Дробный Квантовый Эффект Холла (Нобелевская премия по физике 1998)

Ю.П. Степановский
Институт теоретической физики
ННЦ "Харьковский Физико-Технический Институт"
Academicheskaya St. 1, Kharkov, 310108, Ukraine
e-mail:sidelnikov@kipt.kharkov.ua

Содержание

1. Введение. Нобелевские лауреаты по физике 1998. **427**

2. Квантовый эффект Холла. Эксперимент. **428**
2.1. Целочисленный квантовый эффект Холла (ЦКЭХ). 428
2.2. "Вклад физики полупроводников в определение постоянной тонкой структуры." 428
2.3. Дробный квантовый эффект Холла (ДКЭХ). 429

3. Квантовый эффект Холла. Теория. **429**
3.1. Теория Вейля, монополь Дирака, фаза Берри. 429
3.2. Эффект Ааронова-Бома, ненаблюдаемость кванта потока и калибровочная инвариантность. . 430
3.3. Уровни Ландау. Их вырождение. Теорема Ааронова-Кашера. Квант проводимости. 431
3.4. Квантование двумерной координатной плоскости. Квантование холловского сопротивления. . 433
3.5. Калибровочная инвариантность и квантовый эффект Холла. 435
3.6. Дробный квантовый эффект Холла и квазичастицы с дробными зарядами. 436

4. Заключение. **438**

5. Приложения. **438**
5.1. П1. Связь между уравнениями Максвелла и коммутационными соотношениями между импульсами и координатами. 438
5.2. П2. Доказательство теоремы Ааронова-Кашера. 439
5.3. П3. О постоянной тонкой структуры. 440

Аннотация

Статья содержит краткое и, по возможности, элементарное изложение фактов и теоретических представлений, относящихся к квантовому эффекту Холла, как к целочисленному, так и к дробному. Изложение основывается на простой модели, рассматривающей поведение системы невзаимодействующих электронов, заполняющих (с учетом принципа Паули) двумерную плоскость. Подчеркивается фундаментальная природа явления: связь с калибровочной инвариантностью, с общими принципами квантовой теории. Объясняется, что существование квазичастиц с дробными зарядами вовсе не означает, что электрон расщепляется на части.

1. Введение. Нобелевские лауреаты по физике 1998.

В 1998 году Шведская Королевская Академия Наук присудила Нобелевскую премию по физике [1]

Роберту Б.Лафлину (1950 г. рожд., Стэнфордский университет, США),

Хорсту Л.Шт'ермеру (1949 г. рожд., Колумбийский университет
и Компания Bell Laboratories, США),

Даниелю Ц.Цуи (1939 г. рожд., Принстонский университет, США),

за открытие ими новой формы квантовой

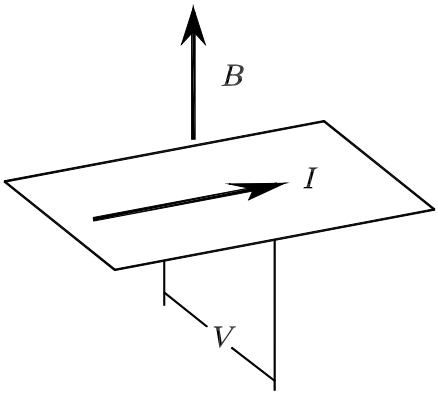


Рис. 1

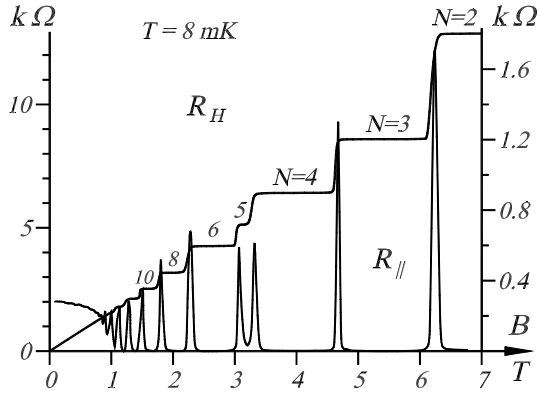


Рис. 2

жидкости с дробно заряженными возбуждениями.

В 1982 г. Х.Шт́ермер и Д.Цуи экспериментально открыли дробный квантовый эффект Холла (ДКЭХ) [2], ранее неизвестное коллективное поведение электронов, проявляющееся в случае, когда электроны совершают плоское движение в сильном магнитном поле при низких температурах. Год спустя Р.Лафлин [3] предложил теоретическое объяснение этого явления, введя представление о новом типе квантовой жидкости с возбуждениями, обладающими дробными зарядами. Открытие ДКЭХ возникло в процессе изучения ЦКЭХ — целочисленного квантового эффекта Холла, обнаруженного К. фон Клитцингом в 1980 г. [4] (Нобелевская премия по физике 1985). [1], а также на обзор [9].

2. Квантовый эффект Холла. Эксперимент.

2.1. Целочисленный квантовый эффект Холла (ЦКЭХ).

Прежде чем говорить о дробном квантовом эффекте Холла (ДКЭХ), мы должны рассмотреть целочисленный или просто квантовый эффект Холла (КЭХ).

В 1980 г. К. фон Клитцинг [4] экспериментально обнаружил, что холловское сопротивление полупроводниковой плёнки (рис. 1)

$$R_H = \frac{V}{I} \tag{1}$$

принимает дискретные значения , которые могут быть вычислены с помощью следующей простой формулы:

$$R_H = \frac{25812,8}{N}\,, \quad N = 1,2,3,... \tag{2}$$

[1]Отметим, что все указанные статьи содержатся в сборнике статей [5]. Укажем также на книгу [6], на популярную статью К. фон Клитцинга [**?**], на его нобелевскую лекцию [8]

Измерения производились при температуре T=1,5 K и магнитном поле B=18 Тл. Что касается полупроводниковой пленки, то она играет роль устройства, заставляющего электроны двигаться в двумерной плоскости и более подробно говорить о ней мы не будем. В первых измерениях изменялась поверхностная плотность электронов, при этом скачком изменялось холловское сопротивление. Такое же поведение холловского сопротивления наблюдается при изменении магнитного поля B (рис. 2 [1, 10], ступенчатая кривая).

Нижняя пикообразная кривая на рис. 2 представляет собой поведение обычного продольного сопротивления (осцилляции Шубникова-де Гааза). Хорошо видно почти полное обращение в нуль продольного сопротивления $R_{||}$ при квантовании холловского сопротивления.

Отметим, что в 1990 г. введена новая единица сопротивления

$$1\ = \frac{25812,8}{4}\ = 6453,2\ .$$

2.2. "Вклад физики полупроводников в определение постоянной тонкой структуры."

Так называлась статья К. фон Клитцинга 1981 г. [11]. Первая же публикация по КЭХ [4] называлась "Новый метод очень точного определения постоянной тонкой структуры, основанный на измерении квантованного холловского сопротивления". К. фон Клитцинг показал [4, 8], что измеряемое им квантованное холловское сопротивление представляет собой следующую величину

$$R_H = \frac{h}{e^2}\frac{1}{N}, \quad N = 1,2,3,..., \tag{3}$$

то есть, что в КЭХ измеряется отношение двух фундаментальных констант — постоянной Планка и квадрата заряда электрона. Для того, чтобы установить связь холловского сопротивления с постоянной тонкой структуры

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,0359895}$$

(значения фундаментальных констант, принятые на сегодняшний день, можно найти в [12]), мы должны уточнить хорошо известную связь между обратной скоростью света и единицей сопротивления Омом: $1/c = 30$ [13], которая получается с помощью следующей элементарной выкладки

$$Ohm = \frac{Volt}{Amper} = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{\frac{Coulomb}{meter}}{\frac{Coulomb}{second}} = \frac{1}{30 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{meter}{second}}.$$

Для того, чтобы получить точную связь между Омом и скоростью света[2], мы должны произвести в предыдущей формуле замену $9 \to (2,99792458)^2$, после чего мы найдем, что

$$\frac{1}{c} = 29,9792458 \ .$$

Теперь мы можем выразить через Омы отношение h/e^2,

$$\frac{h}{e^2} = 2\pi \cdot \frac{\hbar c}{e^2} \cdot \frac{1}{c} = 2\pi \cdot 137,0359895(61) \cdot 29,9792458 \ = 25812,8056(11) \ .$$

В последней формуле учтена экспериментальная погрешность в численном значении постоянной тонкой структуры. Мы видим, что измерение квантованного холловского сопротивления, действительно, дает возможность с большой точностью определять значение постоянной тонкой структуры.

2.3. Дробный квантовый эффект Холла (ДКЭХ).

В 1982 г. Д.Цуи, Х.Шт'ермер и А.Госсард [2] обнаружили на кривой, изображающей зависимость холловского сопротивления от магнитного поля, при T≈0,5 K и B≈15 Тл, новую ступеньку (плато) при N в формуле (1), равном 1/3. В дальнейшем наблюдались и другие плато при $N = p/q$ (при нечетных q) [6].

