где $dk_\perp$ — приращение k в плоскости орбиты, нормальное к сечению поверхности Ферми [эта формула неявно содержится уже в соотношении (6.2)]. Равенства (9.2) и (9.5) дают (фиг. 154)

$$m_H^* = \frac{eH}{c}\frac{1}{2\pi}\frac{c\hbar}{eH}\oint\frac{dk}{v_\perp} = \frac{\hbar^2}{2\pi}\oint\frac{dk_\perp}{d\mathscr{E}}dk = \frac{\hbar^2}{2\pi}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\mathscr{E}}, \qquad (9.7)$$

где $\mathscr{A}$ — площадь, ограниченная орбитой, расположенной в плоскости, перпендикулярной магнитному полю **H**.

§ 2. Диамагнитный и циклотронный резонансы

Естественно предположить, что это периодическое движение электрона можно обнаружить с помощью резонанса с электромагнитным полем соответствующей частоты. Единственное условие состоит в том, что электрон должен совершить по крайней мере один оборот по орбите за время между двумя последовательными столкновениями. Довольно легко построить формальную теорию отклика системы на циркулярно поляризованную электромагнитную волну, распространяющуюся параллельно направлению магнитного поля. Удобно, например, ввести вместо составляющих вектора **k** новые переменные, характеризуя точку **k** с помощью:

1) энергии $\mathscr{E}(\mathbf{k})$ (в магнитном поле она остается постоянной);

2) проекции вектора **k** на направление магнитного поля, $k_{\mathbf{H}}$ (она также остается постоянной);

3) «фазовой переменной» ϕ, определяемой интегралом по орбите того же типа, как интеграл в (9.2), а именно

$$\phi = \omega_H\frac{c\hbar}{eH}\int^{\mathbf{k}}\frac{dk}{v_\perp}. \qquad (9.8)$$

Эта переменная удобна потому, что при наличии магнитного поля она автоматически возрастает с постоянной скоростью

$$\dot{\phi} = \omega_H \qquad (9.9)$$

и для одного полного оборота $\phi = 2\pi$.

Эти переменные можно использовать в качестве координат в кинетическом уравнении. Будем рассматривать неравновесную часть $g_{\mathbf{k}}$ в формуле (7.10) как функцию от $\mathscr{E}$, $k_{\mathbf{H}}$, ϕ. Как и в уравнении (8.84), введем время релаксации. Кроме того, в кинетическое уравнение надо добавить член

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{\text{mag}} = \dot{\phi}\frac{\partial g}{\partial\phi} = \omega_H\frac{\partial g}{\partial\phi}, \qquad (9.10)$$

описывающий влияние магнитного поля на распределение электронов. Последнее выражение эквивалентно использованному

в формуле (7.137), где магнитное поле предполагалось слабым, однако форма записи (9.10) более компактна.

Возьмем поле, меняющееся во времени с частотой ω, и пренебрежем пространственным изменением напряженности поля $\mathbf{E}$. Предположим также по аналогии с (8.86), что

$$g(\mathscr{E}, k_{\mathrm{H}}, \phi) = \left(-\frac{\partial f^0}{\partial \mathscr{E}}\right) \Phi(k_{\mathrm{H}})\, e^{i(\phi-\omega t)}, \tag{9.11}$$

т. е. что движение всего электронного распределения (если не каждого отдельного электрона) представляет собой вращение по орбите с частотой приложенного поля. Тогда кинетическое уравнение

$$e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\left(-\frac{\partial f^0}{\partial \mathscr{E}}\right) = \frac{g}{\tau} + \omega_H \frac{\partial g}{\partial \phi} + \frac{\partial g}{\partial t} \tag{9.12}$$

имеет решение

$$\Phi(k_{\mathrm{H}}) = \frac{e\tau \mathbf{v}\cdot\mathbf{E}}{1 + i(\omega_H - \omega)\tau}. \tag{9.13}$$

Как и прежде, добавка к функции распределения пропорциональна напряженности электрического поля (фиг. 155); теперь, однако, она не совпадает по фазе с внешним полем, если приложенная частота не совпадает с циклотронной частотой системы.

