезической линии в форме (87.3)

неприменимо, так как вдоль мировой линии распространения светового луча интервал $\boldsymbol{ds = 0}$ и все члены в уравнении (87.3) обращаются в бесконечность. Для придания уравнениям движения в этом случае нужного вида воспользуемся тем, что направление распространения луча света в геометрической оптике определяется волновым вектором, касательным к лучу. Мы можем поэтому написать четырехмерный волновой вектор в виде $\boldsymbol{k^i = dx^i/d\lambda}$, где $\boldsymbol{\lambda}$ есть некоторый параметр, меняющийся вдоль луча. В специальной теории относительности при распространении света в пустоте волновой вектор не меняется вдоль луча, т. е. $\boldsymbol{dk^i} = 0$. В гравитационном поле это уравнение переходит в $\boldsymbol{Dk^i = 0}$, или $\dfrac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl} k^k k^l = 0.$ (87.7) Квадрат волнового 4-вектора равен нулю: $k_i k^i = 0.$ Подставляя сюда $\partial\psi/\partial x^i$ вместо $\boldsymbol{k_i}$ ($\boldsymbol{\psi}$ - эйконал), находим уравнение эйконала в гравитационном поле: $g^{ik}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^i}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0.$ (87.9). (здесь учтено, что производная по λ равна нулю вследствие $\boldsymbol{dk^i} = 0$, а символ Кристофеля расписали в явном виде).

В нерелятивистской механике движение частицы в гравитационном поле определяется функцией Лагранжа: $L = -mc^2 + \dfrac{mv^2}{2} - m\phi,$ (87.10) прибавив постоянную $\boldsymbol{-mc^2}$. Это надо сделать для того, чтобы нерелятивистская функция Лагранжа в отсутствие поля $\boldsymbol{L = -mc^2 + mv^2/2}$ была в точности той, в которую переходит соответствующая релятивистская функция $\boldsymbol{L = -mc^2(1-v^2/c^2)^{0.5}}$ в пределе при $v/c \to 0$.

Нерелятивистское действие S для частицы в гравитационном поле имеет вид: $S = \int L dt = -mc\int\left(c - \dfrac{v^2}{2c} + \dfrac{\phi}{c}\right)dt.$ Сравнивая это с выражением $S = -mc\int ds,$ мы видим, что в рассматриваемом предельном случае $ds = \left(c - \dfrac{v^2}{2c} + \dfrac{\phi}{c}\right)dt$. Возводя в квадрат и опуская члены, обращающиеся в нуль при $c \to \infty,$ получим $ds^2 = \left(c^2 + 2\phi\right)dt^2 - d\mathbf{r}^2,$ (87.11) где учтено, что $\mathbf{v}dt = d\mathbf{r}.$

Таким образом, компонента g_{00} метрического тензора равна $g_{00} = 1 + \dfrac{2\phi}{c^2}.$

Что касается остальных компонент, то из (87.11) следовало бы, что $\boldsymbol{g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}}$, $\boldsymbol{g_{0\alpha} = 0}$. В действительности, однако, поправки к ним, вообще говоря, того же порядка величины, что и поправка в $\boldsymbol{g_{00}}$. Невозможность определения этих поправок приведенным выше способом связана с тем, что поправка в $\boldsymbol{g_{\alpha\beta}}$, имеющая тот же порядок величины, что и поправка в $\boldsymbol{g_{00}}$, привела бы в функции Лагранжа к членам более высокого порядка малости (вследствие того, что в выражении для $\boldsymbol{ds^2}$ компоненты $\boldsymbol{g_{\alpha\beta}}$ не умножаются на $\boldsymbol{c^2}$, как это имеет место для $\boldsymbol{g_{00}}$).