Р.Лафлин [3] нашел вариационные волновые функции многоэлектронных основного и возбужденного состояний, описывающие конденсацию электронного двумерного газа в новое состояние вещества — двумерную электронную жидкость. Он предсказал существование возбуждений с дробными зарядами, подтвержденное впоследствии экспериментально.

[2]Напомним, что с 1983 г. метр определен как расстояние, которое проходит свет в вакууме за 1/299792458 секунды [14], то есть с 1983 г. скорость света =299792458 м/с, по определению.

3. Квантовый эффект Холла. Теория.

3.1. Теория Вейля, монополь Дирака, фаза Берри.

"Нет! Я не люблю новой теории Вейля... Видите ли, если вы возьмете два атома водорода и переправите их различными путями с земли на солнце, то, по Вейлю, у них будет разная частота. Я не верю, что частоты атомов могут зависеть от их прошлого. Нет, я в это не верю."

А.Эйнштейн [15]

"Электромагнетизм есть калибровочно инвариантное проявление неинтегрируемой фазы."

Т.Ву, Н.Янг [16]

В 1918 г. Г.Вейль ввел представление о *неинтегрируемом* параллельном переносе скаляра [17], по аналогии с параллельным переносом вектора в общей теории относительности Эйнштейна, а именно, по Вейлю, при переносе скаляра ϕ из точки x в точку $x+dx$ скаляр ϕ изменяется следующим образом

$$d\phi = A_\mu(x)dx_\mu, \qquad (4)$$

где $A_\mu(x)$ — 4-вектор электромагнитного потенциала. Перенос скаляра по бесконечно малому замкнутому 4-контуру, ограничивающему элемент гиперповерхности $\Delta S_{\mu\nu}$, приводит к формуле

$$\Delta\phi = \oint d\phi = \oint A_\mu(x)dx_\mu = F_{\mu\nu}\Delta S_{\mu\nu}. \qquad (5)$$

Тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu$$

в теории Вейля аналогичен, по своему геометрическому смыслу, тензору кривизны $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ в теории Эйнштейна и не изменяется при калибровочном преобразовании 4-вектора потенциала $A_\mu(x)$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial\chi}{\partial x_\mu}.$$

Эйнштейн был прав, критикуя теорию Вейля. Но Вейль также был прав: не все скаляры изменяются при параллельном переносе, согласно формуле (6), однако такие скаляры существуют, это — фазы волновых функций заряженных частиц.

В 1931 г. П.А.М.Дирак в работе [18] показал, что "*изменение фазы волновой функции при обходе по*

любой замкнутой кривой должно быть одинаковыми для всех волновых функций" заряженной частицы и, в случае бесконечно малого переноса, равно для электрона (с учетом того что заряд электрона отрицателен)

$$d\varphi = -\frac{e}{\hbar c} A_\mu(x) dx_\mu, \qquad (6)$$

то есть, по существу, определяется формулой Вейля (4). Дирак воспользовался свойством калибровочной инвариантности квантовомеханических уравнений, описывающих заряженную частицу с зарядом q. Как обнаружил В.А.Фок в 1926 г. [20], эти уравнения инвариантны относительно одновременного умножения волновой функции $\psi(x)$ на некоторый фазовый множитель, зависящий от координат и времени, и градиентного преобразования 4-потенциала $A_\mu(x)$:

$$\begin{aligned} \psi(x) \to\ & \psi'(x) = e^{\alpha(x)}\psi(x), \\ A_\mu(x) \to A'_\mu(x) &= A_\mu(x) + \frac{q}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\alpha(x). \end{aligned} \qquad (7)$$

Изменение фазы, при переносе по кривой конечной длины, определяемое формулой (6), *неинтегрируемо*, то есть зависит от пути переноса. При переносе по замкнутому контуру, который пронизывается магнитным полем $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$,

$$\Delta\varphi = -\frac{e}{\hbar c}\oint \vec{A}d\vec{x} = -\frac{e}{\hbar c}\int \vec{B}d\vec{S} = -\frac{e}{\hbar c}\Phi, \qquad (8)$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий контур, в соответствии с формулой (5). Далее Дирак рассмотрел перенос электрона вокруг бесконечно тонкого и бесконечно длинного соленоида с потоком в нем, равным

$$\Phi_0 = \frac{hc}{e} \qquad (9)$$

(эта величина называется квантом потока). Так как изменение фазы волновой функции электрона, согласно (8), в этом случае равно -2π, то такой соленоид не ощущается электроном. Если бесконечно длинный и бесконечно тонкий соленоид, не ощущаемый электроном, обрывается с одной стороны (см. рис 3), то конец такого соленоида ведет себя как точечный магнитный заряд (это и есть *магнитный монополь Дирака*) с величиной заряда

$$\mu = -\frac{1}{2}\frac{\hbar c}{e} = -\frac{1}{2}\frac{\hbar c}{e^2}e \approx \frac{137}{2}e.$$

В 1984 г. М.Берри [21] получил формулу Дирака (8) как частный случай решения более общей задачи: гамильтониан квантовомеханической системы зависит от нескольких параметров, в свою очередь медленно изменяющихся со временем, причем так, что в какой-то момент времени параметры возвращаются к первоначальным значениям, при этом

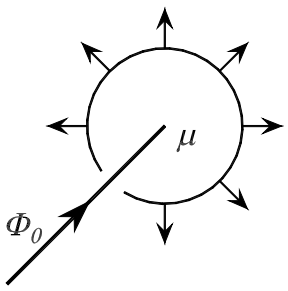
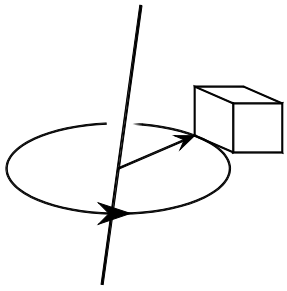


Рис. 3


Рис. 4

волновая функция также возвращается к исходной волновой функции, отличаясь от нее фазовым множителем с некоторой фазой (называемой *фазой Берри*). Берри поместил электрон в ящик, перенес этот ящик вокруг соленоида с заключенным в нем магнитным потоком (рис. 4) и показал, что изменение фазы волновой функции в этом случае определяется формулой Дирака (8). Фаза Берри проявляется в многочисленных явлениях в самых различных областях физики (см., например, обзор [22]).

3.2. Эффект Ааронова-Бома, ненаблюдаемость кванта потока и калибровочная инвариантность.

"Один из самых интригующих вопросов квантовой механики — это вопрос о том, существует ли векторный потенциал там, где нет поля."

Р.Фейнман [23]

Векторный потенциал не только может быть отличен от нуля там, где нет поля, более того, он *необходим* для полного описания взаимодействия электрона с электромагнитным полем в квантовой теории. Электромагнитные явления — это калибровочно инвариантное проявление неинтегрируемой фазы Вейля-Дирака (4,6) [16].

В 1959 г. Ааронов и Бом [24] нашли решение уравнения Шр$\acute{}$едингера, описывающее рассеяние электронов на бесконечно длинном и бесконечно тонком соленоиде. Полученная ими формула для сечения рассеяния электронов с импульсом p на угол θ имеет вид:

$$d\sigma = \frac{\hbar}{p}\sin^2(\pi\frac{\Phi}{\Phi_0})\frac{d\theta}{2\pi\cos^2(\frac{\theta}{2})},$$

где Φ — поток, захваченный соленоидом, ϕ_0 — квант потока (9).

Эта формула интересна не только тем, что электрон рассеивается, двигаясь по области, где нет никакого поля (в чем, собственно, и заключается эффект Ааронова-Бома; о старых и новых проблемах

теории эффекта Ааронова-Бома см. [25]). Нам интересен множитель

$$\sin^2(\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}),$$

говорящий о том, что электроны не ощущают существования соленоида, если

$$\Phi = n\Phi_0, \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{10}$$

Ненаблюдаемость соленоида, содержащего целое число квантов потока, следует из калибровочной инвариантности (7) квантовомеханических уравнений. Рассмотрим калибровочные преобразования (7) для случая электрона ($q = -e$). Будем считать, что фаза α зависит только от координат, и что $A_\mu(x) = 0$, то есть электромагнитное поле отсутствует. Выполнив калибровочные преобразования (7), получим

$$\begin{aligned} \psi(x) \to \ \psi'(x) = e^{\alpha(\vec{x})}\psi(x), \\ 0 \to \vec{A}'(\vec{x}) = -\frac{e}{\hbar c}\ \mathrm{grad}\ \alpha(\vec{x}). \end{aligned} \tag{11}$$