Проводя вычисления, аналогичные тем, которые привели нас к формуле (8.90), получаем, что металл будет вести себя так, как если бы его проводимость была равна

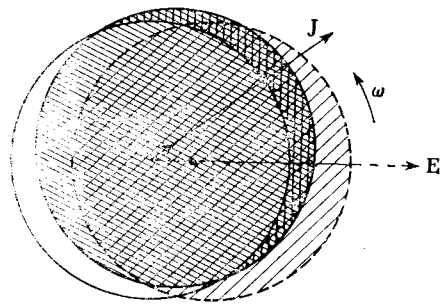
$$\sigma(\omega) = \sigma(0)\frac{1 - i(\omega_H - \omega)\tau}{1 + (\omega_H - \omega)^2\tau^2}. \tag{9.14}$$

Опыты по наблюдению поверхностного сопротивления, отражательной способности, поглощения и т. д. будут обнаруживать линию *диамагнитного резонанса* (ширины $1/\tau$) на частоте $\omega = \omega_H$. Аналогия между этим результатом и теорией оптического резонанса [см. (8.51)] очевидна. Для свободных электронов формулу (9.14) легко получить прямо из уравнения движения, однако результат (9.14) имеет бо́льшую общность. Правда, он не вполне точен для произвольной поверхности Ферми, когда предположение (9.11) означает пренебрежение высшими гармониками по переменной ϕ.

Формула (9.14) записана для циркулярно поляризованного луча, поворачивающегося *вместе* с электронами, движущимися по орбитам в магнитном поле. Из геометрических соображений очевидно, что в формуле для луча, поляризованного в противоположном направлении, вместо $-\omega$ будет стоять $+\omega$, так что резонанс будет отсутствовать. Рассмотрим, однако, *мнимую* часть $\sigma(\omega)$, которая дает вклад в *вещественную* часть комплексного показателя преломления (8.7) и, следовательно, меняет фазовую

скорость электромагнитной волны. Для линейно поляризованного луча, распространяющегося вдоль направления магнитного поля, две циркулярно поляризованные составляющие имеют разные скорости, так что плоскость поляризации непрерывно поворачивается по мере прохождения волны в кристалле. Это — хорошо известный *эффект Фарадея*.

Для полупроводников в вышеизложенном заключена почти вся теория диамагнитного резонанса. Носители заряда — электроны или дырки — занимают в пространстве энергии $\mathscr{E}(\mathbf{k})$ небольшие области, расположенные вблизи минимумов или максимумов зоны. В этих областях энергетические поверхности обычно эллипсоидальны (ср. § 5 гл. 2); можно показать, что на всех параллельных сечениях эллипсоида частота ω_H одна и та же, так что наблюдается линия, предсказываемая формулой (9.14). Разумеется, частота ω_H изменяется при изменении ориентации кристалла, тем самым давая информацию о расположении осей эллипсоида. Ситуация более сложна вблизи максимума валентной зоны в центре зоны Бриллюэна, где уровни расщепляются вследствие спин-орбитального взаимодействия (§ 9 гл. 3), но и в этом случае рассмотрение проводится в основном так же, как и раньше.



Фиг. 155. Электрическое поле смещает распределение Ферми.
Это смещение движется вокруг поверхности Ферми, затухая во времени.

В случае металлов возникают две трудности, которые, казалось бы, не позволяют наблюдать описанный эффект. Чтобы разрешить резонансную линию, надо работать на высоких частотах, когда $\omega\tau \gg 1$. В этих условиях глубина скин-слоя очень мала, и мы попадаем в аномальную область (§ 7 гл. 8). Таким образом, радиус винтообразной траектории электрона в магнитном поле в координатном пространстве будет много большим, чем то расстояние, на которое проникает электрическое поле.

Это наводит на мысль, что магнитное поле следует наложить перпендикулярно поверхности металла, так чтобы в скин-слое резонирующие электроны были «эффективны» и могли поглощать мощность. Если, однако, проанализировать эту ситуацию, то оказывается, что «резонанс» в этом случае сильно размывается и становится едва заметным. В принципе можно проследить за тем, как это происходит, подставляя формулу (9.14) в равенство (8.7). Как и в случае (8.91), комплексный показатель преломления имеет

большую мнимую часть, что связано главным образом с тем, что *вещественная* часть N^2 велика и отрицательна. Металл — слишком хороший проводник; единственное, что мы можем измерить, — это небольшое изменение отражательной способности (8.94). Чтобы увидеть в металле резонансную линию того типа, который легко наблюдается в полупроводнике, надо было бы подняться выше плазменной частоты ω_p, а это потребовало бы огромных магнитных полей.

