1. Корельовані стани квантової системи. Співвідношення невизначеностей Шредінгера-Робертсона (отримати)

Розглядаємо дві фізичні величини L і M , та відповідні їм оператори $\hat{L}$ і $\hat{M}$. Введемо позначення

$$v = (\hat{M} - \bar{M})\psi$$

$$u = (\hat{L} - \bar{L})\psi$$

Тоді середньоквадратична похибка в таких позначеннях:

$$< \Delta L^2 >= \int uu^* dx$$

$$< \Delta M^2 >= \int vv^* dx$$

Розглянемо інтеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} |\beta u + iv|^2 dx$

Очевидно, що цей інтеграл більше нуля. Тут параметр β - довільне комплексне число. $\beta = \beta' + i\beta''$

Розпишемо його

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |\beta u + iv|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} ((\beta' + i\beta'')u + iv)((\beta' - i\beta'')u^* - iv^*)dx =$$

$$= \beta'^2 \int_{-\infty}^{\infty} uu^* dx + i\beta' \int_{-\infty}^{\infty} (u^* v - uv^*)dx +$$

$$+\beta''^2 \int_{-\infty}^{\infty} uu^* dx + i\beta'' \int_{-\infty}^{\infty} (u^* v + uv^*)dx +$$

$$+i\beta'\beta'' \int_{-\infty}^{\infty} uu^* dx + \int_{-\infty}^{\infty} vv^* dx$$

Виносимо за дужки $\int uu^* dx$ і виділяємо два повних квадрата для доданків 1-2 та 3-4

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} uu^* dx \left\{ \beta' + \frac{i}{2} \frac{\int (u^* v - uv^*) dx}{\int |u|^2 dx} \right\}^2 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} uu^* dx \left\{ \beta'' + \frac{i}{2} \frac{\int (u^* v + uv^*) dx}{\int |u|^2 dx} \right\}^2 -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} uu^* dx \left(\left\{ \frac{i}{2} \frac{\int (u^* v - uv^*) dx}{\int |u|^2 dx} \right\}^2 + \left\{ \frac{i}{2} \frac{\int (u^* v + uv^*) dx}{\int |u|^2 dx} \right\}^2 \right) + \int_{-\infty}^{\infty} |v|^2 dx$$

Перший і другий доданки більші нуля. Потрібно, щоб сума всіх інших була більшою нуля. Тобто

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |v|^2 dx - \frac{\left(\frac{i}{2} \int (u^* v - uv^*) dx \right)^2 + \left(\frac{i}{2} \int (u^* v + uv^*) dx \right)^2}{\int |u|^2 dx} \geq 0$$

Тобто

$$\int |u|^2 dx \int |v|^2 dx \geq \left(\frac{i}{2} \int (u^* v - uv^*) dx \right)^2 + \left(\frac{i}{2} \int (u^* v + uv^*) dx \right)^2$$

Підставляємо явні вирази для u і v

$$\overline{(\Delta L)^2} \cdot \overline{(\Delta M)^2} \geq \frac{1}{4} \left| \int \psi^* (\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L}) \psi dx \right|^2 -$$

$$- \frac{1}{4} \left(2\overline{L} \cdot \overline{M} + \int \psi^* \hat{M}\hat{L} \psi dx + \int \psi^* \hat{L}\hat{M} \psi dx - \overline{M} \cdot \overline{L} - \overline{L} \cdot \overline{M} - \overline{L} \cdot \overline{M} - \overline{L} \cdot \overline{M} \right)^2$$

Після спрощень

$$\overline{(\Delta L)^2} \cdot \overline{(\Delta M)^2} \geq \frac{1}{4} |< [L, M] >|^2 - \left(\frac{< LM + ML >}{2} - \overline{L} \cdot \overline{M} \right)^2$$ (тут должен быть плюс вместо минуса после |<L,M>|^2!!!)

Перепишемо у вигляді

$$\overline{(\Delta L)^2} \cdot \overline{(\Delta M)^2} \left(1 - \left\{ \frac{< LM + ML >}{2\sqrt{\overline{(\Delta L)^2} \cdot \overline{(\Delta M)^2}}} - \frac{\overline{L} \cdot \overline{M}}{\sqrt{\overline{(\Delta L)^2} \cdot \overline{(\Delta M)^2}}} \right\}^2 \right) \geq \frac{1}{4} |< [L, M] >|^2$$

Введемо позначення

Коефіцієнт кореляції $r = \frac{< LM + ML >}{2\sqrt{\overline{(\Delta L)^2} \cdot \overline{(\Delta M)^2}}} - \frac{\overline{L} \cdot \overline{M}}{\sqrt{\overline{(\Delta L)^2} \cdot \overline{(\Delta M)^2}}}$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Середньоквадратичні відхилення $\sigma_L = \overline{(\Delta L)^2}$ та $\sigma_M = \overline{(\Delta M)^2}$

В результаті маємо ***співвідношення невизначеності Шредінгера-Робертсона***

$$\sigma_L \sigma_M \geq \frac{\frac{1}{4}\left|< [L, M] >\right|^2}{1 - r^2}$$

Діапазон зміни коефіцієнта кореляції $-1 \leq r \leq 1$

Легко помітити, що при $\overline{L} \cdot \overline{M} =< ML >$ $r = 0$. Це випадок абсолютно некорельованих станів. Випадок, коли $|r| \to 1$ відповідає абсолютно корельованим станам.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

2.Корельовані стани. Визначити, чи є корельованими основний або збуджені стани частинки в нескінченно глибокій прямокутній ямі і отримати вираз для співвідношення невизначеностей.

Відповідь:

Для нескінченноо глибокої прямокутної потенціальної ями:

$V(x) = 0, x \in [0, a]$

$V(x) = \infty, x \notin [0, a]$

Хвилеві функції для частинки:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi n}{a} x)$$

$n = 1, 2, 3, ...$

Знайдемо коефіцієнт кореляції між флуктуаціями координати та імпульсу:

$$r_{xp} = \frac{\sigma_{xp}}{\sqrt{< \Delta x^2 >}\sqrt{< \Delta p^2 >}}$$

$$\sigma_{xp} = \frac{1}{2} < xp + px > - < x >< p >$$

Середні значення:

$$< x >= \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi n}{a} x) x \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi n}{a} x) dx = \frac{2}{a} \int_0^a x \{\sin(\frac{\pi n}{a} x)\}^2 dx = \frac{a}{2}$$

$$< p >= \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi n}{a} x)(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi n}{a} x) dx = -\frac{2i\hbar \pi n}{a^2} \int_0^a \sin(\frac{\pi n}{a} x) \cos(\frac{\pi n}{a} x) dx = 0$$

Дисперсії:

$$< \Delta x^2 >=< x^2 > -(< x >)^2$$

$$< \Delta p^2 >=< p^2 > -(< p >)^2 =< p^2 >$$

$$< x^2 >= \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi n}{a} x) x^2 \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi n}{a} x) dx = \frac{2}{a} \int_0^a x^2 \{\sin(\frac{\pi n}{a} x)\}^2 dx = a^2 (\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2 \pi^2})$$

$$< \Delta x^2 >= a^2 (\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2 \pi^2}) - \frac{a^2}{4} = a^2 (\frac{1}{12} - \frac{1}{2n^2 \pi^2})$$

$$< p^2 >= \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi n}{a} x)(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi n}{a} x) dx = -\frac{2\hbar^2 \pi^2 n^2}{a^3} \int_0^a \sin(\frac{\pi n}{a} x)^2 dx = (\frac{\hbar \pi n}{a})^2$$

$$< \Delta p^2 >= (\frac{\hbar \pi n}{a})^2$$

Перейдемо до обчислення σ_{xp}

$$\sigma_{xp} = \frac{1}{2} < xp + px >= -\frac{i\hbar}{2} \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi n}{a} x)(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} x) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi n}{a} x) dx =$$

$$= -\frac{2i\hbar}{a} \frac{2\pi n}{a} \int_0^a x \sin(\frac{\pi n}{a} x) \cos(\frac{\pi n}{a} x) dx - \frac{i\hbar}{a} \int_0^a \{\sin(\frac{\pi n}{a} x)\}^2 dx = 0$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Остаточно:

$$\left|r_{xp}\right| = 0$$

Невизначеність :

$$\sqrt{<\Delta x^2>}\sqrt{<\Delta p^2>} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Можемо з певністю сказати, що флуктуації імпульсів та координат окремих станів в прямокутній нескінченній ямі – некорельовані.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

3. Корельовані стани. Частинка знаходиться в суперпозиційному стані $A\Psi_1+B\Psi_2$ в нескінченно глибокій прямокутній ямі. Знайти коефіцієнт кореляції частинки.

Коефіцієнт кореляції

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X \sigma_Y}}$$

Визначає ступінь королювання величин X і Y в конкретному стані , заданому хвильовою функцією $\Psi(x)$.

$$\sigma_{XY} = \left\langle \left\{ \Delta\hat{X}, \Delta\hat{Y} \right\} \right\rangle / 2 = \left\langle \left(\hat{X} - \left\langle \hat{X} \right\rangle \right)\left(\hat{Y} - \left\langle \hat{Y} \right\rangle \right) + \left(\hat{Y} - \langle Y \rangle \right)\left(\hat{Y} - \langle Y \rangle \right) \right\rangle / 2 =$$
$$= \left\langle \hat{X}\hat{Y} + \hat{Y}\hat{X} \right\rangle / 2 - \langle X \rangle \langle Y \rangle$$

Хвильова функція частинки на n енергетичному рівні в прямокутній потенціальній ямі має вигляд:

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} sin\left(\frac{\pi n x}{a} \right)$$

В нашому випадку хвильова функція матиме вигляд :

$$\Psi = A\Psi_n + B\Psi_m = \sqrt{\frac{2}{a}} \left(A sin\frac{\pi n x}{a} + B sin\frac{\pi m x}{a} \right)$$

З умови нормування: $\int_o^a \Psi^* \Psi dx = |A|^2 + |B|^2 = 1$

Потрібно знайти величини

$$\sigma_x = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2$$
$$\sigma_p = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p \rangle^2$$
$$\sigma_{xp} = \frac{1}{2}\left(\langle xp \rangle + \langle px \rangle \right) - \langle x \rangle \langle p \rangle$$
$$r = \frac{\sigma_{xp}}{\sqrt{\sigma_x}\sqrt{\sigma_p}}$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$\langle x\rangle = \int_0^a \psi^* x\psi dx = \frac{2}{a}\int_0^a \left(AA^* x\sin^2\left(\frac{\pi nx}{a}\right) + BB^* x\sin^2\left(\frac{\pi mx}{a}\right) + \left(AB^* + A^*B\right)x\sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right)\right)dx$$

$$\langle x\rangle = \frac{2}{a}\left(\left(AA^* + BB^*\right)\frac{a^2}{4} + \frac{2\left(-1+(-1)^{m+n}\right)a^2mn}{\left(m^2-n^2\right)\pi^2}\left(AB^* + A^*B\right)\right) =$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{4mna\left(-1+(-1)^{m+n}\right)\left(AB^* + A^*B\right)}{\left(m^2-n^2\right)\pi^2}$$

$$\langle x^2\rangle = \int_0^a \psi^* x\psi dx = \frac{2}{a}\int_0^a \left(AA^* x^2\sin^2\left(\frac{\pi nx}{a}\right) + BB^* x^2\sin^2\left(\frac{\pi mx}{a}\right) + \left(AB^* + A^*B\right)x^2\sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right)\right.$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{a^2}{6}\left(\left(2-\frac{3}{n^2\pi^2}\right)AA^* + \left(2-\frac{3}{m^2\pi^2}\right)BB^*\right) + \frac{8(-1)^{m+n}a^2mn}{\left(m^2-n^2\right)^2\pi^2}\left(AB^* + A^*B\right)$$

$$\sigma_x = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{a^2}{6}\left(\left(2-\frac{3}{n^2\pi^2}\right)AA^* + \left(2-\frac{3}{m^2\pi^2}\right)BB^*\right) + \frac{8(-1)^{m+n}a^2mn}{\left(m^2-n^2\right)^2\pi^2}\left(AB^* + A^*B\right) -$$

$$-\left(\frac{a}{2} + \frac{4mna\left(-1+(-1)^{m+n}\right)\left(AB^* + A^*B\right)}{\left(m^2-n^2\right)\pi^2}\right)^2$$

$$\langle p\rangle = \int_0^a \psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi dx = -i\hbar\frac{2}{a}\int_0^a \left(AA^*\sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)\frac{\partial}{\partial x}\sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right) + BB^*\sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right)\frac{\partial}{\partial x}\sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) + \left(AI\right.\right.$$

$$\langle p\rangle = -\frac{2i\hbar}{a}\left(A^*B - AB^*\right)\frac{\left(-1+(-1)^{m+n}\right)mn}{m^2-n^2}$$

$$\langle p^2\rangle = \frac{\pi^2\hbar^2\left(AA^*n^2 + BB^*m^2\right)}{a^2}$$

$$\sigma_p = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{\pi^2\hbar^2\left(AA^*n^2 + BB^*m^2\right)}{a^2} + \frac{4\hbar^2}{a^2}\left(\left(A^*B - AB^*\right)\frac{\left(-1+(-1)^{m+n}\right)mn}{m^2-n^2}\right)^2$$

$$\sigma_{xp} = \frac{1}{2}\left(\langle xp\rangle + \langle px\rangle\right) - \langle x\rangle\langle p\rangle$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$\langle xp\rangle = \int_0^a \psi^* x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi dx = \frac{i\hbar}{2}\left(1-\frac{4(-1)^{m+n}\,mn\left(A^*B-AB^*\right)}{m^2-n^2}\right)$$

$$\langle px\rangle = \int_0^a \psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)x\psi dx = -\frac{i\hbar}{2}\left(1+\frac{4(-1)^{m+n}\,mn\left(A^*B-AB^*\right)}{m^2-n^2}\right)$$

$$\sigma_{xp} = \frac{imn\hbar\left(BA^*-AB^*\right)}{m^2-n^2}\left(-2(-1)^{m+m}+\left(-1+(-1)^{m+n}\right)\left(1+\frac{8mn\left(-1+(-1)^{m+n}\right)\left(A^*B+AB^*\right)}{\pi^2\left(m^2-n^2\right)^2}\right)\right)$$

Отримані формули трохи громіздкі , тому проведемо їх аналіз в частинному випадку $n=1,m=2$.

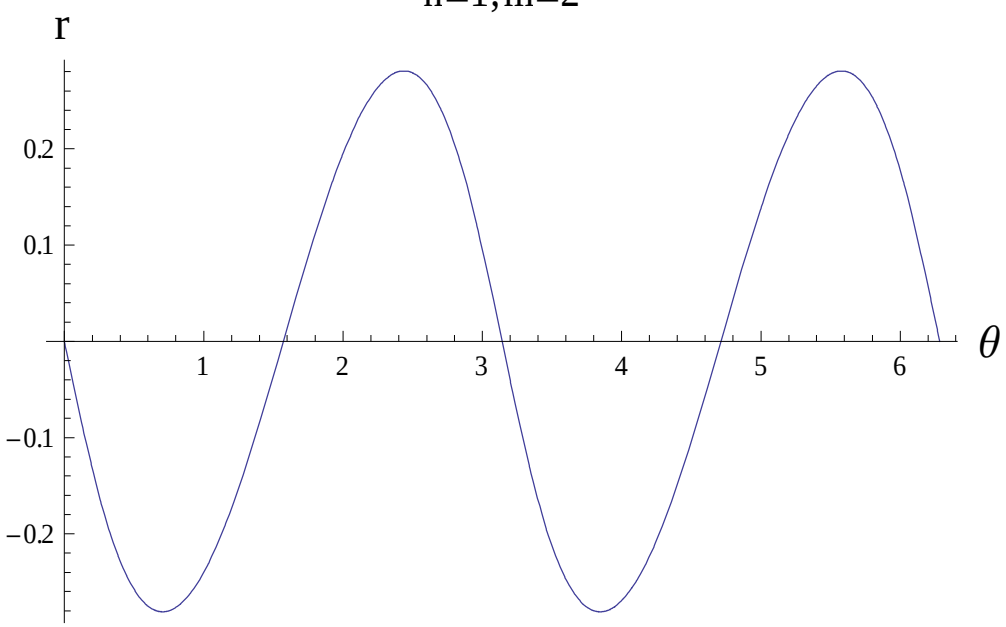
$$\sigma_{xp} = \frac{128i\hbar}{27\pi^2}\left(BA^*-AB^*\right)\left(A^*B+AB^*\right)$$

$$\sigma_x = \frac{a^2}{12}-\frac{a^2}{2\pi^2}+\frac{3a^2BB^*}{8\pi^2}-\frac{256a^2}{81\pi^4}\left(B^2A^{*2}+2BB^*+A^2B^{*2}-2B^2B^{*2}\right)$$

$$\sigma_p = \frac{64A^2\hbar^2(B^*)^2}{9a^2}+\frac{64B^2\hbar^2(A^*)^2}{9a^2}-\frac{128AB\hbar^2A^*B^*}{9a^2}+\frac{\pi^2A\hbar^2A^*}{a^2}+\frac{4\pi^2B\hbar^2B^*}{a^2}$$

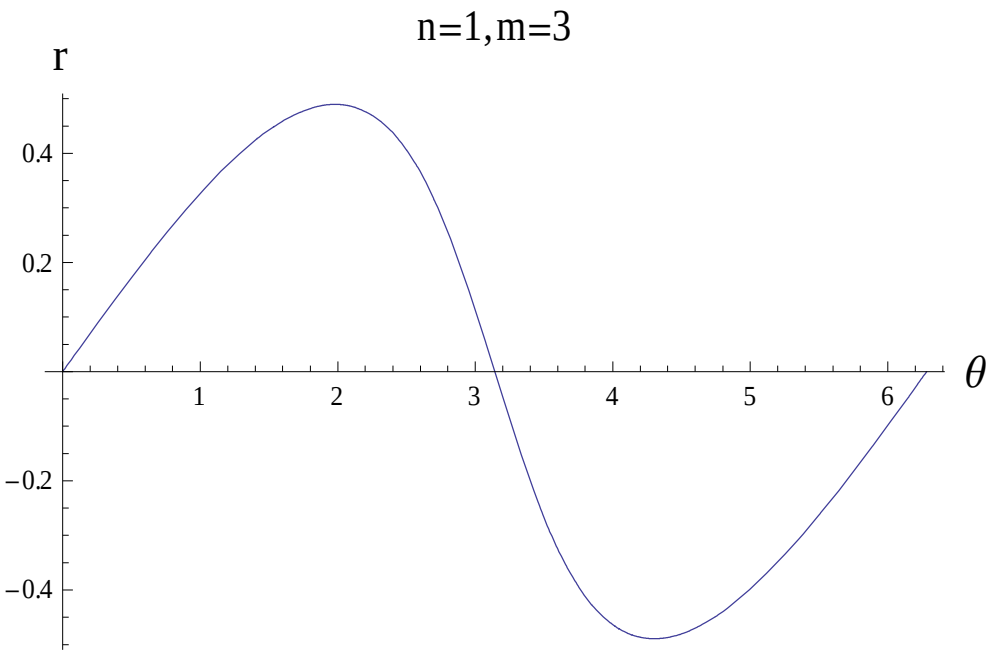
Формули все рівно непридатні для аналізу. Тому виберемо

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}},B=\frac{1}{\sqrt{2}}exp(i\theta),a=1нм$$



Якщо ж взяти $n=1,m=3$:

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com



Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Допоміжні інтеграли використані в обчисленнях:

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx = \frac{a}{2}$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) dx = 0,\ n \neq m$$

$$\int_0^a x \sin^2\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx = \frac{a^2}{4}$$

$$\int_0^a x \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) dx = \frac{2\left(-1+(-1)^{m+n}\right) a^2 mn}{\left(m^2-n^2\right)\pi^2},\ n \neq m$$

$$\int_0^a x^2 \sin^2\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx = \frac{a^3}{12}\left(2-\frac{3}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\int_0^a x^2 \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) dx = \frac{4(-1)^{m+n} a^3 mn}{\left(m^2-n^2\right)^2 \pi^2},\ n \neq m$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx = 0$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) dx = \frac{\left(-1+(-1)^{m+n}\right) mn}{m^2-n^2},\ n \neq m$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx = -\frac{n^2\pi^2}{2a}$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) dx = 0,\ \ n \neq m$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx = -\frac{a}{4}$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) x \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx = \frac{a}{4}$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) dx = \frac{(-1)^{m+n} amn}{m^2-n^2},\ \ n \neq m$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) x \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) dx = \frac{(-1)^{m+n} amn}{m^2-n^2},\ \ n \neq m$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

4. Пояснити фізичну природу збільшення прозорості потенціального бар'єру для частинки, яка знаходиться в когерентному корельованому стані

Соотношение неопределенностей Шредингера−Робертсона

$$\sigma_A\sigma_B \geq |\langle[\widehat{A}\widehat{B}]\rangle|^2/4(1-r^2), \quad r = \sigma_{AB}/\sqrt{\sigma_A\sigma_B}$$

является очевидным обобщением соотношения неопределенностей Гейзенберга

$$\sigma_A\sigma_B \geq |\langle[\widehat{A}\widehat{B}]\rangle|^2/4$$

для случая коррелированных состояний. Для взаимно некоррелированных величин A и B имеем $\sigma_{AB} = 0$, $r = 0$ и уравнение (1) сводится в (2), что соответствует минимизации произведения дисперсий $\sigma_A\sigma_B$. Для этого случая возможно формирование такой когерентной суперпозиции
(пакета) собственных функций частицы в потенциальной яме, для которой $(\sigma_A\ \sigma_B)_{min} = \hbar^2/4$. Эта суперпозиция называется когерентным состоянием (КС), а последнее равенство является условием ее реализации. При наличии частичной коррелированности величин A и B имеем $\sigma_{AB} = 0$, $0 < r^2 < 1$ и $(\sigma_A\sigma_B)_{min} > \hbar^2/4$. Соответственно при их полной коррелированности имеем
$r^2 \to 1$ и $(\sigma_A\sigma_B)_{min} \to \infty$. Коррелированное когерентное состояние (ККС) может быть создано только на основе такой когерентной суперпозиции собственных функций, для которой выполняется условие максимизации величины $|\sigma_{AB}|$.
Для коррелированных состояний конкретные соотношения неопределенностей типа

$$\sigma_q\sigma_p \geq \hbar^2/4,$$

принимают вид

$$\delta q\delta p \geq \hbar/2\sqrt{1-r^2}, \quad \delta E\delta t \geq \hbar/2\sqrt{1-r^2}.$$

Неограниченное возрастание произведения дисперсий координаты и импульса при $|r|^2 \to 1$ приводит к столь же неограниченному возрастанию прозрачности барьера.

Для иллюстрации возрастания эффективности туннельного эффекта для частицы, находящейся в частично коррелированном состоянии, рассмотрим задачу об изменении плотности вероятности локализации частицы в нестационарном гармоническом осцилляторе, частота которого изменялась в соответствии с

$$\omega_r(t) = A\sqrt{\frac{1}{(g(t))^2(1-r^2)}\left\{1 - \frac{g(t)}{\omega_0\sqrt{1-r^2}}\frac{dr}{dt}\right\}},$$

$$g(t) = \frac{r(t)}{|r(t)|} + 2\omega_0\int_0^t \frac{r(\tau)d\tau}{\sqrt{1-r(\tau)^2}}.$$

по закону $\omega = \omega(t)$ при $t \le 0$ и является постоянной $\omega = \omega(0) \equiv \omega_0$ при $t \ge 0$. В этой системе коэффициент корреляции r(t) изменялся по закону

$$r(t) = \frac{t/\tau}{\sqrt{F(t) + (t/\tau)^2}}, \quad F(t \to 0) \to \infty,$$

$$F(t \to \infty) \to \text{const.}$$

при $t \le 0$ и равен $r(0) \equiv r_0$ при $t = 0$.
Волновая функция частицы в деформируемой параболической яме при $t \le 0$ имела вид $\Psi(x, t \le 0) \equiv \Psi_{corr}(x, r(t), t \le 0)$:

$$\Psi_0(q,t) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_q}}\exp\left[-\frac{q^2}{4\sigma_q}\left(1 - \frac{ir(t)}{\sqrt{1-r(t)^2}}\right)\right]$$

При $t = 0$ она определялась соотношением

$$\Psi_{\text{corr}}(x, r_0, t=0) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_{x0}}}$$

$$\times \exp\left[-\frac{x^2}{4\sigma_{x0}}\left(1 - \frac{ir_0}{\sqrt{1-r_0^2}}\right)\right], \quad \sigma_{x0} = \sigma_x(t=0).$$

Волновая функция частицы $\Psi(x, t)$ при $t \ge 0$ в той же яме (стационарном осцилляторе с частотой ω_0) может быть представлена в виде разложения по собственным функциям оператора Гамильтона стационарного осциллятора

$$\Psi(x, r_0, t \geq 0) = \sum_n B_n \varphi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar},$$

$$\varphi_n(x) = C_n H_n(x) e^{-x^2/2x_0^2}, \qquad x_0^2 = 2\sigma_{x0},$$

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{x_0 2^n n! \sqrt{\pi}}}, \quad x_0 = \sqrt{\hbar/M\omega_0},$$

$$E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2).$$

Здесь $H_n(x/x_0)$ — полином Эрмита.

