1. Коваріантні і контраваріантні тензори. Симетризація і антисиметризація тензорів. (20)

Класи перетворень координат $T: X \to X'$ (тобто $x'^i = x'^i(x^1,\ldots,x^N)$), для яких якобіан $J = \left|\partial x'^i / \partial x^j\right| \neq 0$ називають допустимими. Вони утворюють групу, тобто для них виконуються умови: 1) $T_1: X \to X'$, $T_2: X' \to X'' \Rightarrow T_3 = T_2 \cdot T_1$. 2) Існує тотожнє перетворення $x'^i = x^i$. 3) З-н асоціативності $T_3(T_2T_1) = (T_3T_2)T_1$. 4) Існують обернені перетворення.

Розглянемо неперервну диференційовну функцію векторного аргументу $f\left(x^i\right)$ і побудуємо комплект її похідних $\partial f / \partial x^i$ — компоненти градієнта. Повна похідна має вигляд $df = \left(\partial f / \partial x^i\right) dx^i$. В новій СК комплект набуде вигляду $\partial f / \partial x'^i = \left(\partial f / \partial x^k\right) \partial x^k / \partial x'^i$. Будемо розглядати 4-вим. континуум. **Коваріантним** 4-вектором називають сукупність 4 величин A_i, які при перетворенні координат перетворюються за законом $A'_i(x') = \left(\partial x^k / \partial x'^i\right) A_k(x)$. Тепер розглянемо перетворення диференціалів. Нехай є дві близькі точки, різниця координат між якими $dx^i, i = \overline{1,4}$. В іншій СК будемо мати $dx'^i = \left(\partial x'^i / \partial x^k\right) dx^k$. **Контраваріантним** 4-вектором називають сукупність 4 величин A^i, які при перетворенні координат перетворюються за законом $A'^i(x') = \left(\partial x'^i / \partial x^k\right) A^k(x)$. Можна й узагальнити. Комплект величин, кількістю n^{r+s} в n-вим. просторі, що перетворюється за законом

$$A'^{j_1,\ldots,j_s}_{i_1,\ldots,i_r}(x') = \prod_{p=1}^{r} \frac{\partial x^{\alpha_p}}{\partial x'^{i_p}} \prod_{q=1}^{s} \frac{\partial x'^{j_q}}{\partial x^{\beta_q}} A^{j_1,\ldots,j_s}_{i_1,\ldots,i_r}(x)$$

називають мішаним тензором коваріантним r разів і контраваріантним s разів (r і s також означають відповідний ранг тензора). Можемо говорити, що скаляри — тензори нульового рангу, а вектори — першого. Існує наступна теорема: якщо всі компоненти тензора обертаються в нуль в одній СК, то вони будуть рівними нулю й в усіх інших допустимих СК. Це є відображенням інваріантності фізичних законів. Для тензорів однакової структури визначена операція **алгебраїчного додавання**. Комплект величин, що утворюється множенням кожного елемента одного тензора ковар. p разів і контрав. q разів на інший тензор, ковар. r разів і контрав. s разів, утворюють тензор, ковар. $p+r$ разів і контрав. $q+s$ разів, який називають **зовнішнім добутком**. **Згорткою** називають операцію прирівнювання певного коваріантного індекса контраваріантному в змішаному тензорі з підсумовуванням по ньому. Результат також буде тензором ковар. $p-1$ разів і контрав. $q-1$ разів. Якщо згортка застосовується до зовнішнього добутка двох тензорів, то результуючий тензор називають **внутрішнім добутком**. Можна виконати **піднімання і опускання** індексів за допомогою довільного симетричного, двічі ковар. або контравар. тензора a_{ij} або a^{ij}: $U_{ikl} = a_{im}T^m_{kl}$. В загальному випадку індекси переставляти не можна. Якщо н-д, $A^i_{jkl} = A^i_{kjl}$, то кажуть про тензор, **симетричний** по j і k (якщо рівність з мінусом — **антисиметричний**). Можна виконати **симетризацію**, н-д по j, l, m: $U^{ab}_{ijklms} = T^{ab}_{i(\,j|k|lm)s} = \frac{1}{2}\left(T^{ab}_{ijklms} + T^{ab}_{ilkmjs} + T^{ab}_{imkjls} + T^{ab}_{ilkjms} + T^{ab}_{ijkmls} + T^{ab}_{imkljs}\right)$ — всі можливі