10. Рівняння гравітаційного поля за наявності матерії. (28)

Будемо шукати рівняння гравітаційного поля варіаційним шляхом Гільберта. Запишемо функціонали дії, що відповідають простору і матерії: S_g & S_m. Вони мають структуру типу $\int A d^4x$. Застосуємо вимогу загальної коваріантності: незмінність при зміні координат $\int A d^4x = \int A' d^4x', \quad d^4x = J d^4x', \quad J = \left|\partial x^k / \partial x'^i\right|$. Це означає, що має виконуватись $A' = JA$. Величини, що перетвор. за подібним законом, називають скалярною густиною. Прикладом, може бути утворення з метр. тензору: $g'_{ik} = \left(\partial x^l / \partial x'^i\right)\left(\partial x^m / \partial x'^k\right) g_{lm}$, $g' = J^2 g \Rightarrow \sqrt{-g'} = J\sqrt{-g}$. В загальному випадку, якщо J знаход. у степені w, то кажуть про скалярну густину ваги w, якщо мова йде про скаляр, і відносними тензорами ваги w, якщо про тензор. Ейнштейн і Гільберт припустили, що скалярна густина з інтегралу дії має залежати від 10 компонент метр. тензора, його похідних $g_{ik,l}$, і, можливо, вищих похідних. Ними було взято для дії простору вираз $\Re = R\sqrt{-g}, \quad R = g^{ik} R_{ik}$. Маємо $S_g = \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g}\, d^4x$. Проінтегруємо по нескінч. великому об'єму між гіперповерхнями $t = t_1, t = t_2$, та обчислимо варіацію: $\delta S_g = 0 = \int \left(R_{ik}\sqrt{-g}\,\delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta\sqrt{-g} + g^{ik}\sqrt{-g}\,\delta R_{ik} \right) d^4x$. Оскільки $\partial g / \partial x^k = g g^{ik}\left(\partial g_{ik} / \partial x^k\right), \; g^{ij} g_{ij} = 1,$ то $\delta g = g g^{ij} \delta g_{ij} = -g g_{ij} \delta g^{ij}, \quad \delta\sqrt{-g} = \delta g / 2\sqrt{-g} =$ $= -0.5 g_{ik}\sqrt{-g}\,\delta g^{ik}$. Тоді $\int R\sqrt{-g}\, d^4x = \int \left(R_{ik} - 0.5 g_{ik} R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\, d^4x + \int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\, d^4x$ (*). Для роботи далі, треба порахувати варіацію тензора Річчі (співвідношення Палатіні): $\delta R_{ik} = \underline{\frac{\partial \delta\Gamma^\alpha_{i\alpha}}{\partial x^k}} - \underline{\underline{\frac{\partial \delta\Gamma^\alpha_{ik}}{\partial x^\alpha}}} + \underline{\underline{\Gamma^\beta_{i\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\beta k}}} + \Gamma^\alpha_{\beta k}\delta\Gamma^\beta_{i\alpha} - \underline{\Gamma^\beta_{ik}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\delta\Gamma^\beta_{ik} =$ (згрупуємо для утворення коваріантної похідної від симв. Кріст.) $= \left(\frac{\partial \delta\Gamma^\alpha_{i\alpha}}{\partial x^k} - \Gamma^\beta_{ik}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{\alpha k}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} \right) -$

$- \left(\frac{\partial \delta\Gamma^\alpha_{ik}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\beta_{i\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\beta k} - \Gamma^\beta_{k\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{i\beta} \right) + \left(\Gamma^\alpha_{\beta k}\delta\Gamma^\beta_{i\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\delta\Gamma^\beta_{ik} \right) = \left(\delta\Gamma^\alpha_{i\alpha}\right)_{;k} - \left(\delta\Gamma^\alpha_{ik}\right)_{;\alpha}$. Тут було використано, що остання дужка в передостанньому виразі рівна нулю та припущення, що $\delta\Gamma^k_{ij}$ є тензором. Це так, бо $\Gamma^\alpha_{\beta k}\delta\Gamma^\beta_{i\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\delta\Gamma^\beta_{ik} = \; = \Gamma^\alpha_{\beta k}\delta\Gamma^\beta_{i\alpha} - \underline{\delta^k_\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta k}\underline{\delta\Gamma^\beta_{ik}} = \Gamma^\alpha_{\beta k}\delta\Gamma^\beta_{i\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta k}\delta\Gamma^\beta_{i\alpha} = 0$. Тензорність же легко зрозуміти, оскільки символи Кріст. виражають зміну вектора при паралельному перенесенні в неск. близьку точку як $\Gamma^i_{kl} A_k dx^l$. Тому $\delta\Gamma^i_{kl} A_k dx^l$ є різницею двох векторів, що отримано паралельними перенесеннями в одну й ту саму точку, тобто є вектором, а тому $\delta\Gamma^i_{kl}$ є тензором. Підставляємо все отримане та інтегруємо частинами відносно похідних. В (*) буде інтеграл $\int g^{ik}\left(\left(\delta\Gamma^\alpha_{i\alpha}\right)_{;k} - \left(\delta\Gamma^\alpha_{ik}\right)_{;\alpha}\right)\sqrt{-g}\, d^4x$. Покажемо, що цей інтеграл рівний нулю: $\left(\delta\Gamma^\alpha_{i\alpha}\right)_{;k} = u; \;\; g^{ik}\sqrt{-g} = v.$

