

# Коррелированные состояния взаимодействующих частиц и проблема прозрачности кулоновского барьера при низкой энергии в нестационарных системах

© В.И. Высоцкий<sup>1,2</sup> С.В. Адаменко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Киевский национальный университет им. Т. Шевченко,  
01033 Киев, Украина

<sup>2</sup> Электродинамическая лаборатория „Протон-21“,  
Киев, Украина

(Поступило в Редакцию 6 августа 2009 г.)

Рассмотрены предпосылки формирования коррелированного когерентного состояния частиц в нестационарных квантовых системах. Исследована связь коэффициента корреляции частиц с вероятностью их прохождения сквозь потенциальный барьер (в том числе — для реализации ядерных реакций). Найден режим оптимальной параметрической раскачки гармонического осциллятора, при которой происходит асимптотическое формирование коррелированного состояния частиц, многократное увеличение дисперсии их координат и возрастание прозрачности барьера на много порядков при низкой энергии взаимодействующих частиц.

## Введение

Хорошо известно, что туннельный эффект играет важнейшую роль в атомной и ядерной физике. На этом эффекте основан принцип работы большинства приборов микро- и нанoeлектроники, многих приборов и систем квантовой и физической электроники. Особо важное значение туннельный эффект имеет в ядерной физике. В частности, вероятность протекания ядерных реакций с участием заряженных частиц при малой или средней энергии определяется, в первую очередь, действием кулоновского барьера и вследствие этого ограничена очень малой вероятностью туннельного эффекта. Это ограничение резко усложняет решение глобальной проблемы ядерного синтеза и побуждает к использованию термоядерной плазмы, что ведет к необходимости преодоления фундаментальных проблем, связанных с формированием такой плазмы в макроскопическом объеме конденсированной мишени в случае „инерционного“ синтеза и долговременным удержанием термоядерной плазмы низкой плотности для систем с магнитными ловушками.

Следует отметить, что вся „стандартная“ методика расчета туннельного эффекта до настоящего времени фактически повторяет начальный метод, использованный Гамовым в конце 1920-х гг. для анализа альфа-распада и основанный на независимом туннелировании через барьер высотой  $V_0$  для каждого из взаимно независимых состояний частицы. При таком подходе в случае малой средней энергии частицы

$$E \equiv \langle E \rangle = \sum_n |B_n|^2 E_n \ll V_0$$

вероятность  $|B_n|^2$  возбуждения состояний с большой энергией  $V_0 > E_n \gg E$  ничтожно мала. В итоге полная вероятность туннельного эффекта для суперпозиции

состояний равна сумме очень малых значений вероятности туннелирования для каждого из этих исходных состояний.

Однако в случае коррелированных состояний ситуация будет совершенно иной. Взаимная синхронизация разных состояний приводит к синхронизации флуктуаций импульса, что резко увеличивает вероятность  $|B_n^{\text{суп}}|^2 \gg |B_n|^2$  флуктуационного возбуждения состояний с большой энергией  $V_0 > E_n \gg E$ , что, естественно, ведет к резкому возрастанию полной вероятности туннелирования.

Уникальные возможности коррелированных состояний, соответствующих суперпозиции собственных состояний с определенными фазовыми соотношениями, состоят в том, что для них резко возрастает вероятность туннельного эффекта, а суммарная дисперсия координаты и глубина туннельного проникновения в область под барьером определяется коллективным взаимодействием и может быть неограниченно большой.

Несмотря на то что метод коррелированных состояний был обоснован еще в 1930 г., он оказался незаслуженно забытым, не включен в учебники по квантовой механике и фактически не использовался для решения прикладных задач.

Главная задача при реализации этого метода связана с выбором оптимального метода формирования таких состояний для реальных физических систем. Эта задача несмотря на глубокий анализ многих фундаментальных вопросов теории коррелированных состояний (например, [1,2]) также оказалась нерешенной.

Ниже рассмотрен механизм просветления потенциального барьера, основанный на использовании коррелированных состояний взаимодействующих частиц, который может быть применен к межъядерному взаимодействию. Найден один из наиболее оптимальных режимов формирования коррелированных состояний, обеспечивающий

неограниченное приближение состояния частицы в потенциальной яме к полностью коррелированному состоянию с неограниченно большой дисперсией и полной прозрачностью барьера. Использование этого метода может привести к оптимизации ядерных реакций при низкой энергии, обеспечивающей большую вероятность взаимодействия в условиях, когда обычный туннельный эффект (включая и эффект резонансного туннелирования) оказывается неэффективным. Этот механизм с равной эффективностью может быть применен к самым разным экспериментам (как уже проведенным, так и планируемым).

## 1. Коррелированные когерентные состояния частиц и соотношение неопределенностей Шредингера–Робертсона

Кратко рассмотрим базовые идеи, ведущие к коррелированным состояниям и модификации соотношения неопределенностей. В атомной и ядерной физике широко используется соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\sigma_q \sigma_p \geq \hbar^2/4, \quad (1)$$

полученное им в 1927 г. и связывающее значение дисперсии и среднеквадратичные погрешности

$$\begin{aligned} \sigma_q &\equiv (\delta q)^2 = \langle (\Delta q)^2 \rangle, \quad \Delta q = q - \langle q \rangle, \\ \sigma_p &\equiv (\delta p)^2 = \langle (\Delta p)^2 \rangle, \quad \Delta p = p - \langle p \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

координаты  $q$  и одноименной компоненты  $p$  импульса частицы.

Связь этого и подобных соотношений с коммутативностью операторов была найдена в 1929 г. Робертсоном в форме обобщенного соотношения неопределенностей

$$\sigma_A \sigma_B \geq |\langle [\widehat{AB}] \rangle|^2/4 \quad (3)$$

для величин  $A$  и  $B$ , коммутатор которых  $[\widehat{AB}]$  отличен от нуля.

Соотношение (1) часто и не вполне корректно используется для оценки прозрачности потенциального кулоновского барьера ядра  $V(q)$  шириной  $L(E)$  при отождествлении величины  $\delta p$  со среднеквадратичным фиктивным радиальным импульсом частицы с энергией  $E$

$$\delta p = \sqrt{2M} \langle \sqrt{V(q) - E} \rangle \quad (4)$$

в подбарьерной области, определяемой условиями  $V(q) \geq E$ ,  $0 \leq q \leq L(E)$ . В частности, при условии  $L(E) \geq \hbar/2\delta p$ , которому соответствует большая энергия частицы, коэффициент прозрачности кулоновского барьера, окружающего ядро, близок к единице.