В результате калибровочных преобразований (11) мы получили векторный потенциал. Но поскольку ротор градиента равен нулю, то, казалось бы, все в порядке, никакого электромагнитного поля у нас не возникло. Однако, не все так просто. Выберем функцию $\alpha(\vec{x})$ в виде

$$\alpha(\vec{x}) = -n\theta, \tag{12}$$

где θ — азимутальный угол в плоскости (x, y). Число n должно быть целым, чтобы преобразованная волновая функция была однозначной функцией координат. Вычисляя градиент функции $\alpha(\vec{x})$, найдем, что единственная отличная от нуля компонента вектора-потенциала $\vec{A}'$ равна

$$A'_\theta = \frac{e}{\hbar c}\frac{1}{r}, \tag{13}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Используя потенциал (13), вычислим поток магнитного поля через поверхность, ограниченную окружностью радиуса r с центром в начале координат,

$$\Phi = \sum Bdxdy = \oint \vec{A}(x)d\vec{x} = 2\pi r A_\theta = n\frac{hc}{e} = n\Phi_0. \tag{14}$$

Поскольку вычисленный поток (14) не зависит от радиуса окружности, то ясно, что весь он сосредоточен в начале координат. Таким образом, наше калибровочное преобразование привело к появлению бесконечно длинного и бесконечно тонкого соленоида с целым числом квантов потока в нем. Так как калибровочное преобразование не может ощущаться электроном, то мы приходим к заключению, что *бесконечно длинный и бесконечно тонкий соленоид с целым числом квантов потока в нем ненаблюдаем.*

3.3. Уровни Ландау. Их вырождение. Теорема Ааронова-Кашера. Квант проводимости.

"В нашей стране есть только два физика — Ландау и Сахаров."

И.Я.Померанчук [26]

Как известно, А.Д.Сахаров увлекался большими магнитными полями и большими энергиями [27]. Он проектировал взрывные ускорители, и по его расчетам для получения магнитных полей 10^4 — 10^6 Тл в небольших объемах достаточно ядерных взрывов небольшой мощности (порядка одной килотонны тротилового эквивалента). А для получения магнитного поля 10^4 Тл в объеме порядка нескольких [3] и ускорения протонов до энергии 10^{12} эВ нужен взрыв уже помощнее — мощностью около одной мегатонны (это мощность примерно 60 атомных бомб, сброшенных на Хиросиму). При такой энергии и таком магнитном поле радиус протонной орбиты в магнитном поле равен 30 см, а номер уровня Ландау $n \approx 5 \times 10^{14}$.

Но оставим эту увлекательную тему и вернемся к намного меньшим температурам, полям, энергиям, орбитам, квантовым числам. Прежде чем рассмотреть решение задачи о квантовомеханическом движении электрона в магнитном поле, полученное Ландау в 1930 г. [28], нужно отметить следующее. Во-первых, Ландау решал эту задачу совсем не так, как это изложено в книге [29]. Во-вторых, Ландау не был первым, решившим эту задачу и даже не вторым. Первым был В.А.Фок [30], вторым И.Раби [31]. Фок рассмотрел задачу о движении электрона не просто в магнитном поле, а еще и в поле, квадратично зависящем от координат. Это было слишком сложно. Раби решил не уравнение Шр'едингера, как Фок, а только что появившееся уравнение Дирака. Это тоже было сложно для 1928г. Ландау же не только решил задачу (не решая уравнения Шр'едингера), но и применил найденные им решения для объяснения диамагнетизма металлов. Работу Фока вспомнили только в наши дни, в связи с экспериментальными и теоретическими исследованиями "квантовых точек" [32]. Оказалось, что первым рассмотрел "квантовую точку" В.А.Фок.

Для того, чтобы найти собственные значения гамильтониана электрона в постоянном магнитном поле $\vec{B}$ $(B_z \equiv B)$

$$H = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m}, \quad \hat{\vec{p}} = m\hat{\vec{v}}, \tag{15}$$

(мы считаем, что движение вдоль оси z отсутствует), Ландау воспользовался тем, что операторы $\hat{p}_x$

и $\hat{p}_y$ не коммутируют,

$$\hat{p}_x\hat{p}_y - \hat{p}_y\hat{p}_x = -i\hbar\frac{e}{c}B. \qquad (16)$$

Ясно, что, с точностью до переобозначений, гамильтониан (15) представляет собой гамильтониан одномерного гармонического осциллятора и его спектр определяется только константой, входящей в коммутационное соотношение (16),

$$\varepsilon_n = \hbar\frac{eB}{mc}(n+\frac{1}{2}) = \hbar\omega_B(n+\frac{1}{2}), \quad n = 0,1,2,... \qquad (17)$$

где ω_B — ларморовская частота обращения электрона по круговой орбите в магнитном поле B. Отметим, что в общем случае уровни гамильтониана

$$H = \hat{A}^2 + \hat{B}^2 \qquad (18)$$

равны

$$\varepsilon_n = Const \times (2n+1), \quad n = 0,1,2,... \qquad (19)$$

если

$$[\hat{A},\hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = i \times Const. \qquad (20)$$

Мы должны учесть, что реальный электрон обладает спином и магнитным моментом и описывается уравнением Шр'едингера-Паули с гамильтонианом

$$H = \frac{(\hat{\vec{p}}\vec{\sigma})^2}{2m} = \frac{\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\vec{B}, \qquad (21)$$

где $\vec{\sigma}$ — матрицы Паули. Если спин электрона направлен по полю, то спектр гамильтониана (21) описывается формулой

$$\varepsilon_n = \hbar\frac{eB}{mc}(n+1), \quad n = 0,1,2,...$$

Если же спин электрона направлен против поля, то уровни энергии электрона принимают значения

$$\varepsilon_n = \hbar\frac{eB}{mc}n, \quad n = 0,1,2,...$$

Мы видим, что все энергетические уровни (за исключением основного с энергией, равной нулю) двукратно вырождены по направлениям спина электрона.

Но есть еще одно вырождение, крайне важное для возникновения квантового эффекта Холла, на классическом языке связанное с тем, что центр ларморовской орбиты электрона может быть произвольным образом расположен в плоскости (x,y).

Прежде чем рассмотреть это вырождение, выведем формулу (16). Для этого рассмотрим операторные уравнения движения электрона в магнитном поле $\vec{B}$ (будем считать, что поле $\vec{B}$ не зависит от координат и времени),

$$\frac{d\hat{p}_i}{dt} = -\frac{e}{c}\varepsilon_{ikl}\hat{v}_k B_l = -\frac{e}{mc}\varepsilon_{ikl}\hat{p}_k B_l. \qquad (22)$$

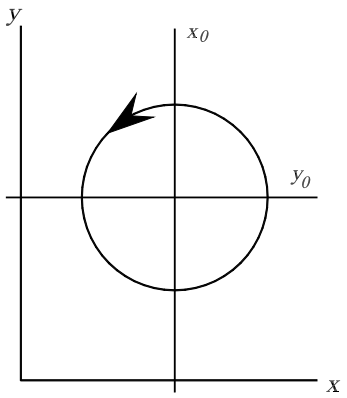


Рис. 5

Продифференцируем теперь по времени коммутационное соотношение

$$[\hat{p}_i,\hat{x}_k] = -i\hbar\delta_{ik}. \qquad (23)$$

Подставив в получившееся соотношение

$$[\frac{d\hat{p}_i}{dt},\hat{x}_k] + \frac{1}{m}[\hat{p}_i,\hat{p}_k] = 0$$

$d\hat{p}_i/dt$ из (22), найдем, что

$$[\hat{p}_i,\hat{p}_k] = -i\hbar\frac{e}{c}\varepsilon_{ikl}B_l. \qquad (24)$$

Одно из соотношений (24) и дает соотношение (16). Заметим, что соотношения (24) справедливы и в том случае, когда $\vec{B}$ зависит от координат. Использование в этом случае тождества Якоби

$$[[\hat{p}_i,\hat{p}_k],\hat{p}_l] + [[\hat{p}_k,\hat{p}_l],\hat{p}_i] + [[\hat{p}_l,\hat{p}_i],\hat{p}_k] \equiv 0$$

дает одно из уравнений Максвелла

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0.$$

(О тесной связи между уравнениями Максвелла и перестановочными соотношениями между координатами и импульсами, обнаруженной Р.Фейнманом в 1948 г. [33] см. Приложение 1.)