$\left(g^{ik}\sqrt{-g}\right)_{;\alpha} = g^{ik}\left(\sqrt{-g}\right)_{;\alpha} = g^{ik}\left(\partial\sqrt{-g}/\partial x^\alpha - \sqrt{-g}\,\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\right) = g^{ik}\left(\partial\sqrt{-g}/\partial x^\alpha - (1/2g)\sqrt{-g}\left(\partial g/\partial x^\alpha\right)\right)$

$= 0$. Отже, залишилось лише $\delta S_g = \int \left(R_{ik} - 0.5 g_{ik} R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\, d^4x$. Для S_m можна проробити все аналогічне, отримаємо $\delta S_m = \int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\, d^4x$, де T_{ik} — тензор енергії-імпульсу, який є

тензорною характеристикою розподілу матерії в системі. Тут вводиться постулат, що обидва отримані рівняння мають бути взаємоузгоджені з точністю до сталої, тобто $\delta\left(S_g + \kappa S_m\right) = 0.$ Або ж $R_{ik} - 0.5 g_{ik} R = -\kappa T_{ik}$. Вираз зліва називають тензором Ейнштейна. Коефіцієнт к можна знайти при переході до Ньютонових рівнянь: $\kappa = 8\pi G / c^4.$ Зробимо згортку з метричним тензором: $R_i^k - 0.5\delta_i^k R = -\kappa T_i^k$, та спростимо за індексами: $R = \kappa T$, $T = \mathrm{Tr} T$. Звідси можна отримати аналогічне рівняння у вигляді $R_{ik} = -\kappa\left(T_{ik} - 0.5 g_{ik} T\right).$ Якщо порівнювати з ЕМ, то все це мона вважати означенням тензора матерії T_i^k, аналогічно до рівнянь $\Delta\phi = -4\pi\rho,$ $div\, E = 4\pi\rho.$ Рівняння Максвела не дає нічого, крім того, що де дівергенція ненульова, там присутній заряд, тобто заряд не змушує електричний вектор мати ненульову дивіргенцію, він є нею. Тут теж матерія не змушує бути ненульовим тензор Ейнштейна, вона породжена ним.

11. Одержання рівняння руху в гравітаційному полі із рівняння гравітаційного поля (29)