В противоположном случае  $L(E) \gg \hbar/2\delta p$  прозрачность барьера  $D$  будет крайне мала

$$D = \exp\{-W(E)\} \ll 1,$$

$$\begin{aligned} W(E) &= (2/\hbar) \int_R^{R+L(E)} \sqrt{2M[V(q) - E]} dq \\ &= \exp\{-2\delta p L(E)/\hbar\} \gg 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Очень низкая прозрачность барьера является тем основным аргументом, который часто используется для доказательства невозможности или предельной неэффективности протекания ядерных реакций при низкой энергии сталкивающихся заряженных частиц.

Базовое соотношение (3) находится из условия неотрицательности выражения

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} |\beta u(q) + i v(q)|^2 dq \geq 0 \quad (6)$$

при любом значении действительного параметра  $\beta$ . Здесь

$$\begin{aligned} u &= \Delta \widehat{A} \Psi(q) \equiv (\widehat{A} - \langle A \rangle) \Psi(q), \\ v &= \Delta \widehat{B} \Psi(q) \equiv (\widehat{B} - \langle B \rangle) \Psi(q). \end{aligned} \quad (7)$$

В 1930 г. независимо Шредингером [3] и Робертсоном [4] было проведено обобщение соотношений Гейзенберга (1) и Робертсона (3) и получено более универсальное условие

$$\sigma_A \sigma_B \geq |\langle [\widehat{AB}] \rangle|^2/4(1 - r^2), \quad (8)$$

называемое соотношением неопределенностей Шредингера–Робертсона. Это соотношение прямо следует из (6) при снятии требования действительности параметра  $\beta$ .

В соотношении (8) величина

$$r = \sigma_{AB} / \sqrt{\sigma_A \sigma_B} \quad (9)$$

является коэффициентом корреляции, определяющим степень взаимной коррелированности величин  $A$  и  $B$  в конкретном состоянии, описываемом волновой функцией  $\Psi(q)$ . Соответственно выражение

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= \langle \{\Delta \widehat{A}, \Delta \widehat{B}\} \rangle / 2 \equiv \langle (\widehat{A} - \langle A \rangle)(\widehat{B} - \langle B \rangle) \\ &+ (\widehat{B} - \langle B \rangle)(\widehat{A} - \langle A \rangle) \rangle / 2 = (\langle \widehat{AB} + \widehat{BA} \rangle) / 2 - \langle A \rangle \langle B \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

является средним значением антикоммутатора операторов погрешностей  $\Delta \widehat{K} = \widehat{K} - \langle K \rangle$  величин  $A$  и  $B$ . По аналогии с  $\sigma_A$  и  $\sigma_B$  величина  $\sigma_{AB}$  может быть названа взаимной дисперсией этих величин [5].

Соотношение неопределенностей Шредингера–Робертсона (8) является очевидным обобщением соотношения неопределенностей Гейзенберга (3) для случая коррелированных состояний. Для взаимно некоррелированных величин  $A$  и  $B$  имеем  $\sigma_{AB} = 0$ ,  $r = 0$  и уравнение (8) сводится в (3), что соответствует минимизации

произведения дисперсий  $\sigma_A \sigma_B$ . Для этого случая возможно формирование такой когерентной суперпозиции (пакета) собственных функций частицы в потенциальной яме, для которой  $(\sigma_A \sigma_B)_{\min} = \hbar^2/4$ . Эта суперпозиция называется когерентным состоянием (КС), а последнее равенство является условием ее реализации.

При наличии частичной коррелированности величин  $A$  и  $B$  имеем  $\sigma_{AB} \neq 0$ ,  $0 < r^2 < 1$  и  $(\sigma_A \sigma_B)_{\min} > \hbar^2/4$ . Соответственно при их полной коррелированности имеем  $r^2 \rightarrow 1$  и  $(\sigma_A \sigma_B)_{\min} \rightarrow \infty$ . Коррелированное когерентное состояние (ККС) может быть создано только на основе такой когерентной суперпозиции собственных функций, для которой выполняется условие максимизации величины  $|\sigma_{AB}|$ .

Для коррелированных состояний конкретные соотношения неопределенностей типа (1) принимают вид

$$\delta q \delta p \geq \hbar/2\sqrt{1-r^2}, \quad \delta E \delta t \geq \hbar/2\sqrt{1-r^2}. \quad (11)$$

Неограниченное возрастание произведения дисперсий координаты и импульса при  $|r|^2 \rightarrow 1$  приводит к столь же неограниченному возрастанию прозрачности барьера и, следовательно, к аналогичному возрастанию вероятности ядерных реакций при низкой энергии взаимодействующих частиц вплоть до величины, соответствующей данной энергии и полной прозрачности барьера. Следует также учесть, что сечение любой беспороговой нерезонансной реакции резко возрастает (без учета туннельного эффекта) с уменьшением скорости и энергии относительного движения ( $\sigma \sim 1/v \sim 1/\sqrt{E}$ ).

Учет двух последних обстоятельств опровергает универсальность утверждения о неэффективности ядерных реакций при низкой энергии с участием заряженных частиц. Очевидно, что это утверждение справедливо только для некоррелированных состояний. Исходя из такого вывода очевидно, что центральным является вопрос о возможности и условиях реализации коррелированных состояний частиц с  $r^2 \rightarrow 1$ .

## 2. Условия формирования коррелированного когерентного состояния частицы в потенциальной яме

Проблема формирования и устойчивости коррелированных состояний частиц активно исследуется в течение последних 20 лет. С формальной точки зрения вопрос сводится к решению обратной задачи квантовой механики — нахождения такого состояния конкретной частицы в заданном силовом поле, для которого реализуется максимальное значение взаимной дисперсии  $|\sigma_{AB}|$  (10) разных физических характеристик этой частицы.

