Питання 13

Запишемо р-ня Максвелла у системі СГС для плоскої хвилі (їх нескладно отримати і р-ня Максвелла підставивши $\vec{H} = \mathrm{Re}\{\vec{H}e^{-i\omega t}\}$, $\vec{E} = \mathrm{Re}\{\vec{E}e^{-i\omega t}\}$). Вважаємо, що сторонні струми і заряди $=0$.

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r},\omega) = -i\frac{\omega}{c}\vec{D}(\vec{r},\omega) \quad (1) \\ \mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},\omega) = i\frac{\omega}{c}\vec{H}(\vec{r},\omega) \quad (2) \end{cases}$$

середовище немагнітне: $\mu = 1$

$\vec{D}(\vec{r},\omega) = \varepsilon(\vec{r},\omega)\cdot\vec{E}(\vec{r},\omega)$, $\vec{j}_{ст} = 0$, $\rho_{ст} = 0$

Отримаємо спочатку хвильове рівняння для електричної компоненти. Для цього візьмемо rot від (2)

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},\omega) = i\frac{\omega}{c}\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r},\omega)$$

з рівняння (1)

(підставляємо)

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},\omega) \equiv \nabla\nabla\vec{E}(\vec{r},\omega) - \Delta\vec{E}(\vec{r},\omega)$$

, пам'ятаємо $\mathrm{rot}\vec{E} = \nabla\times\vec{E}$, $\nabla\vec{E} = \mathrm{div}\vec{E}$, $\nabla\nabla\vec{E} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{E})$

$$\nabla\nabla\vec{E}(\vec{r},\omega) - \Delta\vec{E}(\vec{r},\omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon(\vec{r},\omega)\cdot\vec{E}(\vec{r},\omega) \quad (3)$$

Оскільки $\rho_{ст} = 0$

$$\nabla\vec{D} = 4\pi\rho_{ст} = 0$$

$$\nabla\left(\varepsilon(\vec{r},\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega)\right) = 0 \Rightarrow \nabla\varepsilon(\vec{r},\omega)\cdot\vec{E}(\vec{r},\omega) + \varepsilon(\vec{r},\omega)\cdot\nabla\vec{E}(\vec{r},\omega) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\vec{E}(\vec{r},\omega) = -\frac{\nabla\varepsilon(\vec{r},\omega)}{\varepsilon(\vec{r},\omega)}\cdot\vec{E}(\vec{r},\omega) \quad (4)$$

Використовуючи (4), розрахуємо $\nabla\nabla\vec{E}(\vec{r},\omega)$:

$$\nabla\nabla\vec{E}(\vec{r},\omega) = \nabla\left(-\frac{\nabla\varepsilon(\vec{r},\omega)}{\varepsilon(\vec{r},\omega)}\cdot\vec{E}(\vec{r},\omega)\right) = -\nabla\left(\frac{\nabla\vec{E}(\vec{r},\omega)}{\varepsilon(\vec{r},\omega)}\right)\cdot\vec{E}(\vec{r},\omega) - \frac{\nabla\varepsilon(\vec{r},\omega)}{\varepsilon(\vec{r},\omega)}\cdot\nabla\vec{E}(\vec{r},\omega) \overset{(4)}{=}$$

$$= -\nabla\left(\frac{\nabla\varepsilon(\vec{r},\omega)}{\varepsilon(\vec{r},\omega)}\right)\cdot\vec{E}(\vec{r},\omega) + \left(\frac{\nabla\varepsilon(\vec{r},\omega)}{\varepsilon(\vec{r},\omega)}\right)^2\vec{E}(\vec{r},\omega) \quad (5)$$

Підставимо (5) → (3)

$$\Delta\vec{E} + \left\{\nabla\left(\frac{\nabla\varepsilon(\vec{r},\omega)}{\varepsilon(\vec{r},\omega)}\right) + \left(\frac{\nabla\varepsilon(\vec{r},\omega)}{\varepsilon(\vec{r},\omega)}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\cdot\varepsilon(\vec{r},\omega)\right\}\vec{E}(\omega,\vec{r}) = 0$$

$$\boxed{\Delta\vec{E}(\vec{r},\omega) + k^2(\vec{r},\omega)\,\vec{E}(\vec{r},\omega) = 0}$$ — хвильове р-ня для електричного поля

де $k^2(\vec{r},\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}\cdot\tilde{\varepsilon}(\vec{r},\omega)$,

$$\tilde{\varepsilon}(\vec{r},\omega) = \varepsilon(\vec{r},\omega) + \frac{c^2}{\omega^2}\left\{\nabla\left(\frac{\nabla\varepsilon(\vec{r},\omega)}{\varepsilon(\vec{r},\omega)}\right) - \left(\frac{\nabla\varepsilon(\vec{r},\omega)}{\varepsilon(\vec{r},\omega)}\right)^2\right\}$$

Тепер розглянемо хв. рівняння для магнітного поля.
Беремо rot від (1)

(6) $\quad rot\ rot\,\vec{H}(\vec{r},\omega) = -i\frac{\omega}{c}\,rot\,\vec{D}(\vec{r},\omega)$

$rot\ rot\,\vec{H} = \nabla\nabla\vec{H} - \Delta\vec{H}$, оскільки $\mu=1$, то $\nabla\vec{H}=0$, а тому $\nabla\nabla\vec{H}=0$

Відомо $\nabla\times(\varphi\vec{f}) = (\nabla\varphi)\times\vec{f} + \varphi(\nabla\times\vec{f})$, де φ – скалярне поле, $\vec{f}$ – векторне поле

$$\Downarrow$$

$$rot\,\vec{D}(\vec{r},\omega) = rot\left(\varepsilon(\vec{r},\omega)\cdot\vec{E}(\vec{r},\omega)\right) = \left(\nabla\varepsilon(\vec{r},\omega)\right)\times\vec{E}(\vec{r},\omega) + \varepsilon(\vec{r},\omega)\underbrace{\left[\nabla\times\vec{E}(\vec{r},\omega)\right]}_{(2)}$$

Підставимо все у (6)

$$-\Delta\vec{H} = -i\frac{\omega}{c}\left[\left(\nabla\varepsilon(\vec{r},\omega)\right)\times\vec{E}(\vec{r},\omega) + i\frac{\omega}{c}\cdot\varepsilon(\vec{r},\omega)\cdot\vec{H}(\vec{r},\omega)\right]$$

$$\Delta\vec{H} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\cdot\varepsilon(\vec{r},\omega)\cdot\vec{H}(\vec{r},\omega) = i\frac{\omega}{c}\left(\nabla\varepsilon(\vec{r},\omega)\right)\times\vec{E}(\vec{r},\omega)$$

далі я не знаю,
що робити з цим доданком.
Треба розмовляти з Вишуським