Из условия непрерывности волновых функций $\Psi_{corr}(x, r(t), t \leq 0)$ и $\Psi(x, r\ 0\ , t \geq 0)$ при $t = 0$ находим выражения для амплитуд возбуждения $B_n(r_0)$ собственных состояний $\varphi_n(x)$ и для волновой функции частицы в стационарной яме $V(x, t \geq 0)$ в произвольный момент времени $t \geq 0$

$$B_n \equiv B_n(r_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\text{corr}}(x, r_0, t = 0)\varphi_n^*(x)dx,$$

$$\Psi(x, r_0, t \geq 0) = \sum_n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\text{corr}}(x, r_0, t = 0)\varphi_n^*(x)dx \right\}$$

$$\times \varphi_n(x) \exp(-iE_n t/\hbar).$$

Из полученных результатов следует, что взаимная интерференция разных собственных функций частицы, формируемых в начальном коррелированном состоянии $\Psi(x, r_0, t = 0)$, приводит к периодическому изменению (возрастанию и уменьшению) пространственного распределения плотности вероятности локализации частицы и дисперсии координаты в пределах ямы и в области под барьером при $t \geq 0$.

5. В чому полягає метод кореляції інтенсивностей випромінювання?

Рух кожної з ядерних мікрочастинок, що вилітають із джерела, на відстані, яка значно перевищує розмір джерела, описується нормованою сферичною хвильовою функцією. Якби процес випромінювання тривав нескінченно довго, то хвильова функція мала б вигляд монохроматичної сферичної хвилі на зразок (27.5):

$$\Psi(\vec{r},t) = f(\theta)\frac{e^{-i\{(Et-\vec{p}\vec{r})/\hbar+\varphi\}}}{r\sqrt{4\pi}}. \qquad (33.1)$$

У (33.1) величини $E, \vec{p}, \varphi_n$ – відповідно, енергія, імпульс частинки та початкова фаза хвильової функції.

Оскільки процес генерації кожної частинки є порівняно коротким, то хвильова функція відмінна від монохроматичної й має вигляд

$$\Psi(\vec{r},t) = f(\theta)\frac{F(\vec{r},t)e^{-i\varphi}}{r\sqrt{4\pi}}, \qquad (33.2)$$

де величина $f(\theta)$ характеризує кутовий розподіл вильоту частинок. Для ізотропних джерел випромінювання ця величина є константою $f(\theta) = f_0$.

Розглянемо випадок, коли всі частинки мають однакові характеристики (енергію та імпульс). Процес детектування цих частинок здійснюється двома просторово рознесеними детекторами j та i (рис. 33.1).

(Рисунок у наступному питанні)

Імпульсній послідовності частинок, які потрапляють у детектор j у випадкові моменти часу t_{jn}, відповідає повна хвильова функція

$$\xi_j(t) = \sum_n \Psi(\vec{R}_j, t - t_{jn}) = \sum_n f_0 \frac{F(R_j, t - t_{jn})}{\sqrt{4\pi}R_j} e^{-i\varphi_n}. \qquad (33.3)$$

Інтенсивність сигналу (фактично – послідовність імпульсів електричного струму), який реєструється цим детектором, визначається співвідношенням

$$J_j(t) = \varepsilon_j \,|\, \xi_j(t) \,|^2, \qquad (33.4)$$

у якому величина $|\,\xi_j(t)\,|^2$ характеризує інтенсивність потоку частинок від досліджуваного джерела в місці розташування детектора j, ε_j – ефективність реєстрації частинки в детекторі, яка залежить як від імовірності потрапляння частинки в детектор, так і від квантової ефективності детектора щодо перетворення процесу взаємодії частинки з детектором на електричний сигнал.

Аналогічна імпульсна послідовність частинок, що реєструються в місці розташування детектора i, та інтенсивність сигналу від нього визначаються формулами:

$$\xi_i(t-\tau)=\sum_n \Psi(\vec{R}_i,t-t_{in}-\tau)=\sum_n f_0\frac{F(R_i,t-t_{in}-\tau)}{\sqrt{4\pi}R_i}e^{-i\varphi_n}, \qquad (33.5)$$

$$J_i(t-\tau)=\varepsilon_i\,|\,\xi_i(t-\tau)\,|^2. \qquad (33.6)$$

Запізнення сигналу в другому детекторі на величину τ викликане тим, що джерело випромінювання розташоване несиметрично щодо обох детекторів.

Імпульси електричного струму від обох детекторів надходять на систему корелятора, який їх перемножує та усереднює. Спочатку розглянемо роботу системи кореляції інтенсивностей без урахування впливу систем затримки сигналу. Кореляційна функція інтенсивностей $J_j(t)$ і $J_i(t-\tau)$ на виході корелятора має вигляд

$$\begin{aligned}K_J(\tau)&=<J_j(t)J_i(t-\tau)>-<J_j(t)><J_i(t-\tau)>=\\&=\varepsilon_j\varepsilon_i<\xi_j(t)\xi_j^*(t)\xi_i(t-\tau)\xi_i^*(t-\tau)>-<J_j(t)><J_i(t-\tau)>\end{aligned} \qquad (33.7)$$

Після деяких перетворень (детальніше у наступному питанні):

$$K_J(\tau)=<n_j><n_i>|\int_{-\infty}^{\infty}F(R_j,t)F^*(R_i,t-\tau)dt\,|^2,$$

$$<n_k>=<n>\frac{\varepsilon_k\,|\,f_0\,|^2}{4\pi R_k^2}\sigma_k. \qquad (33.15)$$

У (33.15) величина $<n_k>$ є середньою частотою реєстрації частинок k-м детектором, σ_k – геометричний переріз k-го детектора. Величина сигналу на виході корелятора визначається кореляційно, функцією (33.15).

Функції $F(R_j,t)$ і $F^*(R_i,t-\tau)$, що визначають (33.15), є комплексними знакозмінними функціями. Залежно від просторового положення джерела частинок відносно детекторів, а також від величини додаткового запізнення τ на шляху до різних детекторів, вихідний сигнал (33.15) буде змінюватись. Якщо в одне із плечей інтерферометра інтенсивностей ввести схему затримки електричного сигналу, то при оптимальній величині затримки $\Delta t=-\tau$ функція (33.15) досягне максимального значення

$$K_J(0)=<n_j><n_i>|\int_{-\infty}^{\infty}|\,F(R_j,t)\,|^2dt\,|^2. \qquad (33.16)$$

Величина цієї затримки дозволяє визначити різницю відстаней від джерела до детекторів і розробити схему просторової локації положення джерела випромінювання.

У системі координат, де положення двох детекторів характеризується величинами $\vec{r}_j = \{x_j, 0\}$, $\vec{r}_i = \{x_i, 0\}$, координата джерела випромінювання частинок визначається рівнянням лінії на горизонтальній площині $z = 0$:

$$\sqrt{(x_j - x)^2 + y^2} + v\tau = \sqrt{(x_i - x)^2 + y^2} \,. \qquad (33.17)$$

6. Вивести формулу для кореляційної функції двох інтенсивностей, реєстрованих різними детекторами

Розглянемо випадок, коли всі частинки мають однакові характеристики (енергію та імпульс). Процес детектування цих частинок здійснюється двома просторово рознесеними детекторами j та i (рис. 33.1).



Імпульсній послідовності частинок, які потрапляють у детектор j у випадкові моменти часу t_{jn}, відповідає повна хвильова функція

$$\xi_j(t) = \sum_n \Psi(\vec{R}_j, t - t_{jn}) = \sum_n f_0 \frac{F(R_j, t - t_{jn})}{\sqrt{4\pi} R_j} e^{-i\varphi_n}. \qquad (33.3)$$

Інтенсивність сигналу (фактично – послідовність імпульсів електричного струму), який реєструється цим детектором, визначається співвідношенням

$$J_j(t) = \varepsilon_j \,|\, \xi_j(t) \,|^2, \qquad (33.4)$$

у якому величина $|\xi_j(t)|^2$ характеризує інтенсивність потоку частинок від досліджуваного джерела в місці розташування детектора j, ε_j – ефективність реєстрації частинки в детекторі, яка залежить як від імовірності потрапляння частинки в детектор, так і від квантової ефективності детектора щодо перетворення процесу взаємодії частинки з детектором на електричний сигнал.

Аналогічна імпульсна послідовність частинок, що реєструються в місці розташування детектора i, та інтенсивність сигналу від нього визначаються формулами:

$$\xi_i(t-\tau)=\sum_n \Psi(\bar{R}_i, t-t_{in}-\tau)=\sum_n f_0 \frac{F(R_i, t-t_{in}-\tau)}{\sqrt{4\pi}R_i} e^{-i\varphi_n}, \qquad (33.5)$$

$$J_i(t-\tau)=\varepsilon_i \,|\,\xi_i(t-\tau)\,|^2. \qquad (33.6)$$

Запізнення сигналу в другому детекторі на величину τ викликане тим, що джерело випромінювання розташоване несиметрично щодо обох детекторів.

Імпульси електричного струму від обох детекторів надходять на систему корелятора, який їх перемножує та усереднює. Спочатку розглянемо роботу системи кореляції інтенсивностей без урахування впливу систем затримки сигналу. Кореляційна функція інтенсивностей $J_j(t)$ і $J_i(t-\tau)$ на виході корелятора має вигляд

$$\begin{aligned} K_J(\tau) &= < J_j(t)J_i(t-\tau) > - < J_j(t) >< J_i(t-\tau) >= \\ &= \varepsilon_j\varepsilon_i < \xi_j(t)\xi_j^*(t)\xi_i(t-\tau)\xi_i^*(t-\tau) > - < J_j(t) >< J_i(t-\tau) > \end{aligned} \qquad (33.7)$$

і залежить від початкового моменту четвертого порядку випадкової величини $\xi_\alpha(t)$.

Процес спонтанного розпаду джерел радіоактивних частинок є *нормальним гауссовим процесом.* Для нього початкові парні моменти вищих порядків випадкових величин зводяться до всіх можливих комбінацій початкових моментів другого порядку незалежно від порядку розташування величин у кожному із цих моментів

$$< x_i x_j x_k x_l >= \sum_{i\neq j\neq k\neq l} < x_i x_j >< x_k x_l > . \qquad (33.8)$$

Використовуючи це правило, приведемо (33.7) до вигляду

$$\begin{aligned} K_J(\tau) &= \varepsilon_j\varepsilon_i\{< \xi_j(t)\xi_j^*(t) >< \xi_i(t-\tau)\xi_i^*(t-\tau) > + \\ &+ < \xi_j(t)\xi_i(t-\tau) >< \xi_j^*(t)\xi_i^*(t-\tau) > + \\ &+ < \xi_j(t)\xi_i^*(t-\tau) >< \xi_j^*(t)\xi_i(t-\tau) >\} - < J_j(t) >< J_i(t-\tau) > . \end{aligned} \qquad (33.9)$$

Середні значення від добутку функцій, які не є взаємно комплексно-спряженими, дорівнюють нулю

$$<\xi_j(t)\xi_i(t-\tau)>=0, \quad <\xi_j^*(t)\xi_i^*(t-\tau)>=0. \tag{33.10}$$

Для доведення досить використати явний вигляд функцій (33.3) та (33.5) і врахувати процедуру усереднення за випадковою фазою. Кожний з моментів (33.10) пропорційний величинам $<e^{\pm i(\varphi_n+\varphi_m)}>_{\varphi_n,\varphi_m}$, які для випадкової рівномірно розподіленої фази дорівнюють нулю

$$<e^{\pm i(\varphi_n+\varphi_m)}>_{\varphi_n,\varphi_m}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\pm i(\varphi_n+\varphi_m)}d\varphi_n d\varphi_m=0. \tag{33.11}$$

Беручи до уваги, що

$$\begin{aligned}&\varepsilon_j\xi_j(t)\xi_j^*(t)=J_j(t),\ \varepsilon_i\xi_i(t-\tau)\xi_i^*(t-\tau)=J_i(t-\tau);\\&\varepsilon_j<\xi_j(t)\xi_j^*(t)>\varepsilon_i<\xi_i(t-\tau)\xi_i^*(t-\tau)>=<J_j(t)><J_i(t-\tau)>,\end{aligned} \tag{33.12}$$

знаходимо остаточний вираз для кореляційної функції

$$K_J(\tau)=\varepsilon_j\varepsilon_i\,|<\xi_j(t)\xi_i^*(t-\tau)>|^2=\varepsilon_j\varepsilon_i\,|\sum_n\Psi(R_j,t-t_{jn})\Psi^*(\bar{R}_i,t-t_{in}-\tau)|^2. \tag{33.13}$$

Для стаціонарних процесів, які відповідають випадковим імпульсним послідовностям (33.3) і (33.5), центральний момент другого порядку $<\xi_j(t)\xi_i^*(t-\tau)>$ у (33.12) визначається виразом

$$\begin{aligned}&<\xi_j(t)\xi_i^*(t-\tau)>=<n>\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(R_j,t)\Psi^*(\bar{R}_i,t-\tau)dt=\\&=<n>\frac{|f_0|^2}{4\pi R_j R_i}\int_{-\infty}^{\infty}F(R_j,t)F^*(R_i,t-\tau)dt,\end{aligned} \tag{33.14}$$

у якому $<n>$ є середньою частотою генерації частинок у джерелі випромінювання (кількість частинок, які генеруються за одиницю часу). Використовуючи формулу (33.14), знаходимо вираз для кореляційної функції (33.13)

$$\begin{aligned}&K_J(\tau)=<n_j><n_i>|\int_{-\infty}^{\infty}F(R_j,t)F^*(R_i,t-\tau)dt|^2,\\&<n_k>=<n>\frac{\varepsilon_k|f_0|^2}{4\pi R_k^2}\sigma_k.\end{aligned} \tag{33.15}$$

У (33.15) величина $<n_k>$ є середньою частотою реєстрації частинок k-м детектором, σ_k – геометричний переріз k-го детектора. Величина сигналу на виході корелятора визначається кореляційно, функцією (33.15).

7. Яким чином метод вимірювання інтенсивностей двома або більшою кількістю відокремлених детекторів може бути використаним для просторової локації точкового джерела випромінювання?

(Див. попереднє питання, або питання №5, там коротше.) + оце:

Для визначення точного положення джерела мікрочастинок на площині $z = 0$ необхідно використати ще один детектор, розташований, наприклад, у точці $\vec{r}_k = \{x_k, 0\}$. При цьому координати джерела $\vec{r} = \{x, y\}$ визначаються як сумісний розв'язок системи з двох довільних рівнянь зі складу повної системи

$$\sqrt{(x_j - x)^2 + y^2} + v\tau_{ji} = \sqrt{(x_i - x)^2 + y^2}, \qquad (33.18, а)$$

$$\sqrt{(x_j - x)^2 + y^2} + v\tau_{jk} = \sqrt{(x_k - x)^2 + y^2}, \qquad (33.18, б)$$

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + y^2} + v\tau_{ik} = \sqrt{(x_k - x)^2 + y^2}. \qquad (33.18, в)$$

У цих рівняннях $\tau_{\alpha\beta}$ – запізнення частинок на шляху від джерела щодо детекторів α та β.

У випадку тривимірного детектування необхідно використати чотири детектори, положення джерела $\vec{r} = \{x, y, z\}$ визначатиметься як сумісний розв'язок системи рівнянь:

$$\sqrt{(x_\alpha - x)^2 + (y_\alpha - y)^2 + (z_\alpha - z)^2} + v\tau_{\alpha\beta} = \sqrt{(x_\beta - x)^2 + (y_\beta - y)^2 + (z_\beta - z)^2}, \qquad (33.19)$$

$$\alpha \neq \beta = 1, 2, 3, 4,$$

кожне з яких є рівнянням поверхні. Проаналізуємо характеристики

№4 Отримати формулу Доплера при $|1-\beta n\cos\theta|\to 0$ для випромінення

Обычный эффект (классический) описывается $\omega = \frac{\Omega_0}{\gamma(1-\beta n(\omega)\cos\theta)}$

Для упрощения положим $1-\beta n(\omega)\cos\theta = x$

При $x\to 0$ ця формула дає ∞, що є не фізично.

Потрібен релятивістський аналіз: $\Delta p = \frac{\hbar n \omega_{rad}}{c}$

Нехай частка випускає фотон ω_{rad} з імпульсом Δp,

p - початковий імпульс частки, $p_{кінц} = p - \Delta p$ - кінцевий.

Початкова енергія $E_{поч} = \sqrt{p^2c^2 + (mc^2+\varepsilon_2)^2}$, ε_2 - початковий рівень на якому знаходилась частка, ε_1 - кінцевий.

$E_{кінцев.} = \sqrt{(p-\Delta p)^2c^2 + (mc^2+\varepsilon_1)^2}$, $\hbar\omega_{rad} = E_{почат} - E_{кінцеве}$. (1)

$(mc^2+\varepsilon_1)^2 = m^2c^4 + 2mc^2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 = m^2c^4 + 2mc^2\varepsilon_1^*$, де $\varepsilon_1^* = \varepsilon_1\left(1+\frac{\varepsilon_1}{2mc^2}\right)$

Аналогічно $(mc^2+\varepsilon_2)^2 = m^2c^4 + 2mc^2\varepsilon_2^*$. Підставимо все в (1):

$$\hbar\omega_{rad} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4 + 2mc^2\varepsilon_2^*} - \sqrt{\left[p - \frac{\hbar\omega_{rad}}{c}n\cos\theta\right]^2c^2 + \left[n\hbar\frac{\omega_{rad}}{c}\sin\theta\right]^2c^2} + m^2c^4 + 2mc^2\varepsilon_1^*$$

Можно піднести до квадрату обидві частини рівняння відносно ω_{rad}. Отримаємо квадратне рівняння

Розв'язок:

$$\omega_{rad} = \underbrace{\frac{\gamma mc^2}{\hbar(n^2-1)}}_{=A} \times \left[\pm\sqrt{(1-\beta n\cos\theta)^2 + \underbrace{2\frac{\varepsilon_2^*-\varepsilon_1^*}{\gamma^2mc^2}(n^2-1)}_{B}} - (1-\beta n\cos\theta)\right]$$

ω_{rad} - частота випромінювання, вона >0.

$\omega_{rad} = A\left[\pm\sqrt{x^2+B} - x\right]$, оскільки за умовою нижнє $|x|\to 0$ це означає що $B \gg x$ отже знак перед коренем має бути "+" (щоб було $\omega_{rad}>0$).

$\sqrt{x^2+B} = \sqrt{B} + \frac{x^2}{2\sqrt{B}} + \dots$ - розклали за малим параметром x.

Отже $\omega_{rad} = A\left[\sqrt{B} + \frac{x^2}{2\sqrt{B}} - x\right]$ при $|x|\to 0$

маємо $\omega_{rad} = A\cdot\sqrt{B}$

Отже $\omega_{rad} = \frac{\gamma mc^2}{\hbar(n^2-1)}\cdot\sqrt{2\frac{\varepsilon_2^*-\varepsilon_1^*}{\gamma^2mc^2}(n^2-1)} =$

$= \sqrt{2\frac{(\varepsilon_2^*-\varepsilon_1^*)mc^2}{(n^2-1)\hbar^2}}$ це і буде формула Доплера.

Нагадую: m - маса частки, c - швидк. світла, $n(\omega_{rad}) = n$ - показник заломлення середовища, $\beta = \frac{v}{c}$, де v - швидкість частки, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, θ - кут випромінювання.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

№5 Отримати формулу Доплера для поглинання $|1-\beta n\cos\Theta| \to$

Звичайний класичний ефект доплера описується $\omega = \frac{\Omega_0}{\ldots}$

Позначимо $1-\beta n\cos\Theta = X$. При $X \to 0$ ця формула $\gamma(1-\beta n\cos\Theta)$ дає $\omega = \infty$ що є не фізичним. Потрібен якийсь релятивістський аналіз: Розглянемо частинку що рухається і поглинає фотон з частотою ω_{abs}. ~~$\omega_{abs} = \omega_{отр}$~~. Початковий імпульс частинки p, кінцевий $p+\Delta p$, де Δp - імпульс поглинутого кванту. Початкова енергія частинки: $E_{поч} = \sqrt{p^2c^2 + (mc^2+\varepsilon_1)^2}$ де ε_1 - початковий рівень, $E_{кінц.} = \sqrt{(p+\Delta p)^2c^2 + (mc^2+\varepsilon_2)^2}$ — кінцева енергія. $\hbar\omega_{abs} + E_{поч} = E_{кінц.}$ (1)

$(mc^2+\varepsilon_1)^2 = m^2c^4 + 2mc^2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 = m^2c^4 + 2mc^2\varepsilon_1^*$, де $\varepsilon_1^* = \varepsilon_1\left(1+\frac{\varepsilon_1}{2mc^2}\right)$

Аналогічно для $(mc^2+\varepsilon_2)^2 = m^2c^4 + 2mc^2\varepsilon_2^*$. $\Delta p = \frac{\hbar\omega_{abs} n}{c}$

Підставимо все в (1):

$$\hbar\omega_{abs} + \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4 + 2mc^2\varepsilon_1^*} = \sqrt{\left(p + \frac{\hbar\omega_{abs} n}{c}\right)^2 c^2 + m^2c^4 + 2mc^2\varepsilon_2^*}$$

Піднесемо до квадрату отримуємо ~~розв'язок~~ квадратне рівняння відносно ω_{abs}, його розв'язок:

$$\omega_{abs} = \underbrace{\frac{\gamma mc^2}{\hbar(n^2-1)}}_{A} \cdot \left[\underbrace{(1-\beta n\cos\Theta)}_{X} \mp \sqrt{\underbrace{(1-\beta n\cos\Theta)^2}_{X^2} - 2\underbrace{\frac{\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*}{\gamma^2 mc^2}(n^2-1)}_{B}}\right]$$

$\omega_{abs} = A\left[X \mp \sqrt{X^2 - B}\right]$, $\omega_{abs} > 0$, тому при $B < 0$ знак перед коренем має бути "+", при $X \to 0$ знак перед коренем має бути "+", а $B < 0$

$\Rightarrow \varepsilon_2^* < \varepsilon_1^*$ - це добре і є аномальний ефект Доплера.

$\sqrt{X^2 - B} = \sqrt{-B} - \frac{\sqrt{-B}\,X^2}{2B} + \ldots$ - розклали по малому X.

Отже $\omega_{abs} = A\left[\sqrt{-B} - \underbrace{\frac{\sqrt{-B}\,X^2}{2B} + X}\right]$

цим нехтуємо бо $X \to 0$

$$\omega_{abs} = A\sqrt{-B} = \frac{\gamma mc^2}{\hbar(n^2-1)}\sqrt{2\frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\gamma^2 mc^2}(n^2-1)} =$$

$$= \sqrt{2\frac{(\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*)mc^2}{(n^2-1)\hbar^2}}$$

це і є формула Доплера для поглинання при $X \to 0$

m - маса частинки, c - швидкість світла, $n(\omega_{abs}) = n$ - показник заломлення, $\beta = \frac{v}{c}$, де v - швидкість частинки; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, Θ - кут поглинання

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

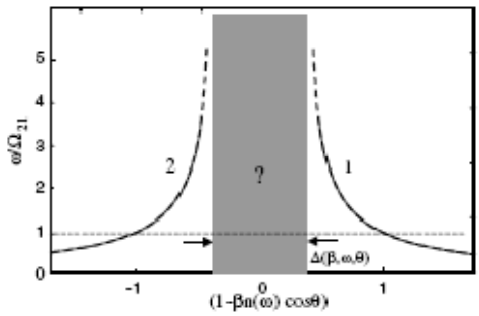
6. Показати, при якій умову випромінювання кванту швидким атомом може приводити до збудження цього атома (переходу на більш високий рівень енергії).

Випромінювання швидкого атома згідно з класичним трактуванням ефекту Доплера має частоту :

$$\omega = \frac{\Omega_0}{\gamma(1 - \beta n(\omega)\cos\vartheta)}$$

$n(\omega)$ - закон дисперсії речовини. θ – кут, що утворює випромінювання з напрямком руху частинки.

Згідно з даною формулою частота випромінювання зростає до безкінечності при $\beta n(\omega)\cos\theta = 1$, з'являється область невизначеності поблизу нуля на графіку.



Тут слід виділити область нормального (1) та аномального ефекту доплера (2). Нормальний ефект Доплера : при випромінюванні кванта система переходить на нижній енергетичний рівень. За аномального ефекту Доплера система навпаки при випромінюванні кванта збуджується - відбувається перехід на верхній рівень.

