Фиг. 14.4. Примеры различных экстремальных орбит.

Для поля H, направленного по оси k_1, орбиты *1* и *2* представляют собой максимальные экстремальные орбиты, а *3* — минимальная экстремальная орбита. Когда поле направлено по оси k_2, имеется только одна экстремальная орбита *4*.

СВОБОДНЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Орбитальные [2]) уровни энергии электрона в кубическом ящике со сторонами длиной L, параллельными осям x, y и z, в присутствии направленного по оси z постоянного однородного магнитного поля H определяются двумя квантовыми числами, ν и k_z:

$$\mathscr{E}_\nu(k_z) = \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c, \tag{14.2}$$

$$\omega_c = \frac{eH}{mc}$$

[1]) См., например, учебники Ландау и Лифшица [8] или Пайерлса [9]. Книга Пайерлса содержит более удачное обсуждение довольно тонкого пространственного граничного условия. Для нахождения энергетических уровней задачу путем простого преобразования сводят к задаче об одномерном гармоническом осцилляторе.

[2]) Выражение (14.2) не включает в себя энергию взаимодействия между полем и спином электрона. Мы рассмотрим значение этого добавочного члена ниже, а пока будем пренебрегать им.

Здесь квантовое число ν принимает все целые неотрицательные значения, а k_z имеет те же значения, что и в отсутствие магнитного поля [см. (2.16)], т. е.

$$k_z = \frac{2\pi n_z}{L} \tag{14.3}$$

при любом целом n_z. Каждый уровень сильно вырожден. Число уровней с энергией (14.2) при фиксированных ν и k_z равно (множитель 2 учитывает спиновое вырождение)

$$\frac{2e}{hc} HL^2. \tag{14.4}$$

Поскольку

$$\frac{hc}{2e} = 2{,}068 \cdot 10^{-7}\ \text{Гс}\cdot\text{см}^2, \tag{14.5}$$

в поле напряженностью 1 кГс (типичное поле при экспериментах по эффекту де Гааза — ван Альфена) и для образца размером 1 см вырождение имеет порядок 10^{10}. Вырождение отражает тот факт, что классический электрон с данными энергией и k_z движется по спирали вдоль прямой, которая параллельна оси z, но может иметь произвольные координаты x и y [1]).

Выражение (14.2) выглядит вполне правдоподобно. Поскольку сила Лоренца не имеет составляющей в направлении H, поле не оказывает влияния на энергию движения в этом направлении и она остается равной $\hbar^2 k_z^2/2m$. Однако энергия движения, перпендикулярного полю, которая в его отсутствие была бы равна $\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)/2m$, теперь проквантована в единицах $\hbar\omega_c$ — постоянной Планка, умноженной на частоту классического движения (см. стр. 29). Это явление называется *орбитальным квантованием*. О совокупности всех уровней с заданным ν (и произвольным k_z) принято говорить как о ν-*м уровне Ландау* [2]).

Используя приведенные выше результаты, можно построить теорию эффекта да Гааза — ван Альфена для свободных электронов. Не останавливаясь на этой теории [3]), перейдем к изложению несколько модифицированного варианта простых, но тонких рассуждений Онсагера, обобщающих на случай блоховских электронов результаты, полученные для свободных электронов. Эти рассуждения имеют непосредственное отношение к проблеме определения поверхности Ферми.

УРОВНИ БЛОХОВСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Проведенное Онсагером обобщение результатов, полученных Ландау для свободных электронов, справедливо лишь для магнитных уровней с довольно большими квантовыми числами. Однако, как мы убедимся, эффект де Гааза —

[1]) Именно поэтому вырождение (14.4) пропорционально площади поперечного сечения образца.

[2]) Следует добавить, что эти результаты справедливы лишь в случае, если радиус классического кругового движения электрона с энергией $\mathscr{E}$ и проекцией импульса $\hbar k_z$ не сравним с поперечными размерами ящика (образца). Ограничение является самым сильным для электрона с энергией, равной $\mathscr{E}_F$ и $k_z = 0$:

$$L \gg r_c = \frac{v_F}{\omega_c} = \frac{\hbar k_F}{m\omega_c} = \left(\frac{\hbar c}{eH}\right) k_F.$$

При 10^3 Гс величина $\hbar c/eH \approx 10^{-10}$ см^2. Так как k_F обычно порядка 10^8 см$^{-1}$, результаты справедливы для образцов с размерами порядка сантиметра, но становятся неверными для образцов размером 0,1 мм.