Для собственных (не суперпозиционных) состояний частицы в яме  $\Psi_n(q)$  коэффициент корреляции для координаты и импульса чаще всего равен нулю или мал. Например, для частицы в  $\delta$  — яме с  $V(q) = -V_0\delta(q)$  имеем

$$\langle q \rangle = 0, \quad \langle p \rangle = 0, \quad \langle q^2 \rangle = (\hbar^2/MV_0)^2/2, \quad \langle p^2 \rangle = (MV_0/\hbar)^2, \\ \langle qp \rangle = -\langle pq \rangle = i\hbar/2, \quad \sigma_{pq} = 0, \quad r = 0. \quad \text{Для этой ямы} \\ \delta q \delta p = \hbar/\sqrt{2}, \text{ что удовлетворяет (1).}$$

Один из простых методов формирования коррелированных когерентных состояний частицы связан с параметрической раскачкой (уменьшением частоты колебаний  $\omega(t)$ ) нестационарного гармонического осциллятора, находящегося в начале раскачки в основном состоянии параболической ямы. Система нормированных собственных функций  $\Psi_\alpha(q, t)$ , описывающих поведение частицы в нестационарном гармоническом осцилляторе с переменной частотой  $\omega(t)$ , находится из решения нестационарного уравнения Шредингера и имеет вид [1,2]

$$\Psi(q, t) = \int b(\alpha) \Psi_\alpha(q, t) d\alpha,$$

$$\Psi_\alpha(q, t) \equiv \Psi_\alpha(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi \varepsilon^2}} \exp\{[i[\xi^2/\omega_0](d\varepsilon/dt) + \alpha\xi\sqrt{8} - \alpha^2\varepsilon^* - \varepsilon|\alpha|^2]/2\varepsilon\}. \quad (12)$$

В этом выражении  $\xi = q/q_0$  — координата, нормированная на величину  $q_0 = \sqrt{\hbar/M\omega_0}$ ;  $\omega_0 \equiv \omega(t=0)$  — начальная частота гармонического осциллятора в момент включения возмущения;  $\alpha$  — произвольное постоянное комплексное число;  $\varepsilon(t)$  — комплексное решение классического уравнения движения осциллятора с переменной частотой  $\omega(t)$

$$d^2\varepsilon/dt^2 + \omega^2(t)\varepsilon = 0, \quad (13)$$

удовлетворяющее условию

$$\varepsilon^* d\varepsilon/dt - \varepsilon d\varepsilon^*/dt = 2i. \quad (14)$$

Прямое вычисление коэффициента корреляции (9) с использованием волновой функции (12) приводит к решению

$$r = \text{Re} \frac{\varepsilon^* d\varepsilon/dt}{|\varepsilon d\varepsilon/dt|}, \quad r^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{|\varepsilon d\varepsilon/dt|^2}. \quad (15)$$

Использование той же функции (12) приводит к следующему выражению для коэффициента сжатия коррелированного состояния:

$$k \equiv \frac{\sigma_q}{\sigma_p} = \frac{\omega_0}{|\varepsilon d\varepsilon/dt|}, \quad (16)$$

определяющего изменение отношения дисперсий координаты и импульса частицы.

Из (8) и (16) могут быть найдены выражения для этих дисперсий

$$\sigma_q \geq \sqrt{k\hbar/2(1-r^2)}, \quad \sigma_p \geq \sqrt{\hbar/2k(1-r^2)}. \quad (17)$$

При возрастании корреляции  $|r| \rightarrow 1$  коэффициент сжатия (16) стремится к постоянной величине ( $k \rightarrow 1$ ),

вследствие чего максимально коррелированные состояния характеризуются очень большими и взаимно независимыми значениями дисперсии

$$\sigma_q \geq \frac{\hbar}{2\sqrt{1-r^2}}, \quad \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2\sqrt{1-r^2}}, \quad r^2 \rightarrow 1. \quad (18)$$

При переходе к декартовым координатам уравнения (18) соответствуют выражениям

$$\sigma_x \geq \frac{\hbar}{2M\omega_0\sqrt{1-r^2}} = \frac{\sigma_{x0}}{\sqrt{1-r^2}},$$

$$\sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar M\omega_0}{2\sqrt{1-r^2}} = \frac{\sigma_{p_x0}}{\sqrt{1-r^2}}, \quad r^2 \rightarrow 1. \quad (19)$$

Разделение и взаимная независимость дисперсий для предельно коррелированных состояний связаны с тем, что при  $|r| \rightarrow 1$  взаимное фазирование (синхронизация) флуктуаций каждой из величин  $q$  и  $p$  приводит к очень большим дисперсиям каждой из этих величин, которые превышают результаты их взаимного влияния, соответствующего соотношению неопределенностей Гейзенберга.

Из формул (12)–(17) следует, что волновая функция коррелированного состояния (12) может быть записана в виде

$$\Psi_\alpha(q, t) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}\sigma_q} \exp \left[ -\frac{q^2}{4\sigma_q} \left( 1 - \frac{ir(t)}{\sqrt{1-r(t)^2}} \right) + \frac{\alpha q}{\sqrt{\sigma_q}} - \frac{1}{2}(\alpha^2 + |\alpha|^2) \right], \quad (20)$$

$$\langle q \rangle = 2\sqrt{\sigma_q} \operatorname{Re} \alpha, \quad \langle p \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{\sigma_q}} \left\{ \operatorname{Im} \alpha + \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \operatorname{Re} \alpha \right\}.$$

Здесь  $\alpha$  — параметр, определяющий симметрию системы и направление дрейфа когерентного коррелированного состояния. В симметричной нестационарной параболической потенциальной яме, для которой  $\alpha = 0$ ,  $\langle p \rangle = 0$ ,  $\langle q \rangle = 0$ , волновая функция коррелированного состояния частицы имеет вид

$$\Psi_0(q, t) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}\sigma_q} \exp \left[ -\frac{q^2}{4\sigma_q} \left( 1 - \frac{ir(t)}{\sqrt{1-r(t)^2}} \right) \right]. \quad (21)$$

Рассмотрим возможные методы формирования коррелированного состояния.

Из выражений (13)–(16) определяется связь между заданным изменением коэффициента корреляции  $r(t)$  и необходимым для этого законом изменения текущей частоты  $\omega_r(t)$  гармонического осциллятора

$$\omega_r(t) = A \sqrt{\frac{1}{(g(t))^2(1-r^2)}} \left\{ 1 - \frac{g(t)}{\omega_0\sqrt{1-r^2}} \frac{dr}{dt} \right\},$$

$$g(t) = \frac{r(t)}{|r(t)|} + 2\omega_0 \int_0^t \frac{r(\tau)d\tau}{\sqrt{1-r(\tau)^2}}. \quad (22)$$

Коэффициент  $A$  находится из условия  $\omega_r(0) = \omega_0$ .

Из этой формулы легко найти зависимость частоты осциллятора от времени

$$\omega_0(t) = \omega_0 / \left( 1 + 2\omega_0|r_0|t/\sqrt{1-r_0^2} \right), \quad (23)$$

при которой коэффициент корреляции остается неизменным и равным  $r_0$ .

Для монотонного возрастания  $|r(t)|$  необходимо, чтобы частота  $\omega_r(t)$  с увеличением времени убывала быстрее, чем  $\omega_0(t)$  (23). Если  $\omega_r(t)$  убывает медленнее, чем (23), то  $|r(t)|$  с течением времени уменьшается по сравнению с  $|r(0)|$ .