Для коректного рішення задачі потрібно враховувати закони збереження імпульсу та енергії. Початковий імпульс позначимо p, початковий енергетичний стан ε_2, та кінцевий стан ε_1

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$\mathbf{p}_{\text{final}} = \mathbf{p} - \Delta\mathbf{p};$$

$$E_{\text{initial}} = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + (mc^2 + \varepsilon_2)^2};$$

$$E_{\text{final}} = \sqrt{(\mathbf{p} - \Delta\mathbf{p})^2c^2 + (mc^2 + \varepsilon_1)^2};$$

$$\hbar\omega_{\text{rad}} = E_{\text{initial}} - E_{\text{final}};$$

$$\hbar\omega_{\text{rad}} = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + (mc^2 + \varepsilon_2)^2} - \sqrt{(\mathbf{p} - \Delta\mathbf{p})^2c^2 + (mc^2 + \varepsilon_1)^2};$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{e}_k n\omega_{\text{rad}}/c; \quad n \equiv n(\omega_{\text{rad}}).$$

Введемо заміну : $(mc^2 + \varepsilon_{1,2})^2 = m^2c^4 + 2mc^2\varepsilon^*_{1,2}, \qquad \varepsilon^*_{1,2} = \varepsilon_{1,2}(1 + \varepsilon_{1,2}/2mc^2)$

Після всіх підстановок отримуємо рівняння для закону збереження енергії:

$$\hbar\omega_{\text{rad}} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4 + 2mc^2\varepsilon_2^*} - \sqrt{[p - \hbar(\omega_{\text{rad}}/c)n\cos\theta]^2c^2 + [n\hbar(\omega_{\text{rad}}/c)\sin\theta]^2c^2 + m^2c^4 + 2mc^2\varepsilon_1^*}.$$

Вирішуючи отримане біквадратне рівняння відносно *w* отримуємо вираз для частоти випромінювання

$$\omega_{\text{rad}} = \frac{\gamma mc^2}{\hbar(n^2 - 1)} \times \left[\pm\sqrt{(1 - \beta n\cos\theta)^2 + 2\frac{\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*}{\gamma^2 mc^2}(n^2 - 1)} - (1 - \beta n\cos\theta)\right], \qquad (1)$$

Розглянемо випадок $(1 - \beta n(\omega)\cos\theta) < 0.$, тобто область в якій спостерігається аномальний ефект Доплера за звичайною формулою. Для додатності частоти випромінювання беремо знак «-» в формулі 1. Вираз для частоти записується як:

$$\omega_{\text{rad}} = \frac{\gamma mc^2}{\hbar(n^2 - 1)} \times \left[-\sqrt{(\beta n\cos\theta - 1)^2 + 2\frac{\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*}{\gamma^2 mc^2}(n^2 - 1)} + (\beta n\cos\theta - 1)\right].$$

За умови:

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$(\beta n\cos\theta-1)^2>2\left|\frac{(\varepsilon_2^*-\varepsilon_1^*)}{\gamma^2mc^2}(n^2-1)\right|,$$

Вираз для частоти має фізичний сенс (частота випромінювання позитивна), коли

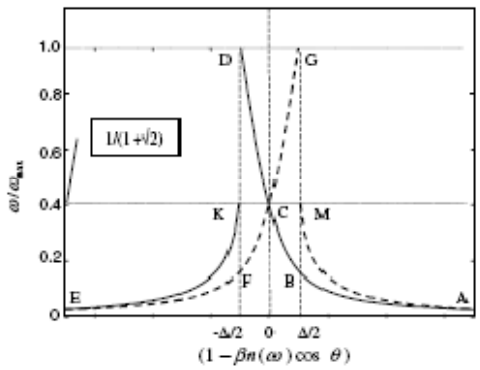
$\frac{(\varepsilon_2^*-\varepsilon_1^*)}{\gamma^2mc^2}(n^2-1)<0.$ при $(1-\beta n(\omega)\cos\theta)<0.$ та $(n^2-1)>0.$ це буде виконуватися за умови $\varepsilon_2^*<\varepsilon_1^*$ тобто буде мати місце перехід з нижнього енергетичного рівня на верхній з випромінюванням кванта – аномальний ефект Доплера. Вираз для частоти дається :

$$\omega_{\text{rad}}\approx\frac{\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*}{\gamma\hbar(\beta n\cos\theta-1)}\left[1-\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(n^2-1)}{2\gamma^2mc^2(\beta n\cos\theta-1)^2}\right],$$

При виконанні умови: $(\beta n\cos\theta-1)^2<2\left|\frac{(\varepsilon_2^*-\varepsilon_1^*)}{\gamma^2mc^2}(n^2-1)\right|.$ беремо в виразі (1) знак «+» для фізичного розв'язку з додатньою частотою.

$$\omega_{\text{rad}}=\frac{\gamma mc^2}{\hbar(n^2-1)}\times\left[\sqrt{(\beta n\cos\theta-1)^2+2\frac{\varepsilon_2^*-\varepsilon_1^*}{\gamma^2mc^2}(n^2-1)}+(\beta n\cos\theta-1)\right].$$

Цей вираз в свою чергу буде додатнім коли $\frac{(\varepsilon_2^*-\varepsilon_1^*)}{\gamma^2mc^2}(n^2-1)>0.$ при $(1-\beta n(\omega)\cos\theta)<0.$ та $(n^2-1)>0.$ це буде виконуватися за умови $\varepsilon_2^*>\varepsilon_1^*$ тобто буде мати місце перехід на нижній енергетичного рівень з випромінюванням кванта – нормальний ефект Доплера. На графіку залежності частоти допплерівського зсуву від $(1-\beta n(\omega)\cos\theta)$ аномальному ефекту Доплера для випромінювання відповідає ділянка ЕК .



Для справки: суцільна лінія- залежність для випромінювання кванта, штрихова – для поглинання . Ділянки AD, AC – для нормального ефекту Доплера , EK,EG – для аномального ефекту Доплера

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

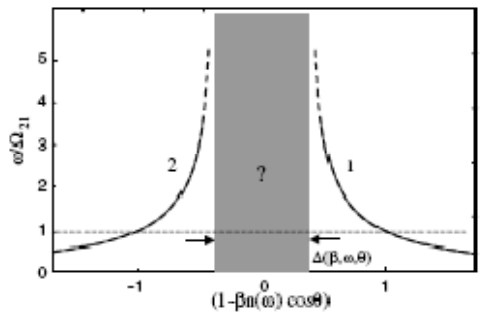
7. Показати, при якій умову поглинання кванту швидким атомом може приводити до його переходу на більш низький рівень енергії.

Випромінювання швидкого атома згідно з класичним трактуванням ефекту Доплера має частоту :

$$\omega = \frac{\Omega_0}{\gamma(1 - \beta n(\omega)\cos\theta)}$$

$n(\omega)$ - закон дисперсії речовини. θ – кут, що утворює випромінювання з напрямком руху частинки.

Згідно з даною формулою частота випромінювання зростає до безкінечності при $\beta n(\omega)\cos\theta = 1$, з'являється область невизначеності поблизу нуля на графіку.



Тут слід виділити область нормального (1) та аномального ефекту доплера (2). Нормальний ефект Доплера : при поглинанні кванта система переходить на верхній енергетичний рівень. За аномального ефекту Доплера система навпаки при поглинанні кванта відбувається перехід на нижній рівень.

Для коректного рішення задачі потрібно враховувати закони збереження імпульсу та енергії. Початковий імпульс позначимо p, початковий енергетичний стан ε_2, та кінцевий стан ε_1

$$\mathbf{p}_{\text{final}} = \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p};$$
$$E_{\text{initial}} = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + (mc^2 + \varepsilon_2)^2};$$
$$E_{\text{final}} = \sqrt{(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})^2c^2 + (mc^2 + \varepsilon_1)^2};$$
$$\sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + (mc^2 - \varepsilon_1)^2} + \hbar\omega_{\text{abs}} = \sqrt{(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})^2c^2 + (mc^2 + \varepsilon_2)^2};$$
$$\mathbf{k} = \mathbf{e}_{\mathbf{k}} n\omega_{\text{abs}}/c; n \equiv n(\omega_{\text{abs}}).$$

Введемо заміну : $(mc^2 + \varepsilon_{1,2})^2 = m^2c^4 + 2mc^2\varepsilon^*_{1,2}$ $\varepsilon^*_{1,2} = \varepsilon_{1,2}(1 + \varepsilon_{1,2}/2mc^2)$

Після всіх підстановок отримуємо рівняння для закону збереження енергії:

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$\hbar w_{abs} = \sqrt{(p + \hbar\left(\frac{W_{abs}}{c}\right) n\, cos\theta)^2 c^2 + (\hbar\left(\frac{W_{abs}}{c}\right) n\, sin\theta)^2 c^2 + 2mc^2\varepsilon_2^* + m^2c^4} - \sqrt{p^2c^2 + 2mc^2\varepsilon_1^* + m^2c^4}$$

Вирішуючи отримане біквадратне рівняння відносно w отримуємо вираз для частоти випромінювання

$$\omega_{\text{abs}} = \frac{\gamma mc^2}{\hbar(n^2-1)} \times \left[(1-\beta n\cos\theta) \mp \sqrt{(1-\beta n\cos\theta)^2 - 2\frac{\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*}{\gamma^2 mc^2}(n^2-1)}\right]. \quad (1)$$

Розглянемо випадок $(1-\beta n(\omega)\cos\theta) > 0$. Для додатності частоти випромінювання $\omega_{\text{abs}} > 0$ беремо знак «-» в формулі 1. Вираз для частоти записується як:

$$\omega_{\text{abs}} = \frac{\gamma mc^2}{\hbar(n^2-1)} \times \left[(1-\beta n\cos\theta) - \sqrt{(1-\beta n\cos\theta)^2 - 2\frac{\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*}{\gamma^2 mc^2}(n^2-1)}\right].$$

За умови:

$$(1-\beta n\cos\theta)^2 < \left|2\frac{(\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*)}{\gamma^2 mc^2}(n^2-1)\right|$$

Вираз для частоти має фізичний сенс (частота випромінювання позитивна), коли

$\frac{(\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*)}{\gamma^2 mc^2}(n^2-1) < 0.$ при $(1-\beta n(\omega)\cos\theta) > 0$ та $(n^2-1) > 0$. це буде виконуватися за умови $\varepsilon_2^* < \varepsilon_1^*$ тобто буде мати місце перехід з верхнього енергетичного рівня на нижній з поглинанням кванта – аномальний ефект Доплера.

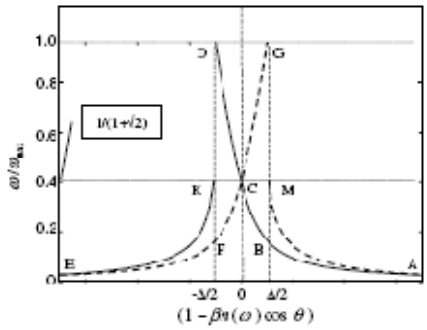
Розглянемо випадок $1-\beta n(\omega)\cos\theta < 0$. Для додатності частоти випромінювання $\omega_{\text{abs}} > 0$ беремо знак «+» в формулі (1). Вираз для частоти записується як:

$$\omega_{\text{abs}} = \frac{\gamma mc^2}{\hbar(n^2-1)} \left[-(\beta n\cos\theta - 1) + \sqrt{(\beta n\cos\theta - 1)^2 - 2\frac{\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*}{\gamma^2 mc^2}(n^2-1)}\right].$$

Цей вираз в свою чергу буде додатнім коли $\frac{(\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*)}{\gamma^2 mc^2}(n^2-1) < 0,$ при $(1-\beta n(\omega)\cos\theta) < 0.$ та $(n^2-1) > 0.$ це буде виконуватися за умови $\varepsilon_2^* < \varepsilon_1^*$ тобто буде мати місце перехід на нижній енергетичного рівнь з поглинанням

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

кванта – аномальний ефект Доплера. На графіку залежності частоти допплерівського зсуву від $(1-\beta\tilde{n}(\omega)\cos\theta)$ аномальному ефекту Доплера для випромінювання відповідає ділянка EG .



Для справки: суцільна лінія- залежність для випромінювання кванта, штрихова – для поглинання . Ділянки AD, AC – для нормального ефекту Доплера , EK,EG – для аномального ефекту Доплера

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

8. Каналювання частинок в кристалах. Висести передумови заміни періодичного потенціалу окремих атомів на усереднений потенціал кристалічної площини.

Каналювання – явище аномального проходження частинок крізь кристал.

Покажемо, що при певних умовах дискретний потенціал можна замінити на усереднений:

$$\sum_n V(\vec{r}-\vec{r_m}) \to < V > = \frac{1}{S_0}\iint \mathrm{V}(\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2})\mathrm{dxdydz}$$

$$p_z = \sqrt{p^2 - p_\perp^2} = p\sqrt{1-\frac{p_\perp^2}{p^2}} \approx p - \frac{p_\perp^2}{2p}$$

$$\Delta p_z = p - p_z, \Delta p_{zmax} = p - p_{zmax} = \frac{p_\perp^2}{2p}|_{max}$$

Де p – імпульс частинки, що влітає в кристал, p_z, $p_\perp$– складова імпульсу, паралельна та перпендикулярна до атомних площин, між якими вона рухається.

$$\frac{p_\perp^2}{2m}|_{max} = V_0, \qquad p_\perp^2 = 2mV_0, \Delta p_{zmax} = \frac{mV_0}{p}$$

$\Delta p_z \Delta z \geq \frac{\hbar}{2}$, $\Delta z_{min} = \frac{\hbar}{2\Delta p_z} = \frac{\hbar p}{2mV_0}$ - область розсіяння

Отже, детальна структура потенціалу не буде проявлятись за умови: $\Delta z \geq d$, d – міжатомна відстань.

$$\frac{\hbar p}{2mV_0} \geq d \to p \geq \frac{2mV_0 d}{\hbar}$$

Оцінимо необхідну енергію частинки:

$T_{min} = \frac{p^2}{2m} = \frac{2mV_0^2 d^2}{\hbar^2} = |m = 2\times 10^{-24}, V_0 = 10\text{еВ} = 2\times 10^{-11}\text{ерг}, d = 10^{-24}\text{ см}| = 100\text{ кеВ}$

$< \mathrm{V} > = \frac{1}{d}\int_{-\mathrm{d}/2}^{\mathrm{d}/2} \mathrm{V}(\mathrm{z},\rho)\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}\,\mathrm{dz}$ – середній потенціал кристалічної площини

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

10. Явисько кавітації

Кавітація (від лат. Cavitas – пустота) – утворення всередині рідини порожнин, заповнених газом, парою або їх сумішшю (кавітаційних бульбашок або фазових пустот), тобто порушення суцільності рідини. Виникає в результаті місцевого зниження тиску в рідині до певного критичного значення (в реальній рідині значення Ркр близьке до тиску насиченої пари цієї рідини при даній температурі), що може відбуватися або при збільшенні швидкості рідини (гідродинамічна кавітація), або при проходженні акустичної хвилі великої інтенсивності під час напівперіоду розрідження (акустична кавітація). Еволюція кавітаційних бульбашок характеризується етапами.

Зменшення тиску призводить до руйнування цілісності рідини і появи внутрішніх розривів навколо «зародишів» (молекули газу або домішок). Рідина випаровується з внутрішньої поверхні кульки всередину, бо тиск ззовні нижче тиску насиченої пари всередині. Швидкість росту кульки менша за швидкість звуку у рідині. Коли зовнішній тиск перестає падати відбувається колапс бульки. Це пов’язане зі швидким ростом сили поверхневого натягу при зменшенні радіусу. Під впливом цієї сили кулька швидко зменшується, чому ще й сприяє конденсація газу всередині на стінки пузиря. Швидкість цього процесу може бути вищою за швидкість звуку в рідині. Коли тиск всередині та рідини на поверхні, що рухається до центру, зрівнюються, колапс припиняється. Таким чином утворюється акустична ударна хвиля. Для забезпечення ефективної передачі ударної хвилі рідина повинна заповнювати весь простір між центром кавітації та стінкою кавітаційної камери (як в експерименті - Наступна сторінка). Коли вторинна хвиля доходить до зовнішньої стінки камери вона відбивається(бо ззовні повітря). В процесі відбивання відбувається збудження електричних станів атомів, що призводить до подальшого рентгенівського випромінювання. Це пов’язане з імпульсним впливом на атоми (різка зміна прискорення) а також із деформацією їх оболонок.

Ці випадки розглядались з формулами на 2 сторінки, я вважаю зайвим конкретизувати, головне ж механізм…

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Висоцький & Со. вивчали таку схему:

В якості рідини – машинне масло. Всі трубочки – діелектричні. При тиску 25-30 атм виникають початкові вихрі турбулентності, масло набуває білої молочної непрозорості. При збільшенні тиску до 60 атм чітко видно відрив рідини від стінок камери з низьким тиском(тупо струя). При подальшому збільшенні тиску з'являється світіння, конфігурація котрого співпадає з формою струї. Ззовні камери було зафіксовано інтенсивне рентгенівське випромінювання. Поміявши спектр визначили, що найінтенсивніше випромінювання відповідає потоку з мікрооптичними кавітаційними бульбашками, що заповнювали всю камеру(рис. 4). Всі в ахує, бо довжина пробігу квантів з такою частотою в плексігласі менше мікрон. Тобто випромінювання іде з поверхні. Щоб впевнитись, нанесли шар міді і спектр показав саме мідь. Припустили, що рентген виникає при взаємодії акустичних хвиль, що виникли під час кавітації, зі стінкою камери. Знайшли залежність інтенсивності від відстані детектора від стінки камери (рис. 8 та форм. 1)

$$J(x) = J(0)\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2 \exp(-x/\langle l \rangle). \qquad (1)$$

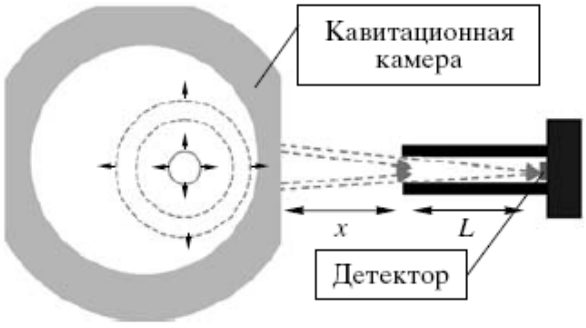
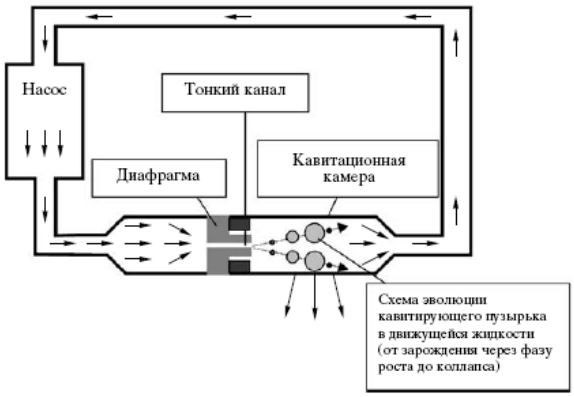


Рис. 8.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com



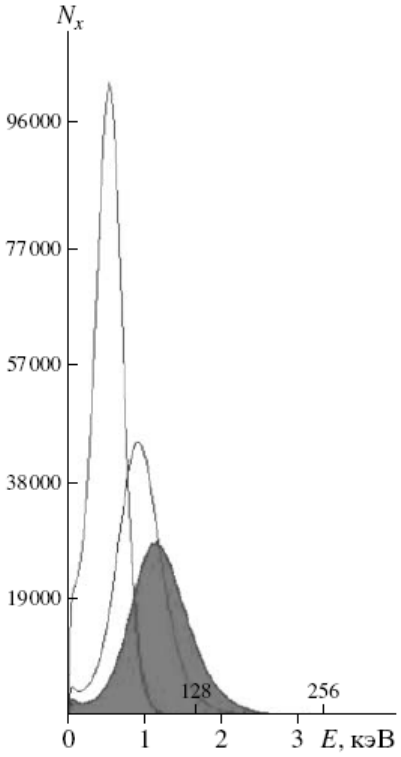


Рис. 4. Изменение спектра внешнего рентгеновского излучения кавитационной камеры при поэтапном увеличении давления масла (слева направо – 20, 40 и 60 атм). N_x – полное число регистрируемых рентгеновских квантов в каждом из каналов спектрометра за 5 мин.

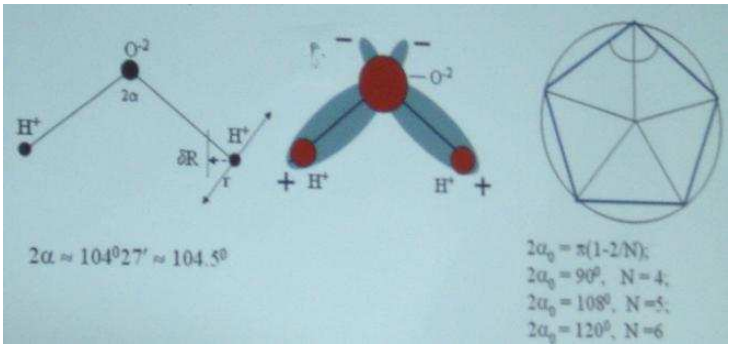
Максимум інтенсивності на відстані формула 2:

$$x_{\text{opt}} = 2\langle l\rangle - L > 0. \qquad (2)$$

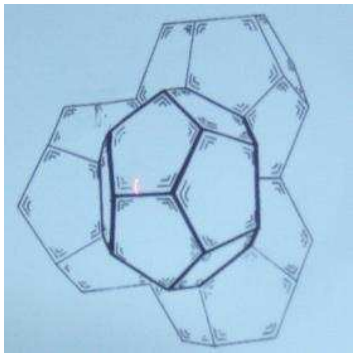
Проаналізувавши спектр ударних хвиль на поверхні, Великі Вчені дійшли висновку, що середня амплітуда коливань складає $\delta x \approx (2\text{–}3) \times 10^{-6}$ см. тобто порядок міжатомних відстаней.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

11. Клатратна модель Полінга

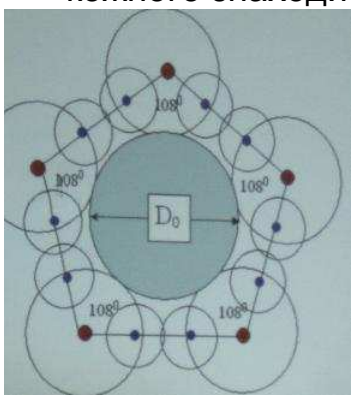


В основі клатратної моделі Полінга лежить уявлення про те, що об'єднання атомів кисню і водню здатне утворювати стабільні просторові гнучкі тетраїдні каркаси. Утворенню тетраїдних каркасів сприяє те, що природний просторовий кут між ОН-зв'зками у вільній молекулі води рівний 104,5°С, що досить близько до точного тетраїдного кута 108°.

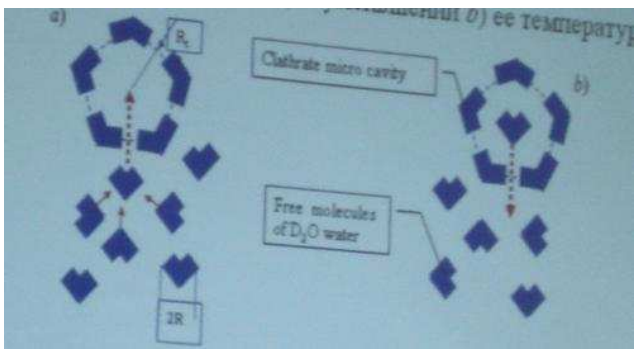


Кожен з багатокутників може характеризуватись вписаною в нього сферою радіусом приблизно 2,6 А. Всі багатокутники складаються з 12 п'ятикутних граней, 30 ребер, що їх сполучають, і 20 вершин. У вешинах розміщені молекули води, кожна з яких має по 3 водневих зв'язки. Кожні 4 багатогранники можуть об'єднуватися у стійкі сполуки , що складаються з 57 мол. води.

Із 57 молекул у 17 повністю насичені водневі зв'язки, вони утворюють тетраїдний гідрофобний центральний каркас, а в 4 додекаєдрах на поверхні кожного знаходиться по 10 центрів водневих зв'язків.



Всередині кожного багатогранника знаходиться мікропорожнина діаметром 5,2 А. Внутрішні стінки порожнини – гідрофобні. Всі мікропорожнини поєднані з зовнішнім простором вікнами діаметром 2,5 А. За межами такого каркасу знаходяться квазівільні молекули «звичайної» води. По відношенню до цих молекул, кожна мікропорожнина відділена від зовнішньої аморфної квазівільної води кільцевим потенціальним бар'єром шириною близько 0, 15 А. Висота цього бар'єру рівна енергії, яку треба витратити для стиснення молекули води до розмірів вікна. Саме тому при нагріванні від 0° до 4° густина води збільшується(вільна вода стискається і заходить в додекайдер), а при 4° кількість аморфної і структурованої води врівноважується, деякі клатрати руйнуються і густина зменшується.



Недавно российские ученые Высоцкий и Корнилова провели расчет энергетических характеристик, необходимых для перехода свободных

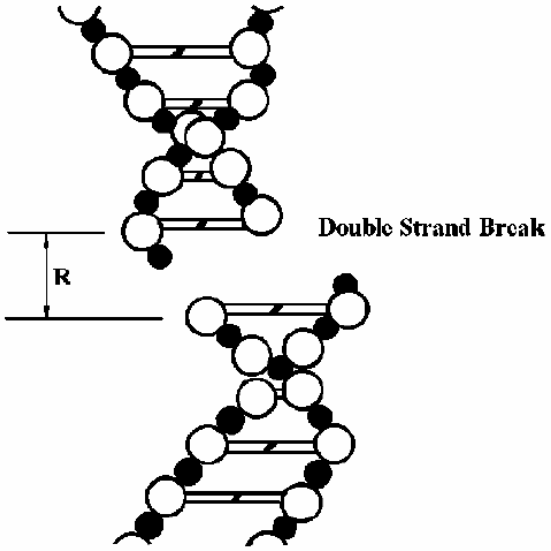
Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

молекул воды из несвязанного состояния в полость клатрата и обратно. С помощью этих расчетов они показали, что структурой воды - количеством свободных молекул воды в полостях клатратов и вне их - можно управлять с помощью давления, температуры, магнитного поля, причем «заряженная» таким образом вода сохраняет свою структуру в течение длительного времени и может использоваться для медицинских целей как самостоятельно (вспомним «живую воду» из народных сказок), так и в качестве «упаковки» для молекул лекарственных веществ.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

12. Описати сили, які діють в межах подвійного розриву молекули ДНК

Подвійний розрив днк має такий вид



Де R – ширина розриву. Подвійний розрив – це найнебезпечніший вид пошкодження днк, оскільки він впливає на дублювання і транскрипцію, може приводити до смерті, або мутації клітини, що в свою чергу викликає рак, порушення розвитку, розумову відсталість.
Загалом в клітині є певні ензими, що повинні відновлювати днк, але цей процес багато в чому залежить від сил дальньої взаємодії, що виникають між фрагментами пошкодженого днк. В деяких випадках може виникнути потенційний бар'єр, що ускладнить, або унеможливить відновлення днк.

