5. Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором (24)

Докажем, что ковариантная производная от метрического тензора g_{ik} равна нулю. Для этого заметим, что для вектора DA_i, как и для всякого вектора, должно иметь место соотношение: $DA_i = g_{ik}DA^k$. С другой стороны, $A_i = g_{ik}A^k$, и потому $DA_i = D\left(g_{ik}A^k\right) = g_{ik}DA^k + A^k Dg_{ik}$. Сравнивая с $DA_i = g_{ik}DA^k$, имеем в виду произвольности вектора A^i: $Dg_{ik} = 0$. Поэтому и ковариантная производная $g_{ik\,;\,l} = 0$. Таким образом, при ковариантном дифференцировании g_{ik} надо рассматривать как постоянные. Равенством $g_{ik\,;\,l} = 0$ можно воспользоваться для того, чтобы выразить символы Кристоффеля Γ^i_{kl} через метрический тензор g_{ik}. Для этого напишем согласно общему определению ковариантной производной: $g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl} = 0$. Таким образом, производные от g_{ik} выражаются через символы Кристоффеля. Напишем эти производные, переставляя индексы i, k, l: $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl}$, $\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik}$, $-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \Gamma_{l,ki} + \Gamma_{k,li}$. Взяв полусумму этих равенств, находим (помня, что $\Gamma_{i,kl}$=$\Gamma_{i,lk}$): $\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)$. Отсюда имеем для символов $\Gamma^i_{kl} = g^{lm}\Gamma_{m,kl}$: (1) $\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right)$. Эта формулы и дают искомые выражения символов Кристоффеля через метрический тензор. Выведем полезное для дальнейшего выражение для упрощенного символа Кристоффеля Γ^i_{kl}. Розкладемо визначник метр. тензора за мінорами: $g_{ik}M^{lk} = \delta^l_i g \;\Leftrightarrow g_{(i)k}M^{(i)k} = g$. Оскільки $g_{ik}g^{kl} = \delta^l_i$, то $M^{lk} = gg^{lk}$. Тоді можемо обчислити похідну $\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial g_{ij}}\left(g_{ik}M^{ik}\right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}M^{ij} = gg^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ (2). Из (1) имеем: $\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m}\right)$. Меняя местами индексы m и i в третьем и первом членах в скобках, видим, что оба эти члена взаимно сокращаются, так что: $\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{im}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}$ или согласно (2): (3) $\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}$. Наконец, укажем, что производные от g^{ik} тоже могут быть выражены через величины Γ^i_{kl}. Именно, из тождества $g^{ik}_{;l} = 0$ непосредственно следует, что: $\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^l} = -\Gamma^i_{ml}g^{mj} - \Gamma^j_{ml}g^{im}$.

6. Тензор Рімана-Крістофеля. (25)

Нехай паралельне перенесення вектора h_ν не залежить від шляху. Тоді буде зміна лише від самого перенесення: $dh_\nu = \delta h_\nu$. Тоді $\frac{\partial h_\nu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda = \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} h_\alpha dx^\lambda$. Це означає, що векторне поле h_ν задовольняє рівнянню в частинних похідних $\frac{\partial h_\nu}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} h_\alpha$. Якщо паралельне перенесення довільного вектора A^i не залежить від шляху, то таку афінну в'язь будемо називати інтегровною (мішані похідні рівні між собою). Щоб записати це, зауважимо, що $\frac{\partial h_\nu}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} h_\alpha$,

$$\frac{\partial h_\nu}{\partial x^\mu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu} h_\alpha, \qquad \Rightarrow 0 = \frac{\partial^2 h_\nu}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_\nu}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} h_\alpha\right) - \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\Gamma^\alpha_{\nu\mu} h_\alpha\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda}\right) h_\alpha + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\lambda}.$$

Останній вираз можна записати у вигляді

$$0 = \left(\frac{\partial \Gamma^\beta_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\beta_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}\Gamma^\beta_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\Gamma^\beta_{\alpha\lambda}\right) h_\beta = R^\beta_{\nu\mu\lambda} h_\beta.$$

Оскільки остання рівність має виконуватись за довільного hβ, то

$R^\beta_{\nu\mu\lambda} = 0.$

Таким чином, умова інтегровності симетричної афінної форми визначається рівністю нулю

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^\alpha_{jl}\Gamma^i_{\alpha k} - \Gamma^\alpha_{jk}\Gamma^i_{\alpha l}.$$

тензору 4 рангу Він називається тензором кривини або тензором Рімана-Крістофеля. У викривленому просторі (наприклад, гравітацією) він не рівний нулю. За його властивостями див. **7**

7. Властивості тензора Рімана – Крістоффеля. Тотожність Б'янки. (26)