Необходимо отметить, что имеется еще одно фундаментальное ограничение на закон допустимого изменения коэффициента корреляции  $r(t)$  в интервале от  $r(t) \approx 0$  при  $t = t_0 = 0$  до  $|r(t_1)| \leq 1$  при  $t = t_1$  и в итоге — на закон убывания частоты  $\omega_r(t)$ .

В частности, очевидно, что итоговое коррелированное состояние с  $|r(t_1)| \rightarrow 1$  не может быть достигнуто за как угодно малый интервал времени. Это соответствует тому, что производная  $|dr(t)/dt|$  ни в один момент времени в интервале  $t_0 \leq t \leq t_1$  не должна быть очень большой. Формально это требование непосредственно следует из условия действительности изменяемой частоты осциллятора  $\omega_r(t)$ , определяемой из уравнения (22).

Очевидно, что нахождение частицы с малой энергией  $E < V_{\max}$  в параболической потенциальной яме  $V(x, t) = m(\omega_r(t))^2 x^2 / 2$  соответствует условию  $(\omega_r(t))^2 > 0$ . Случай движения частицы над параболическим потенциальным барьером соответствует принципиально другому условию  $E > V_{\max}$  и в этом случае имеет место соотношение  $(\omega_r(t))^2 < 0$ .

Если ограничиться наиболее важным случаем нахождения частицы с  $E < V_{\max}$  (и тем более с  $E \ll V_{\max}$ ) в потенциальной яме, то из выражения (22) находим, что необходимое требование  $(\omega_r(t))^2 > 0$  выполняется при наличии дополнительного условия

$$\frac{dr(t)}{dt} \leq \omega_0 \sqrt{1-r(t)^2} / \left\{ 1 + 2\omega_0 \int_0^t \frac{r(t')dt'}{\sqrt{1-(r(t'))^2}} \right\},$$

$$t_0 \leq t \leq t_1, \quad (24)$$

которое в потенциальной яме должно выполняться при любых требуемых значениях  $r(t)$ , в том числе и при  $|r(t)| \rightarrow 1$ . Условие (24) соответствует требованию адиабатичности процесса изменения частоты  $\omega_r(t)$  и ограничивает либо возможный закон изменения  $r(t)$ , либо время, в течение которого возможен процесс возрастания коэффициента корреляции. Из структуры правой части неравенства (24) следует, что это условие накладывает достаточно жесткие ограничения на закон изменения  $r(t)$  в области  $|r(t)| \rightarrow 1$ , которая представляет наибольший интерес для практических приложений.

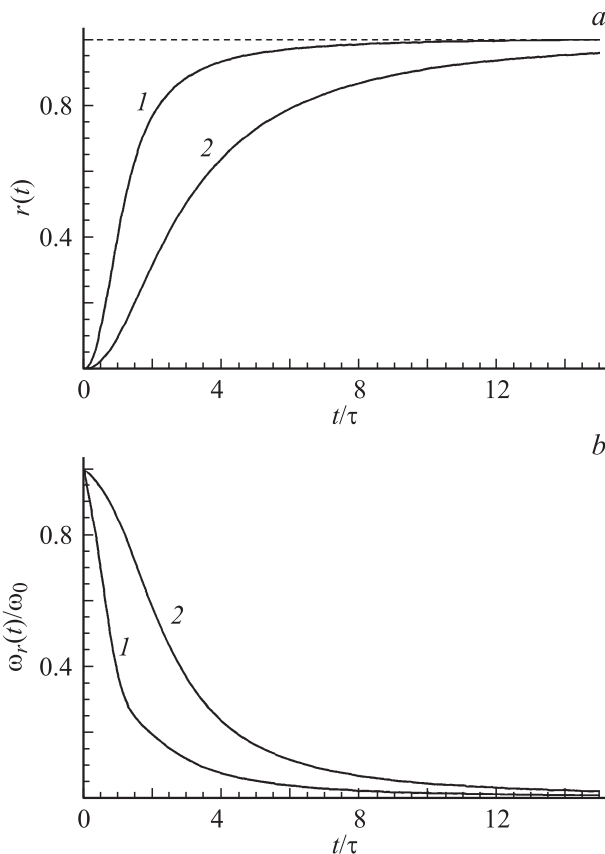
Легко убедиться, что одно из решений  $r(t)$ , обеспечивающих одновременное удовлетворение соотношений (22) и (24), имеет вид

$$r(t) = \frac{t/\tau}{\sqrt{F(t) + (t/\tau)^2}}, \quad F(t \rightarrow 0) \rightarrow \infty, \\ F(t \rightarrow \infty) \rightarrow \text{const.} \quad (25)$$

Здесь  $\tau$  — характерное время изменения коэффициента корреляции.

Это решение обеспечивает выполнение оптимальных условий  $r(0) = 0$ ,  $r(t \rightarrow \infty) \rightarrow 1$  и согласуется с условием адиабатичности (24).

На рис. 1 представлены два примера возрастания коэффициента корреляции  $r(t)$  (25) для функции  $F(t) = c[1 + (c^{1/4}\tau/t)^3]^{2/3}$  при  $c = 10^{4/3}$ ,  $c = 2^{4/3}$  и тот вид изменения частоты гармонического осциллятора  $\omega_r(t)$  (22), который обеспечивает необходимую зависимость  $r(t)$  в формуле (25). Видно, что при таком законе изменения  $\omega_r(t)$  имеет место быстрое формирование коррелированного состояния частицы с коэффициентом корреляции, асимптотически приближающимся к своему предельному значению  $|r(t)| \rightarrow 1$ .



**Рис. 1.** Изменение коэффициента корреляции частицы  $r(t)$  в нестационарном гармоническом осцилляторе (a), вызванное соответствующим изменением частоты этого осциллятора  $\omega_r(t)$  (b). Кривые 1 и 2 соответствуют двум значениям функции  $F(t) = c[1 + (c^{1/4}\tau/t)^3]^{2/3}$  при  $c = 10^{4/3}$ ,  $c = 2^{4/3}$  в формуле (24).

Полученные результаты согласуются с условием адиабатичности и со сделанным выше выводом, согласно которому оптимальный метод достижения большого коэффициента корреляции имеет место в том случае, если частота параметрической раскачки  $\omega_r(t)$  уменьшается быстрее, чем  $\omega_{r0}(t)$  (23).