Сумарна енергія між кінцевими парами нуклеотидів в зоні розриву днк складається з двох доданків:

$U = U^Q + U^{VDW}$

Де U^Q – енергія кулонівської взаємодії мережі зарядів в складі кінцевих нуклеотидів, U^{VDW} – Ван-дер-ваалівська взаємодія кінцевих нуклеотидів, що також називається дисперсійною.
(Якщо нема часу катать, або не треба видатись сильно розумним, то переходьте до останнього пункту «Сумарна взаємодія», ком. автора)

Опис кулонівської взаємодії

Вона визначається за формулою

$$U^Q = \sum_{i=1}^{N\alpha} \sum_{j=1}^{N_\beta} U_{i,j}^Q$$

Де U^Q - енергія взаємодії, $U_{i,j}^Q$ - енергія взаємодії між двома кулонівськими зарядами Q_i та Q_j, $N\alpha$=29 – кількість атомів в парі нуклеотидів GC , $N_\beta = 27$ – кількість атомів в парі нуклеотидів AT

Використовуючи теорію Дебая-Хаскеля можна розрахувати кулонівську енергію взаєдію зарядів розподілених на поверхні нуклеотидів, з урахуванням іонного розчину міклітинної рідини. Для цього треба розв'язати рівняння Пуасона-Больцмана:

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$\nabla^2\tilde{\psi} = -\frac{4\pi e^2}{\varepsilon_w(0)k_bT}\sum_z n_z^0 e^{-z\tilde{\psi}},$$

Де $\tilde{\psi} = e\psi/k_bT$ – нормований потенціал, $\varepsilon_\omega(0)$ – статичне, при ω=0, значення діелектричною проникності розчину n_z^0 – концентрація йонів валентності z в точці розчину, де потенціал найзручніше вважати нулем.

Якщо $z\tilde{\psi} \ll 1$, то рівняння можна значно спростити:

$$\nabla^2\tilde{\psi} = k^2\tilde{\psi},$$

Де $k^2 = 8\pi n/\varepsilon_\omega(0)k_bT$, де в свою чергу n=$\frac{1}{2}\sum_z n_z^0 z^2$, причому розчин нейтральний $\sum_z n_z^0 z$=0 (видно валентність z може бути від'ємною, ком. автора).

Розв'язок цього щастя для випадку двох заряджених сфер із зарядами Q, та радіусами a, відповідно, має вигляд:

$$U_{ij}^{Q} = \frac{Q_iQ_j}{\varepsilon_w(0)r_{ij}}\exp^{-k(r_{ij}-a_i-a_j)},$$

Де r_{ij} відстань між двома частково зарядженими атомами (сферами в цьому припущенні).

Ван-дер-ваалівська взаємодія

Взаємодія між двома нуклеотидами в іонному розчині найкраще описується теорією Ліфшиця:

$$U^{VDW} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} U_{k,l}^{VDW}$$

$$U_{k,l}^{VDW}(R) = -\frac{27\hbar}{16\pi^3}\frac{V_kV_l}{R^6} \times \int_0^\infty \frac{[\varepsilon_l(i\xi)-\varepsilon_w(i\xi)][\varepsilon_k(i\xi)-\varepsilon_w(i\xi)]}{[\varepsilon_l(i\xi)+2\varepsilon_w(i\xi)][\varepsilon_k(i\xi)+2\varepsilon_w(i\xi)]}d\xi,$$

Де $\varepsilon_k, \varepsilon_l$ - діалектричні проникності взаємодіючих частинок як функції уявної частоти $i\xi$, ε_w - проникність розчину.

Ця формула для двох сфер віддалених на відстань R, нормально описує реальну ситуацію, якщо $\bar{R}_{k,l} < R \ll \lambda_0$, де λ_0 - характерна довжина хвилі поглинання частинок, тобто для відносно великих відстаней.

Для малих відстаней R<$\bar{R}_{k,l}$ треба застосувати наближення двох заряджених площин:

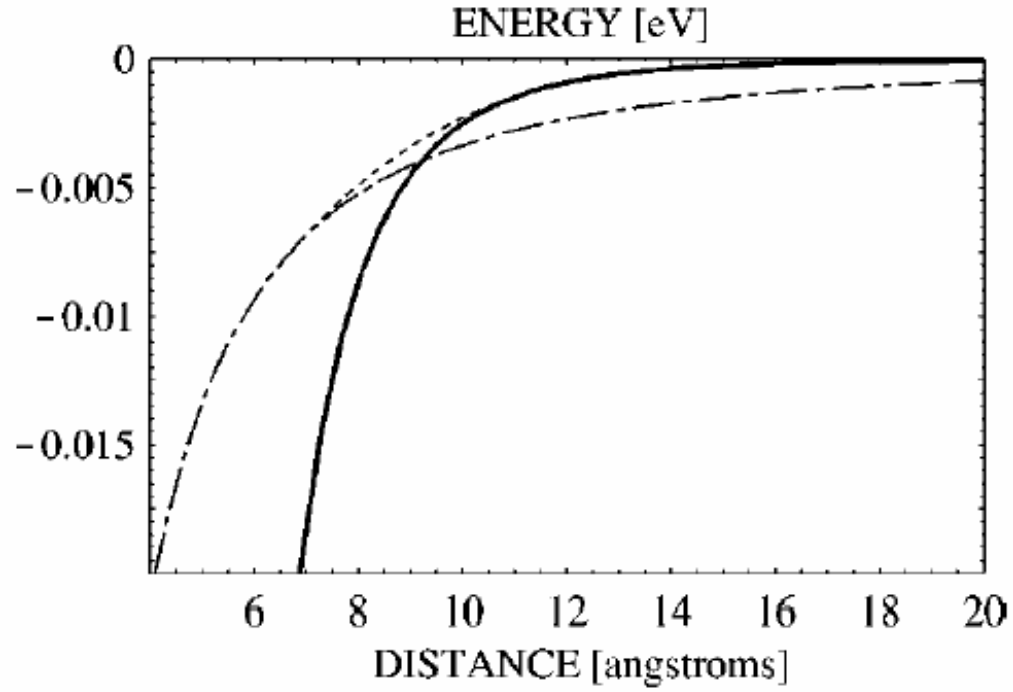
Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$U_{k,l}^{VDW}(R) = -\frac{\hbar}{16\pi^2}\frac{\tilde{S}_N}{R^2} \times \int_0^{\infty} \frac{[\varepsilon_l(i\xi)-\varepsilon_w(i\xi)][\varepsilon_k(i\xi)-\varepsilon_w(i\xi)]}{[\varepsilon_l(i\xi)+\varepsilon_w(i\xi)][\varepsilon_k(i\xi)+\varepsilon_w(i\xi)]} d\xi,$$

Де $\tilde{S}_N$ – ефективна площа меншого нуклеотида.

$U^{VDW} = \Sigma_{i=1}^{2} U_{i,i}^{VDW}$

Для цього випадку враховується взаємодія нуклеотида тільки з протилежним крізь розрив нуклеотидом. (сума тільки одна, видно в попередньому випадку враховувалась взаємодія з двома нуклеотидами, що в кінцях двох спіралей, а тут тільки з одним, тим що навпроти).
Щоб отримати залежність для широкого діапазону відстаней, треба про інтерполювати ці дві залежності:

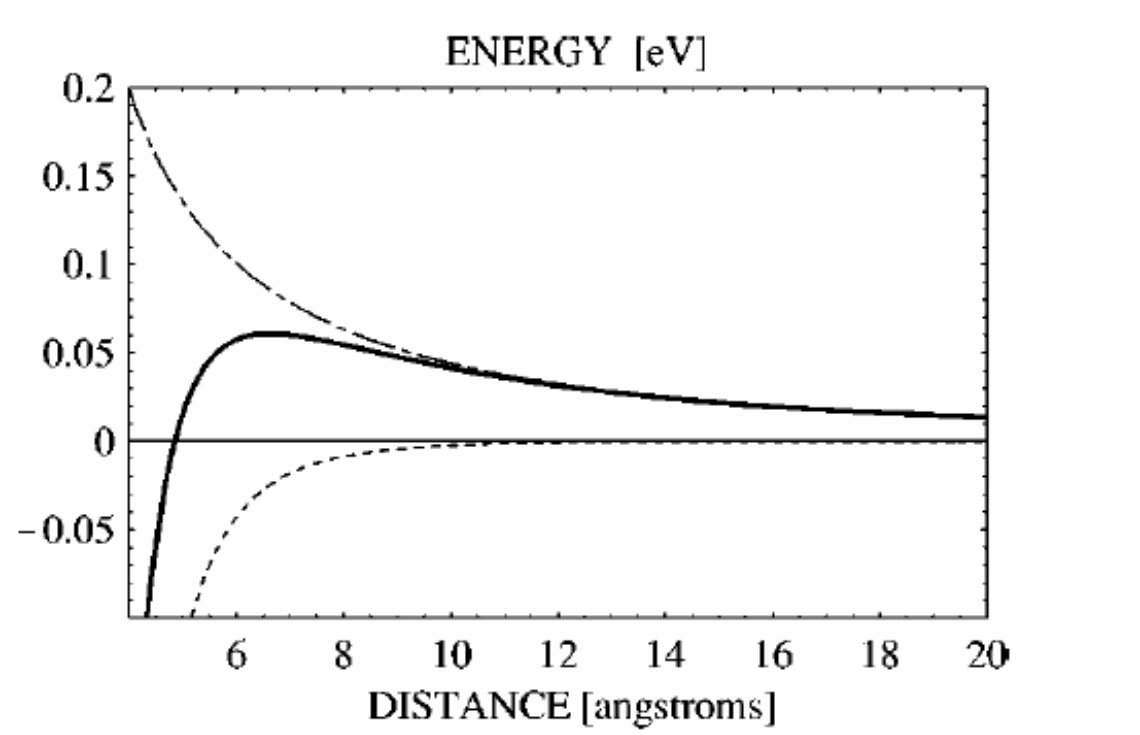


Де точкова лінія – інтерпольована енергія взаємодії ван-дер-ваальса.

Сумарна взаємодія

Залежність обрахованих енергій від відстані, а також сумарна енергія зображена на цьому графіку

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com



Де штрих-пунктирна лінія (верхня) – кулонівська енергія, відповідає тільки за відштовхування, штрихова лінія - ван-дер-ваалівська енергія, відповідає тільки за притягання, суцільна лінія – сумарна енергія, характер взаємодії визначається відстанню.

Сумарна енергія має відштовхуючий бар'єр висотою $U \approx 3k_bT$, що залежить від йонного складу та в'язкості міжклітинної рідини. При рості концентрації йонів, або в'язкості рідини, бар'єр знижує свою висоту, а потім повністю зникає

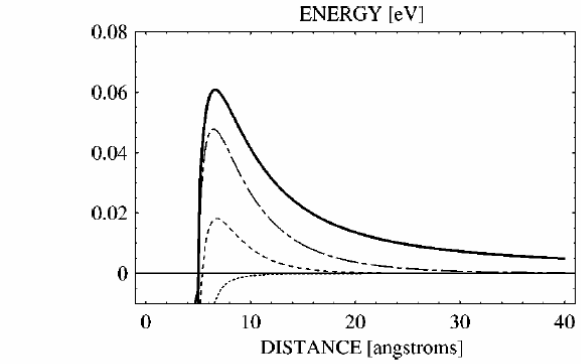


FIG. 4. The total energy of interaction between oriented CG-CG nucleotide pairs as a function of the distance between them and the Debye constant of the intracellular milieu. (a) $k=0$—solid curve. (b) $k=10^7$—dashed curve. (c) $k=2.5\times10^7$—dotted curve. (e) $k=5\times10^7$—small dotted curve. The viscosity of the intracellular liquid is $\nu=\nu$

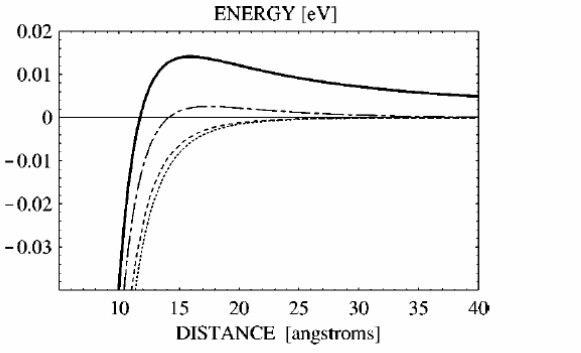


FIG. 6. The total energy of interaction between oriented CG-CG nucleotide pairs as a function of the distance between them and the Debye constant of the intracellular milieu. (a) $k=0$—solid curve. (b) $k=10^7$—dashed curve. (c) $k=2.5\times10^7$—dotted curve. (e) $k=5\times10^7$—small dotted curve. The viscosity of the intracellular liquid is $\nu=100\nu_0$.

На першій картинці зображений графік залежності сумарної енергії взаємодії від концентрації йонів (менша довжина штриха - більша концентрація), на другій та сама залежність, але при в'язкості рідини в сто раз більше.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

13. В чому полягає фізичний механізм позитивної дії малих доз іонізуючої радіації (гормезис)?

Гормезис — стимуляция какой либо системы организма внешними воздействиями, имеющими силу, недостаточную для проявления вредных факторов (введен С. Зонтманом и Д. Эрлихом в 1943 г.).
Термин 'радиационный гормезис' был предложен в 1980 году Т. Д. Лакки и означает благоприятное воздействие ультрамалых доз облучения.
К малым дозам принято относить такие, при которых через ядро клетки проходит одна ионизирующая частица. В зависимости от размеров ядра клетки это дозы поряд-
ка 10 сГр.

В настоящее время существуют две противостоящие друг другу модели для оценки риска стохастических эффектов ионизирующей радиации в зависимости от дозы облучения.
В основе первой лежит экстраполяция результатов, полученных при больших дозах, в область малых доз. Из этого следует, что риск возникновения рака при облучении малыми дозами ионизирующей радиации наилучшим образом оценивается линейными отношениями без порога и любая сколь угодно малая доза повышает вероятность возникновения рака и других заболеваний.
Вторая модель постулирует, что существует пороговая доза, ниже которой радиация не может вызвать заболеваний канцерогенной и неканцерогенной природы. Эта модель опирается прежде всего на концепцию радиационного гормезиса.
Понятие радиационный гормезис предполагает, что ионизирующее облучение, являясь при больших дозах губительным для живых организмов, в малых дозах может индуцировать положительные биологические процессы и оказывать стимулирующее благоприятное действие на организм, которое регистрируется как повышение плодовитости,
роста, деления клеток и увеличение продолжительности жизни различных биологическихобъектов.
При дозах до 50 сГр у млекопитающих, кур и рыб отмечались стимуляция фертильности, увеличение выживаемости и скорости роста, у растений – ускорение ростовых процессов, более интенсивное ветвление, стимуляция развития генеративных органов.

Механизм действия данного фактора на живые объекты. В настоящее время разделяют два пути влияния: прямой и непрямой. Под прямым воздействием подразумевают непосредственное взаимодействие ионизирующего излучением с биологическими молекулами (мишенями – белками, нуклеиновыми кислотами, липидами), в результате которого происходит повреждение биологических структур. Под непрямым действием подразумевают повреждение биологических молекул свободнорадикальными продуктами – молекулами, которые имеют неспаренный электрон и которые по

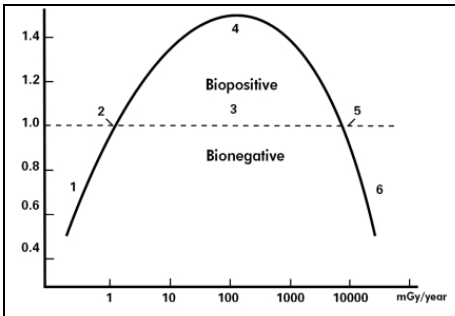
Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

этой причине характеризуются крайне высокой химической активностью. Учитывая тот факт, что вода является основным веществом живых систем (в некоторых клетках вода составляет до 90% и более), радиолиз воды является наиболее биологически значимым процессом. При радиолизе воды молекула ионизируется, теряя электрон: H_2O à $H_2O^+ + e^-$. Диссоциация ионизированной молекулы приводит к образованию двух радикалов: $H_2O^+ + e^-$ à $H^\bullet$ и $OH^\bullet$, время жизни которых составляет 10-5 с. За это время они рекомбинируют друг с другом или реагируют с биологическими молекулами. Параллельно с этим, свободные электроны могут взаимодействовать с другими молекулами воды с образованием гидратированного электрона (H_2Oe^-), который в присутствии кислорода обеспечивает образование других свободнорадикальных продуктов, относящихся к группе активных форм кислорода.

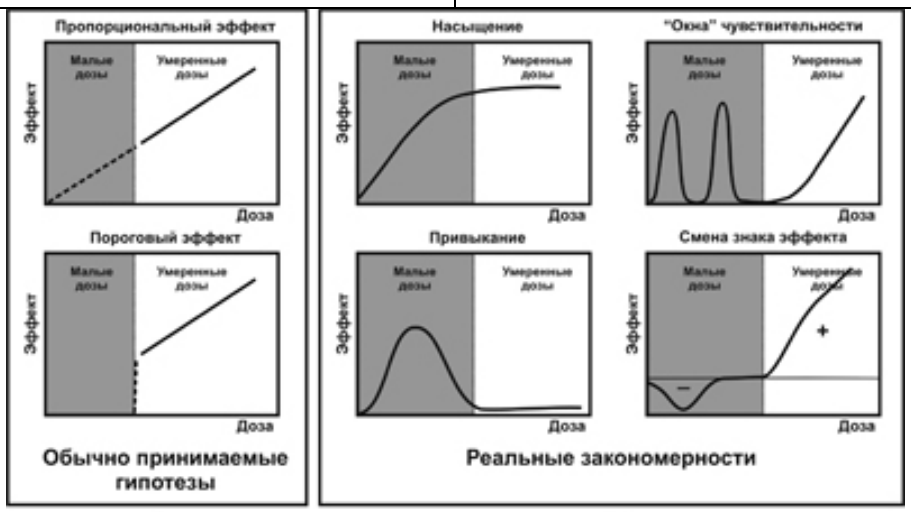
Считается, что небольшие количества образующихся свободных радикалов стимулируют антиоксидантную и репарационные системы клеток и таким образом повышают адаптационный потенциал как отдельных клеток, так и организма в целом, оказывая, тем самым, стимулирующее действие. Результаты специально поставленных экспериментов (Кузин А.М., 1995) свидетельствуют о том, что уровни радиационного излучения ниже природных являются неблагоприятными для живых систем! Получается, что живые системы нуждаются в постоянном образовании свободных радикалов! А если это так, то какой в этом биологический смысл? Наиболее разумное объяснение предлагает российский исследователь Воейков. Согласно его представлениям процессы с участием свободных кислородных радикалов в жидкой среде живых организмов непрерывно генерируют в системе электрон-возбужденные состояния. Такие электрон-возбужденные состояния возникают вследствие рекомбинации радикалов. Эта энергия высокой плотности диссипирует в жидкой среде не хаотично, а упорядочено во времени и пространстве, и не монотонно, и несмотря на то, что ее общее количество мало по сравнению с другими источниками химической или метаболической энергии, она играет фундаментальную биоэнергетическую и регуляторную роль (Воейков В.Л., 2003). Основываясь на этих идеях, напрашивается логический вывод о том, что природный радиационный фон является всего рода постоянно действующим и крайне важным фактором, осуществляющим своеобразную «энергетическую накачку» жидкой (водной) среды, необходимую для нормальной работы молекулярных машин - белков. Более того, становится понятной физическая природа радиационного гормезиса: снижение уровня радиационного воздействия на живые системы ниже некоего оптимального приводит к остановке работы молекулярных машин - белков, а высокие уровни ионизирующей радиации – разрушают конструкцию белков и других молекулярных структур клетки.

как изобразить гормезис:

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

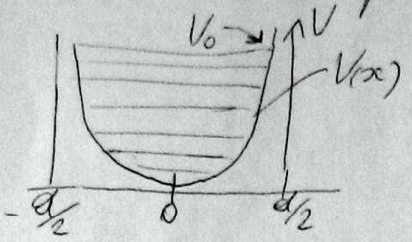


Особое внимание Владимир Иванович уделил нижнему правому углу. Там показан спад в зависимости эффект-доза, что отвечает за наличие гормезиса, а далее подъем, которые говорит о вреде радиации.



Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

(14) Показати, яким чином частота випромінювання квантової частинки, яка знаходиться в кристалі залежить від напруженості. Розгл. прямок. пот. V_0



$V(x) = kx^2 = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$; $V(\pm\frac{a}{2}) = V_0$

Процес заселення рівнів регулюється купом вибору частинки

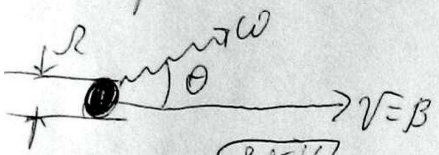
$E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$; $n_{max} = \frac{V_0}{\hbar\omega} = \sqrt{\frac{V_0 \cdot m}{8}} \cdot \frac{a}{\hbar}$ (для протонів $n_{max} = 30$, позитронів $n_{max} \approx 1$)

$V_0 = \frac{m\omega^2 a^2}{8}$, $\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{8V_0}{ma^2}}$ - частота у власн. системі координат

Проведемо розрахунок: враховуємо хвильову функцію з обрегом релятивіс. масу: $m \to \frac{m}{\gamma} = \gamma m$

$-\frac{\hbar^2}{2\gamma m}\Delta\psi + \gamma \cdot V(x)\psi = E\psi$, $\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{8V_0}{a^2 m\gamma}}$; $n_{max} = \sqrt{\frac{V_0 \gamma \cdot m \cdot \omega}{\hbar}}$

хвильові зміни поля. У цьому випадку для релят. електронів спектр стає багаторівневим. Ф-ла Доплера:



в пов. системі $\rightarrow$ $\omega = \frac{\Omega_{21}}{\gamma(1-\beta\cdot n(\omega)\cos\theta)}$ (1) $\leftarrow$ частота переходу у власній системі частинки

$\beta = \frac{v}{c}$; $\Omega_{21} = \sqrt{\frac{8\cdot V_0}{\gamma m a^2}} = \frac{\Omega_0}{\sqrt{\gamma}} \Rightarrow \Omega_0 = \sqrt{\frac{8V_0}{ma^2}}$ $\leftarrow$ складний ефект Доплера

$\Omega_{21} = \sqrt{\frac{8\gamma\cdot V_0}{ma^2}}$, $\gamma \cdot V(x) = \frac{m\cdot\Omega^2 x^2}{2}\Big|_{x=\frac{a}{2}}$; $\Omega = \sqrt{\frac{8\gamma\cdot V_0}{ma^2}}$ (*)

підставляючи (*) в (1) отримуємо:

$\omega_{випром} = \sqrt{\frac{8\gamma V_0}{ma}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{(1-\beta n(\omega)\cdot\cos\theta)} = \underline{\sqrt{\frac{8\cdot V_0}{ma\gamma}} \cdot \frac{1}{1-\beta n\cos\theta}}$

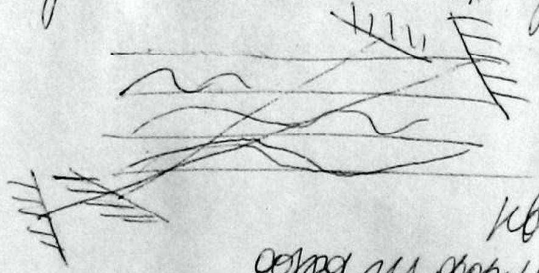
Отримано: $\underline{\theta = 0}$: при $n = 1$ (вакуум) $\Rightarrow \omega = \frac{\Omega_0}{\gamma^{3/2}(\ast - \ast + \frac{1}{2\gamma^2})} = 2\Omega_0\sqrt{\gamma}$ - при русі вперед

$\theta = \frac{\pi}{2}$: $\omega = \sqrt{\frac{8V_0}{ma^2\gamma}} \sim \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ ..... $2\gamma^{\frac{3}{2}}$

$\theta = \pi$: $\omega = \frac{\Omega_0}{2\gamma^{3/2}} \sim \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}$; $\frac{\omega_{max}}{\omega_{min}} = 2\gamma^2$

частота

сучасн. $\gamma \approx 10^5$. Отже в залежності від кута випромінювання оптич. частинка може змінюватися в 10^{10} разів



$\Rightarrow$ змінюємо кут нахилу дзеркал $\Rightarrow$ отримуємо зміну діапазону частот на екрані й таку саму картину. Це квазіхарактеристичне випромінювання. Образ формуємо зображенням квазічастинки. Цей ефект погано працює з електронами (сильне поле в кристал. решітці), краще працює з позитронами (складніший, але серйозна перспектива)

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

15-16. Рентгенівські та гамма-лазери. (взагалі це питання в 2010 не читалось і білет варто поміняти, але якщо раптом у тебе виникло бажання написати щось про лазери, то можеш почитати нижчеподаний матеріал, який був скопіпастений з вікіпедії)

Рентгеновский лазер с возбуждением активной среды с помощью энергии ядерного взрыва является на сегодняшний день одним из наиболее мощных лазерных устройств (устройство одноразового применения поскольку при взрыве оно испаряется).

Но при создании коротковолновых лазеров необходимо преодолеть принципиальные трудности. Чтобы осуществлялся эффект усиления электромагнитного излучения при его прохождении через активную среду, необходимо, во-первых, большое количество возбужденных атомов, готовых испустить кванты вынужденного излучения, а во-вторых, большая вероятность взаимодействия между квантами и этими атомами, обеспечивающая это вынужденное излучение. Коэффициент усиления излучения составляет:K = s (Nвоз — Nосн), где s — сечение взаимодействия квантов с атомами, Nвоз и Nосн — число атомов в возбужденном и основном состояниях. В условиях термодинамического равновесия Nвоз < Nосн, поэтому поглощение преобладает над вынужденным излучением. Для получения лазерного эффекта необходимо создать среду с инверсной заселенностью атомов по энергетическим состояниям: Nвоз > Nосн. Кроме этого, из фундаментальных законов квантовой физики следует, что s µ l2.