Візьмемо коваріантну похідну від лівої частини рівняння поля $R_{ik}-0.5g_{ik}R=-\kappa T_{ik}$ і покажемо, що вона рівна нулю за допомогою тотожності Б'янкі: $R_{ijkl;m}+R_{ijmk;l}+R_{ijlm;k}=0\,|\,g^{il}g^{jk}$. Результатом згортки матимемо $g^{jk}R_{jk;m}-g^{il}g^{jk}\left(R_{ijkm;l}+R_{jilm;k}\right)=R_{;\,m}-g^{il}R_{im;l}-g^{jk}R_{jm;k}$. В останньому доданку замінимо $i\leftrightarrow j,k\leftrightarrow l$. Тоді отримаємо $R_{;\,m}-2g^{il}R_{im;l}=R_{;m}-2R^{k}_{m;k}=0$. За теоремою Річчі $g_{im;k}=0$. Тоді останній вираз можна переписати як $\left(R^{k}_{m}-0.5\delta^{k}_{m}R\right)_{;k}=\left(g_{im}R^{ik}-0.5g_{im}g^{ik}R\right)_{;k}=$ $=\left(R^{ik}-0.5g^{ik}R\right)_{;k}=0$. Довели. Це дає підставу записати необхідну умову інтегровності рівнянь поля у вигляді $0=T^{ik}_{;k}=\partial T^{ik}/\partial x^{k}+\Gamma^{k}_{mk}T^{im}+\Gamma^{i}_{lk}T^{lk}=\partial T^{ik}/\partial x^{k}+(1/2g)\left(\partial g/\partial x^{k}\right)T^{ik}+$ $+\Gamma^{i}_{lk}T^{lk}=\dfrac{1}{\sqrt{-g}}\dfrac{\partial}{\partial x^{k}}\left(\sqrt{-g}T^{ik}\right)+\Gamma^{i}_{lk}T^{lk}=0$. Це можна трактувати як 4-дивіргенцію. Тут рівність нулю є суть збереження енергії. Розглянемо деяке суцільне макроскопічне тіло. Для нього $T^{ik}=\mu c^{2}\left(\partial x^{i}/\partial s\right)\left(\partial x^{k}/\partial s\right)$, де μ — густина маси щодо рухомої СК, похідні беруться від 4-вектора координати по інтервалу (*скоріш за все*, це компоненти 4-швидкості). Підставимо це в отриманий вище вираз для тензора і проінтегруємо за фізичним об'ємом (гіперплощина $t=const$), таким, що на межі тензор є нульовим. При інтегруванні зникнуть 3 компоненти першого доданку. Отримаємо $\dfrac{d}{dt}\int\mu_{0}cu^{i}u^{4}\sqrt{-g}dV+\int\Gamma^{i}_{lk}\mu_{0}c^{2}u^{l}u^{k}\sqrt{-g}dV=0\,(\mu_{0}=\gamma\mu)$. Знайти отриманий інтеграл можна за допомогою рівняння неперервності $\left(\partial/\partial x^{k}\right)\left(\sqrt{-g}\mu_{0}cu^{k}\right)=0$. Інтегруючи його за тою самою ж областю, на межі якої $\mu=0$, отримаємо $\dfrac{d}{dt}\int\mu_{0}u^{0}\sqrt{-g}dV=0$. Тобто вираз під похідною за часом є сталою величиною. Для одної матеріальної точки $\mu_{0}=m_{0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0})$, і замінивши $dt\to u^{4}ds/c$, отримаємо

$$\frac{d}{dt}\int\mu_{0}cu^{i}u^{4}\sqrt{-g}dV+\int\Gamma^{i}_{lk}\mu_{0}c^{2}u^{l}u^{k}\sqrt{-g}dV=\frac{d}{dt}\left(u^{i}\int\mu_{0}cu^{4}\sqrt{-g}dV\right)+\left(\int\mu_{0}c^{2}\sqrt{-g}dV\right)\Gamma^{i}_{lk}u^{l}u^{k}=$$

(маємо право винести, бо все це відбувається в точці)

$$=\frac{du^{i}}{dt}\int\mu_{0}cu^{4}\sqrt{-g}dV+\left(\int\mu_{0}c^{2}\sqrt{-g}dV\right)\Gamma^{i}_{lk}u^{l}u^{k}.$$

Врахувавши, що $u^{4}=c\dfrac{dt}{ds}$, отримаємо

$$\int\mu_{0}c^{2}\sqrt{-g}dV\left(\frac{du^{i}}{ds}+\Gamma^{i}_{lk}u^{l}u^{k}\right)=0.$$

Це означає, що вираз в дужках рівний нулю. Тобто отримали рівняння $\dfrac{du^{i}}{ds}+\Gamma^{i}_{lk}u^{l}u^{k}=\dfrac{d^{2}x^{i}}{ds^{2}}+\Gamma^{i}_{lk}\dfrac{dx^{i}}{ds}\dfrac{dx^{k}}{ds}=0$ що є явною формою геодезичних ліній. Тобто отримали, що рівняння руху матеріальної точки збігається з рівнянням геодезичної лінії.