[3]) Ее можно найти в книге Пайерлса [9].

ван Альфена обусловлен уровнями с энергией, близкой к энергии Ферми, которые почти всегда действительно имеют очень высокие квантовые числа. В теории свободных электронов, например, если исключить случай, когда почти вся энергия электрона связана с его движением параллельно полю, уровню с энергией $\mathscr{E}_F$ соответствует квантовое число ν, имеющее порядок $\mathscr{E}_F/\hbar\omega_c = \mathscr{E}_F/[(e\hbar/mc)\,H]$. Поскольку

$$\boxed{\frac{e\hbar}{mc} = \frac{\hbar}{m}\cdot 10^{-8}\ \text{эВ/Гс} = 1{,}16\cdot 10^{-8}\ \text{эВ/Гс},} \tag{14.6}$$

а энергия $\mathscr{E}_F$ обычно составляет несколько электрон-вольт, то даже в сильных полях, достигающих 10^4 Гс, квантовое число ν будет порядка 10^4.

Энергию уровней с высокими квантовыми числами можно точно вычислить с помощью принципа соответствия Бора, согласно которому разность энергий двух соседних уровней равна постоянной Планка, умноженной на частоту классического движения с энергией этих уровней. Поскольку k_z является интегралом полуклассического движения, мы применим этот принцип к уровням с заданным значением k_z и с квантовыми числами ν и $\nu + 1$.

Пусть $\mathscr{E}_\nu(k_z)$ — энергия ν-го разрешенного уровня [1]) при заданном значении k_z. Тогда, согласно принципу соответствия,

$$\mathscr{E}_{\nu+1}(k_z) - \mathscr{E}_\nu(k_z) = \frac{h}{T(\mathscr{E}_\nu(k_z), k_z)}. \tag{14.7}$$

где $T(\mathscr{E}, k_z)$ есть период полуклассического движения по орбите, определяемой значениями $\mathscr{E}$ и k_z [выражение (12.42)]:

$$T(\mathscr{E}, k_z) = \frac{\hbar^2 c}{eH}\frac{\partial A(\mathscr{E}, k_z)}{\partial \mathscr{E}}, \tag{14.8}$$

а $A(\mathscr{E}, k_z)$ — площадь, охватываемая орбитой в k-пространстве. Комбинируя (14.8) и (14.7), можно записать (не указывая явно переменной k_z)

$$(\mathscr{E}_{\nu+1} - \mathscr{E}_\nu)\frac{\partial}{\partial \mathscr{E}} A(\mathscr{E}_\nu) = \frac{2\pi eH}{\hbar c}. \tag{14.9}$$

Так как нас интересуют значения $\mathscr{E}_\nu$ порядка $\mathscr{E}_F$, мы можем значительно упростить соотношение (14.9). На основе результатов для свободных электронов можно ожидать, что разность энергий соседних уровней Ландау будет порядка $\hbar\omega_c$, что по крайней мере в 10^4 раз меньше энергии самих уровней. Поэтому с чрезвычайно высокой точностью можно считать, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathscr{E}} A(\mathscr{E}_\nu) = \frac{A(\mathscr{E}_{\nu+1}) - A(\mathscr{E}_\nu)}{\mathscr{E}_{\nu+1} - \mathscr{E}_\nu}. \tag{14.10}$$

Подставляя это выражение в (14.9), получаем соотношение

$$A(\mathscr{E}_{\nu+1}) - A(\mathscr{E}_\nu) = \frac{2\pi eH}{\hbar c}, \tag{14.11}$$

которое означает, что площади, охватываемые классическими орбитами с соседними разрешенными энергиями (и одинаковым k_z), отличаются одна от другой

---

[1]) В последующих рассуждениях мы рассматриваем одну зону и потому не указываем ее номер. Это сделано прежде всего для того, чтобы избежать путаницы между номером зоны и магнитным квантовым числом ν. Везде в этой главе $\mathscr{E}_\nu(k_z)$ есть разрешенная энергия электрона в рассматриваемой зоне, соответствующая квантовому числу ν и проекции волнового вектора k_z. При необходимости иметь дело более чем с одной зоной мы использовали бы обозначение $\mathscr{E}_{n,\nu}(k_z)$.