Могут быть найдены и другие законы изменения  $r(t)$ , определяющие процесс формирования ККС. Следует также отметить, что условие адиабатичности (24) может соответствовать также немонотонному (в частности, осциллирующему) закону изменения  $\omega_r(t)$ . Такие зависимости  $\omega_r(t)$  могут быть исследованы, если необходимо достижение конечного значения  $|r(t)| < 1$  за конечное время.

### 3. Эффект просветления барьера для частицы, находящейся в когерентном коррелированном состоянии

Для иллюстрации возрастания эффективности туннельного эффекта для частицы, находящейся в частично коррелированном состоянии, рассмотрим задачу об изменении плотности вероятности локализации частицы в нестационарном гармоническом осцилляторе, частота которого изменялась в соответствии с (22) по закону  $\omega = \omega(t)$  при  $t \leq 0$  и является постоянной  $\omega = \omega(0) \equiv \omega_0$  при  $t \geq 0$ . В этой системе коэффициент корреляции  $r(t)$  изменялся по закону (25) при  $t \leq 0$  и равен  $r(0) \equiv r_0$  при  $t = 0$ .

Волновая функция частицы в деформируемой параболической яме при  $t \leq 0$  имела вид  $\Psi(x, t \leq 0) \equiv \Psi_{\text{corr}}(x, r(t), t \leq 0)$  (21). При  $t = 0$  она определялась соотношением (21)

$$\Psi_{\text{corr}}(x, r_0, t = 0) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_{x0}}} \times \exp\left[-\frac{x^2}{4\sigma_{x0}}\left(1 - \frac{ir_0}{\sqrt{1-r_0^2}}\right)\right], \quad \sigma_{x0} = \sigma_x(t = 0). \quad (26)$$

Волновая функция частицы  $\Psi(x, t)$  при  $t \geq 0$  в той же яме (стационарном осцилляторе с частотой  $\omega_0$ ) может быть представлена в виде разложения по собственным функциям оператора Гамильтона стационарного осциллятора

$$\Psi(x, r_0, t \geq 0) = \sum_n B_n \varphi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}, \\ \varphi_n(x) = C_n H_n(x) e^{-x^2/2x_0^2}, \quad x_0^2 = 2\sigma_{x0}, \quad (27) \\ C_n = \frac{1}{\sqrt{x_0 2^n n! \sqrt{\pi}}}, \quad x_0 = \sqrt{\hbar/M\omega_0}, \\ E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2).$$

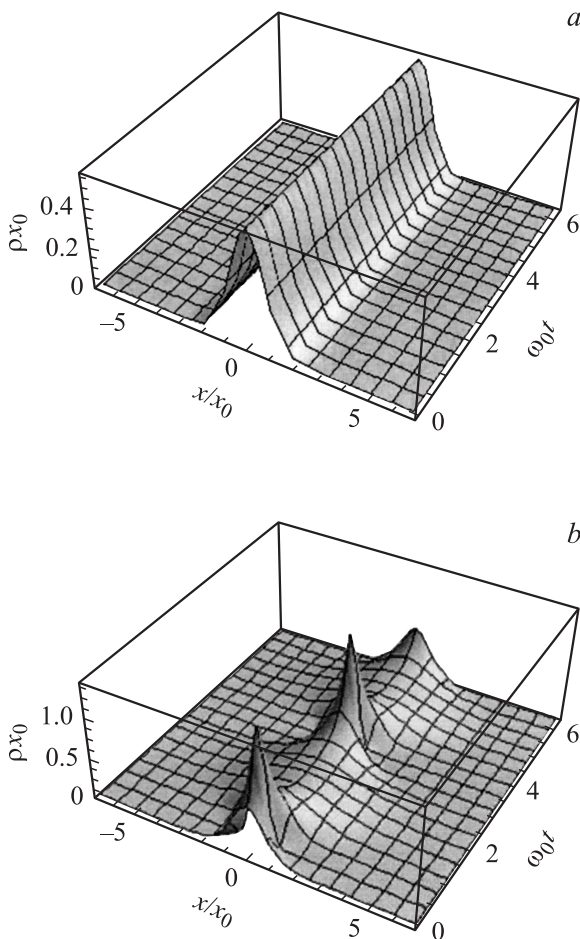
Здесь  $H_n(x/x_0)$  — полином Эрмита.

Из условия непрерывности волновых функций  $\Psi_{\text{corr}}(x, r(t), t \leq 0)$  и  $\Psi(x, r_0, t \geq 0)$  при  $t = 0$  находим выражения для амплитуд возбуждения  $B_n(r_0)$  собственных состояний  $\varphi_n(x)$  и для волновой функции частицы в стационарной яме  $V(x, t \geq 0)$  в произвольный момент времени  $t \geq 0$

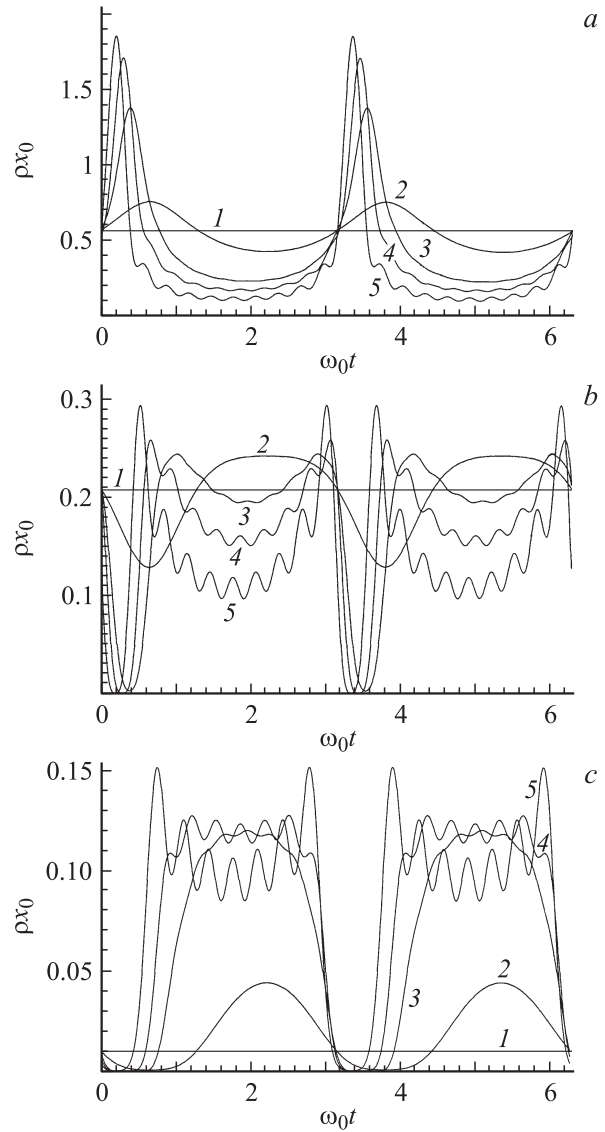
$$B_n \equiv B_n(r_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\text{corr}}(x, r_0, t = 0) \varphi_n^*(x) dx,$$

$$\Psi(x, r_0, t \geq 0) = \sum_n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\text{corr}}(x, r_0, t = 0) \varphi_n^*(x) dx \right\} \times \varphi_n(x) \exp(-iE_n t / \hbar). \quad (28)$$

На рис. 2 представлены результаты вычисления плотности вероятности  $|\Psi(x, r_0, t \geq 0)|^2$  (28) локализации частицы в пределах параболической ямы  $V(x, t \geq 0) = (x/x_0)^2$  при  $t \geq 0$  для двух значений коэффициента корреляции.