Рассмотрим теперь классические уравнения движения, описывающие движение электрона по круговой орбите в плоскости (x,y) в магнитном поле B, направленном по z (рис. 5)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p_x &= -\frac{e}{c}v_y B,\\ \frac{d}{dt}p_y &= \frac{e}{c}v_x B.\end{aligned} \qquad (25)$$

Уравнения (25) имеют два простых интеграла движения

$$\begin{aligned}x_0 &= x(t) - \frac{cp_y(t)}{eB},\\ y_0 &= y(t) + \frac{cp_x(t)}{eB},\end{aligned} \qquad (26)$$

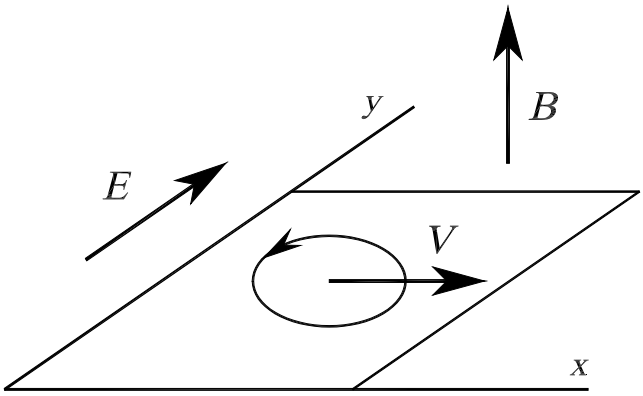


Рис. 6

имеющие простой физический смысл — это координаты неподвижного центра ларморовской орбиты. Введем теперь операторы

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \hat{x} - \frac{c\hat{p}_y}{eB}, \\ \hat{y}_0 &= \hat{y} + \frac{c\hat{p}_x}{eB}, \end{aligned} \tag{27}$$

и вычислим коммутатор этих операторов

$$\hat{x}_0\hat{y}_0 - \hat{y}_0\hat{x}_0 = i\frac{S_0}{2\pi}, \tag{28}$$

где

$$S_0 = \frac{hc}{eB} = \frac{\Phi_0}{B}. \tag{29}$$

Операторы $\hat{x}_0$ и $\hat{y}_0$ коммутируют с гамильтонианом (21) и собственные функции Гамильтониана (21) могут быть одновременно собственными функциями операторов $\hat{x}_0$, или $\hat{y}_0$, или какой-либо их комбинации, например,

$$(\hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2)\psi_n = r^2\psi_n. \tag{30}$$

Согласно (18), (19) и (28), r^2 может принимать следующие собственные значения

$$(r^2)_k = \frac{S_0}{2\pi}(2k+1), \quad k = 0, 1, 2... \tag{31}$$

В 1979 г., за год до открытия К. фон Клитцингом КЭХ, Ааронов и Кашер [34, 35] доказали теорему, имеющую к КЭХ самое непосредственное отношение: *пусть двумерная плоскость пронизывается конечным магнитным потоком* Φ*, тогда основное состояние электрона, обладающее нулевой энергией,* N*-кратно вырождено, где* N *— целая часть* Φ/Φ_0. (Доказательство теоремы см. в Приложении 2.)

Каждое из вырожденных состояний, в соответствии с принципом Паули, может быть занято только одним электроном (так как электроны находятся в основном состоянии, спины всех электронов направлены против поля, взаимодействием электронов друг с другом мы пренебрегаем). Пусть все состояния заняты и движутся со скоростью v вдоль оси x. Это возможно только в том случае, если вдоль оси y приложено электрическое поле $E = (v/c)B$ (рис. 6). Почему это так, проще всего понять, перейдя в систему отсчета, движущуюся со скоростью $-v$ вдоль оси x относительно покоящихся электронов. В этой системе отсчета приведенное выше электрическое поле возникает как следствие преобразования Лоренца, связывающего поля в неподвижной и движущейся системах отсчета. Пусть однородное магнитное поле пронизывает достаточно большую площадь, занятую электронами, так что $N \gg 1$, и затем резко спадает. Тогда на один электрон приходится поток

$$\frac{\Phi}{N} = \frac{N\Phi_0}{N} = \Phi_0$$

и соответственно площадь $\Phi_0/B = S_0$. Вычисляя плотность электрического тока, найдем, что

$$j = \rho v = \frac{e}{S_0}v = \frac{eB}{\phi_0}v = \frac{eB}{hc/e}v = \frac{e^2}{h}\cdot\frac{v}{c}B = \frac{e^2}{h}E = \sigma_0 E. \tag{32}$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что если электроны на плоскости находятся в основном состоянии и максимально плотно ее заполняют, то проводимость двумерной системы в этом случае

$$\sigma_0 = \frac{e^2}{h}. \tag{33}$$

Назовем эту величину *квантом проводимости*, потому что, как мы вскоре увидим, в общем случае проводимость в КЭХ определяется формулой

$$\sigma_0 = N\frac{e^2}{h}, \tag{34}$$

где N — число занятых уровней Ландау.

3.4. Квантование двумерной координатной плоскости. Квантование холловского сопротивления.

> "Несомненно, элементарный квант действия должен быть представлен через $\int\int dpdq...$ Этим способом добиваются разложения (q,p)-плоскости на элементы с площадью h; но подобное разложение можно осуществить различными способами, например, квадратами или любыми другими фигурами. Влияет ли способ разложения на результат?"
>
> А.Пуанкаре [36]

Такой вопрос А.Пуанкаре задал М.Планку в 1911 г. на первом Сольвеевском конгрессе. Планк ответил, что "форма элементов, на которые нужно разложить (q,p)-плоскость, вполне определена: элементы должны быть ограничены кривыми постоянной энергии, то есть концентрическими, подобными и одинаково расположенными эллипсами" [36]. Планк в 1911 г. умел квантовать только гармонический осциллятор, и его ответ касался гармонического осциллятора, однако в конце 1912 г. П.Эренфест обобщил правило квантования Планка на любые периодические одномерные движения: в фазовой (x,p)-плоскости кривые постоянной энергии ε_n, ограничивают площадь, равную nh,

$$\int\int dpdx = \oint pdx = nh. \qquad (35)$$

(см. письмо П.Эренфеста к А.Ф.Йоффе от 20 февраля 1913 г. [37]). Правило квантования Эренфеста (35) обычно называется правилом квантования Бора-Зоммерфельда (с $n+\frac{1}{2}$ вместо n), а раньше называлось также правилом Дебая, Эпштейна, Эйнштейна и др., подтверждая *принцип Арнольда*: "Если какое-либо понятие имеет персональное имя, то это — не имя первооткрывателя" [38]. (О вкладе П.Эренфеста в квантовую теорию см. [39].) Правило квантования Эренфеста справедливо при $n \gg 1$ (в квазиклассическом приближении).

А теперь длинная цитата из [29]: "Интеграл $\oint pdx$ есть площадь, охватываемая замкнутой классической фазовой траекторией частицы (т. е. кривой в плоскости p, x — фазовом пространстве частицы). Разделив эту площадь на клетки площадью $2\pi\hbar$ каждая, мы получим всего n клеток. Но n есть число квантовых состояний с энергиями, не превышающими заданного ее значения (соответствующего рассматриваемой фазовой траектории). Таким образом, мы можем сказать, что в квазиклассическом случае каждому квантовому состоянию соответствует *клетка* в фазовом пространстве площадью в $2\pi\hbar$. Иначе, число состояний, отнесенное к элементу объема $\Delta p\Delta x$ фазового пространства, есть

$$\frac{\Delta p\Delta x}{2\pi\hbar}." \qquad (36)$$

Представление о "клетках" в фазовом пространстве и подсчет числа состояний по формуле (36), несмотря на нестрогость вывода этой формулы, являются общепринятыми и эффективно применяемыми в статистической теории атома, в квантовой статистике, в квантовой теории поля. Формула (36) следует из коммутационного соотношения между импульсом и координатой

$$\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p} = -i\hbar.$$

Вернемся к коммутационному соотношению между координатами центра ларморовской (циклотронной) орбиты

$$\hat{x}_0\hat{y}_0 - \hat{y}_0\hat{x}_0 = i\frac{S_0}{2\pi}. \qquad (37)$$

Дальнейшее ясно: "коммутатор координат центра циклотронной окружности (37) отличен от нуля; это эквивалентно тому, что каждое состояние занимает в реальном пространстве площадь S_0, через которую проходит квант потока [8]." Но в фиксированной "клетке" с площадью S_0 могут находиться несколько электронов: один — на самом нижнем уровне Ландау, второй — на следующем и т.д.. Пусть в каждой "клетке" находятся N электронов. Вычисляя плотность электрического тока и повторяя выкладку (32), найдем, что

$$j = \rho v = \frac{Ne}{S_0}v = \frac{NeB}{\phi_0}v = \frac{NeB}{hc/e}v = \frac{Ne^2}{h}\cdot\frac{v}{c}B = \frac{Ne^2}{h}E = \sigma E = N\sigma_0 E. \qquad (38)$$

Таким образом, мы получили формулу для квантования проводимости (и сопротивления) в КЭХ:

$$\sigma = N\frac{e^2}{h}, \quad R_H \equiv \frac{1}{\sigma} = \frac{h}{e^2}\frac{1}{N}, \quad N = 1,2,3,... \qquad (39)$$

Почему число N меняется с изменением магнитного поля B (см. рис 1)? Пусть при некотором значении поля B электроны в двумерной пленке заполняют все возможные "клетки", находясь на нижнем уровне Ландау. Будем уменьшать поле. Тогда размеры "клеток" начнут увеличиваться, а количество "клеток" на пленке начнет уменьшаться, и каким-то электронам придется перейти на следующий уровень Ландау, потом на следующий и т.д. Поэтому начнет изменятся число N, и будут происходить скачки от одного значения квантованного сопротивления к другому. В действительности, все происходит сложнее. В реальной полупроводниковой пленке, в которой наблюдается КЭХ, существуют примеси и дефекты, воздействие которых на электроны приводит к размытию уровней Ландау в целые полосы уровней, а случайный характер пространственного распределения примесей и дефектов приводит к возникновению так называемых локализованных состояний, которые не могут переносить ток. Ток переносят только делокализованные состояния, близкие к невозмущенным уровням Ландау. Когда при уменьшении магнитного поля электроны начинают забираться на следующий уровень Ландау, вначале они начинают заполнять локализованные состояния, не переносящие ток, и сопротивление поддерживается в фиксированном значении, наблюдается ступенька, или плато. И только когда электроны заполнят делокализованные состояния на следующем уровне Ландау, происходит скачек на следующее плато.