Для рентгеновского диапазона с длиной волны менее 10 Ангстрем должны быть использованы ядерные переходы, а также эффект Мёссбауэра (излучение квантов в кристаллах без «отдачи» атома, а значит, без смещения частоты излучения вследствие доплер-эффекта).

Для поддержки инверсной заселенности верхних уровней мощность возбуждения должна быть намного больше той, которая рассеивается в виде спонтанного излучения в среде (тепловые потери и др). Как известно, энергия кванта пропорциональна частоте излучения и к, тому же вероятность спонтанного излучения, бесполезно уносящего энергию внешнего источника возбуждения, пропорциональна третьей степени от частоты излучения. Учитывая это, получим, что мощность, необходимая для поддержания инверсной заселенности, W µ n4 µ l-4.Так например для лазеров видимого диапазона с длиной волны около 500 нм, достаточно обеспечить мощность, вводимую в см³ среды около 100-10000 Вт/см³ (лампы-вспышки, хим-е реакции), то для лазера рентгеновского диапазона с длиной волны около 0,5 нм, плотность энергии «накачки» должна быть около 10^{10}- 10^{15}Вт/см2 (!). Такой высокий уровень энергий при «накачке» может быть обеспечен только с помощью ядерного взрыва, либо в фокальном пятне мощного импульсного лазера.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

После взрыва ядерного заряда вещество рабочих стержней превращается в полностью ионизованную плазму. Когда температура электронов несколько снижается, и начинается рекомбинация в основном на нижние уровни, происходит излучение в рентгеновской части спектра. Поскольку время высвечивания плазмы измеряется пикосекундами, и облако раскаленной до миллионов градусов плазмы не успевает существенно изменить свою геометрию, то оно сохраняет форму и направление рабочего стержня. Так как зеркал для работы с рентгеновским излучением с длиной волны около 10 А пока еще не существует (см.рентгеновское зеркало), то рентгеновский лазер, вероятно, должен работать без резонатора. Поэтому расходимость пучка будет определяться двумя факторами: дифракцией и геометрией стержня. Точнее говоря, наибольшим значением из них. Принимая малое значение расходимости, получим оптимальную величину диаметра: D = (lL)1/2. Для длин волн около 10-14 Ангстрем и L = 7 м это дает D = 0,1 мм. Даже если в процессе ионизации и рекомбинации вещества его геометрия изменится незначительно, расходимость луча достигает ~ 10^{-5}рад. Однако более детальный расчет показывает, что к моменту рекомбинации сгусток плазмы может расшириться до 0,8-1 мм, и в этом случае расходимость лазерного луча будет порядка от 10^{-4} до 10^{-5}. Для поражения межконтинентальной ракеты, то есть для достижения плотностей энергии около 10-20 кДж/см²на расстоянии до 1000 километров при расходимости луча 10-5, в импульсе такого лазера должна быть энергия ~ 10^{10}Джоулей. При КПД лазера около 8-10 % и при расстоянии стержня от ядерного заряда ~ 1 м мощность заряда должна быть около 10^{15}Джоулей, или порядка двухсот килотонн тротилового эквивалента. При этом предположительно львиная доля энергии ядерного взрыва пойдет на испарение рабочих стержней (стержня), и сама струна ориентирована к заряду не торцом, а боковой поверхностью. Однако в литературе на эту тему упоминаются заряды значительно меньшей мощности. Возможно использовать не одну, а несколько десятков (около 50-100) параллельно ориентированных стержней наводимых на цель. Возможно также что инженеры попытаются создать концентратор энергии взрыва на одной струне, используя эффект отражения рентгеновских лучей от кристаллов или многослойные рентгеновские зеркала (с высокими характеристиками отражения), и в этой области предвидится значительный успех.

ru.wikipedia.org, **Лазер с ядерной накачкой**

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

16. Отримати загальну умову квантового підсилення на ядерних або атомних системах в області жорсткого випромінювання

Щоб було підсилення треба що до системи підводили енергію не меншу за енергію кванта за час менший ніж час життя(тоді можлива інверсна заселеність). Оцінимо енергію необхідну для накачки: $E \geq \hbar\omega$ за час $\Delta t \leq \tau$

$$P_{min} > \frac{\hbar\omega}{\tau} = \frac{\hbar\omega \cdot 4\omega^3 |d|^2}{3\hbar c^3}$$

$$P_{min}\Big|_{opt} = \frac{10^{-27}10^{15}}{10^{-6}} = 10^{-6}\,\frac{эрг}{с} = 10^{-13}\,\frac{вт}{атом}$$

$$P_{min}\Big|_{ренген} = \frac{10^{-27}10^{19}}{10^{-15}} = 10^{7}\,\frac{эрг}{с} = 1\frac{вт}{атом},\ для\ \lambda=1A$$

Видно що таку потужність неможливо отримати в лабораторних умовах.

Можливе застування переходів з більшою мультипольністю L:

$$\tau = \frac{\hbar e^{2L+1}}{e^2\omega^{2L+1}\left(d_{eg}\right)^{2L+1}}$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

17. Отримати умову квантового підсилення на системі релаксивіських канальованих часинок в кристалах.

В середовищі через яке проходить випромінювання діє закон Бугера – Ламберта – Бера.

$$J = J_0 \exp\{(\sigma_{підс} \Delta n - \beta) x\}$$

Умова квантового підсилення:

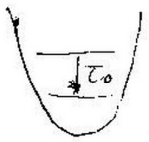
$$\sigma_{підс} \Delta n > \beta = n \sigma_{поглин}.$$

$$\sigma_{підс} = \frac{\lambda^2}{2\pi \Gamma \tau}$$

Γ – ширина лінії переходу

$$\Gamma = \underbrace{\frac{1}{\tau_0}}_{\text{власна ширина}} + \underbrace{\Delta\Gamma}_{\text{уширення}}.$$

При канальованні часинки мають отримані імпульси й можна розглядати як квазічастинки разом з системою атомних площин певним набором рівнів.



$\tau_0 = 10^{-5} \div 10^{-6}$ с → час життя на рівні.

$\Delta\Gamma$ – додаткове уширення за рахунок скінченного часу життя квазічастинки

$$\Delta\Gamma = \frac{1}{\tau_d}; \quad \tau_d = \frac{\ell}{c} \sim 10^{-13} \text{ с} \quad (\ell \sim 10 \text{ мкм}) - \text{час деканалювання}$$

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_d} \simeq 10^{13}.$$

$\Gamma\tau \sim 10^8$ тому треба зробити велику інверсію Δn, часинок

Розглянемо питання який струм необхідний для створення інверсії

$$j = n \cdot e \cdot v; \quad \Delta n = \frac{j}{ec} \alpha, \quad \alpha \simeq 1.$$

Умова квантового підсилення

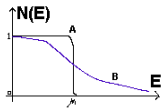
$$\frac{\lambda^2 \Delta n}{2\pi \Gamma \tau} \geq \beta \Rightarrow \text{граничний випадок} \Rightarrow \frac{\lambda^2 \Delta n}{2\pi \Gamma \tau} = \beta; \quad \frac{\lambda^2 j_{гр} \cdot \alpha}{ec \cdot 2\pi \Gamma \tau} = \beta \Rightarrow \frac{j_{гр}}{e} = \frac{2\pi \Gamma \tau \cdot \beta \cdot c}{\lambda^2 \cdot \alpha}$$

Якщо підставити значення для $\lambda = 1$ Å маємо:

$$j_{гр} = 10^{14} \frac{A}{см^2}$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

18. Вироджений Нерелятивістський газ $\bar{e}$:

Розподіл фермі 

$N(E_k)=\frac{1}{\exp(\frac{E_k-\mu}{kT})\pm 1}$, графік (А)



В об'ємі v багато квантових рівнів, і всі вони заповнені, а вище V всі порожні. Виразимо кількість частинок в об'ємі $\oint p_i dq_i = 2\pi\hbar(n_i+1/2)$ (-квантування Бора-Зомерфельда) $n_i = 1,2,..,\infty$ Квант об'єму: $\delta(\oint p_i dq_i) = 2\pi\hbar$ $N_i = 2\frac{\Delta p_i \Delta q_i}{2\pi\hbar}$ („2" - спін). Число можливих станів для електронів: $N = 2\frac{\int_0^{p_0} d^3p \int_V d^3q}{(2\pi\hbar)^3} =$ $|\int d^3q = V, \quad \int d^3p = \int_0^{p_0} p^2dp \int_{4\pi} d\Omega = 4\pi\int_0^{p_0} p^2dp| = 2\frac{V4\pi\int_0^{p_0} p^2dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{Vp_0^3}{3\pi^2\hbar^3}$ (*). Знайдемо f розподілу по імпульсам. Або закон розподілу імпульсів(кількість можливих станів $\bar{e}$ на 1 імпульсу) $f(p)=\frac{\partial N}{\partial p}=\frac{Vp_0^2}{\pi^2\hbar^3}$. Загальна енергія всіх $\bar{e}$ в об'ємі $\mathrm{E}=\int_0^{p_0} f(p)\mathrm{E}(p)dp = \quad |\mathrm{E}(p)=\frac{p^2}{2m}$ - нерелятивістський вигляд $\models \int_0^{p_0}\frac{p^2V}{\pi^2\hbar^3}\frac{p^2}{2m}dp =$ $\frac{p_0^5V}{10m\pi^2\hbar^3}$ (2*). З (*) максимальний імпульс $p_0=(3\pi^2)^{1/3}\hbar(N/V)^{1/3}=|N/V=n_e|=$ $(3\pi^2)^{1/3}\hbar n_e^{1/3}$ (3*). Повна енергія з (2*) і (3*): $\mathrm{E}_p = 3(3\pi^2)^{2/3}N\frac{\hbar^2}{10m}n_e^{2/3}$. Максимальна енергія $\mathrm{E}_0=\mathrm{E}_F=\frac{p_0^2}{2m}= \quad (3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}n_e^{2/3}$. Отже $\mathrm{E}_F=\frac{3}{5}N\mathrm{E}_0$. Середня енергія 1 частинки: $\overline{\mathrm{E}_1}=\frac{\mathrm{E}}{N}=\frac{3}{5}\mathrm{E}_0$. Газ причиняє тиск на стінки: $P=P_F=-\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial V}|_S=$ $|S-\text{ентропія}|= \quad \frac{\partial}{\partial V}\left(3(3\pi^2)^{2/3}N\frac{\hbar^2}{10m}(\frac{N}{V})^{2/3}\right)= \quad (3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{5m}n_e^{5/3}$. При високій концентрації газ стає виродженим. Границя застосування: $\mathrm{E}_0 >> kT$ $\Rightarrow \mathrm{E}_0 = kT_{виродж} \Rightarrow T_{виродж} = k/\mathrm{E}_0$

Релятивістський вироджений газ $\bar{e}$: $N=\int f(p)dp\,, dN=\frac{Vp^2dV}{\pi^2\hbar^3}=$ $|p_0=(3\pi^2)^{1/3}\hbar n_e^{1/3}|= \quad \frac{Vp_0^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad \mathrm{E}=\int_0^{p_0}\mathrm{E}(p)f(p)dp= \quad |f(p)=\frac{Vp^2}{\pi^2\hbar^3},$ для нерелятивістського випадку $\mathrm{E}(p)=\frac{p^2}{2m},$ для релятивістського випадку $\mathrm{E}(p)=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$, для сильно релятивістських $\bar{e}$: $T(p)=\mathrm{E}(p)=$ $\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}\approx pc|= \quad \int_0^{p_0} pc\frac{Vp^2}{\pi^2\hbar^3}dp= \quad \frac{Vcp_0^4}{4\pi^2\hbar^3}= \quad |p_0=(3\pi^2)^{1/3}\hbar n_e^{1/3}, \quad N/V=n_e|=$

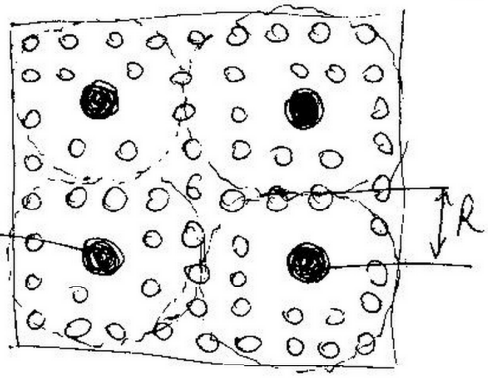
Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$\frac{3}{4}(3\pi^2)^{1/3} Nc\hbar n_e^{1/3}$ повна енергія. Максимальна енергія $\mathrm{E}_0 = \mathrm{E}_F = p_0 c = (3\pi^2)^{1/3}\hbar c n_e^{1/3}$. Середня енергія 1 частинки: $\overline{\mathrm{E}_1} = \frac{\mathrm{E}}{N} = \frac{3}{4}\mathrm{E}_F$. Газ причиняє тиск на стінки (тиск Фермі газу): $P_F = -\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial V}|_S = \quad |S - ентропія, \quad N/V = n_e| = \quad -\frac{3}{4}(3\pi^2)^{1/3} N^{4/3}\hbar c \frac{\partial}{\partial V}\frac{1}{V^{1/3}} = \frac{\hbar c}{4}(3\pi^2)^{1/3} n_e^{4/3}$.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

(19) Знайти умову рівноваги виродженого нерелятивістського електронного газу при використанні "стандартного" виразу для кулонівської енергії $U = \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$

Розглядаємо наступну систему



ядро Ze

в електронному газі густиною n_e

$$U_{eff} = U_{eff}(r, E) = \underbrace{-e\varphi(r)\frac{E}{m_e c^2}}_{\text{лінійна частина}} \underbrace{- [e\varphi(r)]^2 / 2mc^2}_{\text{нелінійна частина}} -$$

– ефективна потенціальна енергія, що визначається рухом електрона з повною енергією E.

$$E = \left(p^2c^2 + m_e^2 c^4\right)^{1/2}$$

Кулонівська потенціальна енергія всіх Z електронів в об'ємі $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

$$U_{eQ} = \underbrace{U_{eQL}}_{\text{лінійна}} + \underbrace{U_{eQNL}}_{\text{нелінійна}}$$

Нас цікавить лінійна частина

$$U_{eQL} = \sum_{i=1}^{Z} U_{eff}(r_i, p_i) = \int_V \int_0^{P_F} U_{eff}(r, p)\left(d^2N / dp\,dV\right) dp\,dV =$$

$$= W_Q K_F$$

$$W_Q = -\int_V e\varphi(r) n_e\, dV$$

$$K_F = \frac{\int_0^{P_F} \left(p^2c^2 + m_e^2c^4\right)^{1/2} p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3 n_e m_e c^2}$$

$$\frac{d^2N}{dp\,dV} = \frac{p^2}{\pi^2 \hbar^3}, \qquad \int_V \int_0^{P_F} \left(d^2N / dp\,dV\right) dp\,dV = Z$$

$$W_{Q(en)} = \int_0^R V_0(r) n_e 4\pi r^2 dr = -\frac{3}{2}\frac{Z^2 e^2}{R} = -\frac{3}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{5/3} e^2 n_e^{1/3}$$

– енергія взаємодії електронів та ядер

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$W_{Q(ee)} = \int_0^R Q\,dQ(r)/r = \frac{3}{5} Z^2 e^2/R = \frac{3}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{5/3} e^2 n_e^{1/3}$$

$$K_F = (m_e^3 c^3/8\pi^2\hbar^3 n_e)\left\{\frac{p_F}{m_e c}\left[2\left(\frac{p_F}{m_e c}\right)^2+1\right]\times\left[\left(\frac{p_F}{m_e c}\right)^2+1\right]^{1/2} - \right.$$
$$\left. - \operatorname{Arsh}(p_F/m_e c)\right\}$$ — фактор динамічного зростання по відношенню до руху електронів.

→ для нерелятивістського виродженого газу (при $p_F \ll m_e c$ та $n_e < 10^{30}\ см^{-3}$)

$$K_F = 1 + \frac{3}{10}\cdot(3\pi^2)^{2/3}(\hbar/m_e c)^2 n_e^{2/3} \approx 1 + 0{,}38\,(n_e/10^{30}\ см^{-3})^{2/3}$$

Что из этого г...а условие равновесия науке в лице составителя (т.е. меня) неизвестно.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

20. Знайти умову рівноваги виродженого надрелятивістського електронного газу при використанні "стандартного" виразу для кулонівської енергії взаємодії зарядів V=q1q2/r

На відміну від нерелятивістського випадку і випадку порівняно слабих полів у надрелятивістському випадку ефективна потенційна енергія залежить від взаємодії між виродженим електронним газом і іонами. В межах кожної комірки Віннера-Зейтса ця взаємодія складається з наступних компонент:

1) Традиційна (Кулонівська) взаємодія між електроном і позитивно зарядженим ядром:

$$U_{eQL} = \sum_{i=1}^{Z} U_{eff}(r_i, p_i) = \int_V \int_0^{p_F} U_{eff}(r,p) \frac{d^2N}{dpdV} dpdV = W_{Q(en)} K_F \qquad (1)$$

$$W_{Q(en)} = \int_0^R U_0(r) n_e \, 4\pi r^2 dr = -\frac{3}{2}\frac{Z^2e^2}{R} = -\frac{3}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{5/3} e^2 n_e^{1/3} \qquad (2)$$

2) Кулонівське відштовхування електронів:

$$U_{Q(ee)} = W_{Q(ee)} K_F \qquad (3)$$

$$W_{Q(ee)} = \int_0^R Q dQ(r)/r = \frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{R} = \frac{3}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} e^2 n_e^{1/3} \qquad (4)$$

$$Q = -\frac{Zer^3}{R^3} \qquad (5)$$

3) Нелінійна частина повної кулонівської взаємодії:

$$U_{eQNL} = \frac{\int_V [e\varphi(r)]^2 n_e dV}{2m_e c^2} = \int_0^R (-Ze^2/r + Ze^2 r^2/R^3)^2 n_e 2\pi r^2 dr / m_e c^2 = 8\pi Z^{7/3} e^4 \left(\frac{3}{4}\pi\right)^{1/3} n_e^{2/3} / 7 m_e c^2 \qquad (6)$$

4) Обмінна взаємодія в електронній системі:

$$U_{e,exch} = -\left(\frac{e^2}{n_e}\right) \int_0^{p_F} \frac{d^3p_1}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{\left[\frac{d^3p_1}{h^3}\right] h^2}{|p_1 - p_2|^2} = -\left[\frac{3(3\pi^2)^{1/3}}{4\pi}\right] Ze^2 n_e^{1/3} \qquad (7)$$

5) Кінетичний тиск електронного газу:

$$U_{eF} = \int_V \int_0^{p_F} T_1(p) \frac{d^2N}{dpdV} dpdV = \frac{V}{\pi^2 h^3} \int_0^{p_F} [(p^2c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2} - m_e c^2] p^2 dp = Z m_e c^2 (K_F - 1) \qquad (8)$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

В наведених формулах

$$\frac{d^2N}{dpdV} = \frac{p^2}{\pi^2 h^3}$$

$$\int_V \int_0^{p_F} \frac{d^2N}{dpdV} dpdV = Z$$

$$K_F = \frac{\int_0^{p_F} [(p^2c^2 + m_e^2c^4)^{1/2}]\, p^2 dp}{\pi^2 h^3 n_e m_e c^2}$$

У випадку надрелятивістського газу можемо знехтувати кореляційними ефектами.

В результаті, повна енергія електронів буде рівною:

$$U_{e\Sigma} = U_{eQL} + U_{eQNL} + U_{e,exch} + U_{eF}$$

$$= \left[-\frac{3}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{5/3} e^2 n_e^{1/3} + \frac{3}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} e^2 n_e^{1/3} + 1 \right] K_F$$

$$+ \frac{8\pi Z^{7/3} e^4 \left(\frac{3}{4}\pi\right)^{1/3} n_e^{2/3}}{7 m_e c^2} + \left[\frac{3(3\pi^2)^{1/3}}{4\pi} \right] Z e^2 n_e^{1/3} - Z m_e c^2$$

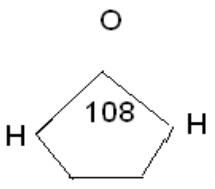
Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

21.Моделі структури води та можливі механізми утворення довготривалої пам'яті води.

Особливості фізичних властивостей води і багаточисельні короткоживучі водневі зв'язки між сусідніми атомами водню і кисню в молекулі води створюють сприятливі можливості для утворення особливих структур-ассоциатов (кластерів), що сприймають, зберігають і передавальних саму різну інформацію.

Розглянемо моделі:

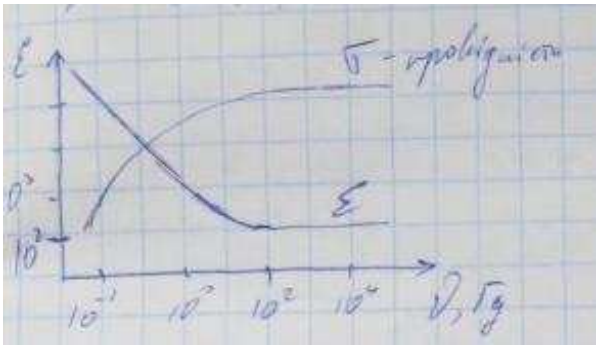
1. Стандартана модель квазікристала Френеля.
   ΔE_0~0,2eV; $W_\varphi=10^{13}$ с
   $\tau_{памяті}=10^{-11}$ с
2. “ Клатратна ”модель Полінга:
   Л. Полінг передбачив, що основою структури може служити сітка зв'язків, властива деяким кристалогідратам.
   Клатрати - це об'єднання молекул води в многогранники, що нагадують за своєю формою футбольний м'яч, внутрішня порожнина яких порівнянна по величині як з молекулами води, так і з молекулами деяких газоподібних речовин, у тому числі - метану. Окрім цих молекул води, що об'єдналися в многограннику, в ній знаходяться і одиночні молекули, які можуть або входити у внутрішню порожнину клатратів або знаходитися в просторі між ними. Від того, яка кількість одиночних молекул знаходитиметься в тому або іншому стані, залежать властивості води - її в'язкість, питома вага і здатність розчиняти інші речовини, а також взаємодіяти з молекулами, що входять до складу живих організмів. Завдяки цьому, наприклад, тала вода володіє корисними для живих організмів властивостями. Структурою води - кількістю вільних молекул води в порожнинах клатратів і поза ними - можна управляти за допомогою тиску, температури, магнітного поля, причому «заряджена» таким чином вода зберігає свою структуру протягом довгого часу і може використовуватися для медичних цілей як самостійно, так і як «упаковка» для молекул лікарських речовин.



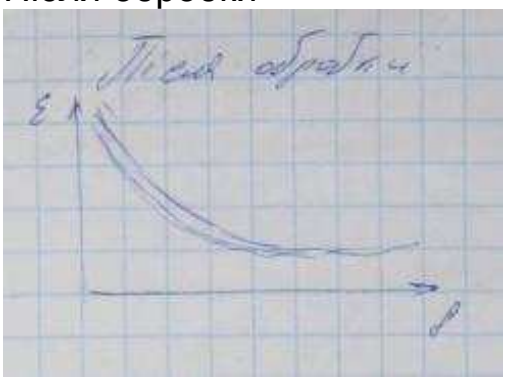
---базовий сегмент.

В об’ємі $7H_2O$ утворюється кластер.
Маємо потенціальний барєр (пружної деформації)
$\Delta E >> KT$ (~ 1,1eV) $\tau_{памяті}$=300 днів ($T=1^0C$)
Вода в магнітному полі:
H ~10 с при частоті 7,5 Гц

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com



Після обробки



$T_{релаксації}$=4 год (36,6^{0}C). Також пам'ять поширюється на спектри комбінаційного розсіювання,коефіцієнт в’язкості, Рн.

У дистильованій воді клатрати практично електронейтральні. Проте їх електропровідність можна змінити. Якщо перемішати магнітною мішалкою, зв'язки між елементами клатратів будуть зруйновані і вода перетвориться на мертве, неврегульоване місиво. Якщо помістити у воду гранично малу кількість іншої речовини (хоч одну молекулу) - клатрати почнуть "переймати" його електромагнітні властивості.

Є два типи "пам'яті" води - первинна і довготривала. Первинна пам'ять води з'являється після однократної дії і представляє оборотну зміну її структури і відображення на поверхні клатратів нового електромагнітного малюнка. Довготривала пам'ять води - повне перетворення матриці структурних елементів в клатратах унаслідок тривалої інформаційної дії. Тобто щоб сформувати певну структуру води, необов'язково бути екстрасенсом: досить протягом певного часу передавати воді певну емоцію.

Активована вода подавляє в 10^3 р ріст бактерій,біологічних тканин.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Питання №22 (1)

Ковариантні, контравариантні тензори. Симетризація, антисиметризація тензора.

Чотиривимірним тензором (4-тензором) 2 рангу називається сукупність 16 величин A^{ik}, які при перетворенні координат перетворюються як добуток компонент двох 4-векторів (Аналогічним чином вводяться 4-тензори вищих рангів.

4-вектором (4-вимірним вектором) A^i називається сукупність чотирьох величин A^0, A^1, A^2, A^3, які при перетворенні 4-вимірної системи координат перетворюються як компоненти 4-радіус вектора x^i. Зв'язок A та A' задається перетворення ми Лоренца

Для зручності вводять 2 види компонент 4-векторів: A^i, A_i. При цьому

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3$$

Величини A^i – контравариантні

A_i – коваріантні.