Тензор Р.-К. (або тензор кривини) визначає інтегровність симетричної афінної форми: вона інтегровна, коли $R^i_{jkl} = \partial\Gamma^i_{jl}/\partial x^k - \partial\Gamma^i_{jk}/\partial x^l + \Gamma^i_{hk}\Gamma^n_{jl} - \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{jk} = 0$. ДАЛІ ДЛЯ СКОРОЧЕННЯ ШПОРИ $\Gamma^\alpha_{hk}\Gamma^n_{jl} - \Gamma^\alpha_{nl}\Gamma^n_{jk} \equiv Y$!!! 1)Легко побачити, що виконується властивість $R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}$.2)Опустимо індекси: $R_{ijkl} = g_{i\alpha} R^\alpha_{jkl}$. Покомпонентно: $\Gamma^i_{kl} = g^{ij}\Gamma_{j,kl} = 1/2\, g^{ij}\left(\partial g_{jk}/\partial x^l + \partial g_{jl}/\partial x^k - \partial g_{kl}/\partial x^j\right)$. Тоді

$$R_{ijkl} = g_{i\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta j}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{\beta l}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^\beta}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x^l}\left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\beta k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\beta}\right)\right] + Y\right\} =$$

$$= \frac{g_{i\alpha}}{2}\left\{\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^k}(.) + g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 g_{\beta j}}{\underline{\partial x^k \partial x^l}} + \frac{\partial^2 g_{\beta l}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k \partial x^\beta}\right) - \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^l}(.) - g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 g_{\beta j}}{\underline{\partial x^l \partial x^k}} + \frac{\partial^2 g_{\beta k}}{\partial x^l \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^l \partial x^\beta}\right) + Y\right\} =$$

Підкреслене скоротили. Похідні беремо за теоремою Річчі $g^{ij}_{;l} = \partial g^{ij}/\partial x^l + g^{\alpha j}\Gamma^i_{\alpha l} + g^{i\alpha}\Gamma^j_{\alpha l} = 0$.

$$\Rightarrow \quad = g_{i\alpha}\left\{-\left(\Gamma^\alpha_{\sigma k} g^{\sigma\beta} + \Gamma^\beta_{\sigma k} g^{\alpha\sigma}\right)\Gamma_{\beta,jl} + \left(\Gamma^\alpha_{\sigma l} g^{\sigma\beta} + \Gamma^\beta_{\sigma l} g^{\alpha\sigma}\right)\Gamma_{\beta,jl} + \frac{g^{\alpha\beta}}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\beta l}}{\partial x^k \partial x^l} - \ldots\right) + Y\right\} = \quad \text{В}$$

третій дужці буде $g_{i\alpha}g^{\alpha\beta}=\delta_i^\beta$, тому маємо $=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\beta l}}{\partial x^k\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k\partial x^i}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l\partial x^j}+\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^l\partial x^i}\right)+$

$$+g_{i\alpha}\left(-\underline{\Gamma^\alpha_{\sigma k}\Gamma^\sigma_{jl}}-\Gamma^\beta_{\sigma k}g^{\alpha\sigma}\Gamma_{\beta,jl}+\underline{\Gamma^\alpha_{\sigma l}\Gamma^\sigma_{jk}}+\Gamma^\beta_{\sigma l}g^{\alpha\sigma}\Gamma_{\beta,jk}+\underline{\Gamma^\alpha_{\sigma k}\Gamma^\sigma_{jl}}-\underline{\Gamma^\alpha_{\sigma l}\Gamma^\sigma_{jk}}\right)=\frac{(.)}{2}+\Gamma^\beta_{il}\Gamma_{\beta,jk}-\Gamma^\beta_{ik}\Gamma_{\beta,jl}=$$

$$=\frac{(.)}{2}+g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\beta_{il}\Gamma^\alpha_{jk}-\Gamma^\beta_{ik}\Gamma^\alpha_{jl}\right)=\frac{(.)}{2}+g_{\alpha\beta}\delta^\beta_j\delta^j_\beta\delta^i_j\delta^j_i\left(\Gamma^\beta_{il}\Gamma^\alpha_{jk}-\Gamma^\beta_{ik}\Gamma^\alpha_{jl}\right)=\frac{(.)}{2}+g_{i\alpha}\left(\Gamma^\alpha_{\beta k}\Gamma^\beta_{jl}-\Gamma^\alpha_{\beta l}\Gamma^\beta_{jk}\right).$$

Звідси очевидні такі властивості: $R_{ijkl}=-R_{ijlk}$, $R_{ijkl}=-R_{jikl}$, $R_{ijkl}=R_{klij}$, $R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0.$ Також виконується $R^i_{jkl}+R^i_{klj}+R^i_{ljk}=0.$ Компоненти ензора Р.-К. з більш, ніж двома однаковими індексами тотожно рівні нулю. Тому повна кількість ненульових компонент тензора рівна $n^2(n^2-1)/12$ (взагалі-то з міркувань комбінаторики), де n — вимірність простору.