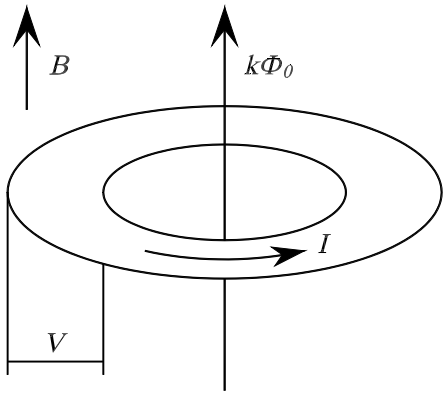


Рис. 7

Отметим, что практически полное обращение в нуль продольного сопротивления $R_{||}$ при квантовании холловского сопротивления (см. рис 1) говорит о том, что мы сталкиваемся со своеобразным состоянием вещества, диэлектриком и сверхпроводником одновременно: диэлектриком — потому, что ток не течет в направлении приложенного электрического поля, сверхпроводником — потому что падение напряжения вдоль тока, определяющее $R_{||}$, равно нулю.

3.5. Калибровочная инвариантность и квантовый эффект Холла.

> "И в классической, и в квантовой теории важен только ротор $\vec{A}$: любая функция $\vec{A}$, ротор которой такой, как надо, приводит к правильной теории."
>
> Р.Фейнман [40]

Рассмотренный выше вывод квантования холловского сопротивления основывался на элементарном представлении о заполняющих (с учетом принципа Паули) двумерную плоскость свободных невзаимодействующих электронах. Однако высокая точность квантования сопротивления, наблюдаемая на опыте, независимость квантования от примесей, дефектов полупроводниковой пленки, краевых эффектов наводят на мысль, что эффект имеет фундаментальную природу. Р.Лафлину [41] удалось связать квантование холловской проводимости с ненаблюдаемостью кванта потока Φ_0 (9), следующей из калибровочной инвариантности.

Мы рассмотрим модифицированный мысленный эксперимент Р.Лафлина, следуя [42]. Рассмотрим систему невзаимодействующих электронов, каждый из которых описывается уравнением Шр$\acute{}$единегера, находящихся на поверхности идеальной однородной пленки кольцевой геометрии (рис. 7) с однородным магнитным полем B, перпендикулярным плоскости кольца.

Пусть в центре кольца помещен точечный соленоид с магнитным потоком $\Phi = k\Phi_0$, который может меняться без изменения магнитного поля в области, содержащей электроны. Выберем калибровку, в которой векторный потенциал $\vec{A}$ ориентирован в азимутальном (θ) направлении:

$$A_\theta = \frac{1}{2}Br + \frac{k\Phi_0}{2\pi r}, \qquad k = 0, 1, 2, ... \tag{40}$$

Будем искать решение соответствующего уравнения Шр$\acute{}$единегера, описывающего каждый из электронов в виде

$$\psi_{nm}(\vec{r}) = const \times e^{im\theta} f_{nm}(r), \tag{41}$$

где n — номер уровня Ландау, на котором находится электрон, целое число m — орбитальный момент электрона. Волновые функции (41) в случае $k = 0$ и бесконечно протяженной плоскости давно и хорошо известны (см., например, [43]). Поскольку добавление к постоянному магнитному полю k квантов потока представляет собой калибровочное преобразование (то есть не меняет ротора $\vec{A}$), то волновые функции с $k \neq 0$ и $k = 0$ отличаются на фазовый множитель $\exp(-ik\theta)$. Отметим, что каждый уровень Ландау бесконечно кратно вырожден, так как квантовое число m принимает бесконечный ряд значений

$$m = n, n-1, ..., 1, 0, -1, -2, -3, ...$$

Особенно просто волновые функции выглядят в случае основного состояния $n = 0$,

$$\psi_{0m} = const \times e^{im\theta} e^{-r^2/4S_0} r^{|m+k|}, \qquad m = 0, -1, -2, ... \tag{42}$$

Волновая функция (42) описывает электрон с аксиально симметричным распределением плотности вероятности с максимумом на некотором расстоянии от начала координат r_{0m}. Если мы изменим число квантов потока, пронизывающих нашу систему на единицу, то каждый электрон займет место соседнего. Вспомним теперь, что электроны находятся в области (ленте), ограниченной двумя окружностями, радиусы которых и расстояния между которыми достаточно велики по сравнению с радиусом ларморовской орбиты электрона. Будем считать, что волновые функции электронов в ленте (по которой течет ток I и разность потенциалов между краями которой равна V) существенно не отличаются от волновых функций в случае бесконечной плоскости. При изменении числа квантов потока на единицу произойдет перенос *одного* электрона с одного края ленты на другой. При этом энергия рассматриваемой системы изменится на величину

$$\Delta\varepsilon = eV. \tag{43}$$

С другой стороны, увеличение потока, пронизывающего контур с током I, на квант потока Φ_0 изменяет энергию на величину

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{c}\Phi_0 I. \tag{44}$$

Так как квант потока ненаблюдаем, то наша система не должна измениться. Приравнивая выражения (43) и (44), найдем, что

$$\sigma = \frac{I}{V} = \frac{ec}{\Phi_0} = \frac{e^2}{h}. \tag{45}$$

Таким образом, мы нашли уже известное нам выражение для кванта проводимости $n \neq 0$. Рассмотрение в модели свободных электронов N заполненных уровней Ландау привело бык переносу N электронов с одного края пленки на другой и соответственно к формуле (34) для квантования холловской проводимости. Р.Лафлин [41] распространил приведенные выше рассуждения на "грязную" систему с взаимодействием и привел правдоподобные доводы в пользу того, что указанные рассуждения справедливы и в этом случае.

Обратим внимание на следующее. В случае $k = 0$ мы имеем, согласно (42) следующий набор волновых функций (с точностью до константы)

$$\begin{aligned} \psi_{00} &= e^{-r^2/4S_0}, \\ \psi_{01} &= e^{-r^2/4S_0} e^{-i\theta} r, \\ \psi_{02} &= e^{-r^2/4S_0} e^{-2i\theta} r^2, \\ \psi_{03} &= e^{-r^2/4S_0} e^{-3i\theta} r^3, ... \end{aligned} \tag{46}$$

Добавление кванта потока Φ_0 ($k = 1$) изменит набор волновых функций (46) следующим образом

$$\begin{aligned} \psi_{0-1} &= e^{-i\theta} \times e^{-r^2/4S_0} e^{i\theta} r, \\ \psi_{00} &= e^{-i\theta} \times e^{-r^2/4S_0}, \\ \psi_{01} &= e^{-i\theta} \times e^{-r^2/4S_0} e^{-i\theta} r, \\ \psi_{02} &= e^{-i\theta} \times e^{-r^2/4S_0} e^{-2i\theta} r^2, ... \end{aligned} \tag{47}$$

Вычитание кванта потока ($k = -1$) изменит набор волновых функций (46) следующим образом

$$\begin{aligned} \psi_{01} &= e^{i\theta} \times e^{-r^2/4S_0} e^{-i\theta} r, \\ \psi_{02} &= e^{i\theta} \times e^{-r^2/4S_0} e^{-2i\theta} r^2, \\ \psi_{03} &= e^{i\theta} \times e^{-r^2/4S_0} e^{-3i\theta} r^3, \\ \psi_{04} &= e^{i\theta} \times e^{-r^2/4S_0} e^{-4i\theta} r^4, ... \end{aligned} \tag{48}$$

Мы видим, на частном примере, проявление теоремы Ааронова-Кашера (разд. 3.2): добавление (или вычитание) кванта потока Φ_0 приводит к появлению (или исчезновению) одной из функций из полного набора волновых функций основного состояния. При этом новые волновые функции отличаются от старых экспоненциальным множителем, соответствующим калибровочному преобразованию, добавляющему (или вычитающему) квант потока Φ_0. Однако, если мы не формально меняем величину магнитного потока, а изменяем реально (во времени) магнитный поток, пронизывающий

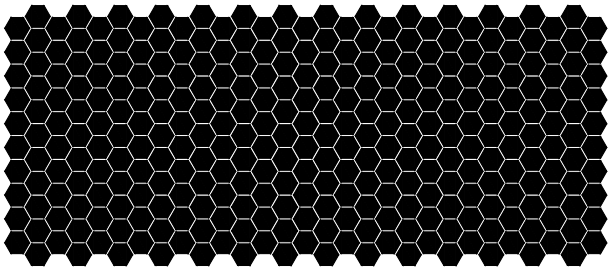


Рис. 8

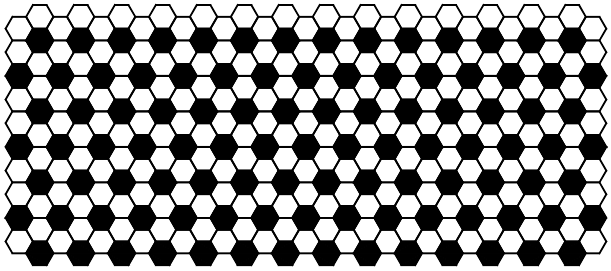


Рис. 9

реальную физическую систему, то изменение магнитного потока сопровождается появлением вихревого электрического поля, которое, в случае изменения потока на один квант Φ_0, передвинет электрон в плоскости таким образом, что его волновая функция в наборе (46) заменится соседней функцией, приобретя соответствующий калибровочный экспоненциальный множитель.