**Рис. 2.** Изменение с течением времени плотности вероятности локализации частицы  $|\Psi(x, r_0, t \geq 0)|^2 = \rho$  в некоррелированном состоянии с  $r_0 = 0$  (a) и в состоянии с  $r_0 = 0.9$  (b).



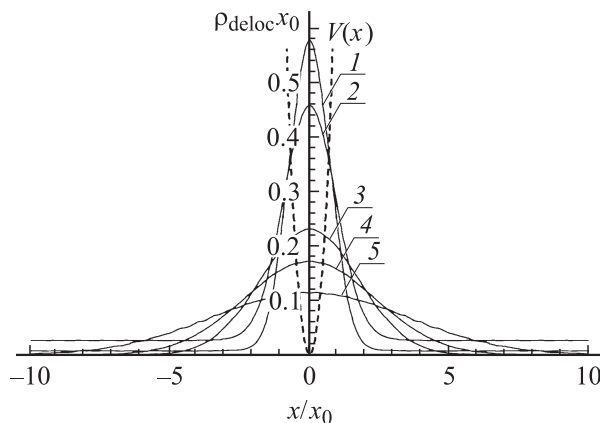
**Рис. 3.** Периодическая модуляция плотности вероятности  $|\Psi(x, r_0, t \geq 0)|^2 = \rho$  для состояний с коэффициентом корреляции  $r_0$ : 1 — 0, 2 — 0.5, 3 — 0.9, 4 — 0.95, 5 — 0.98 в той же параболической потенциальной яме  $V(x)$  для разных значений координаты  $x$ : а)  $x = 0$ ; б)  $|x| = x_0$ ; в)  $|x| = 2x_0$ .

Из полученных результатов следует, что взаимная интерференция разных собственных функций частицы, формируемых в начальном коррелированном состоянии  $\Psi(x, r_0, t = 0)$ , приводит к периодическому изменению (возрастанию и уменьшению) пространственного распределения плотности вероятности локализации частицы и дисперсии координаты в пределах ямы и в области под барьером при  $t \geq 0$ .

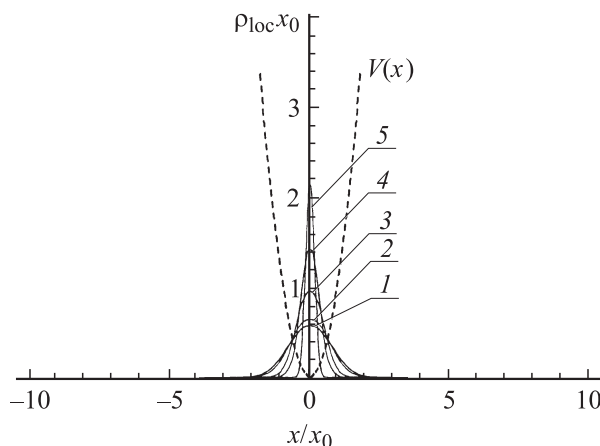
Эти результаты представлены на рис. 3 в форме зависимостей  $|\Psi(x, r_0, t \geq 0)|^2 = \rho$  от времени для разных значений координаты  $x$ . Для некоррелированного состояния дисперсия координаты остается неизменной и равной начальному значению  $\sigma_{x0}$ . Для такого состояния вероятность проникновения частицы в область под ба-

рьером при  $|x| \gg x_0$  очень мала. Из результатов расчета видно, что для коррелированных состояний значение плотности вероятности в области под барьером (при  $|x| \geq 2x_0$ ) в фазе делокализации намного превышает стационарное значение для некоррелированных состояний.

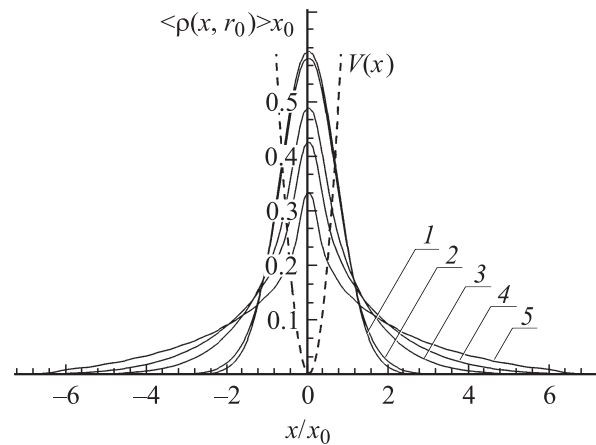
На рис. 4 и 5 представлено изменение пространственного распределения плотностей вероятности локализации частицы  $|\Psi(x, r_0, t_{\text{deloc}})|^2 = \rho_{\text{deloc}}$  и  $|\Psi(x, r_0, t_{\text{loc}})|^2 = \rho_{\text{loc}}$  в той же потенциальной яме  $V(x, t \geq 0) = (x/x_0)^2$  для моментов времени  $t_{\text{deloc}}$  и  $t_{\text{loc}}$ , соответствующих максимальной и минимальной дисперсии координаты для частично коррелированных состояний. Эти состояния соответствуют минимумам и максимумам плотности вероятности на рис. 2, *b* при  $x = 0$ .



**Рис. 4.** Изменение пространственного распределения функции  $|\Psi(x, r_0, t_{\text{deloc}})|^2 = \rho_{\text{deloc}}$  в потенциальной яме  $V(x) = (x/x_0)^2$  и в области под барьером в состояниях с коэффициентом корреляции  $r_0$ : 1 — 0, 2 — 0.5, 3 — 0.9, 4 — 0.95, 5 — 0.98 и в некоррелированном состоянии с  $r_0 = 0$  для моментов времени, соответствующих максимальной дисперсии координаты.