В галілеєвій СК має місце універс. співвідношення $R^i_{jkl;m}+R^i_{jmk;l}+R^i_{jim;k}=0,$ відоме під назвою **тотожності Б'янки.** В галілеєвій СК Г=0, але не рівні нулю похідні від тензорів Крістофеля. Оскільки ковар. похідна від метр. тензора рівна нулю, то так само виконується $R_{i,jkl;m}+R_{i,jmk;l}+R_{i,jim;k}=0.$ Перевірити тотожність Б'янки можна записавши, що $R^i_{jkl;m}=\partial R^i_{jkl}/\partial x^m=\partial^2\Gamma^i_{jl}/\partial x^m\partial x^k+\partial^2\Gamma^i_{jk}/\partial x^m\partial x^l.$ Підставимо у тотожність й все має скоротитись. ІНФА ДАЛІ Є У ПІДРУЧНИКУ АЛЕ ВІДСУТНЯ У ЛЕКЦІЯХ . З тотожності Б'янки легко отримати так званий тензор Ейнштейна. Домножимо тотожність у коваріантній формі на $g^{il}g^{jk}$. Використавши кососиметричні властивості R_{ijkl} та позначивши $R=g^{ij}R_{ij}$ (R_{ij} — тензор Річчі) отримаємо $g^{jk}R_{jk;m}-g^{il}R_{im;l}-g^{jk}R_{jm;k}=0\Rightarrow$

$R_{;\,m}-2R^k_{m;k}=0\Rightarrow\left(R^k_m-\frac{1}{2}\delta^k_mR\right)_{;\,k}=0.$ Тензором Ейнштейна називають вираз у дужках.

8. Терзор Річчі. Рівняння гравітаційного поля за відсутності матерії. (27)

Тензор Річчі отримаємо з тензора Рімана (кривини) $R^i_{klm}=\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}+\Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km}-\Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}.$

Г- це в'язі, або символи Крістофеля - коефіцієнти розкладу коваріантної матриці координатних векторів $\partial_i=\partial/\partial x^i$ по базису $\nabla_{\partial_j}\partial_i=\Gamma^k_{ij}\partial_k$. Перейдемо від змішаних компонент тензору до коваріантних: $R_{iklm}=g_{in}R^n_{klm}.$ ДАЛІ ДЛЯ СКОРОЧЕННЯ ШПОРИ $\Gamma^\alpha_{hk}\Gamma^n_{jl}-\Gamma^\alpha_{nl}\Gamma^n_{jk}\equiv Y$!!! Покомпонентно: $\Gamma^i_{kl}=g^{ij}\Gamma_{j,kl}=1/2\,g^{ij}\left(\partial g_{jk}/\partial x^l+\partial g_{jl}/\partial x^k-\partial g_{kl}/\partial x^j\right).$

Тоді

$$R_{ijkl}=g_{i\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta j}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{\beta l}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^\beta}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta j}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{\beta k}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\beta}\right)\right]+Y\right\}=$$

$$=\frac{g_{i\alpha}}{2}\left\{\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^k}(.)+g^{\alpha\beta}\left(\underline{\frac{\partial^2 g_{\beta j}}{\partial x^k\partial x^l}}+\frac{\partial^2 g_{\beta l}}{\partial x^k\partial x^j}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k\partial x^\beta}\right)-\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^l}(.)-g^{\alpha\beta}\left(\underline{\frac{\partial^2 g_{\beta j}}{\partial x^l\partial x^k}}+\frac{\partial^2 g_{\beta k}}{\partial x^l\partial x^j}-\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^l\partial x^\beta}\right)+Y\right\}=$$

Підкреслене скоротили. Похідні беремо за теоремою Річчі $g^{ij}_{;\,l}=\partial g^{ij}/\partial x^l+g^{\alpha j}\Gamma^i_{\alpha l}+g^{i\alpha}\Gamma^j_{\alpha l}=0.$

$$\Rightarrow \quad = g_{i\alpha}\left\{-\left(\Gamma^{\alpha}_{\sigma k}g^{\sigma\beta}+\Gamma^{\beta}_{\sigma k}g^{\alpha\sigma}\right)\Gamma_{\beta,jl}+\left(\Gamma^{\alpha}_{\sigma l}g^{\sigma\beta}+\Gamma^{\beta}_{\sigma l}g^{\alpha\sigma}\right)\Gamma_{\beta,jl}+\frac{g^{\alpha\beta}}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\beta l}}{\partial x^k\partial x^l}-\ldots\right)+Y\right\}=$$