С другой стороны, пусть мы имеем дело с материалом, удобным для наблюдения диамагнитного резонанса, — например, с очень чистым натрием при 4° К, когда уже в магнитном поле порядка нескольких тысяч эрстед $\omega_H\tau \gg 1$. Если работать на очень низкой частоте, не превышающей нескольких герц, то показатель преломления (8.7) можно сделать почти вещественным и наблюдать прохождение электромагнитной волны через металлическую пластинку. Это следует из формулы (9.14); полагая $\omega \ll \omega_H$, получаем

$$\mathsf{N} = \left(\varepsilon + \frac{4\pi i\sigma(\omega)}{\omega}\right)^{1/2} \approx$$

$$\approx \left(\frac{4\pi\sigma(0)}{\omega\omega_H\tau}\right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi nec}{H\omega}\right)^{1/2} = \frac{\omega_p}{(\omega\omega_H)^{1/2}}. \qquad (9.15)$$

Это число оказывается очень большим, порядка 10^9. Таким образом, волна распространяется через металл со скоростью всего лишь несколько сантиметров в секунду — явление, попадающее в область «человеческих» масштабов длины и времени. Важно, чтобы в выражении (9.15) частоты ω и ω_H имели один и тот же знак; в соответствии с выбором знаков в выражениях (9.8) и (9.11) это означает, что мы имеем дело с поляризованной по кругу волной, вращающейся в фазе с электронами. Диамагнитные и плазменные возбуждения электронного газа объединяются в *геликонную* ветвь. К сожалению, информация, которую можно получить из этого явления, ограничена, поскольку выражение (9.15) в первом приближении просто не зависит от геометрии поверхности Ферми. В компенсированном полупроводнике (§ 6 гл. 4) электронное и дырочное геликонные слагаемые взаимно уничтожаются и остаются лишь члены более высокого порядка, описывающие распространение *альфвеновских* волн. Это — еще одно магнетоплазменное явление, известное в астрофизике.

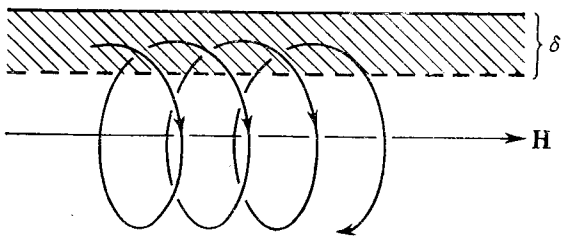
Оказывается, что сильный резонанс можно обнаружить в том случае, когда магнитное поле *параллельно* поверхности. Этот резонанс, называемый *циклотронным*, возникает следующим образом. Электрон движется по винтообразной орбите, ось которой, направленная, скажем, по оси x, параллельна поверхности (фиг. 156). После каждого оборота он попадает в скин-слой и «видит» осциллирующее электрическое поле. Если он возвращается каждый раз

в фазе с полем, то он будет приобретать от поля энергию и будет наблюдаться «резонанс».

Нетрудно вывести формулу, описывающую это явление. Запишем решение кинетического уравнения (8.101) в виде

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{e^2}{4\pi^3\hbar} \int \mathbf{v} \left\{ \int_{-\infty}^{t} \mathbf{v}(\mathbf{r}', t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \, e^{-(t-t')/\tau} \, dt' \right\} \frac{dS_F}{v}. \quad (9.16)$$

Здесь мы проинтегрировали по поверхности Ферми, чтобы получить полный ток. В выражении (9.16) все еще явно сохраняется основная черта решения, состоящая в том, что вклад в ток в точке $\mathbf{r}$



Фиг. 156. Циклотронный резонанс.

в момент t, происходящий от электрона со скоростью $\mathbf{v}$, зависит от импульса, переданного полем в предшествующей точке $\mathbf{r}'$, через которую электрон проходил в более ранний момент времени t'; память об этом импульсе со временем исчезает, и этот процесс описывается фактором затухания со временем релаксации τ. Этот способ описания процесса электропроводности по духу очень близок формуле Кубо (7.15).