3.6. Дробный квантовый эффект Холла и квазичастицы с дробными зарядами.

"Электроны в режиме ДКЭХ предпочитают находится на вполне определенных расстояниях друг от друга."

Р.Лафлин [6]

Когда Д.Цуи, Х.Шт́ермер и А.Госсард в 1982 г. [2] обнаружили на графике, изображающем квантование холловского сопротивления ступеньку при $N = 1/3$, они сразу же интерпретировали это, как наблюдение нижнего уровня Ландау, заполненного на $1/3$ (см. рис. 8 и рис. 9, на которых символически изображены полностью заполненный уровень Ландау и уровень, заполненный на $1/3$).

Почему возникает дробное заполнение двумерной плоскости? Рассмотрим два электрона и введем операторы разности координат центров ларморовских орбит этих электронов

$$\hat{X} = \hat{x}_0^{(1)} - \hat{x}_0^{(2)}, \qquad \hat{Y} = \hat{y}_0^{(1)} - \hat{y}_0^{(2)},$$

Используя (28), найдем, что

$$\hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X} = i\frac{S_0}{\pi}. \tag{49}$$

Согласно (18), (19) и (49), оператор $\hat{X}^2 + \hat{Y}^2$ принимает следующие собственные значения

$$\frac{S_0}{\pi}(2k+1), \quad k = 0, 1, 2... \tag{50}$$

Таким образом, квадрат расстояния между двумя электронами квантуется в нечетных числах. Это является некоторым пояснением того, почему наблюдаются дробные заполнения с нечетными знаменателями.

Лафлин [3] предложил для описания состояния с дробным заполнением $1/m$ следующую многоэлектронную волновую функцию (n — число электронов):

$$\Psi_m(z_1, z_2, ..., z_n) = const \times e^{-\frac{|z_1|^2+|z_2|^2+...+|z_n|^2}{S_0}} (z_1 - z_2)^m (z_1 - z_3)^m (z_2 - z_3)^m ... (z_{n-1} - z_n)^m,$$

где в произведение входят разности между комплексными координатами $z_i - z_k$ всех электронов. Лафлину удалось показать, что эта простая волновая функция представляет собой очень хорошую аппроксимацию волновой функции основного состояния с дробным заполнением. Так как многоэлектронная волновая функция должна быть антисимметрична относительно перестановки любой пары электронов, то ясно, что для этого число m должно быть нечетным, $m = 2k + 1$.

Считается, что состояние, описываемое волновой функцией Лафлина, является основным и *невырожденным*. Следующее рассуждение, принадлежащее Лафлину, приводит к представлению о возбуждениях, представляющих собой дробно заряженные квазичастицы. Проткнем плоскость, дробно заполненную электронами, бесконечно тонким соленоидом и медленно введем в него квант потока Φ_0. Волновая функция будет медленно изменяться при изменении потока, оставаясь собственной функцией изменяющегося гамильтониана. Но, как только поток станет равным кванту потока, гамильтониан, с точностью до калибровочного преобразования вернется к своему первоначальному значению при нулевом потоке. Таким образом мы получаем возбужденное состояние исходного гамильтониана. Это возбужденное состояние и есть квазичастица, заряд которой, как мы сейчас увидим, является дробным и равным $q = -e/m$ (или $q = e/m$, если запустить в соленоид поток $-\Phi_0$).

Рассмотрим векторный потенциал с отличной от нуля компонентой

$$A_\theta = \frac{k(t)\Phi_0}{2\pi r}.$$

Этот потенциал, как мы знаем, описывает бесконечно длинный и бесконечно тонкий соленоид, с потоком в нем, равным $k(t)\Phi_0$. Электрическое поле, возникающее при этом, имеет отличную от нулю

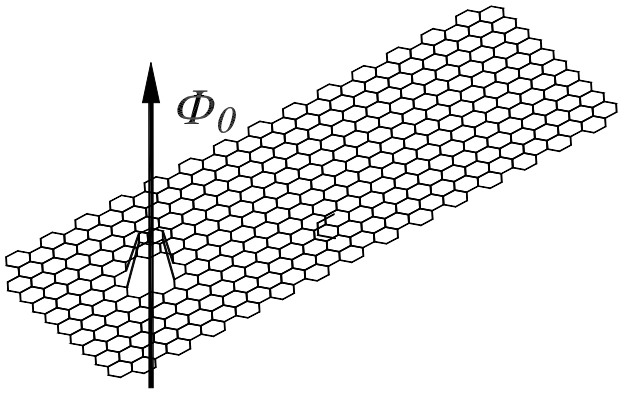


Рис. 10

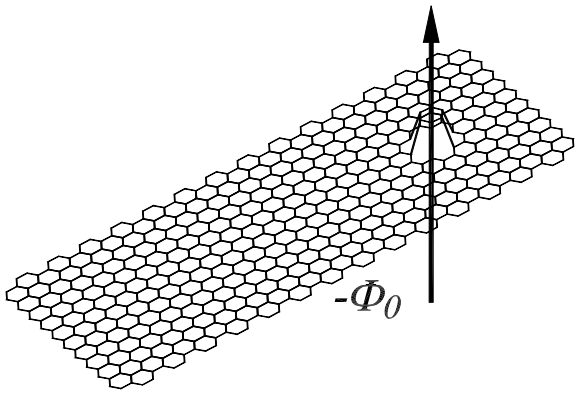


Рис. 11

компоненту

$$E_\theta = \frac{1}{2\pi rc} \cdot \frac{dk}{dt}\Phi_0.$$

Электрическое поле вызывает холловский ток в радиальном направлении величиной

$$j_r = \sigma E_\theta, \qquad \sigma = \frac{1}{m} \cdot \frac{e^2}{h}.$$

Вычисляя заряд, проходящий через контур, представляющий собой окружность радиуса r, за время, за которое в соленоид войдет квант потока, найдем, что

$$q = \int_0^t \int_0^{2\pi} j_r d\theta = -\frac{1}{c}\sigma\Phi_0 = -\frac{e}{m}.$$

Таким образом, вблизи соленоида возникнет избыток отрицательного заряда $q = -e/m$ (или недостаток отрицательного заряда $q = e/m$, если в соленоид вводится квант потока в отрицательном направлении, см. рис. 10 и рис. 11).

В том месте, где находится соленоид с квантом потока, который не ощущается электронами, возникает избыток или недостаток необязательно дробного заряда. Если $m = 1$, то есть в случае полностью заполненного уровня Ландау, добавление (или вычитание) кванта потока приводит к появлению или удалению одного электрона, в согласии с теоремой Ааронова-Кашера.

Вне нашего, в основном элементарного, рассмотрения остались многие важные и интересные вопросы: как велика и какую роль в ДКЭХ играет энергетическая щель, отделяющая основное состояние от возбужденных; почему и в каком смысле конденсированное многочастичное основное состояние является квантовой жидкостью и почему при $m = 7$ или 9 электронная жидкость переходит в электронное твердое тело — "вигнеровский" кристалл; почему за счет фазы Берри, возникающей при перестановке двух электронов в магнитном поле, электроны, являясь фермионами, могут считаться бозонами; какое отношение к ДКЭХ имеют "дробная статистика", "анионы", "композитные фермионы" "топологический инвариант Черна-Саймонса" и др. Эти и многие другие вопросы обсуждаются в [5, 6, 9].

4. Заключение.

"Представьте себе, что п и в о продавалось бы только ц е л ы м и литрами; неужели Вы отсюда заключили бы, что пиво само по себе п р е р ы в н о?"