перестановки по потрібним індексам. **Антисиметризація** аналогічно:

$$V_{ijklms}^{ab} = T_{i(\,j|k|lm)s}^{ab} = \frac{1}{2}\left(T_{ijklms}^{ab} + T_{ilkmjs}^{ab} + T_{imkjls}^{ab} - T_{ilkjms}^{ab} - T_{ijkmls}^{ab} + T_{imkljs}^{ab}\right).$$

2. Метричний тензор. Піднімання і опускання індексів за допомогою метричного тензора. (32)

Запишемо відстань між двома точками в псевдоевклідовій СК (галілеєвий простір та інтервал) $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = \begin{pmatrix} dx & dy & dz & cdt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ cdt \end{pmatrix} = \gamma_{ik} dx^i dx^j$. Отримали першу квадратичну форму, де $\gamma_{ij} = \gamma^{ij}$. Враховуючи вираз для перетворення координат $dx'^{\beta} = \left(\partial x'^{\beta} / \partial x^i\right) dx^i$, та те, що інтервал є інваріантом, перейдемо до нової СК: $ds^2 = dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} \left(\partial x'^{\alpha} / \partial x^i\right) \left(\partial x'^{\beta} / \partial x^j\right) dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$. Очевидно, що $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = g_{ji} dx^j dx^i = g_{ji} dx^i dx^j \Rightarrow g_{ij} = g_{ji}$. Очевидно функції координат g_{ij} утворюють тензор за означенням. Він має назву метричного, оскільки визначає усі основні метричні властивості евклідового простору.

Метричний тензор в n-вимірному просторі має $0.5n(n+1)$ незалежних компонент. Довільно вибрана система таких диференційних рівнянь у частинних похідних не має розв'язку, але якщо він є, то гарантовано існує перетворення координат, що приводить першу квадратичну форму до суми квадратів. Тобто утворений з них метричний тензор буде описувати евклідовий або псевдоевклідовий простір. Тензори g_{ij} та g^{ij} називають фундаментальними. Вони пов'язані співвідношенням $g^{ij} = G^{ij} / g \Leftrightarrow g^{ij} g_{kj} = \delta^i_k$, де G^{ij} — алгебраїчне доповнення елементу g_{ij} в детермінанті g. Тензор, отриманий внутрішнім добутком із будь-яким із фундаментальних тензорів, називається асоційованим із заданим вектором. Одна й та сама фізична величина може бути записана у ко- і контраваріантній формах із зв'язком $A_i = g_{ij} A^j$, таким чином вона задається двома асоційованими один з одним тензорами.

3. Коваріантне диференціювання. Символи Крістоффеля. (21)

Трьохіндексиними символами Крістофеля першого роду називають сукупність функцій $\Gamma_{ij,k} = 0.5\left(\partial g_{ik} / \partial x^j + \partial g_{jk} / \partial x^i - \partial g_{ij} / \partial x^k\right)$. Символи Крістофеля другого роду: $\Gamma^k_{ij} = g^{k\alpha} \Gamma_{ij,\alpha}$. Всього існує $0.5n^2(n+1)$ незалежних символів Крістофеля кожного роду для n-вимірного простору. Символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам: $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$, $\Gamma_{i,\,kl} = \Gamma_{i,\,lk}$. Формулы преобразования от одной системы координат к другой для символов Кристоффеля можно получить, сравнивая законы преобразования обеих частей равенств, определяющих любую из ковариантных производных, и требуя, чтобы эти законы для обеих частей были одинаковы. Простое вычисление приводит к формуле:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma'^m_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}.$$

Из этой формулы видно, что величины $\tilde{A}^i_{kl}$ ведут себя как тензоры лишь по отношению к линейным преобразованиям координат.