В рассматриваемом случае траектории винтообразны. Электрон достигает точки $\mathbf{r}$ по кривой, вдоль которой затухание во времени определяется тем же самым экспоненциальным фактором. Через один период этот фактор будет равен $\exp(-2\pi/\omega_H\tau)$. Электрическое поле действует лишь в течение короткого времени, когда электрон находится в скин-слое; при каждом обороте фаза электрона будет опережать или отставать от фазы осциллирующего поля на величину $2\pi\omega/\omega_H$. Таким образом, мы можем свести интеграл по времени в формуле (9.16) к результату первого прохождения через скин-слой, умноженному на сумму факторов затухания для всех последующих прохождений, т. е.

$$(1 + e^{-w} + e^{-2w} + \ldots) = \frac{1}{1 - e^{-w}}, \quad (9.17)$$

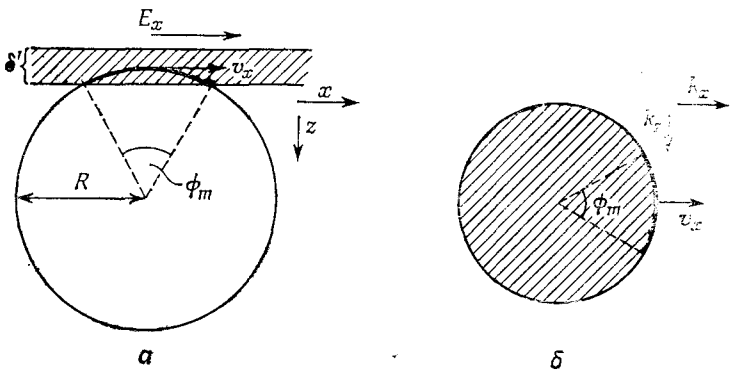
где

$$e^{-w} = \exp\left(-\frac{2\pi}{\omega_H\tau} - i\frac{2\pi\omega}{\omega_H}\right). \quad (9.18)$$

«Эффективность» электронов можно оценить, замечая, что каждый электрон остается в скин-слое лишь в течение времени порядка ϕ_m/ω_H, такого, что (фиг. 157)

$$\phi_m^2 \approx \frac{\delta'}{R} \approx \frac{\delta'\omega_H}{v_x}, \tag{9.19}$$

где R — радиус орбиты в координатном пространстве, а v_x — скорость электрона в плоскости сечения, перпендикулярного магнитному полю (причем последнее параллельно поверхности).



Фиг. 157. «Эффективны» электроны, находящиеся внутри угла ϕ_m.
а — на винтообразной траектории в координатном пространстве; *б* — на орбите на поверхности Ферми.

Большинство электронов, проходящих через скин-слой, будет сталкиваться с поверхностью металла; эти электроны рассеиваются и выбывают из игры. Эффективны лишь те электроны, которые движутся параллельно поверхности внутри скин-слоя. Рассуждая так же, как при выводе формулы (8.107), мы учтем только те электроны, которые принадлежат элементу площади поверхности Ферми

$$dS = 2\beta\phi_m \mid \rho_y \mid dk_y. \tag{9.20}$$

Здесь снова ρ_y — радиус кривизны орбиты в слое толщиной dk_y в точке, где скорость параллельна поверхности металла.

Объединяя эти рассуждения, получаем результат, по существу похожий на (8.109):

$$\sigma' = \frac{e^2\beta\delta'}{2\pi^3\hbar}\int \frac{|\rho_y|\,dk_y}{1-e^{-w}}. \tag{9.21}$$

Поверхностный импеданс теперь можно вычислить, подставляя выражение (9.21) в формулы (8.104) и (8.105).