**Рис. 5.** Изменение пространственного распределения функции  $|\Psi(x, r_0, t_{\text{loc}})|^2 = \rho_{\text{loc}}$  в потенциальной яме  $V(x) = (x/x_0)^2$  и в области под барьером в состояниях с разными значениями коэффициента корреляции (см. рис. 3, 4) для моментов времени  $t_{\text{loc}}$ , соответствующих минимальной дисперсии координаты.



**Рис. 6.** Усредненное распределение плотностей вероятности  $\langle |\Psi(x, r_0, t \geq 0)|^2 \rangle_t = \langle \rho(x, r_0) \rangle$  для частицы в потенциальной яме  $V(x) = (x/x_0)^2$  и в области под барьером стенки ямы  $V(x) = (x/x_0)^2$  для коррелированных и некоррелированных состояний частицы с  $r_0$ : 1 — 0, 2 — 0.5, 3 — 0.9, 4 — 0.95, 5 — 0.98.

Периодические осцилляции плотности вероятности соответствуют осцилляциям как дисперсии координаты частицы в яме, так и вероятности туннельного эффекта. Итоговая эффективность влияния степени корреляции на туннельный эффект может быть определена при усреднении полученных зависимостей  $|\Psi(x, r_0, t \geq 0)|^2$  по периоду осцилляций  $T = 2\pi/\omega_0$ .

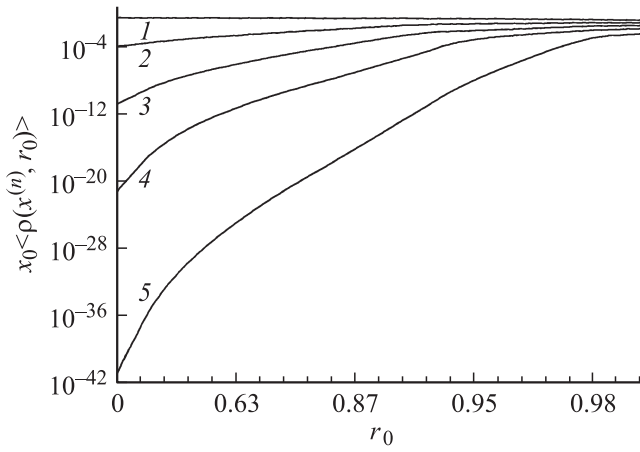
Результаты усреднения функции  $|\Psi(x, r_0, t \geq 0)|^2 = \rho$

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &\equiv \langle |\Psi(x, r_0, t \geq 0)|^2 \rangle_t \\ &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |\Psi(x, r_0, t \geq 0)|^2 dt \end{aligned} \quad (29)$$

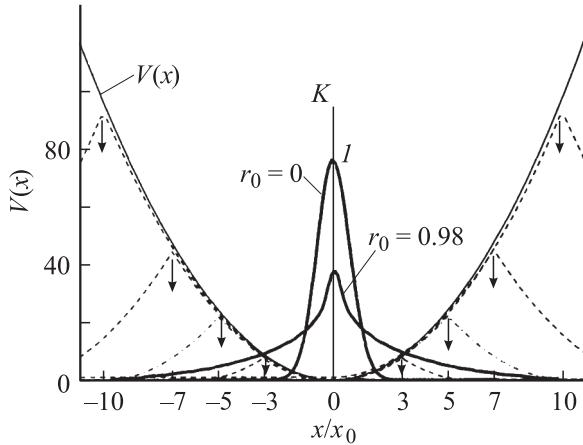
для разных значений начального коэффициента корреляции в той же параболической яме  $V(x, t \geq 0) = (x/x_0)^2$  представлены на рис. 6. Из этого рисунка видно, что очень резкое увеличение дисперсии координаты частицы и вероятности ее подбарьерного проникновения для коррелированного состояния в фазе делокализации (см. рис. 4) не компенсируется и намного превосходит их уменьшение в фазе локализации (см. рис. 5).

При усреднении по периоду осцилляций (рис. 7) это приводит к возрастанию на много порядков вероятности проникновения частицы в глубь потенциального барьера и, естественно, в область, находящуюся за барьером. На рис. 7 представлено итоговое изменение (увеличение) усредненной плотности вероятности локализации частицы (вероятности туннельного эффекта)  $\langle |\Psi(x^{(n)}, r_0, t \geq 0)|^2 \rangle_t = \langle \rho(x^{(n)}, r_0) \rangle$  для разных величин коэффициента корреляции в интервале  $r_0 = [0, 0.988]$  и разных значений координаты  $x^{(n)} = x_0, 3x_0, 5x_0, 7x_0, 10x_0$  в области под тем же потенциальным барьером  $V(x)$ . Видно, что для коррелированных состояний всегда имеет место очень





**Рис. 7.** Усредненная нормированная вероятность туннельного эффекта  $\langle |\Psi(x^{(n)}, r_0, t \geq 0)|^2 \rangle_t = \langle \rho(x^{(n)}, r_0) \rangle$  в области под потенциальным барьером (стенкой параболической ямы  $V(x) = (x/x_0)^2$ ) для коррелированных состояний для разных значений координаты  $x^{(n)}$ : 1 —  $|x^{(1)}| = x_0$ , 2 —  $|x^{(3)}| = 3x_0$ , 3 —  $|x^{(5)}| = 5x_0$ , 4 —  $|x^{(7)}| = 7x_0$ , 5 —  $|x^{(10)}| = 10x_0$ .



**Рис. 8.** Изменение проницаемости нормированного параболического потенциального барьера  $V(x) = (x/x_0)^2$  для граничных случаев некоррелированного (при  $r_0 = 0$ ) и сильно коррелированного (при  $r_0 = 0.98$ ) состояний частицы. Цифры  $\pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 10$ , стоящие на оси  $x$  ниже соответствующих вертикальных стрелок, показывают положение максимумов потенциальных ям  $V^{(n)}(x)$ , образуемых из общей потенциальной ямы  $V(x)$ .

большое возрастание вероятности туннельного эффекта, причем в глубоко подбарьерной области (при  $x^{(n)} \gg x_0$ ), где эта вероятность для некоррелированных состояний очень мала, изменение вероятности туннельного эффекта достигает гигантских величин — при, например,  $r_0 = 0.988$  она возрастает в  $10^{30} - 10^{40}$  и более раз в точке с координатой  $x = 10x_0 \approx 14\sqrt{\sigma_{x0}}$ .

Этот результат подтверждает справедливость проведенных выше качественных оценок, основанных на соотношении неопределенностей Шредингера–Робертсона.