А.Эйнштейн [44]

Что может узнать о новых Нобелевских премиях человек, живущий на территории "Бывшего Советского Союза" (Former Soviet Union), если он не имеет возможности выйти в Интернет, набрать адрес Нобелевского архива: http://www.almaz.com/nobel и, уже на следующий день после присуждения премий, получить исчерпывающую информацию о Нобелевских премиях за 1998 год и за все предыдущие 97 лет? Практически ничего. Если ему повезет и он во-время включит телевизор, то он узнает, что новые Нобелевские лауреаты по физике "расщепили электрон на части, разрушив, наконец, миф о неделимости электрона." "Расщепление электрона" [45], "Электрон разваливается на части" [46] — так называются научно-популярные статьи о дробном квантовом эффекте Холла. Однако считать, что дробный квантовый эффект Холла означает, что электрон "расщепляется", это примерно то же самое, что, основываясь на том, что человек живет в трехкомнатной квартире, утверждать, что в каждой комнате живет по одной трети человека, "расщепленного" на части. Как мы видели, возникновение дробных зарядов возможно и без дробления электронов. Появление квазичастиц с дробными зарядами — это удивительное и неожиданное следствие квантовой механики, описывающей поведение электронов в двумерном пространстве. Исследования дробного квантового эффекта Холла — замечательного макроскопического квантового явления — ведут к более полному и глубокому пониманию фундаментальных принципов квантовой теории. За это эти исследования и удостоены столь высокой награды, как Нобелевская премия 1998 года.

5. Приложения.

5.1. П1. Связь между уравнениями Максвелла и коммутационными соотношениями между импульсами и координатами.

"Фейнмановский вывод уравнений Максвелла еще не опубликован, но все еще столь же загадочен, как и 40 лет назад. Фейнман отказался опубликовать этот вывод, считая его только шуткой. Я не так в этом уверен.:"

Ф.Дайсон [47]

О том, что в 1948 г. Р.Фейнман рассказывал своим аспирантам о том, как можно вывести уравнения Максвелла из перестановочных соотношений между импульсами и координатами Ф.Дайсон рассказал в своих воспоминаниях о Фейнмане [47]. По многочисленным просьбам читателей Дайсон по памяти восстановил вывод Фейнмана и опубликовал его в [33].

Мы видоизменим вывод Фейнмана, сохранив основную идею. При этом мы сразу будем выводить уравнения Максвелла в релятивистски ковариантной форме, введя для этого собственное время [48].

Исходными уравнениями являются следующие: перестановочные соотношения между 4-импульсами и 4-координатами

$$[\hat{p}_\mu, \hat{x}_\nu] = -i\hbar\delta_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

и уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле

$$\frac{d}{d\tau}\hat{p}_\mu = \frac{q}{mc}F_{\mu\nu}(\hat{x})\hat{p}_\nu = \frac{q}{mc}\hat{p}_\nu F_{\mu\nu}(\hat{x}). \tag{1.2}$$

Уравнение (П1.2) — это операторное обобщение классических уравнений движения. Условие совпадения уравнений в двух случаях — когда операторы импульсов стоят справа и когда они стоят слева относительно тензора электромагнитного поля — дает вторую пару уравнений Максвелла (в отсутствие зарядов и токов)

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}F_{\mu\nu} = 0.$$

Теперь продифференцируем соотношение (П1.1) по собственному времени τ,

$$[\frac{d}{d\tau}\hat{p}_\mu, \hat{x}_\nu] + [\hat{p}_\mu, \frac{d}{d\tau}\hat{x}_\nu] = 0. \tag{1.3}$$

Используя теперь то, что $\hat{p}_\mu = md\hat{x}_\mu/d\tau$ из (П1.1), (П1.2) и (П1.3) получим обобщение нерелятивистского соотношения (24),

$$[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar\frac{q}{c}F_{\mu\nu}. \qquad (1.3)$$

Используя тождество Якоби

$$[[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu], \hat{p}_\rho] + [[\hat{p}_\nu, \hat{p}_\rho], \hat{p}_\mu] + [[\hat{p}_\rho, \hat{p}_\mu], \hat{p}_\nu] \equiv 0$$

и соотношение (П1.3), получим первую пару уравнений Максвелла

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho}F_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}F_{\nu\rho} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}F_{\rho\mu} = 0.$$

Отметим, что связь между тождеством Якоби и уравнениями типа первой пары уравнений Максвелла в классической механике была известна С.Ли еще в 1888 г. (см. [39]).

5.2. П2. Доказательство теоремы Ааронова-Кашера.

"Всегда найдутся дураки, чтобы доказывать теоремы."

Р.Том [49]

Рассмотрим уравнение Шр'едингера-Паули, определяющее основное состояние электрона со спином в магнитном поле $H(x,y)$, направленном по оси z и произвольным образом зависящем от координат x и y,

$$\frac{(\hat{\vec{p}}\vec{\sigma})^2}{2m}\psi(x,y) = 0. \qquad (2.1)$$

Так как оператор $\hat{\vec{p}}\vec{\sigma}$ эрмитов, то из (П2.1) следует, что

$$\hat{\vec{p}}\vec{\sigma}\psi(x,y) = 0. \qquad (2.2)$$

Так как в основном состоянии магнитный момент электрона направлен по оси z, а спин в обратном направлении, то у спинора ψ отлична от нуля только нижняя компонента. Обозначив ее как χ, получим из (П2.2) следующее уравнение

$$(\hat{p}_x - i\hat{p}_y)\chi(x,y) = 0. \qquad (2.3)$$

Введем векторный потенциал A_x, A_y

$$\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x = B(x,y). \qquad (2.4)$$

Полагая

$$p_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x, \quad p_y = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c}A_y,$$

запишем (П2.3) в виде

$$[(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) + \frac{e}{\hbar c}(iA_x + A_y)]\chi(x,y) = 0. \qquad (2.5)$$

Наложим на (A_x, A_y) условие калибровки

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0. \qquad (2.6)$$

Это условие тождественно выполняется, если

$$A_x = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad A_y = \frac{\partial\phi}{\partial x}. \qquad (2.7)$$

Из (П2.7) и (П2.4) следует, что

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\phi = B(x,y). \qquad (2.8)$$

Учитывая (П2.7), можно записать (П2.5) в виде

$$[(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{\hbar c}\frac{\partial\phi}{\partial x}) + i[(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{\hbar c}\frac{\partial\phi}{\partial y})]\chi = 0. \qquad (2.9)$$

Из (П2.9) ясно, что если χ представить в виде

$$\chi = \exp(-\frac{e}{\hbar c}\phi)\xi, \qquad (2.10)$$

то (П2.9) сведется к следующему уравнению

$$(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})\xi(x,y) = 0, \qquad (2.11)$$

которое говорит о том, что ξ есть функция $z = x + iy$, то есть

$$\xi(x,y) = \xi(z).$$

Теперь будем считать, что поток

$$\Phi = \int B(x,y)dxdy, \qquad (2.12)$$

пронизывающий плоскость (x,y) и проходящий через начало координат, имеет конечное значение. В этом случае асимптотическое поведение функции $\phi(x,y)$ при $r = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$ определяется формулой

$$\phi(x,y) = \frac{\Phi}{2\pi}\ln\frac{r}{r_0}, \qquad (2.13)$$

где r_0 — некоторая константа. Выражение (П2.13) можно найти следующим образом. Представим (П2.8) в виде

$$\text{div grad}\phi = B. \qquad (2.14)$$

Если поле $B(x,y)$ при $r \to \infty$ спадает достаточно быстро, то можно считать, что при больших r $\phi(x,y) = \phi(r)$. Вычисляя интеграл от обеих частей (П2.14) по кругу большого радиуса с центром в начале координат, найдем, что

$$\int \text{div grad}\phi\, dxdy = \oint \text{grad}\phi\, d\vec{x} = \frac{d\phi}{dr} \times 2\pi r = \Phi,$$

$$\phi = \frac{\Phi}{2\pi}\ln\frac{r}{r_0}. \qquad (2.15)$$

Подставляя (П2.13) в (П2.10), найдем, что при $r \to \infty$

$$\chi = (\frac{r_0}{r})^{\frac{\Phi}{\Phi_0}} f(z). \qquad (2.16)$$

Выбирая $f(z)$ в виде

$$1, z, z^2, ..., z^{N-1}, \qquad (2.17)$$

мы найдем, что степень вырождения N равна целой части Φ/Φ_0, $N = \{\Phi/\Phi_0\}$. При $N > \{\Phi/\Phi_0\}$ волновые функции (П2.16) не будут удовлетворять условию квадратичной интегрируемости.

Таким образом, мы доказали, что степень вырождения основного состояния электрона в магнитном поле определятся числом квантов потока, содержащемся в полном магнитном потоке, пронизывающем двумерную плоскость.

5.3. П3. О постоянной тонкой структуры.