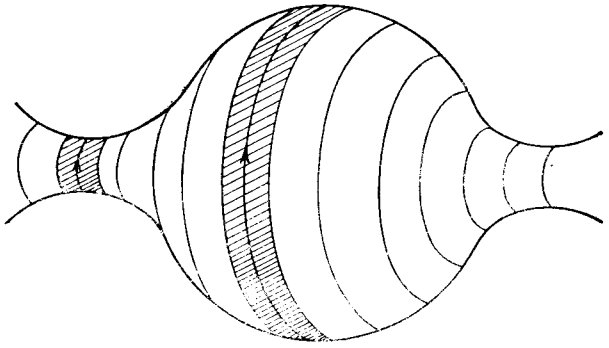
Для наших настоящих целей представляет интерес именно резонансный фактор (9.17). Он осциллирует, причем пики расположены при

$$\omega = n\omega_H \tag{9.22}$$

На практике частоту ω поддерживают постоянной, изменяя магнитное поле. Тогда условие

$$\frac{1}{H} = n\frac{e}{\omega m_H^* c}, \tag{9.23}$$

полученное с помощью выражения (9.5), есть условие появления пиков при изменении магнитного поля H. Существенно отметить, что при *циклотронном резонансе* в отличие от обычного диамаг-



Фиг. 158. Экстремальные орбиты.

нитного наблюдается не один пик [ср. формулу (9.14)]. Энергия будет поглощаться, если частота такова, что время между двумя появлениями электрона на поверхности равно целому числу периодов изменения электромагнитного поля. Острота каждого резонанса явно зависит от вещественной части w в формуле (9.18); заметный эффект получается, если справедливо нервенство $\omega_H \tau \gg 1$.

Но есть еще одна трудность. Величина ω_H (или, что то же самое, величина m_H^*) зависит от выбора орбиты. В случае произвольной поверхности Ферми эта величина *различна* для разных орбит, даже когда они принадлежат ряду параллельных слоев, перпендикулярных магнитному полю (фиг. 158). Таким образом, переменная w в формуле (9.21) сама является функцией k_y, и вклады от различных слоев не обязательно будут оставаться синфазными.

Точный расчет формы резонансной кривой становится теперь очень сложным. Но простое рассуждение, которое можно под-

крепить формальными выкладками, показывает, что основной вклад дают сечения, где масса m_H^* как функция k_y стационарна, т. е. имеет или минимум, или максимум. Если разложить m_H^* по степеням δk_y в окрестности каждой такой точки, то постоянный член даст резонансный пик, который не исчезнет при учете следующего члена разложения [порядка $(\delta k_y)^2$]. Вклады в интеграл от других областей поверхности Ферми, где масса m_H^* линейно зависит от δk_y, оказываются не в фазе и уничтожаются в результате интерференции. Мы рассуждали здесь так же, как и в обычной волновой оптике, где решения аналогичных задач удобно получать с помощью геометрического построения, известного под названием спирали Корню.

§ 3. Магнетосопротивление в сильных полях

Теория *гальваномагнитных явлений*, развитая в § 12 гл. 7, справедлива лишь в случае сферических изоэнергетических поверхностей. При $\omega_H\tau>1$ описание электронных состояний с помощью декартовых компонент вектора $\mathbf{k}$ становится математически очень громоздким и приводит к формулам, которые с трудом поддаются физической интерпретации. Проще рассматривать явления переноса с помощью кинетического уравнения, записанного в переменных $\mathscr{E}, k_H, \phi$. Будем искать стационарное решение в постоянном электрическом поле. Уравнение (9.12) в этом случае принимает вид

$$e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\left(-\frac{\partial f^0}{\partial \mathscr{E}}\right)=\frac{g}{\tau}+\omega_H\frac{\partial g}{\partial \phi}. \tag{9.24}$$

По аналогии с выражением (8.101) можно записать решение этого уравнения в виде

$$g(\mathscr{E}, k_H, \phi)=\frac{e}{\omega_H}\left(-\frac{\partial f^0}{\partial \mathscr{E}}\right)\int\limits_{-\infty}^{\phi}\mathbf{v}(\mathscr{E}, k_H, \phi)\,e^{(\phi''-\phi)/\omega_H\tau}\,d\phi''\cdot\mathbf{E}. \tag{9.25}$$

Как и в случае формулы (7.27), можно сказать, что смещение поверхности Ферми в точке, характеризуемой фазовым углом ϕ, равно сумме смещений, созданных электрическим полем в других точках орбиты, движущихся затем по орбите под действием магнитного поля, причем их влияние затухает с характерным временем релаксации τ. В случае слабого поля затухание происходит столь быстро, что наблюдается лишь небольшое отклонение направления смещения от направления электрического поля, приводящее к эффекту Холла [ср. (7.141)].