Компоненти 4-тензора 2 рангу можуть бути представлені у трьох видах: як контравариантні A^{ik}, коваріантні A_{ik} і змішані A^i_k. Підняття (опускання) часового індекса (0) не змінює, а підняття (опускання) просторового індекса (1, 2, 3) змінює знак компоненти.

$$A_{00} = A^{00} \qquad A_{01} = -A^{01} \qquad A_{11} = A^{11}$$

$$A^0_0 = A^{00} \qquad A^0_1 = A^{01} \qquad A^0_1 = -A^{01}$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

№22 (2)

Тензор A^{ik} наз. симетричним, якщо $A^{ik} = A^{ki}$ і антисиметричним, якщо $A^{ik} = -A^{ki}$

У антисиметричного тензора всі діагональні компоненти (A^{00}, A^{11}, ...) дорівнюють 0, тому що $A^{00} = -A^{00}$. У симетричного A^{ik} змішані компоненти A^i_k і $A_k{}^i$ співпадають

Симетризація (антисиметризація) тензора - операція конструювання тензора того ж типу з певним видом симетрії: приклад: Симетризація $T_{ij} \to T_{(ij)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$, антисиметризація - антисиметричний $T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$

Операція симетризації:

$$A_{(m_1 \dots m_k) m_{k+1} \dots m_q}^{n_1 \dots n_p} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma(m_1 \dots m_k)} A_{\sigma(m_1) \dots \sigma(m_k) m_{k+1} \dots m_q}^{n_1 \dots n_p}$$

антисиметризація

$$A_{[m_1 \dots m_k] m_{k+1} \dots m_q}^{n_1 \dots n_p} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma(m_1 \dots m_k)} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} A_{\sigma(m_1) \dots \sigma(m_k) m_{k+1} \dots m_q}^{n_1 \dots n_p}$$

Приклади

Симетриз.: $A_{(klm)} = \frac{1}{3!}(A_{klm} + A_{lmk} + A_{mkl} + A_{kml} + A_{lkm} + A_{mlk})$

Антисим.: $A_{[klm]} = \frac{1}{3!}(A_{klm} + A_{lmk} + A_{mkl} - A_{kml} - A_{lkm} - A_{mlk})$

Властивості:

1 Якщо $T_{i_1 \dots i_n}$ симетричний по $i_1 \dots i_n$ то симетризація по цим індексам співпадає з T, антисиметризація дає нульовий тензор

2 Аналогічно, якщо T антисиметричний по певним індексам, антисиметризація співпадає з T, симетризація дає нульовий тензор.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

№23. Метричний тензор. Підіймання і опускання індексів за допомогою метричного тензора

Розглянемо квадрат елемента довжини в довільних криволінійних координатах:

$$ds^2 = d\vec{s}\cdot d\vec{s} = (\vec{e}_i\, dx^i)\cdot(\vec{e}_j\, dx^j) = (\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)\, dx^i dx^j$$

де $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$ – ковариантні бази

або $(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j) = g_{ij}$

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$$

Квадрат елемента довжини є білінійною формою диференціалів dx^i

Оскільки добуток g_{ij} на контраваріантний тензор $dx^i dx^j$ є скаляр, то g_{ij} – коваріантний тензор

g_{ij} – називається метричним тензором

g_{ij} – симетричний тензор, тобто $g_{ij} = g_{ji}$ бо

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j = g_{ij}\, dx^j dx^i = g_{ji}\, dx^j dx^i$$

Контраваріантним метричним тензором (g^{ik}) назив. тензор оберненій до g_{ik}: $g^{ik}g_{ke} = \delta^i_e = \begin{cases} 1, & i = l \\ 0, & i \neq l \end{cases}$

В галілеєвій системі відліку $ds^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

і метричний тензор має вигляд

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

За допомогою метричного тензора можна підіймати та опускати індекси 4-векторів. Покажемо це:

Розкладемо ковариантне представлення A_i деякої величини $\vec{A}$. Домножимо його на g^{ij}

$$g^{ij} A_i = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j \cdot A_i = \vec{e}^i \vec{e}^j \cdot A_i = \underbrace{\vec{e}^j \cdot \vec{A}}_{\text{контраваріантна проекція на } e^i} = A^j$$

$$g^{ij} A_i = A^j$$

Аналогічно можна показати $g_{ij} A^i = A_j$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

24. Коваріантне диференціювання. Символи Крістоффеля.

Ковариантный вектор: $A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k;$

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d\,\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l.$$

Таким образом, dA_i преобразуется вовсе не как вектор (то же относится, конечно, и к дифференциалам контравариантных векторов). Только в случае, если вторые производные $\partial^2 x`^k / \partial x^i \partial x^l = 0$, т.е. если $x`^k$ являются линейными функциями от x^k , формулы преобразования имеют вид

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k,$$

т. е. dA_i преобразуется как вектор.

Принцип эквивалентности требует, однако, чтобы надлежащим выбором системы координат можно было исключить гравитационное поле в данном бесконечно малом участке пространства, т. е. обратить в нем в нуль величины $\tilde{A}^i_{kl}$, играющие роль напряженностей этого поля.

Величины $\tilde{A}^i_{kl}$ называют коэффициентами связности или ***символами Кристоффеля***.

Мы будем ниже пользоваться также и величинами:

$$\Gamma_{i,\,kl} = g_{im}\Gamma^m_{kl}. \qquad \Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,\,kl}.$$

Пусть A_i и B^i — некоторый ковариантный и некоторый контравариантный векторы. Тогда из $\delta(A_i B^i) = 0$ имеем:

$B^i \delta A_i = -A_i \delta B^i = \Gamma^i_{kl} B^k A_i dx^l,$ или, меняя обозначение индексов,

$B^i \delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k B^i\, dx^l.$ Отсюда имеем ввиду произвольности B^i:

$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k\, dx^l,$ чем и определяется изменение ковариантного вектора при параллельном переносе.

Подставляя $\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l$ и $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l}\, dx^l$ в $DA^i = dA^i - \delta A^i$, имеем

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k\right) dx^l.$$

Для ковариантного вектора:

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k\right) dx^l.$$

Эти тензоры носят название **ковариантных производных** соответственно векторов A^i и A_i.

Мы будем обозначать их через $A^i_{;k}$ и $A_{i;k}$. Таким образом,

$DA^i = A^i{}_{;l}\, dx^l, \quad DA_i = A_{i;l}\, dx^l,$ а сами ковариантные производные:

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$A^i{}_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k,$$

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k.$$

В галилеевых координатах $\tilde{A}^i_{kl} = 0$ и ковариантные производные переходят в обычные.

Контравариантные производные:

$$A_i{}^{;\,k} = g^{kl} A_{i;\,l}, \quad A^{i;\,k} = g^{kl} A^i{}_{;\,l}.$$

Формулы преобразования от одной системы координат к другой для символов Кристоффеля можно получить, сравнивая законы преобразования обеих частей равенств, определяющих любую из ковариантных производных, и требуя, чтобы эти законы для обеих частей были одинаковы. Простое вычисление приводит к формуле:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma'^m_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}.$$

Из этой формулы видно, что величины $\tilde{A}^i_{kl}$ ведут себя как тензоры лишь по отношению к линейным преобразованиям координат.

Символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}, \qquad \Gamma_{i,\,kl} = \Gamma_{i,\,lk}$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

23. Закон перетворення для символів Крістоффеля. Властивості символів Крістоффеля.

$$\Gamma_{i,\,kl} = g_{im}\Gamma^{m}_{kl}. \qquad \Gamma^{i}_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,\,kl}.$$

Формулы преобразования от одной системы координат к другой для символов Кристоффеля можно получить, сравнивая законы преобразования обеих частей равенств, определяющих любую из ковариантных производных, и требуя, чтобы эти законы для обеих частей были одинаковы. Простое вычисление приводит к формуле:

$$\Gamma^{i}_{kl} = \Gamma'^{m}_{np}\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{m}}\frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{l}} + \frac{\partial^{2} x'^{m}}{\partial x^{k}\partial x^{l}}\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{m}}.$$

Из этой формулы видно, что величины $\tilde{A}^{i}_{kl}$ ведут себя как тензоры лишь по отношению к линейным преобразованиям координат.

Символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам:

$$\Gamma^{i}_{kl} = \Gamma^{i}_{lk} \qquad \Gamma_{i,\,kl} = \Gamma_{i,\,lk}$$

P.S.:больше не нашел.

25. Коваріантна похідна метричного тензора. Теорема Річчі.

$$g_{ik} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{k}} \gamma_{\alpha\beta}, \qquad \gamma_{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{g_{ik} g^{kl} = \delta^{l}_{i}}$$

Докажем, что ковариантная производная от метрического тензора g_{ik} равна нулю **(теорема РИЧЧИ).** Для этого заметим, что для вектора DA_i, как и для всякого вектора, должно иметь место соотношение:

$$DA_i = g_{ik} DA^k$$

С другой стороны, $A_i = g_{ik} A^k$, и потому

$$DA_i = D(g_{ik} A^k) = g_{ik} DA^k + A^k Dg_{ik}$$

Сравнивая с $DA_i = g_{ik} DA^k$, имеем в виду произвольности вектора A^i:

$$Dg_{ik} = 0$$

Поэтому и ковариантная производная $g_{ik;l} = 0$

Таким образом, при ковариантном (контравариантном) дифференцировании g_{ik} (g^{ik}) надо рассматривать как постоянные величины.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

26. Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором

Докажем, что ковариантная производная от метрического тензора g_{ik} равна нулю. Для этого заметим, что для вектора DA_i, как и для всякого вектора, должно иметь место соотношение:

$$DA_i = g_{ik} DA^k$$

С другой стороны, $A_i = g_{ik} A^k$, и потому

$$DA_i = D(g_{ik} A^k) = g_{ik} DA^k + A^k Dg_{ik}$$

Сравнивая с $DA_i = g_{ik} DA^k$, имеем в виду произвольности вектора A^i:

$$Dg_{ik} = 0$$

Поэтому и ковариантная производная $g_{ik;l} = 0$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании g_{ik} надо рассматривать как постоянные.

Равенством $g_{ik;l} = 0$ можно воспользоваться для того, чтобы выразить символы Кристоффеля Γ^i_{kl} через метрический тензор g_{ik}. Для этого напишем согласно общему определению ковариантной производной:

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl} = 0$$

Таким образом, производные от g_{ik} выражаются через символы Кристоффеля. Напишем эти производные, переставляя индексы i, k, l:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl}$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik}$$

$$-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \Gamma_{l,ki} + \Gamma_{k,li}$$

Взяв полусумму этих равенств, находим (помня, что $\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}$):

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^l}\right)$$

Отсюда имеем для символов $\Gamma^i_{kl} = g^{lm} G_{m,kl}$:

(1)
$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right)$$

Эта формулы и дают искомые выражения символов Кристоффеля через метрический тензор.

Выведем полезное для дальнейшего выражение для упрощенного символа Кристоффеля Γ^i_{kl}. Для этого определим дифференциал dg определителя g, составленного из компонент тензора g_{ik} : dg можно получить, взяв дифференциал от каждой компоненты тензора g_{ik} и умножив ее на свой коэффициент в определителе, т. е. на соответствующий минор. С другой стороны, компоненты тензора g^{ik}, обратного тензору g_{ik}, равны, как известно, минорам определителя из величин g_{ik}, деленным на этот определитель. Поэтому миноры определителя g равны gg^{ik}. Таким образом,

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

(2) $$dg = gg^{ik} dg_{ik} = -gg_{ik} dg^{ik}$$

(поскольку $g_{ik}g^{ik} = \delta^{i}_{i} = 4$, то $g^{ik}dg_{ik} = -g_{ik}dg^{ik}$).

Из (1) имеем:

$$\Gamma^{i}_{kl} = \frac{1}{2} g_{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^{m}} \right)$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

26. Одержання виразу для спрощених символів Крістоффеля.

Візьмемо вирази для символів Криштофеля через метричний тензор:

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^l}\right)$$ З урахуванням $$\Gamma^i_{kl} = g^{lm} G_{m,kl}$$:,

маємо:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right)$$

(1)

Выведем полезное для дальнейшего выражение для упрощенного символа Кристоффеля Γ^i_{kl}. Для этого определим дифференциал dg определителя g, составленного из компонент тензора g_{ik} : dg можно получить, взяв дифференциал от каждой компоненты тензора g_{ik} и умножив ее на свой коэффициент в определителе, т. е. на соответствующий минор. С другой стороны, компоненты тензора g^{ik}, обратного тензору g_{ik}, равны, как известно, минорам определителя из величин g_{ik}, деленным на этот определитель. Поэтому миноры определителя g равны gg^{ik}. Таким образом,

$$dg = gg^{ik} dg_{ik} = -gg_{ik} dg^{ik}$$

(поскольку $g_{ik}g^{ik} = \delta^i_i = 4$, то $g^{ik} dg_{ik} = -g_{ik} dg^{ik}$).

Из (1) имеем:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g_{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m}\right)$$

$$g_{ik} M^{lk} = \delta^l_i g$$

$$g = g_{ik} M^{ik}$$

$$g_{il} g^{kl} = \delta^l_i$$

$$M^{lk} = g g^{lk}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial g_{ij}} g_i - M^{i\sigma}\right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} M^{i\sigma} \delta^j_\sigma = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} M^{ij} = g g_{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

$$\Gamma^j_{ki} = \frac{1}{2} g^{ij}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{1}{2} g^{ij}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

$$\Gamma^j_{ki} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}$$

27. Тензор Рімана – Крістоффеля (тензор кривизни).

Повернемося знову до поняття паралельного перенесення вектора. Вважатимемо, що це перенесення не буде залежати від шляху для довільного вектора h_v. Це дозволяє “розмазати” h_v , перетворивши його у векторне поле за допомогою паралельного перенесення. Тоді зміна цього вектора при переході від точки P з координатами x_v до точки Q з координатами x_v+dx_v дорівнює лише зміні при паралельному перенесенні $dh_v=\delta h_v$ або детальніше

$$\frac{\partial h_\nu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda = \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} h_\alpha dx^\lambda \qquad (34)$$

Оскільки рівність (34) має існувати при будь-якому dx^λ, то виникає диференціальне р-ня для h_v

$$\frac{\partial h_\nu}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} h_\alpha \qquad (35)$$

разом з початковою умовою в точці P. Щоб вимога інтегрування виконувалась, рівняння (35) має допускати розв`язки для векторного поля h_v з довільними початковими значеннями. Тоді мішані другі похідні компонентів полів, утворених двома різними способами, мають збігатися. Таким чином, маємо

$$0 = \frac{\partial(\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} h_\alpha)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial(\Gamma^\alpha_{\nu\mu} h_\alpha)}{\partial x^\lambda} = \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} \right) h_\alpha + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\lambda} \quad (36)$$

Після виключення з (36) за допомогою (35) перших похідних векторного поля h_v , отримуємо

$$0 = \left(\frac{\partial \Gamma^\beta_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\beta_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\beta_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \Gamma^\beta_{\alpha\lambda} \right) h_\beta = R^\beta_{\nu\mu\lambda} h_\beta \quad (37)$$

Оскільки рівність (37) виконується при довільному h_β, має бути

$$R^\beta_{\nu\mu\lambda} = 0 \qquad (38)$$

у будь-якій системі відліку. Таким чином, умова інтегрованості симетричної афінної в`язі визначається тим, дорівнює нулю чи ні мішаний тензор четвертого рангу

$$R^i_{jkl} = \partial \Gamma^i_{jl} / \partial x^k - \partial \Gamma^i_{jk} / \partial x^l + \Gamma^i_{nk} \Gamma^n_{jl} - \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{jk} \qquad (39)$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

який називається тензором кривизни або тензором Рімана-Крістоффеля другого роду. Але більш цікавим для нас буде неінтегровний випадок, коли тензор R^{i}_{jkl} не перетворюється на нуль. Це реалізується у викривленому просторі - часі.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

28. Властивості тензора Рімана – Крістоффеля. Тотожність Б'янки.

Тензор кривизны Римана обладает следующими свойствами симметрии:

$$R(u,\ v) = -R(v,\ u);$$
$$\langle R(u,\ v)w,\ z\rangle = -\langle R(u,\ v)z,\ w\rangle;$$
$$R(u,\ v)w + R(v,\ w)u + R(w,\ u)v = 0.$$

Последнее тождество было открыто Риччи, хотя называется *первым тождеством Бьянки* или *алгебраическим тождеством Бьянки*.

Эти три тождества задают полный набор симметрий тензора кривизны, то есть для всякого тензора, удовлетворяющего этим соотношениям, можно найти риманово многообразие, кривизна которого описывается этим тензором. Простой комбинаторный подсчёт показывает, что тензор кривизны должен иметь $n^2(n^2 - 1) / 12$ независимых компонент.

Еще одно полезное соотношение следует из этих трех тождеств:

$$\langle R(u,\ v)w,\ z\rangle = \langle R(w,\ z)u,\ v\rangle.$$

Тождество Бьянки (ещё называется *вторым тождеством Бьянки* или *дифференциальным тождеством Бьянки*) привлекает ковариантные производные:

$$\nabla_u R(v,\ w) + \nabla_v R(w,\ u) + \nabla_w R(u,\ v) = 0.$$

В заданной системе координат в окрестности некоторой точки многообразия приведённые выше тождества в компонентах тензора кривизны могут быть записаны как:

$R_{abcd} = - R_{bacd} = - R_{abdc}$;
$R_{abcd} = R_{cdab}$;
$R_{a(bcd)} = 0$ (первое тождество Бьянки);
$R_{abcd} = R_{cdab}$ (следствие (1), (2) и (3));
$R_{ab(cd;e)} = 0$ (второе тождество Бьянки),

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

29. Тензор Річчі_Р-ня гр.поля у вакуумі.

Тензор Річчі отримаємо з тензора Рімана (кривини) $R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}.$

Г-це в язи, або символи Крістофеля - коефіцієнти розкладу коваріантної матриці координатних векторів $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ по базису $\nabla_{\partial_j}\partial_i = \Gamma^k_{ij}\partial_k$ Тензор кривини антисиметричний, для симетрії перейдемо від змішаних компонент Rlkim до коваріантних:

$$R_{iklm} = g_{in}R^n{}_{klm}.$$

$$\Gamma^i_{kl} = g^{ij}\Gamma_{j,kl} = \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}\right)$$

$$R_{ijkl} = g_{i\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta j}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{\beta l}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^\beta}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x^l}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\beta k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\beta}\right)\right] + \Gamma^\alpha_{nk}\Gamma^n_{jl} - \Gamma^\alpha_{nl}\Gamma^n_{jl}\right\} =$$

$$= g^{ij}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^h}\left(\frac{\partial g_{\beta j}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{\beta l}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^\beta}\right) + \frac{g^{\alpha\beta}}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\beta j}}{\partial x^\beta \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{\beta l}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^\beta}\right) - \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^l}\left(\frac{\partial g_{\beta j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\beta l}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^\beta}\right) - \\ -\frac{g^{\alpha\beta}}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\beta j}}{\partial x^l \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{\beta k}}{\partial x^l \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^l \partial x^\beta}\right) + \Gamma^\alpha_{nk}\Gamma^n_{jl} - \Gamma^\alpha_{nl}\Gamma^n_{jl}\end{array}\right\} =$$

$$= g_{i\alpha}\left\{\left(-\Gamma^\alpha_{\sigma k}g^{\sigma j} - \Gamma^\beta_{\sigma k}g^{\alpha j}\right)\Gamma_{\beta,jl} + \left(\Gamma^\alpha_{\sigma l}g^{\sigma\beta} + \Gamma^\beta_{\sigma l}g^{\alpha\sigma}\right)\Gamma_{\beta,jk} + \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\frac{\partial^2 g_{ji}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{\beta k}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{\beta j}}{\partial x^l \partial x^n} - \\ -\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^l \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^\alpha_{nk}\Gamma^n_{jl} - \Gamma^\alpha_{nl}\Gamma^n_{jl}\end{array}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k \partial x^n} - \frac{\partial^2 g_j}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^l \partial x^i}\right) + g_{i\alpha}\left(\begin{array}{l}-\Gamma^\alpha_{\sigma k}\Gamma^\sigma_{jl} - \Gamma^\beta_{\sigma k}\Gamma^\beta_{jl}g^{\alpha j} + \Gamma^\alpha_{\sigma k}\Gamma^\sigma_{jl} + \Gamma^\beta_{\sigma l}\Gamma^\beta_{jk}g^{\alpha j} + \Gamma^\alpha_{\sigma k}\Gamma^\sigma_{jl} - \\ -\Gamma^\alpha_{\sigma l}\Gamma^\sigma_{jk}\end{array}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k \partial x^n} - \frac{\partial^2 g_j}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^l \partial x^i}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha_{jk}\Gamma^\beta_{il} - \Gamma^\alpha_{jl}\Gamma^\beta_{ik}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k \partial x^n} - \frac{\partial^2 g_j}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^l \partial x^i}\right) + g_{\alpha\beta}\delta^\beta_j\delta^j_\beta\delta^i_j\delta^j_i\left(\Gamma^\alpha_{jk}\Gamma^\beta_{il} - \Gamma^\alpha_{jl}\Gamma^\beta_{ik}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k \partial x^n} - \frac{\partial^2 g_j}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^l \partial x^i}\right) + g_{i\alpha}\left(\Gamma^\alpha_{jk}\Gamma^\beta_{il} - \Gamma^\alpha_{jl}\Gamma^\beta_{ik}\right)$$

після цих викладок, очевидні такі властивості:

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml},$$

$$R_{iklm} = R_{lmik},$$

та тотожність Бянки $R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0$

Из тензора кривизны можно путем упрощения построить тензор второго ранга. Такое упрощение можно произвести только одним способом: упрощение тензора Riklm по индексам ink или I и m дает нуль в силу антисимметричности по ним, а упрощение по любым другим парам дает, с точностью до знака, одинаковый результат. Мы определим тензор Rik (его называют тензором

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Риччі) $R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = R^{l}{}_{ilk}.$

Процедура згортки

$R_{ij} = R^{k}_{ijk} = R^{1}_{ijk} + \ldots$

$$R^{l}_{ijk}(x) = \frac{\partial x^{l}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{j}} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{k}} R'^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}(x')$$

$$R_{ik} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{k}} & \frac{\partial}{\partial x^{l}} \\ \Gamma^{\alpha}_{ik} & \Gamma^{\alpha}_{i\alpha} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{\beta k} & \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} \\ \Gamma^{\beta}_{ik} & \Gamma^{\beta}_{i\alpha} \end{vmatrix}$$

Этот тензор, очевидно, симметричен:

$$R_{ik} = R_{ki}.$$

Наконец, упрощая R_{ik}, получим инвариант

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm},$$

спрощені символи

$$g_{ik} M^{lk} = \delta^{l}_{i} g$$

$$g = g_{ik} M^{ik}$$

$$g_{il} g^{kl} = \delta^{l}_{i}$$

Крістофеля: $M^{lk} = g g^{lk}$

$$\frac{\partial g}{\partial x^{k}} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}} \left(\frac{\partial}{\partial g_{ij}} g_{i} - M^{i\sigma} \right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}} M^{i\sigma} \delta^{j}_{\sigma} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}} M^{ij} = g g_{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}}$$

$$\Gamma^{j}_{ki} = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^{j}} \right) = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{i}} + \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^{n}} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^{j}} \right) = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}}$$

$$\Gamma^{j}_{ki} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^{k}} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^{k}}$$

тензор Річчі:

$R_{ik} = \frac{\partial^{2} \ln \sqrt{-g}}{\partial x^{i} \partial x^{k}} \frac{\Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta k} \Gamma^{\beta}_{i\alpha} - \Gamma^{\beta}_{ik} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^{\phi}} = R_{ki}$ - рівняння поля в вакуумі. Якщо цей тензор симетричний, то він має 10 диф р-нь за відсутності матерії у 4-вим.просторі Rik=0 р-ня частинки у гравітаційному полі у вільному просторі.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

30. Движение частицы в гравитационном поле

Движение свободной материальной частицы в специальной теории относительности определяется принципом наименьшего действия:

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0, \qquad (87.1)$$

согласно которому частица движется так, что ее мировая линия является экстремальной между двумя заданными мировыми точками, т.е. в данном случае прямой.

Движение частицы в гравитационном поле должно определяться принципом наименьшего действия в той же форме (87.1), так как гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики пространства-времени, проявляющимся только в изменении выражения *ds* через dx^i. Таким образом, в гравитационном поле частица движется так, что ее мировая точка перемещается по экстремальной, или, как говорят, по *геодезической* линии в 4-пространстве $x^0, x^1 x^2, x^3$; поскольку, однако, при наличии гравитационного поля пространство-время негалилеево, то эта линия не «прямая», а реальное пространственное движение частицы—не равномерно и не прямолинейно.

(Геодезические, вдоль которых ds=0, называют нулевыми или изотропными.)

Найдем уравнения движения частицы в гравитационном поле путем соответствующего обобщения дифференциальных уравнений свободного движения частицы в специальной теории относительности. Эти уравнения гласят du^i/ds — 0, или иначе $du^i = 0$, где $u^i = dxi/ds$ есть 4-скорость. Очевидно, что в криволинейных координатах это уравнение обобщается в

$$Du^i = 0. \qquad (87.2)$$

Из выражения $DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k\right) dx^l.$ для ковариантного дифференциала вектора имеем

$$du^i + \Gamma^i_{kl} u^k dx^l = 0.$$

Разделив это уравнение на *ds*, находим

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0. \qquad (87.3)$$

Это и есть **искомые уравнения движения**. Мы видим, что движение частицы в гравитационном поле определяется величинами $\tilde{A}^{\,i}_{kl}$ ($\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right)$). Производная d^2x^i/ds^2 есть 4-ускорение частицы. Поэтому мы можем назвать величину — $m\tilde{A}^i_{kl} u^k u^l$ «4-силой», действующей на частицу в гравитационном поле. Тензор g_{ik}. играет при этом роль «потенциалов» гравитационного поля его производные определяют «напряженность» поля $\tilde{A}^{\,i}_{kl}$.