Очевидно, что найденное увеличение вероятности проникновения частицы в область под барьером с возрастанием коэффициента корреляции прямо связано с соотношением неопределенностей Шредингера–Робертсона и является его прямым следствием.

Этот результат имеет очень большое прикладное значение. В частности, из него следует возможность столь же значительного возрастания вероятности ядерного взаимодействия. Рассмотрим простую модель и представим, что во взаимодействии участвуют три ядра — два расположены в точках  $\pm x^{(n)}$ , а третье в пространстве между ними. Кулоновское отталкивание приводит к появлению справа и слева от третьей частицы двух потенциальных барьеров  $V^{(n)}(x \pm x^{(n)})$ . Поле в области между этими барьерами можно приближенно описать параболическим потенциалом. Эта система представлена в символическом виде на рис. 8. На этом рисунке каждый из потенциальных барьеров  $V^{(n)}(x)$  соответствует параболической аппроксимации структуры барьера, создаваемого ближайшим ядром (центр каждого из этих барьеров расположен при конкретном значении координаты  $x^{(n)}$ ). Величина  $K = \langle \rho(r_0, x) \rangle / \langle \rho(r_0 = 0, x = 0) \rangle$  определяет отношение усредненных значений плотности вероятности локализации одного ядра в месте расположения другого при наличии корреляции и в ее отсутствии.

Возрастание усредненной плотности вероятности локализации частицы под барьером  $\langle |\Psi(x^{(n)}, r_0, t \geq 0)|^2 \rangle_t = \langle \rho(x^{(n)}, r_0) \rangle$  приводит к аналогичному возрастанию вероятности ядерной реакции (синтезу)

$$\lambda_0 = \Lambda \langle |\Psi(x^{(n)}, r_0, t)|^2 \rangle_t \quad (30)$$

с участием двух ядер с очень малой энергией относительного движения, расположенных в точках с координатами  $x = 0$  и  $x = \pm x^{(n)}$ , если хотя бы одно из них находится в коррелированном состоянии.

Здесь  $\Lambda = S(E)\hbar/\pi Me^2$  — константа ядерного синтеза;  $S(E)$  — астрофизический ядерный фактор, зависящий от матричного элемента энергии взаимодействия ядер и являющийся константой  $S(E) = S_0$  в случае нерезонансных реакций. В частности, для реакции  $dd$ -синтеза  $S_0 \approx 0.11$  MeV и  $\Lambda \approx 1.5 \cdot 10^{-16}$  cm<sup>3</sup>/s.

Для частиц с малой энергией, для которых в случае некоррелированного состояния исходная вероятность реакции  $\lambda_0$  предельно мала, формирование коррелированного состояния может привести к увеличению эффективности реакции  $\lambda_{r_0} = \lambda_0 \langle |\Psi(x^{(n)}, r_0, t)|^2 \rangle_t / |\Psi(x^{(n)}, r = 0, t)|^2$  на много порядков.

## Заключение

Проведенный анализ особенностей влияния коррелированного состояния частицы на ее поведение в потенциальной яме демонстрирует очень значительное



(в ряде случаев — гигантское, в  $10^{30}$ – $10^{40}$  и более раз) увеличение вероятности туннельного эффекта. Найден такой режим деформации потенциальной ямы (параметрическая раскачка гармонического осциллятора), при котором обеспечивается наиболее оптимальный адиабатический метод возрастания коэффициента корреляции с приближением к его предельному значению  $|r| \rightarrow 1$ , что ведет к неограниченному возрастанию дисперсии координаты частицы и к полному просветлению потенциального барьера. Этот эффект имеет очень большое прикладное значение и может быть, в частности, использован для оптимизации ядерных взаимодействий при низкой энергии и наличии очень высокого кулоновского барьера. При естественной (автомодельной) реализации коррелированного состояния в процессе внешнего воздействия на мишень этот эффект может быть причиной протекания высокоэффективных ядерных реакций.

Следует отметить, что резкое возрастание дисперсии координаты  $\sigma_q$  одной из нескольких из взаимодействующих частиц при формировании коррелированного состояния может приводить к осуществлению коллективных эффектов и возрастанию итоговой эффективности межъядерного взаимодействия в  $N \approx (\sqrt{\sigma_q}/\langle\alpha\rangle)^3$  раз, если величина  $\sqrt{\sigma_q}$  будет существенно превышать среднее расстояние между взаимодействующими частицами  $\langle\alpha\rangle$ . Такие процессы, вероятно, имеют место в экспериментах в лаборатории „Протон-21“ по пространственно синхронизованному сжатию мишеней [6].

Физическая причина значительного увеличения прозрачности барьера в суперпозиционном коррелированном состоянии состоит в следующем. Формирование коррелированного состояния ведет к синфазности и когерентному сложению (конструктивной интерференции) флуктуаций импульса для разных собственных состояний, образующих суперпозиционное коррелированное состояние. Следствием этой интерференции является формирование большого по величине взаимосогласованного флуктуационного импульса частицы, что ведет к резкому возрастанию вероятности туннелирования за счет кратковременного формирования состояний с большой энергией. Это — динамический процесс, но в коррелированном состоянии вероятность образования таких коррелированных флуктуаций импульса резко возрастает с ростом коэффициента корреляции. В противовес этому такая интерференция вследствие полного отсутствия синфазности флуктуаций крайне маловероятна для некоррелированных состояний.

Существенным является то обстоятельство, что использование процессов „просветления“ потенциального барьера не ограничено ядерной физикой. Они могут играть существенную роль в самых разных областях прикладной микрофизики (в частности, в современных системах нанoeлектроники типа квантовых точек и квантовых линий).

## Список литературы

- [1] Додонов В.В., Манько В.И. // Тр. ФИАН. 1988. Т. 183. С. 71–175.
- [2] Додонов В.В., Климов А.В., Манько В.И. // Тр. ФИАН. 1991. Т. 200. С. 56–1051.
- [3] *Schrodinger E.* // Ber. Kgl. Akad. Wiss. Berlin, 1930. S. 296–303.
- [4] *Robertson H.P.* // Phys. Rev. A. 1930. Vol. 35. P. 667.
- [5] *Высоцкий В.И.* Квантовая механика и ее использование в прикладной физике. Киев: Изд-во Киевского национального университета имени Т. Шевченко, 2009. 360 с.
- [6] *Controlled Nucleosynthesis. Breakthroughs in Experiment and Theory* / Ed. by S.V. Adamenko, F. Selleri, A. van der Merwe. Springer, 2007. 703 p.