В третій дужці буде $g_{i\alpha}g^{\alpha\beta}=\delta_i^{\beta}$, тому маємо $=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\beta l}}{\partial x^k\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k\partial x^i}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l\partial x^j}+\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^l\partial x^i}\right)+$

$$+g_{i\alpha}\left(\underline{-\Gamma^{\alpha}_{\sigma k}\Gamma^{\sigma}_{jl}}-\Gamma^{\beta}_{\sigma k}g^{\alpha\sigma}\Gamma_{\beta,jl}+\underline{\Gamma^{\alpha}_{\sigma l}\Gamma^{\sigma}_{jk}}+\Gamma^{\beta}_{\sigma l}g^{\alpha\sigma}\Gamma_{\beta,jk}+\underline{\Gamma^{\alpha}_{\sigma k}\Gamma^{\sigma}_{jl}}-\underline{\Gamma^{\alpha}_{\sigma l}\Gamma^{\sigma}_{jk}}\right)=\frac{(.)}{2}+\Gamma^{\beta}_{il}\Gamma_{\beta,jk}-\Gamma^{\beta}_{ik}\Gamma_{\beta,jl}=$$

$$=\frac{(.)}{2}+g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^{\beta}_{il}\Gamma^{\alpha}_{jk}-\Gamma^{\beta}_{ik}\Gamma^{\alpha}_{jl}\right)=\frac{(.)}{2}+g_{\alpha\beta}\delta^{\beta}_{j}\delta^{j}_{\beta}\delta^{i}_{j}\delta^{j}_{i}\left(\Gamma^{\beta}_{il}\Gamma^{\alpha}_{jk}-\Gamma^{\beta}_{ik}\Gamma^{\alpha}_{jl}\right)=\frac{(.)}{2}+g_{i\alpha}\left(\Gamma^{\alpha}_{\beta k}\Gamma^{\beta}_{jl}-\Gamma^{\alpha}_{\beta l}\Gamma^{\beta}_{jk}\right).$$

Из тензора кривизны можно путем упрощения построить тензор второго ранга, який називають тензором Річчі: $R_{ij}=R^{\alpha}_{ij\alpha}$.

Процедура згортки $R_{ij}=R^{k}_{ijk}=R^{1}_{ijk}+\ldots$, $R^{l}_{ijk}(x)=\frac{\partial x^l}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^i}\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^j}\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^k}R'^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}(x')$,

$R_{ik}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x^k} & \frac{\partial}{\partial x^l}\\ \Gamma^{\alpha}_{ik} & \Gamma^{\alpha}_{i\alpha}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\Gamma^{\alpha}_{\beta k} & \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\\ \Gamma^{\beta}_{ik} & \Gamma^{\beta}_{i\alpha}\end{vmatrix}$. Цей тензор є симетричним, при чьому з нього можна отримати інваріант $R=g^{ik}R_{ik}$. Тензор Річчі можна представити й в іншій формі. Для цього випишемо наступне.

$g=g_{i\alpha}G^{i\alpha}$. $\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}=\frac{\partial\left(g_{i\alpha}G^{i\alpha}\right)}{\partial g_{ij}}=g_{i\alpha}\frac{\partial G^{i\alpha}}{\partial g_{ij}}+G_{i\alpha}\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial g_{ij}}$ (сума по α при фіксованому i). Оскільки мінор $G^{i\alpha}$ не містить компоненти g_{ij}, перший доданок рівний нулю. В похідній другого доданку елементи метричного тензора незалежні, тому похідна дає символ Кронікера. Отже, $\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}=G^{i\alpha}\delta^{j}_{\alpha}=G^{ij}$. Тепер можемо порахувати $\frac{\partial g}{\partial x^i}=\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}=G^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}=\left|G^{\alpha\beta}=gg^{\alpha\beta}\right|=$

$=gg^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}$. Останню похідну можна виразити через символи Крістофеля другого роду завдяки їх симетрії. Тоді $\frac{\partial g}{\partial x^i}=gg^{\alpha\beta}\left(g_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha i}+g_{\gamma\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\beta i}\right)=g\left(\Gamma^{\alpha}_{\alpha i}+\Gamma^{\beta}_{\beta i}\right)=2g\Gamma^{\alpha}_{\alpha i}$. Тоді можемо записати $\Gamma^{\alpha}_{\alpha i}=\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^i}$ (тут враховано, що $g<0$). Це дозволяє переписати тензор Річчі у вигляді

$R_{ik}=\frac{\partial^2\ln\sqrt{-g}}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma^{\alpha}_{\beta k}\Gamma^{\beta}_{i\alpha}-\Gamma^{\beta}_{ik}\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}=R_{ki}$ В чотиривимірному многовиді поклавши $R_{ij}=0$ отримаємо 10 дифурів у частинних похідних, які були прийняті Ейнштейном як рівняння, що описують поле тяжіння без наявності матерії у загальній теорії відносності. Rik=0 р-ня частинки у гравітаційному полі у вільному просторі.