на постоянную величину

$$\boxed{\Delta A = \frac{2\pi eH}{hc}.} \tag{14.12}$$

Тот же вывод можно сформулировать иначе: при больших ν площадь, охватываемая полуклассической орбитой при разрешенной энергии $\mathscr{E}_\nu$ и постоянном значении k_z, должна следующим образом зависеть от ν:

$$\boxed{A\,(\mathscr{E}_\nu\,(k_z),\ k_z) = (\nu + \lambda)\,\Delta A,} \tag{14.13}$$

где λ не зависит от ν [1]). Это и есть знаменитый результат Онсагера (который получил его другим способом, используя правило квантования Бора — Зоммерфельда).

ПРОИСХОЖДЕНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИЙ

Первопричиной осцилляций де Гааза — ван Альфена и связанных с ними эффектов является наличие резко выраженной осцилляторной структуры в плотности электронных уровней, что вытекает из условия квантования (14.13). Плотность уровней имеет резкий максимум [2]), когда энергия $\mathscr{E}$ оказывается равной энергии экстремальной орбиты [3]), удовлетворяющей условию квантования. Причина этого поясняется на фиг. 14.5. На фиг. 14.5, *а* представлена совокупность орбит, удовлетворяющих условию (14.13) при заданном ν. Они образуют в k-пространстве трубку с площадью поперечного сечения $(\nu + \lambda)\,\Delta A$. Вклад в $g\,(\mathscr{E})\,d\mathscr{E}$ от уровней Ландау, отвечающих орбитам на такой ν-й трубке, равен числу этих уровней с энергиями между $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E} + d\mathscr{E}$. Число уровней в свою очередь пропорционально площади [4]) части трубки, заключенной между изоэнергетическими поверхностями с энергиями $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E} + d\,\mathscr{E}$. На фиг. 14.5, *б* показана эта часть трубки в случае, когда орбиты с энергией $\mathscr{E}$ на трубке *не являются* экстремальными, а на фиг. 14.5, *в* представлена часть трубки, когда на ней *есть* экстремальная орбита с энергией $\mathscr{E}$. Очевидно, что площадь такой части трубки в последнем случае во много раз больше, поскольку вблизи этой орбиты энергия уровней очень медленно изменяется вдоль трубки.

Большинство электронных свойств металлов зависит от плотности уровней на поверхности Ферми $g\,(\mathscr{E}_F)$. Из приведенных рассуждений непосредственно вытекает следующий вывод [5]): $g\,(\mathscr{E}_F)$ имеет особенность каждый раз, когда значение магнитного поля таково, что экстремальная орбита на поверхности Ферми удовлетворяет условию квантования (14.13), т. е. когда

$$(\nu + \lambda)\,\Delta A = A_\varepsilon\,(\mathscr{E}_F). \tag{14.14}$$

---

[1]) Мы предполагаем также, что λ не зависит от k_z и H. Это показано в задаче 1, п. «а» для свободных электронов и справедливо для любой эллипсоидальной зоны. Подобное предположение не доказано в общем случае; однако мы предлагаем читателю показать в качестве упражнения, что выводы, получаемые ниже в предположении постоянства λ, становятся неверными лишь в том случае, если λ представляет собой быстро меняющуюся функцию от k_z или H. Последнее весьма маловероятно.

[2]) Детальный анализ показывает, что плотность уровней имеет особенность вида $(\mathscr{E} - \mathscr{E}_0)^{-1/2}$, когда энергия $\mathscr{E}$ близка к энергии $\mathscr{E}_0$ экстремальной орбиты, удовлетворяющей условиям квантования.

[3]) Экстремальная орбита с энергией $\mathscr{E}$ окружает область с экстремальным сечением на поверхности $\mathscr{E}\,(\mathbf{k}) = \mathscr{E}$.

[4]) Плотность уровней на трубке постоянна в направлении вдоль поля; разрешенные значения k_z определяются выражением (14.3).

[5]) Строго говоря, химический потенциал (который равен $\mathscr{E}_F$ при нулевой температуре) также зависит от напряженности магнитного поля, что делает доказательство более сложным. Однако это очень малый эффект и обычно им можно пренебречь.