Всегда можно обратить все $\tilde{A}^{\,i}_{kl}$ в нуль в любой заданной точке пространства-времени. Выбор такой локально-инерциальной системы отсчета означает исключение гравитационного поля в данном бесконечно малом

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

элементе пространства-времени.

Вид уравнения движения через ковариантные компоненты 4-ускорения. Из условия $Du_i=0$ находим

$$\frac{du_i}{ds} - \Gamma_{k,il}u^k u^l = 0.$$

При подстановке сюда $\Gamma_{k,il}$ ($\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)$) находим:

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}u^k u^l = 0. \qquad (87.3\,a)$$

Четырехмерный импульс частицы в гравитационном поле:

$$p^i = mcu^i, \qquad p_i p^i = m^2c^2.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в гравитационном поле:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0. \qquad (87.6)$$

Для распространения светового сигнала уравнение геодезической линии в форме (87.3) неприменимо, так как вдоль мировой линии распространения светового луча интервал $ds = 0$ и все члены в уравнении (87.3) обращаются в бесконечность. Для придания уравнениям движения в этом случае нужного вида воспользуемся тем, что направление распространения луча света в геометрической оптике определяется волновым вектором, касательным к лучу. Мы можем поэтому написать четырехмерный волновой вектор в виде $k^i = dx^i/d\lambda$, где λ есть некоторый параметр, меняющийся вдоль луча. В специальной теории относительности при распространении света в пустоте волновой вектор не меняется вдоль луча, т. е. $dk^i = 0$. В гравитационном поле это уравнение переходит в $Dk^i = 0$, или

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl}k^k k^l = 0$$

Квадрат волнового 4-вектора равен нулю: $k_i k^i = 0.$

Подставляя сюда $\partial\psi/\partial x^i$ вместо k_i (ψ - эйконал), находим уравнение эйконала в гравитационном поле:

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0. \qquad (87.9)$$

В нерелятивистской механике движение частицы в гравитационном поле определяется функцией Лагранжа:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi,$$

прибавив постоянную $-mc^2$. Это надо сделать для того, чтобы нерелятивистская функция Лагранжа в отсутствие поля $L = -mc^2 + mv^2/2$ была в точности той, в которую переходит соответствующая релятивистская функция $L = -mc^2(1-v^2/c^2)^{0.5}$ в пределе при $v/c \to 0$.

Нерелятивистское действие S для частицы в гравитационном поле имеет вид:

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$S = \int L\,dt = -mc \int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right) dt. \qquad ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right) dt.$$

$$ds^2 = (c^2 + 2\varphi)dt^2 - d\mathbf{r}^2, \qquad (87.11) \qquad \mathbf{v}\,dt = d\mathbf{r}.$$

Таким образом, компонента g_{00} метрического тензора равна $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$.

Что касается остальных компонент, то из (87.11) следовало бы, что $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\alpha} = 0$. В действительности, однако, поправки к ним, вообще говоря, того же порядка величины, что и поправка в g_{00}. Невозможность определения этих поправок приведенным выше способом связана с тем, что поправка в $g_{\alpha\beta}$, имеющая тот же порядок величины, что и поправка в g_{00}, привела бы в функции Лагранжа к членам более высокого порядка малости (вследствие того, что в выражении для ds^2 компоненты $g_{\alpha\beta}$ не умножаются на c^2, как это имеет место для g_{00}).

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Р-ня гравітаційного поля за наявності матерії

Виводиться з варіаційного принципу, який був вперше запропонований Гільбертом

S_g - дія грав. поля, S_m - дія матеріальних об'єкт

$A d^4x = \int A' d^4x'$ за вимогою загальної інваріан

$d^4x = J d^4x'$; $J = \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \right|$ визначник матриці якобіан

$A J d^4x' = \int A' d^4x' \to A' = JA$, A - скалярна густина

Приклади A: J - н перетворення метрич. тензора

$g'_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} g_{lm} \to g' = \left| \frac{\partial x^c}{\partial x'^i} \right| g = J^2 g$

$\sqrt{-g'} = J\sqrt{-g} = JA$

скалярна густина, яка входить до дії S_g грав. поля повинна залежати від компл. метр. тенз. g_{ik}, g^{ik}, R_{ik} і їх похідних

Найбільш вдалим для скал. густини є вираз $\boxed{R = k\sqrt{-g} \; ; \quad R = g^{ik} R_{ik}}$

Доведення

$S_g = \int R\sqrt{-g}\, d^4x = \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g}\, d^4x$

Інтегрування за ∞ об'єму простору - часу, що охоплюється між двома гіперповерхнями $t = t_1$; $t = t_2$ відрізняється коваріантно від S_g:

$\delta S_g = \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g}\, d^4x = \int [R_{ik}\sqrt{-g}\, \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta\sqrt{-g} + g^{ik}\sqrt{-g}\, \delta R_{ik}] J d^4x$ =

Окремо порахуємо коваріації:

$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = [\frac{\partial}{\partial g_{ik}} \ldots$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$\delta R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^\alpha_{i\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{ik} + \Gamma^\beta_{i\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\beta k} + \Gamma^\alpha_{\beta k}\delta\Gamma^\beta_{i\alpha} -$$
$$- \Gamma^\beta_{ik}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\delta\Gamma^\beta_{i\alpha} =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^\alpha_{i\alpha} - \Gamma^\beta_{ik}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{ik}\delta\Gamma^\alpha_{i\gamma}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{ik} -\right.$$
$$\left. - \Gamma^\beta_{i\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\beta k} - \Gamma^\beta_{k\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{i\beta}\right) + \left(\Gamma^\beta_{\alpha k} - \Gamma^\beta_{\alpha k}\right)\delta\Gamma^\alpha_{i\beta} =$$
$$= (\delta\Gamma^\alpha_{i\alpha})_{;k} - (\delta\Gamma^\alpha_{ik})_{;\alpha}$$

р-ня Палатіні

Доведемо, що ці варіації є тензорами.

$\Gamma^i_{ke} A_i dx^e$ – зміна вектора A_i при // перенесенні з т. p_1 в т. p_2.

$\delta\Gamma^i_{ke} A_i dx^e \in$ різниця 2-ох векторів, які одержані при 2-ох // перенес. з вузлами Γ^i_{ke}, $\Gamma^i_{ke} + \delta\Gamma^i_{ke}$

$$= \int (R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d^4x + \int g^{ik}\sqrt{-g}\left[(\delta\Gamma^\alpha_{k\alpha})_{;k} - (\delta\Gamma^\alpha_{ik})_{;\alpha}\right]d^4x$$

Інтегруємо по частинах, щодо коваріантних

$$(g^{ik}\sqrt{-g})_{;\alpha} = g^{ik}_{\parallel\alpha}\sqrt{-g} + g^{ik}(\sqrt{-g})_{;\alpha} = g^{ik}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} - \sqrt{-g}\Gamma^\beta_{\beta\alpha}\right.$$

$\Gamma^\beta_{\beta\alpha} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^\alpha}$ теор. Річчі

$$= g^{ik}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2g}\sqrt{-g}\frac{\partial g}{\partial x^\alpha}\right) = 0$$

$$\delta S_g = \int (R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R)\,\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d^4x$$

$$-\delta S_m = \int T_{ik}\,\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d^4x \quad \Big| \times \varkappa$$

T_{ik} – тензор енергії-імпульсу

щоб розмірності була однакова

$$\Big| +$$

$$\delta(S_g + \varkappa S_m) = 0$$

р-ня грав. поля

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik}$$

р-ня гр. поля для наявності матерії

$\hookrightarrow$ тензор Ейнштейна

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$\varkappa$ - визнач. при граничному переході до сталої Ньютона

$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = -\varkappa T_i^k$

Виконуємо згортку (сліди тензорів)

$R_k^k - \frac{1}{2}\delta_k^k R = -\varkappa T_k^k$

$R - 2R = -\varkappa T$

$R = \varkappa T$.

$R_{ik} = -\varkappa\left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right)$ означення тензора матерії, або

означ. тенз. Річчі через тенз. матерії.

$\operatorname{div} \bar{E} = 4\pi\rho$

$\Delta\varphi = -4\pi\rho$ - скрізь, де $\operatorname{div} \neq 0$ $\exists$ заряд;

→ заряд не рухоме $\operatorname{div} \neq 0$, він і є $\operatorname{div} \neq 0$,

→ матерія <u>не рухоме</u> відр. від ϕ тензор, вона і є цим ϕ тензором.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Отримання рівнянь руху в гравітації

ні із рівнянь гравітаційного поля

ізьмемо тензорні рівняння гравітаційного п
- наявності матерії

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\kappa T_{ik} \qquad (1),$$

Візьмемо коваріантну похідну ; k від цієї
ності. Тотожність Бянкі має вигляд

$$R_{ijkl;m} + R_{ijmk;l} + R_{ij;lm;k} = 0 \qquad (2),$$

цієї тотожності випливає що ця похідна
вне 0. Якщо домножити (2) на $g^{il} \cdot g^{jk}$
використати наступні властивості симетрії

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \quad R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk}$$

можна отримати вираз

$$g^{jk} R_{jk;m} - g^{jk} R_{jm;k} - g^{il} R_{im;l} = R_{;m} - 2R^{k}_{m;k}$$

ставленого це в іншій вигляді маємо.

$$\left(\delta^{k}_{m} R\right)_{;k} = \left(g_{im} R^{ik} \cdot \frac{1}{2} g_{im} g^{ik} R\right)_{;k} = \left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R\right)$$

о : довершить виведення

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Наша наступна необхідну ~~~~ умову інтегровності
вимогу поля можна записати у вигляді
вигляді нулю коваріантної частини рівняння поля
зауважимо що умову скористатись наступним
вказанням

$$\frac{g}{x^k} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} (g_{ik} M^{ik}) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \delta^i_j = g g^{ij}$$

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

Тоді отримаємо

$$T^{ik}_{;k} \equiv \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^k_{mk} T^{im} + \Gamma^i_{ek} T^{ek} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\, T^{ik})$$

$$\Gamma^i_{ik} T^{ek} = 0 \qquad (5),$$

Розглянемо суцільне макроскопічне тіло,

вираз для тензора енергії - імпульсу
матеріальної у вигляді

$$T^{ik} = \mu c^2 u^i u^k = \mu c^2 \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{dx^k}{ds} \qquad (6),$$

μ - густина маси тіла (сума мас
всіх частинок в об'ємі).

Підставивши вираз (6) у (5) домноживши
$dV = dx^1 dx^2 dx^3$ та проінтегрувавши за об'ємом

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

...шові яка тензор T^{ik} зтінка отримаємо:

$$\int \mu c u^0 u^i \sqrt{-g}\, dV + \int \Gamma^i_{lk} \mu c^2 u^l u^k \sqrt{-g}\, dV = 0 \quad (7$$

...ачення інтегралів у (7) знаходимо за допо...

...ння неперервності $\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,\mu c u^k) = 0$ (...

...ерності (8) за тіло та обласно на цені...

$\mu = 0$ отримаємо $\frac{d}{dt}\int \mu u^0 \sqrt{-g}\, dV = 0$

...то інтеграл $\int \mu u^0 \sqrt{-g}\, dV = const.$

...стуючись цим фактом, а також зам...

...на $u^0 \frac{ds}{c}$, для випадку руху 1 матері...

...и співвідношення (7) переходить в рівн...

$$\ddot{} + \Gamma^i_{lk} u^l u^k = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{lk} \frac{dx^l}{ds} \cdot \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad ($$

...вчення рівняння (9) беруть в тій то...

...кій розглядається частинка.

...ня (9) - це інша форма рівняння геодезично...

...ї.

...ження руху матеріальної точки збігається ...

...ібними геодезичної лінії

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

33. Граничний перехід до рівняння Ньютона

Граничний перехід до рівняння Ньютона з релятивістьких рівнянь Ейнштейна обумовлене тим, що необхідно визначити знак та величину сталої ***k***

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -kT_{ik}$$

В першому наближенні ми мали б отримати:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{i}}} \quad \textbf{(1)}$$

та рівняння Пуассона

$$\Delta \Phi = 4\pi \mathrm{G}\mu$$

Розглядаємо випадок слабких полів, коли геометрія простору-часу мало відрізняється від псевдоевклідової, тобто метричний тензоро можна записати у вигляді

$$g_{ik} = \gamma_{ik} + h_{ik}$$

члени h_{ik} - малі величини, які характеризують відхилення метрики простору-часу від псевдоевклідової

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Запишемо рівняння геодезичної лінії, яке у загальному випадку виглядає

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kl}} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0$$

В запропонованому наближенні метрика буде рівною

$$ds^2 \approx (-1 + h_{44}) c^2 dt^2$$

Будемо утримувати члени, що є лінійними по відношенню до малих доданків h_{ik}, та до їх похідних, тоді отримаємо

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -c^2 \Gamma^{\mathrm{i}}_{44}, \qquad i = 1 \ldots 3$$

$$x^4 = ct,$$

всіма іншими членами ми нехтуємо
випишемо структуру членів

$$\Gamma^{\sigma}_{44} = \frac{1}{2} \mathrm{g}^{\sigma\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha 4}}{\partial x^4} + \frac{\partial g_{\alpha 4}}{\partial x^4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x^{\alpha}} \right) = \mathrm{g}^{\sigma\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha 4}}{\partial x^4} - 0.5 \frac{\partial g_{44}}{\partial x^{\alpha}} \right) = 0.5 \frac{\partial g_{44}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{1}{c} \frac{\partial g_{\sigma 4}}{\partial t}, \sigma = 1,2,3$$

У випадку статичного поля компоненти метричного тензора є функціями координат і не залежать від часу. Тому тут другий член відсутній, отже

$$\Gamma^{\sigma}_{44} = 0.5 \frac{\partial g_{44}}{\partial x^{\sigma}}, \sigma = 1,2,3$$

Зрозуміло, що рівняння набуде вигляду **(1)**, за умови, що

$$\Phi = -\frac{1}{2} c^2 (\mathrm{g}^{44} + 1)$$

Доведемо тепер, що скалярний потенціал Ф задовольняє рівняння Пуассона для цього знайдемо компонену 44 $R_{ik} = -k(T_{ik} - g_{ik} T/2)$, величина

$\mathrm{T}_{\mathrm{ik}} = \mu c^2 u^i u^k$, u-компоненти швидкості

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Нехтуючи величинами порядку v/c, жожна обрати всі компоненти T_{ik}=0, крім 44, це означає, що $T_{44}=\mu c^2$, а T= - μc^2, тоді

$$R_{44} = -0.5k\mu c^2$$

Загальна формула для компонентів тензора Річчі виглядає як

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}$$

Якщо врахувати, що ми нехтуємо добутками та похідними за часом, то отримаємо

$$R_{44} = -\frac{\partial \Gamma^\sigma_{44}}{\partial x^\alpha}$$

$$R_{44} = 0.5\sum_\sigma \frac{\partial^2 g_{44}}{(\partial x^\sigma)^2} = 0.5\Delta g_{44} = -\frac{1}{c^2}\Delta\Phi ,$$

Тоді отримаємо

$$\Delta\Phi = 0.5k\mu c^2$$

Порівнюючи можна зробити висновок, що

$$k = -\frac{8\pi G}{c^4}$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

8. ЦЕНТРАЛЬНО-СИМЕТРИЧНЕ ГРАВІТАЦІЙНЕ ПОЛЕ

Розглянемо зовнішній розв'язок рівнянь Ейнштейна $R_{ik} = 0$ для гравітаційного поля, яке характеризується центральною симетрією. Таке поле може створюватися будь-яким центрально-симетричним розподілом речовини; при цьому центрально-симетричним має також бути і рух речовини, тобто швидкість у кожній точці має бути направлена за радіусом. Центральна симетрія поля означає, що метрика простору-часу має бути однаковою в усіх точках, які розташовані на однаковій відстані від центра, тобто метричний тензор g_{ik} має бути сферично-симетричним. Беручи до уваги ці вимоги, вибираємо систему координат таким чином, щоб на великій відстані від центра тяжіння мали місце рівності

$$x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi,\ x^4 = ct\,, \tag{85}$$

де r, φ, θ – звичайні сферичні координати. Просторово-часовий інтервал на достатньо великих відстанях від гравітуючої матерії записується у формі

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta (d\varphi)^2 - c^2 (dt)^2\,, \tag{86}$$

а траєкторіями частинки на далеких відстанях є прямі лінії, де $R^i_{jkl} = 0$. У присутності ж сферично-симетричного стаціонарного гравітаційного поля для цього інтервалу можна вибрати вираз

$$ds^2 = f_1(r)(dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta (d\varphi)^2 - f_2(r) c^2 (dt)^2\,, \tag{87}$$

де $f_1(r), f_2(r)$ – функції, які підлягають визначенню. Члени, які утворюють перехресні добутки $dr d\theta$, $d\varphi d\theta$ тощо, не враховуються в (87), оскільки через сферичну симетрію ds^2 не залежатиме від знаків $d\theta$ та $d\varphi$. З подібних же міркувань відкидаються й перехресні добутки, які містять dt (статичне гравітаційне поле не залежатиме від напрямку часу).

Зручно в подальших обчисленнях функції $f_1(r), f_2(r)$ вибрати у вигляді

$$f_1(r) = \exp(\lambda),\ f_2(r) = \exp(\mu)\,, \tag{88}$$

де нові функції $\lambda(r)$ і $\mu(r)$ при $r \to \infty$ мають прямувати до нуля. Перепишемо форму (87) у нових позначеннях (88) та з урахуванням (85) таким чином:

$$ds^2 = \exp(\lambda)\left(dx^1\right)^2 + r^2\left(dx^2\right)^2 + r^2 \sin^2\theta \left(dx^3\right)^2 - \exp(\mu)\left(dx^4\right)^2\,, \tag{89}$$

тобто метричні коефіцієнти g_{ik} набувають значень:

$$g_{11} = \exp(\lambda),\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = r^2 \sin^2\theta,\ g_{44} = -\exp(\mu),\ g_{ik} = 0,\ i \neq k\,. \tag{90}$$

Визначник g квадратичної форми (89) представлено у вигляді добутку

$$g = g_{11} g_{22} g_{33} g_{44} = -\exp(\lambda + \mu) r^4 \sin^2\theta\,, \tag{91}$$

а контраваріантний тензор g^{ik} задається матрицею

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$\left(g^{ik}\right)=\begin{pmatrix}\exp(-\lambda) & 0 & 0 & 0\\ 0 & r^{-2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\exp(-\mu)\end{pmatrix}. \qquad (92)$$

За допомогою формули (26)* будуємо тепер символи Крістоффеля Γ^i_{kl}, серед яких залишаються ненульовими лише наступні дев'ять:

$$\Gamma^1_{11}=2^{-1}\lambda',\ \Gamma^2_{12}=r^{-1},\ \Gamma^3_{13}=r^{-1},$$
$$\Gamma^4_{14}=2^{-1}\mu',\ \Gamma^1_{22}=-r\exp(-\lambda),\ \Gamma^3_{23}=\operatorname{ctg}\theta, \qquad (93)$$
$$\Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta\exp(-\lambda),\ \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,\ \Gamma^1_{44}=2^{-1}\mu'\exp(\mu-\lambda),$$

де λ',μ' – похідні за r. Підставляємо (91) та (93) у рівняння гравітації $R_{ik}=0$, використовуючи явний вираз (44)** для тензора Річчі, тобто отримуємо систему із трьох диференціальних рівнянь для знаходження функцій λ та μ

$$\frac{\mu''}{2}-\frac{\lambda'\mu'}{4}+\frac{\mu'^2}{4}-\frac{\lambda'}{r}=0,$$
$$\exp(-\lambda)\left[1+\frac{r}{2}(\mu'-\lambda')\right]-1=0, \qquad (94)$$
$$-\frac{\mu''}{2}+\frac{\lambda'\mu'}{4}-\frac{\mu'^2}{4}-\frac{\mu'}{r}=0.$$

Із першого та третього рівнянь системи (94) отримуємо $\lambda+\mu=C_1$, а з граничних умов на нескінченності для функцій λ та μ знаходимо $C_1=0$. Друге рівняння системи (94) тепер набуває вигляду

$$\exp(-\lambda)(1-\lambda' r)=1. \qquad (95)$$

Рівняння (95) легко інтегрується, і отримуємо

$$\exp(-\lambda)=\exp(\mu)=1+\frac{C_2}{r}. \qquad (96)$$

Сталу інтегрування C_2 шукаємо на основі вимоги, щоб на великих відстанях, де гравітаційне поле послаблюється, мав місце закон Ньютона, а саме, як випливає із (79)***, повинно бути

$$g_{44}=-1-\frac{2\Phi}{c^2}, \qquad (97)$$

де потенціал Φ дорівнює ньютонівському виразу $\Phi=-Gm/r$, в якому m – повна маса тіла, яка є джерелом гравітаційного поля. Оскільки, як видно із (89), $g_{44}=-\exp(\mu)$, то порівнюючи (96) та (97), отримуємо

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$C_2 = \frac{2Gm}{c^2}. \tag{98}$$

Ця величина, що має розмірність довжини, називається гравітаційним радіусом тіла r_g:

$$r_g = \frac{2Gm}{c^2}. \tag{99}$$

Таким чином, з урахуванням (96) – (99), просторово-часову метрику (89) запишемо у вигляді

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} + r^2\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right) - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2. \tag{100}$$

Цей розв'язок рівнянь Ейнштейна знайдений Шварцшільдом у 1916 р. Він є єдиним стаціонарним розв'язком гравітаційних рівнянь $R_{ik}=0$, який приводить до плоскої псевдоевклідової метрики (86) на нескінченності.

✳ $$\Gamma^i_{kl} = g^{ij}\Gamma_{j,kl} = \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}\right). \tag{26}$$

✳✳ $$R_{ik} = \frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{ik}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta k}\Gamma^\beta_{i\alpha} - \Gamma^\beta_{ik}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\beta}. \tag{44}$$

✳✳✳ $$\Phi = -\frac{1}{2}c^2\left(g_{44}+1\right). \tag{79}$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

35. Гравітаційний колапс сферичного тіла

Рівність нулю g_{00} та нескінченності g_{11} в шварцшильдовій метриці при $r = r_g$ не стверджує про неможливість існування тіл з радіусом меньшим за гравітаційний, а вказує тільки на неможливість здійснення при $r \prec r_g$ жорсткої системи відліку.

Перетворення координат:

$$c\tau = \pm ct \pm \int \frac{f(r)dr}{1-\frac{r_g}{r}},\ R = \pm ct + \int \frac{dr}{(1-\frac{r_g}{r})f(r)}$$

Елемент інтервала:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{[\frac{3}{2r_g}(R-c\tau)]^{2/3}} - [\frac{3}{2}(R-c\tau)]^{4/3} r_g^{2/3}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Поширення радіальних світлових сигналів ($ds^2 = 0$) дає для похідної $d\tau/dR$ вздовж променя:

$$c\frac{d\tau}{dR} = \pm\sqrt{\frac{r_g}{r}}$$

два знаки відповідають двум межам світлового «конуса» з вершиною в заданій світовій точці. $r \succ r_g$ наклон цих меж $|c\,d\tau/dR| \prec 1$ - пряма $r = const$ ($c\,d\tau/dR = 1$) попадає в конус. $r \prec r_g$ має $|c\,d\tau/dR| \succ 1$ - пряма $r = const$ (світова лінія нерухомої частинки) зовні конуса. Через те, щоніякі причинно-наслідкові події не можуть лежати на світовій лінії зовні конуса, то в області $r \prec r_g$ ніякі частки не можуть бути нерухомими, всі взаємодії та сигнали поширюються тут у напрямку до центру та досягають його за кінцевий проміжок τ. Аналогічно для перетворення з нижніми знаками отримаємо систему, що розщиряється з неможливостю спокою.

Для тіла достатньо великої маси рівноважного стану не існує – воно необмежено стискається (гравітаційний колапс). В незв'язаній з тілом галілеєвій на нескінченності системі відліку радіус тіла не може бути меньшим за r_g: з точки зору стороннього спостерігача $\lim_{t\to\infty} r = r_g$.

Залежність радіуса тіла від часу тотожня розгляду вільного падіння частки у поле маси m. Якщо початкові умови r_0, t_0 та нульова швидкість, то в час t буде досягнута відстань r:

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$$c(t-t_0)=\sqrt{1-\frac{r_g}{r_0}}\int_r^{r_0}\frac{dr}{(1-\frac{r_g}{r})\sqrt{\frac{r_g}{r}-\frac{r_g}{r_0}}}$$

Інтеграл розбіжний при $r \to r_g$. Маємо асимптотичний закон наближення:

$$r-r_g=conste^{-ct/r_g}$$

Кінцева частина наближення колапсуючого тіла до гравітаційного радіуса проходить з дуже малим характерним часом r_g/c.

Незважаючи на те, що швидкість спостерігаємого зовні стискання асимптотично прямує до нуля, швидкість падіння часток у власному часі прямує до швидкості світла:

$$v^2=(\frac{\sqrt{-g_{11}}dr}{\sqrt{g_{00}}dt})^2$$

Досягнув (за власним часом) гравітаційного радіуса тіло буде далі стискатися та досягне центра за скінченний час. Процес стискання тіла під шварцшильдовою сферою не спостерігаєм з зовнішної системи відліку через те, що момент проходження поверхні сфери відповідає часу $t \to \infty$ - процес колапса в шварцшильдовій сфері проходить «за часовою нескінченністю» віддаленого спостерігача. Частки можуть пересікати цю поверхню тільки в одному напрямку – горизонт подій.