> "Это представляется мне совершенно невероятным... h — величина того же порядка, что и e^2/c!"
>
> Из письма М.Планка П.Эренфесту, июль 1905г. [50]

Задача о теоретическом определении численного значения постоянной тонкой структуры $e^2/\hbar c = 1/137,0359895(61)$ давно привлекает пытливые умы. Известен своими исследованиями этой проблемы выдающийся английский астрофизик А.Эддингтон [51, 52]. Эддингтон исходил из того, что у волновой функции релятивистского электрона 4 компоненты, а у двух электронов $4 \times 4 = 16$ компонент. Следовательно, гамильтониан двух электронов — это матрица, у которой $16 \times 16 = 256$ компонент. Далее Эддингтон разбивает произвольную 16×16-матрицу на симметричную с $16(16+1)/2 = 136$ компонентами и антисимметричную матрицы с $16(16-1)/2 = 120$ компонентами. С получившимся числом 136 Эддингтон и связал значение постоянной тонкой структуры, считая сначала, что $\hbar c/e^2 = 136$, затем добавив еще единицу [51], а впоследствии, усовершенствовав свою теорию и положив [52]

$$\frac{\hbar c}{e^2} = 137 \times (137/136)^{1/24} = 137,042.$$

Серьезные достижения были у Эддингтона в исследованиях числа частиц во Вселенной. Он писал:"Я убежден, что во Вселенной 157477241362750025776056539611815554680447179145271167093662314250761856310312 96 протонов и столько же электронов" [50]. (Приведенное выше число — это 136×2^{256}.)

Следующий большой успех в определении постоянной тонкой структуры был достигнут А.Вилером в 1969 г. [53]. Исследуя ядра Пуассона в симметрических пространствах, связанных с уравнением Клейна-Гордона, Вилер нашел, что

$$\frac{\hbar c}{e^2} = (2^4 5!/\pi^5)^{1/4}(8\pi^4/9) = 137,036082.$$

Следует также упомянуть исследование Г.Розена, опубликованное в 1976г. [54]. Предположив, что существует 42 различных электромагнитных поля, Г.Розен получил следующее соотношение:

$$\frac{\hbar c}{e^2} = \frac{42(42-1)}{4\pi} = 137,0324.$$

Интересно, что если подсчитать, сколько различных фундаментальных заряженных частиц (кварков и лептонов) насчитывается в физике элементарных частиц сейчас, в 1999 г., то получим: $6 \times 3 \times 2 = 36$ кварков плюс $3 \times 2 = 6$ лептонов. Всего 42 частицы.

Об одной особенности числа 137, связанной с древнееврейскими сказаниями, сообщил В.Вайскопф [55]. Когда-то давно, когда ангелы увидели, как прекрасны дочери людей, 200 ангелов покинули небеса и стали жить на Земле. Падшие ангелы научили людей волшебству и заклинаниям, употреблению корней и трав и другим тайным знаниям. Знания о божественных вещах, изначально присущие ангелам и частично переданные людям, получили название "кабала". В иврите всякому слову сопоставляется некоторое число. Слову "кабала" соответствует число 137. Слово "кабала" в иврите состоит из четырех букв (справа налево):

קפלה.

"куф"=100, "бет"=2, "ламед"=30 и непроизносимого "хэй"=5, 100+2+30+5=137,

И еще одно интересное свойство числа 137 (скромное наблюдение автора этих строк): если человек, которому не безразличны тайны Природы, два раза подряд напишет свой год рождения, то получившееся восьмизначное число обязательно разделится на 137 без остатка!

Список литературы

[1] http://www.almaz.com/nobel

[2] *Tsui D.S., St'ormer H.L., Gossard A.C.*//Phys. Rev. Lett. 1982. V.48. P.1559. (Статья 8 в [5].)

[3] *Laughlin R.B.*//Phys. Rev. Lett. 1983. V.50. P.1395. (Статья 22 в [5].)

[4] *Klitzing K., von, Dorda G., Pepper M.*//Phys. Rev. Lett. 1980. V.45. P.494. (Статья 1 в [5].)

[5] Квантовый эффект Холла. Сборник статей. — М.: Мир, 1986.

[6] Квантовый эффект Холла. — М.: Мир, 1989.

[7] *Клитцинг К., фон*//В мире науки. 1986. N6. С.28.

[8] *Клитцинг К., фон*//УФН. 1986. Т.150. С.107.

[9] *Криве И.В., Рожавский А.С.*//УФН. 1987. Т.152. С.33.

[10] *Ebert G., Klitzing K., von, Probst C., Ploog K.*//Phys. Rev. Lett. 1982. V.44. P.95

[11] *Klitzing K., von*//Festk'orperprobleme. 1981. V.XXI. P.1.

[12] http://pdg.lbl.gov/

[13] *Парселл Э.* Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1971.

[14] *Petley B.W.*//Nature. 1983. V.303. P.373.

[15] *Инфельд Л.* Мои воспоминания об Эйнштейне. — В кн.: Эйнштейн и современная физика. М.: Гостехтеориздат, 1956.

[16] *Wu T.T., Yang Ch.N.*//Phys. Rev. 1975. V.12. P.3845.

[17] *Weyl H.*//Sitzungsberichte der K'oniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1918. B.26. S. 465.

[18] *Dirac P.A.M.*//Proc. Roy. Soc. 1931. V.A133. P.60. (Статья 1 в [19].)

[19] Монополь Дирака. Сборник статей. — М.: Мир, 1970.

[20] *Fock V.*//Z. Phys. 1926. B.39. S.226.

[21] *Berry M.V.*//Proc. Roy. Soc. Lond. 1984. V.A392. P.45.

[22] *Виницкий С.И., Дербов В.Л., Дубовик В.М., Марковски Б.Л., Степановский Ю.П.*//УФН. 1990. Т.160. Вып.6. С.1.

[23] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике, вып. 9. — М.: Мир, 1967.

[24] *Aharonov Y., Bohm D.*//Phys. Rev. 1959. V.115. P.485.

[25] *Афанасьев Г.Н.*//Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1990. Т.21. Вып.1. С.172.

[26] Он между нами жил... Воспоминания о Сахарове. — М.: Практика, 1996.

[27] *Сахаров А.Д.* Научные труды. — М.: Центрком, 1995.

[28] *Landau L.*//Z. Phys. 1930. B.64. S.629.

[29] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.

[30] *Fock V.*//Z. Phys. 1928. B.47. S.446.

[31] *Rabi I.I.*//Z. Phys. 1928. B.49. S.507.

[32] *Kouwenhoven L., Marcus Ch.*//Physics World. 1998. June. P.35.

[33] *Dyson F.J.*//Amer. Journ. Phys. 1990. V.58(3). P.201

[34] *Aharonov Y., Casher A.*//Phys. Rev. 1979. V.A19. P.2461.

[35] *Цикон Х., Фр'езе Р., Кирш В., Саймон Б.* Операторы Шр'едингера. — М.: Мир, 1990.

[36] *Планк М.* Избранные труды. — М.: Наука, 1975.

[37] *Эренфест — Йоффе* Научная переписка. Л.: Наука, 1990

[38] *Арнольд В.И.*//УМН. 1998. Т.53. Вып.1(319). С.229.

[39] *Бакай А.С., Степановский Ю.П.* Адиабатические инварианты. — Киев: Наукова думка, 1981.

[40] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике, вып. 6. — М.: Мир, 1966.

[41] *Laughlin R.B.*//Phys. Rev. 1981. V.B23. P.5632. (Статья 18 в [5].)

[42] *Halperin B.I.*//Phys. Rev. 1982. V.B25. P.2185. (Статья 19 в [5].)

[43] *Коган В.И., Галицкий В.М.* Сборник задач по квантовой механике. — М.: Гостехтеориздат, 1956. Berlin: F.Fontane & Co., 1921/22.

[44] *Мошковский А.* Альберт Эйнштейн. Беседы с Эйнштейном о теории относительности и общей системе мира. — М.: Работник просвещения, 1922.

[45] *Daviss B.*//New Scientist. 1998. 31 January. P.36.

[46] *Anderson P.W.*//Physics Today. October 1997. P.42.

[47] *Dyson F.J.*//Physics Today. February 1989. P.32.

[48] *Фок В.А.* Работы по квантовой теории поля. — Л.: Изд. ЛГУ, 1957.

[49] *Арнольд В.И.* Избранное-60. — М.: Фазис, 1997, с. 557.

[50] *Barrow J. D., Tipler F.J.* The Anthropic Cosmological Principle. — Oxford, New York: Clarendon Press & Oxford University Press, 1986.

[51] *Эддингтон А.* Теория относительности. — Л. - М.: ОНТИ, 1934.

[52] *Eddington A.S.* Fundamental Theory. — Cambrige: Cambrige University Press, 1948.

[53] *Wyler A.*//Comptes Rendus Hebdomadaires de Séances de l'Academie des Sciences, Serie A. 1969. V.269. P.743.

[54] *Rosen G.*//Rhys. Rev. 1976. V.D13. P.830.

[55] *Вайскопф В.*//УФН. 1982. Т.38. С.455.