12. Одержання закону Ньютона в результаті граничного переходу релятивістської теорії гравітаційного поля. (30)

В рівнянні $R_{ik}-0.5g_{ik}R=-\kappa T^{ik}$ залишається невідомою стала к. Її можна знайти, якщо вимагати, аби рівняння гравітаційного поля давали в першому наближенні закон Ньютона та рівняння Пуасона. Тобто маємо отримати $d^2x^i/dt^2=-d\Phi/dx^i$, $\Delta\Phi=4\pi G\mu$, де μ — густина гравітаційної маси. Виходити будемо з рівняння руху по геодезичним (отримано в білеті **11**): $\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{lk}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$. Будемо розглядати випадок слабких полів, коли геометрія простору-часу слабко відрізняється від псевдоевклідової: $g_{ik}=\gamma_{ik}+h_{ik}$. Доданок h_{ik} і його перші похідні вважаємо малими і обмежимось першими порядками мализни. Оскільки $ds^2=(1+h_{11})\left(dx^1\right)^2+(1+h_{22})\left(dx^2\right)^2+(1+h_{33})\left(dx^3\right)^2+(-1+h_{44})\left(dx^4\right)^2=$ (все інше менших порядків) $=(-1+h_{44})c^2dt^2\left(1+\frac{1+h_{11}}{-1+h_{44}}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\ldots\right)\approx c^2dt^2(-1+h_{44})$ — метричний тензор з одною компонентою. Це дасть $\frac{d^2x^i}{dt^2}=-c^2\Gamma^i_{44}$, $x^4=ct, i=1,2,3.$ Символ Крістофеля: $\Gamma^\sigma_{44}=g^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial g_{\alpha4}}{\partial x^4}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^\alpha}\right)\approx\frac{1}{c}\frac{\partial g_{\sigma4}}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{44}}{\partial x^\sigma},\sigma=1,2,3.$ Тоді маємо $\frac{d^2x^i}{dt^2}=-c^2\frac{1}{2}\frac{\partial g^{44}}{\partial x^i}\Rightarrow$ $\Phi=-\frac{1}{2}c^2(g_{44}+1)$ (такий вибір потенціалу обумовлено тим, що тоді отримаємо рівняння Ньютона). Для завершення доведення, треба показати, що потенціал у такій формі задовольняє рівнянню Пуасона. Візьмемо тензор інерції-імпульсу у формі $T^{ik}=\mu c^2\left(\partial x^i/\partial s\right)\left(\partial x^k/\partial s\right)$. Відоме піввідношення $R_{ik}=-\kappa\left(T_{ik}-0.5g_{ik}T\right)$. Якщо знехтувати всіма величинами порядку v/c, то ненульовим залишиться лише $T_{44}=\mu c^2$. Тоді $T=g^{ik}T_{ik}=g^{44}T_{44}=-\mu c^2$. Тоді $R_{44}=-0.5\kappa\mu c^2$. З іншого боку $R_{ik}=\frac{\partial\Gamma^\alpha_{i\alpha}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^\alpha_{ik}}{\partial x^\alpha}+\Gamma^\beta_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{k\beta}-\Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}$. Знехтувавши похідними за часом і добутками, прийдемо до $R_{44}=-\partial\Gamma^i_{44}/\partial x^i$. Оскільки $\Gamma^i_{44}=-0.5\partial g_{44}/\partial x^i$, отримаємо $R_{44}=0.5\partial^2g_{44}/\partial\left(x^i\right)^2\equiv0.5\Delta g_{44}$. Підставивши елемент метричного тензору через потенціал, отримаємо $R_{44}=-\Delta\Phi/c^2\equiv-0.5\kappa\mu_0c^2$. Отже, $\Delta\Phi=0.5\kappa\mu_0c^4$ & $\Delta\Phi=4\pi G\mu_0\Rightarrow\kappa=8\pi G/c^4$.

Висновки. Маємо рівняння гравітаційного поля за наявності матерії $R_{ik}-0.5g_{ik}R=-\left(8\pi G/c^4\right)T^{ik}$. Оскільки коефіцієнт к вийшов додатнім, то маємо гравітаційне притягання, а не відштовхування. Окрім цього можна зробити висновок, що наявність матерії впливає на середовище в бік зменшення енергії простору. Наразі рівняння гравітаційного поля часто записують у вигляді $R_{ik}-0.5g_{ik}R+\Lambda g_{ik}=-\left(8\pi G/c^4\right)T^{ik}$ із так званою сталою Всесвіту.