Псевдоріманoвий простір має континуальну природу, тому можемо ввести матаналіз для тензорних полів. Розглянемо диференціал коваріантного вектора $A_i = \left(\partial x'^k / \partial x^i\right) A'_k$. Отримаємо

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l.$$

Тобто це не тензор для нелінійних перетворень через доданок із мішаною похідною, і не вектор (бо вектор є тензором першого рангу). З іншого боку принцип эквивалентности требует, однако, чтобы надлежащим выбором системы координат можно было исключить гравитационное поле в данном бесконечно малом участке пространства. Хочемо утворити тензорну величину. Розглянемо трансляцію від точки P1 до P2. При цьому буде $A_i\left(x_i\right) \to A_i\left(x_i + dx_i\right)$. Для переходу до вектору треба перенести паралельним чином Ai з точки P1 в P2 і лише тоді виконувати порівняння. Приріст вектору за рахунок паралельного перенесення будемо позначати як $\delta A.$. Величина $DA_i = dA_i - \delta A_i$ є тензором. $\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^l$ — білінійна форма, де коефіцієнти в'язей Г (символи Крістофеля) є коефіцієнтами пропорційності, які залежать від коефіцієтів метрики. Маємо: $DA_i = \left(\partial A_i / \partial x^l - \Gamma^k_{il} A_k\right) dx^l \Leftrightarrow A_{i;\,l} = \partial A_i / \partial x^l - \Gamma^k_{il} A_k$. Ця величина називається коваріантною похідною. Взагалі, аналогічно мона ввести контраваріантну похідну, яка матиме зв'язок із коваріантною у вигляді $A^{i;k} = g^{kl} A_{i;l}$. Щоб показати, що коваріантна похідна є тензором, розглянемо перетворення похідної, врахувавши вираз для мішаної похідної через коефіцієнти Крістофеля: $\frac{\partial^2 x^m}{\partial y^i \partial y^j} = \Gamma^\gamma_{ij}\left(y\right) \frac{\partial x^m}{\partial y^\gamma} - \Gamma^m_{\alpha\beta}\left(x\right) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}$ (можна отримати виразивши перетворення символів Кристофеля при переході від x до y). Отже, $B_i\left(y\right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} A_\alpha$, $\frac{\partial B_i}{\partial y^j} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i \partial y^j} A_\alpha = \; = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\gamma_{ij}\left(y\right) \frac{\partial x^m}{\partial y^\gamma} A_\alpha - \Gamma^m_{\alpha\beta}\left(x\right) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} A_\alpha$. Оскільки $B_\gamma = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\gamma} A_\alpha$, маємо $B_{i;j} \equiv \frac{\partial B_i}{\partial y^j} - \Gamma^\gamma_{ij}\left(y\right) B_\gamma = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^m_{\alpha\beta}\left(x\right) A_\alpha \right)$. Таким чином, коваріантна похідна дійсно є тензором. Можна вивести загальну формулу $A^{j_1,..,j_s}_{i_1,..,i_r;l}\left(x\right) = \frac{\partial}{\partial x^l} A^{j_1,..,j_s}_{i_1,..,i_r} - \Gamma^\alpha_{i_1 l} A^{j_1,..,j_s}_{\alpha,i_2,..,i_r} - \ldots - \Gamma^\alpha_{i_r l} A^{j_1,..,j_s}_{i_1,..,i_{r-1},\alpha} + \Gamma^{j_1}_{\alpha l} A^{\alpha,j_2,..,j_s}_{i_1,..,i_r} + \ldots + \Gamma^{j_s}_{\alpha l} A^{j_1,..,j_{s-1},\alpha}_{i_1,..,i_r}$.

4. Коваріантна похідна метричного тензора. Теорема Річчі. (23)

$g_{ik} = \dfrac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{i}} \dfrac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{k}} \gamma_{\alpha\beta}$, $g_{ik}\ g^{kl} = \delta^{l}_{i}$. Для псевдорімановового простору:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Покажемо, що елементи метричних тензорів g_{ij} & g^{ij} ведуть себе як сталі величини при коваріантному диференціюванні (теорема Річчі). Маємо $A_i = g_{ik} A^k$. $DA_i = g_{ik} DA^k$. $D_i A_k = \left(D_i g_{kl}\right) A^l + g_{kl} D_i A^l \Rightarrow Dg_{ik} \equiv g_{ik;l} = 0$. Аналогічно для контраваріантної форми метричного тензора. Це означає, що їх можна виносити з-під знаку коваріантної похідної.