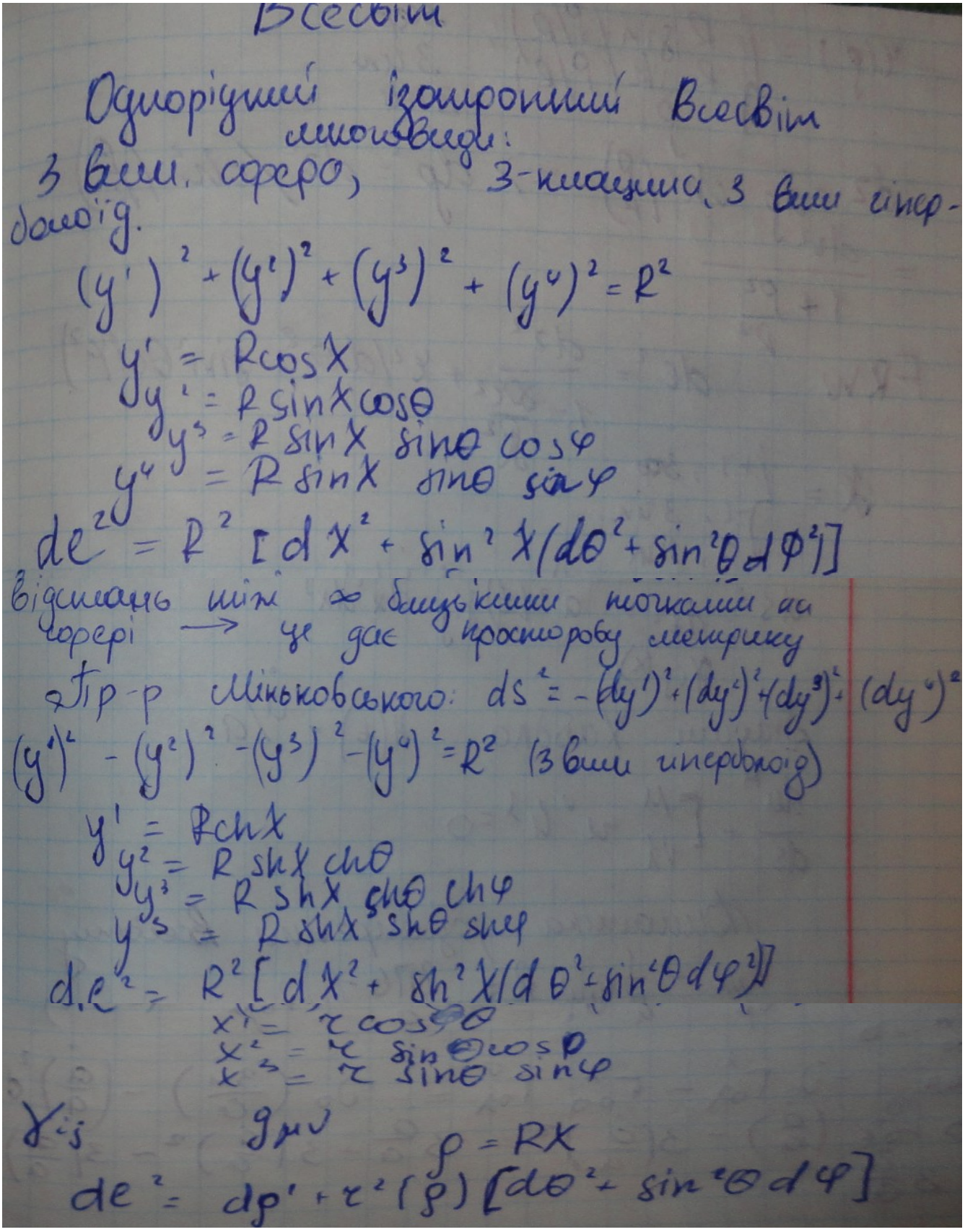
Інтервали власного часу на поверхні тіла скорочені $\sqrt{g_{00}}=\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}$. Відповідно процеси на тілі по відношенню до стороннього спостерігача «застигають». Частота спектральної лінії , що випромінюється на тілі та сприймається спостерігачем, зменьшується не тільки завдяки ефекту червоного гравітаційного зсуву, а й ефекту Доплера при наближенні $r \to r_g$:

$$\omega=const(1-\frac{r_g}{r})$$

З точки зору віддаленого спостерігача гравітаційний колапс призводить до виникнення «застигшого» тіла і взаємодіє з зовнішнім світом лише своїм сталим гравітаційним полем. Це і є чорна дірка.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

38-39. Всесвіт



Всесвіт

Однорідний ізотропний Всесвіт описується:

3 вим. сферо, 3-кімната, 3 вим гіперболоїд.

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = R^2$$

$y^1 = R\cos\chi$

$y^2 = R\sin\chi\cos\theta$

$y^3 = R\sin\chi\sin\theta\cos\varphi$

$y^4 = R\sin\chi\sin\theta\sin\varphi$

$$de^2 = R^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)]$$

відстань між ∞ близькими точками на сфері → це дає просторову метрику

Тір-р Мінковського: $ds^2 = -(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2$

$(y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 = R^2$ (3 вим гіперболоїд)

$y^1 = R\,ch\chi$

$y^2 = R\,sh\chi\,ch\theta$

$y^3 = R\,sh\chi\,sh\theta\,ch\varphi$

$y^4 = R\,sh\chi\,sh\theta\,sh\varphi$

$$de^2 = R^2[d\chi^2 + sh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)]$$

$x^1 = r\cos\theta$

$x^2 = r\sin\theta\cos\varphi$

$x^3 = r\sin\theta\sin\varphi$

γ_{ij} $g_{\mu\nu}$ $\rho = R\chi$

$$de^2 = d\rho^2 + r^2(\rho)[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi]$$

$$z(\rho) = \begin{cases} R \sin(\rho/R), & \text{Зсф} \\ R \operatorname{sh}(\rho/R), & \text{Зід} \\ \rho & \text{Зпл} \end{cases}$$

$$dz = d\rho \operatorname{ch}\left(\frac{\rho}{R}\right) \Rightarrow d\rho^2 = dz^2 / \operatorname{ch}^2\left(\frac{\rho}{R}\right) =$$

$$= \frac{dz^2}{1 + \frac{\rho^2}{R^2}}$$

FRW $$de^2 = \frac{dz^2}{1 - \frac{\varkappa r^2}{R^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\rho^2)$$

$$\varkappa = \begin{cases} +1, & \text{Зсф} \\ -1, & \text{Зід} \\ 0, & \text{Зпл} \end{cases}$$

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij} dx^i dx^j$$

$\gamma_{ij}(x)$

Стала Хаббла $H(t) = \dot{a}/a$

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda = 0$$

Динаміка розширення Всесвіту

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$\Gamma^\mu_{0\mu} = \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_i = 3\frac{\dot{a}}{a} \qquad \Gamma^\mu_{i\mu} = {}^{(3)}\Gamma^j_{ij}$$

$$\Gamma^\mu_{00} = 0$$

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma^\lambda_{0\lambda} - \Gamma^\lambda_{00} \Gamma^\sigma_{0\lambda} = -\partial_0 \left(\frac{3\dot{a}}{a}\right) - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \delta^i_j \delta^j_i =$$

$$= -3\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 =$$

$$= -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$R_{0i} = 0 \qquad R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)\,\gamma_{ij}$

$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)$

$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)$

$T_{ij} = (\rho + \varepsilon)\, u_i u_j - p\, g_{ij}$

$u_0 = 1 \qquad u^0 = 1$

$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G \varepsilon}{3c^4} \frac{R}{a^2}$ — р-ня Фрідмана. Опис динаміки розміру Всесвіту

$a(t), \quad \varepsilon(t)$

$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \qquad \dot{\varepsilon} + \frac{3\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) = 0$

$p = p(\varepsilon)$

$\beta = \frac{\varepsilon}{3} \qquad \frac{d(\varepsilon + p)}{\varepsilon + p} = -3 d \ln a$

$\frac{dE}{dV} = T\frac{dS}{dV} - p$

$S = \frac{\varepsilon + p}{T}$

$ds^2 = \frac{1}{f} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - fc^2 dt^2$

$f = e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g}{r} \qquad r_g = a = \frac{2MG}{c^2}$

$R_{\mu\nu} = 0$

$R_{11} = \frac{f''}{2f} + \frac{f'}{2f} \qquad R_{22} = f + rf' - 1$

$R_{33} = f\sin^2\theta - \sin^2\theta + rf'\sin^2\theta$

$R_{44} = -\frac{ff'}{2} - \frac{ff'}{2}$

$R = g^{ik} R_{ik} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 f') - \frac{2}{r^2}\frac{d}{dr}(r(1-f))$

$\frac{dE}{dt} = \frac{a}{c^2}$ $\quad f(v) = 1 - \frac{a}{c}$ $\quad f(a) = 0$

$f'(a) = \frac{1}{a}$ $\quad \frac{1}{2} a f'(a) da = \frac{1}{2} da$

$\frac{1}{2} a f'(a) \frac{c^4}{G} da = d\left(\frac{c^4 a}{2G}\right) = dE$

$\frac{c^4 a}{2G} = \frac{c^4}{2G} \frac{2mG}{c} = mc^2 = E$

$S = \frac{1}{4} 4\pi a^2 k_B \frac{1}{l_p^2}$ $\quad dS$

$dE = \frac{1}{2} a f'(a) \frac{c^4}{G} da = \frac{1}{4\pi} f'(a) l_p^2 \frac{1}{k_B} \frac{c^4}{G} d\left(\frac{k_B 4\pi}{4 l_p^2} a\right)$

$T = \frac{\hbar c}{4\pi k_B} f'(a) = \frac{1}{4\pi} \frac{\hbar}{c k_B} (c^2 f'(a))$

$T = \frac{1}{4\pi k_B} \frac{\hbar \omega}{c}$ температура Унру

37. Ентропія та інформація

Теорія інформації (50-ті роки XX ст.) .Засновник Клод Шеннон, досліджував методи оптимального кодування для передачі даних через зашумлений канал. Ентропія: Р.Клаузіус (1865) – це міра незворотного розсіяння енергії в системі, Л.Больцман - S=k ln W, пропорційність ймовірності стану.Шеннон ввів інформаційну ентропію як міру невизначеності випробування з певними результатами ,або кількість інформації , яка припадає на одне повідомлення , яке генерується джерелом статистично незалежних повідомлень.Нехай маємо серію з n незалежних випробувань з можливими виходами p_i ,тоді ентропія Шеннона S = $\sum_{i=1}^{n} p_i log 1/p_i$.Математично це просто сподівання кількості інформації в повідомленні.Величина $\log 1/p_i$ називається частинною ентропією і характеризує один стан.Якщо логарифм двійковий , то одиниця інформації – біт.Біт – кількість невизначеності , яка міститься в досліді з двома рівноймовірними результатами(по Шеннону).Властивості ентропії Шеннона: 1.Завжди невід'ємна(0 коли точно визначено результат);2.Максимальна коли всі результати рівноймовірні;3.Є адитивною функцією станів.При отриманні сигналів від розглядуваного об'єкта ми отримуємо інформацію про нього.Коли нам про стане все відомо , то ентропія Шеннона буде рівна нулю ,отже кількість початкової інформації визначається формулою Шеннона $I = \sum_{i=1}^{n} p_i * log 1/p_i$, де $\log 1/p_i$ кількість інформації в одному повідомленні.Найбільше інформації несуть найменш ймовірні повідомлення.Ентропія обмежує максимально можливе стиснення без втрат , реалізується в алгоритмах кодування Хафмена , Фано.Випливає з того , що кількість інформації в стисненому кодуванні повинна бути не менша від її кількості у вихідному.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

38. Методи швидкого перетворення Фур'є.

Маємо часову послідовність певного сигналу:

$x[n]$, для якої спектральна оцінка $X[k] = T \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp(-i\frac{2\pi kn}{N})$, T-інтервал відліків для сигналу.

Метод швидкого перетворення Фур'є зводяться до декількох кроків:

1) Розбиваємо послідовність $x[n]$ на дві приблизно однакові частини – x[0], x[1], … x[k], | x[k+1], … x[N-1] (можна і на більшу кількість).

2) Для кожної з отриманих частин робимо спектральну оцінку, яка зазначена на початку.

3) Об'єднуємо отримані спектри в один.

Слід зауважити, що якщо кількість відліків в послідовності складає $N = 2^L$, то складність алгоритму зменшиться до $N \cdot \log_2 N$ замість N^2.

(Про всяк випадок напишу обернене перетворення

$x[n] = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot \exp(j\frac{2\pi kn}{N})$, 0 <= n <= N-1)

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

39. Дополнение нулями

С помощью процесса, называемого *дополнением нулями*, дискретно-временной ряд Фурье может быть изменен для интерполяции между N значениями исходного преобразования. Пусть имеющиеся отсчеты данных x[0],...,x[N-1] дополнены нулевыми значениями x[N],...X[2N-1]. ДВРФ (дискретно-временной ряд Фурье) этой дополненной нулями 2N-точечной последовательности данных будет определяться выражением

$$X[k] = T\sum_{n=0}^{2N-1} x[n]\exp(-j2\pi kn/2N) = T\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi kn/2N) \qquad (32)$$

где верхний предел суммы справа изменен в соответствии с наличием нулевых данных. Пусть k=2m, так что

$$X[m] = T\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi mn/N), \qquad (33)$$

где m=0,1,...,N-1, определяет четные значения X[k]. Отсюда видно, что при четных значениях индекса k 2N-точечный дискретно-временной ряд Фурье сводится к N-точечному дискретно-временному ряду. Нечетные значения индекса k соответствуют интерполированным значениям ДВРФ, расположенным между значениями исходного N-точечного ДВРФ. По мере того, как все большее число нулей добавляется в исходную N-то-чечную последовательность, можно получить еще большее число интерполированных данных. В предельном случае бесконечного числа вводимых нулей ДВРФ может рассматриваться как дискретно-временное преобразование Фурье N-то-чечной последовательности данных:

$$X(f) = T\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi fnT). \qquad (34)$$

Бытует неправильное мнение о том, что дополнение нулями улучшает разрешение, поскольку оно увеличивает длину последовательности данных. Однако, как следует из рис.3, дополнение нулями *не улучшает* разрешающую способность преобразования, полученного по заданной конечной последовательности данных. Дополнение нулями просто позволяет получить интерполированное преобразование *более сглаженной формы*. Кроме того, оно устраняет неопределенности, обусловленные наличием узкополосных компонент сигнала, частоты которых лежат между N точками, соответствующими оцениваемым частотам исходного ДВРФ. При дополнении нулями повышается также и точность оценивания частоты спектральных пиков. Под термином спектральное разрешение мы будем понимать способность различать спектральные отклики двух гармонических сигналов.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Общепринятое эмпирическое правило, часто используемое при спектральном анализе, гласит, что разнесение различаемых синусоид по частоте не может быть меньше *эквивалентной ширины полосы окна*, через которое наблюдаются сегменты (отрезки) этих синусоид.

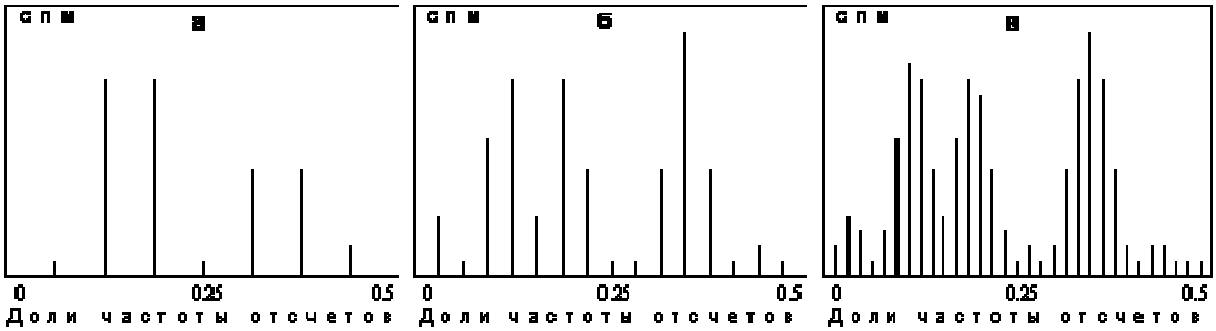


Рис.3. Интерполяция за счет дополнения нулями:
а - модуль ДВРФ 16-ти точечной записи данных, содержащих три синусоиды без дополнения нулями (видны неопределенности: нельзя сказать сколько в сигнале синусоид - две, три или четыре);
б - модуль ДВРФ той же последовательности после двукратного увеличения числа ее отсчетов за счет дополнения 16 нулями (неопределенности разрешены, так как различимы все три синусоиды;
в - модуль ДВРФ той же последовательности после четырехкратного увеличения числа ее отсчетов за счет дополнения нулями.

Эквивалентная ширина полосы окна может быть определена как $B_e = \frac{\int_{-1/2T}^{1/2T} W(f)\,df}{W(0)}$, где W(f) - дискретно-временное преобразование Фурье функции окна, например, прямоугольного. Аналогично можно ввести *эквивалентную длительность окна*

$$T_e = \frac{T\sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]}{w[0]}.$$

Можно показать, что эквивалентная длительность окна (или любого другого сигнала) и эквивалентная ширина полосы его преобразования являются взаимно обратными величинами: TeBe=1.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

40. Оцінка спектральної густини потужності за методом максимізації ентропії

Нехай маємо M проявів величини x_i і ймовірність прояву кожного з них $p[x_i]$. Інформація за Шеноном $i-го$ наслідку

$$I[x_i]=ln\frac{1}{p[x_i]}=-ln\,p[x_i]$$

Очікуване значення інформації :

$$H[x]=\sum_{i=1}^{M}I[x_i]p[x_i]=-\sum_{i=1}^{M}p[x_i]ln\big(p[x_i]\big)$$

З точки зору терії інформації це ентропія. Для неперервного розподілу

$$H(x)=-\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)ln\big(p(x)\big)dx$$

Ентропія- це характеристика появу певної події, є мірою невизначеності. Коли ймовірності появи кожного прояву однакові – тоді ентропія максимальна(тоді найбільша неупорядкованість).

Ентропію для послідовності можна оцінити:

$$H=\frac{1}{2}ln\Big[det\,\hat{R}\Big]$$

Автокореляційна послідовність r_{xx}

$$r_{xx}[m]=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1}x[n+m]x^{*}[n], & 0\le m\le N\text{-}1\\[2ex] \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-|m|-1}x^{*}\big[n+|m|\big]x[n], & -(N-1)\le m<0\end{cases}$$

$$\hat{R}=\begin{pmatrix}r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}[-p]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{xx}[p] & \dots & r_{xx}[0]\end{pmatrix}$$

$$r_{xx}[m]=\varepsilon\big\{x[n+m]x^{*}[n]\big\}=\int x[n+m]x^{*}[n]p\big(x[n]\big)dx[n]$$

Алгоритм знаходить спектральну густину потужності у вигляді:

$$S(\omega)=\frac{b_0}{1+\alpha_1e^{-j\omega}+\ldots+\alpha_pe^{-j\omega_p}}$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Коефіцієнти $b_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ знаходяться з матричного рівняння:

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & \ldots & r_{xx}[-p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[p] & \ldots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R\hat{\alpha} = \hat{B} \Rightarrow \hat{\alpha} = \hat{R}^{-1}\hat{B}$$

p - це фактично порядок регресійної моделі. Експериментально показано , що модель працює ефективно працює до $p = 150$. Оцінка на крок вперед:

$$\hat{x}[n] = b_0\varepsilon - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x[n-k]$$

$\varepsilon \approx 1$ - похибка попереднього оцінювання.

Основна відмінність даного методу від класичного полягає у тому що на всьому досліджуваному інтервалі похибка має більш-менш рівномірний розподіл. На краях спектру не має випадкових флуктуацій.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

41. Корелограмний метод оцінювання спектральної густини потужності.

Згідно теореми Вінера-Хінчена, автокореляційна функція та спектральна густина потужності $S(\omega)$ повязані співвідношенням $P(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}[m] e^{-j2\pi fmT}$ (перетворенням Фурьє): , де T — інтервал дискретизації.
R_{xx} –автокореляційна функція.
На приктиці для обчислення спектральної густини потужності використовують обмежену суму (від –L до L) та деяку оцінку автокореляційної функції.

Автокореляційна послідовність може бути оцінена наступними оцінками:
$\hat{R}_{xx}[m] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x^*[n+|m|]x[n]$, де $-(N-1) \le m \le N-1$ - незміщена оцінка
Або зміщенною оцінкою
$\check{R}_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x^*[n+|m|]x[n]$, де $-(N-1) \le m \le N-1$
Остання, у порівнянні з незміщеною має меншу дисперсію, тому на практиці використовується частіше.
Корелограмний метод полягає в підстановці в означення СГП оцінку авто кореляційної послідовності (корелограми)
Оцінка для СГП буде
$P(f) = T \sum_{m=-L}^{L} R_{xx}[m] e^{-j2\pi fmT}$
Цей метод також дає менші флуктуації на краях інтервалу ніж у Фурьє методі.

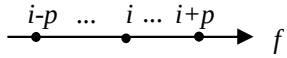
Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

42. Періодограмне оцінювання спектральної густини потужності. Методи Уелча, Даньєла, Бартлета.

Нехай маємо набір даних: x[0], x[1],…, x[N-1], тоді можемо порахувати спектральну густину потужності $P(f) = \frac{1}{NT} \cdot \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp(2\pi \cdot j \cdot fnT) \right|^2$ (T – інтервал між відліками).

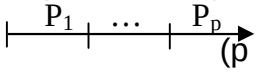
Періодографія – це попопередня обробка даних. Існує декілька її типів:

1. Періодограма Даньєла. З метою згладжування малих флуктуацій проводиться усереднення за сусідніми спектральними частотами. Таким чином, отримуємо оцінку спектральної густини потужності $\hat{P}(f_i) = \frac{1}{2p+i} \sum_{n=i-p}^{i+p} P(f_n)$.



(p – к-ть точок, за якими проводиться згладжування (розмір вікна згладжування))

2. Періодограма Бартлета. Метод полягає в розрахунку набору періодограм. Спочатку ділимо вихідний набір даних x[0], x[1],…, x[N-1] на інтервали, потім для кожного з них розраховуємо P_i. Оцінка густини потужності розраховується за формулою $\hat{P}(f) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} P(f_i)$



(p – к-ть інтервалів)

(Треба, щоб точок, які потрапляють в кожен інтервал, було достатньо.)

3. Періодограма Уелча. Аналог попереднього методу, але розбиття робиться таким чином, що інтервали (періодограми) перекриваються.

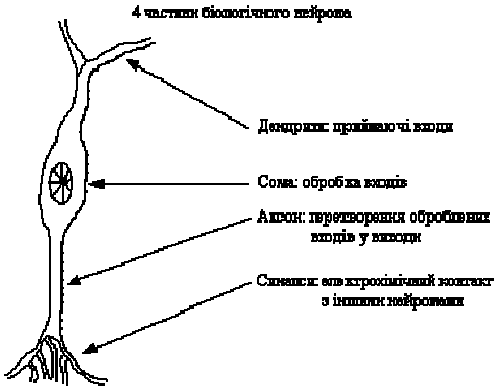
Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

44. Основні моделі та методи штучних нейронних мереж.

Штучні нейромережі є електронними моделями нейронної структури мозку, який, головним чином, навчається з досвіду. Природній аналог доводить, що множина проблем, які поки що не підвладні розв'язуванню наявними комп'ютерами, можуть бути ефективно вирішені блоками нейромереж.Тривалий період еволюції додав мозку людини багато якостей, що відсутні в сучасних комп'ютерах з архітектурою фон Неймана. До них відносяться:

- розподілене представлення інформації і паралельні обчислення;
- здатність до навчання й узагальнення;
- адаптивність;
- толерантність до помилок
- низьке енергоспоживання.

Перспектива їх використання видається досить яскравою, в світлі вирішення нетрадиційних проблем і є ключем до цілої технології.



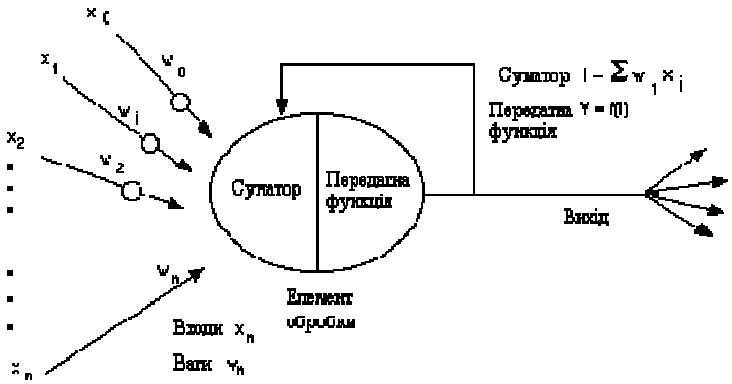


Рис. 1. Схема біологічного нейрона *Рис. 2. Базовий штучний нейрон*

Базовий модуль нейронних мереж штучний нейрон моделює основні функції природного нейрона (рис. 2). Вхідні сигнали x_n зважені ваговими коефіцієнтами з'єднання w_n додаються, проходять через передатну функцію, генерують результат і виводяться. У наявних на цей час пакетах програм штучні нейрони називаються "елементами обробки" і мають набагато більше можливостей, ніж простий штучний нейрон, описаний вище. На рис. 3 зображена детальна схема спрощеного штучного нейрону.

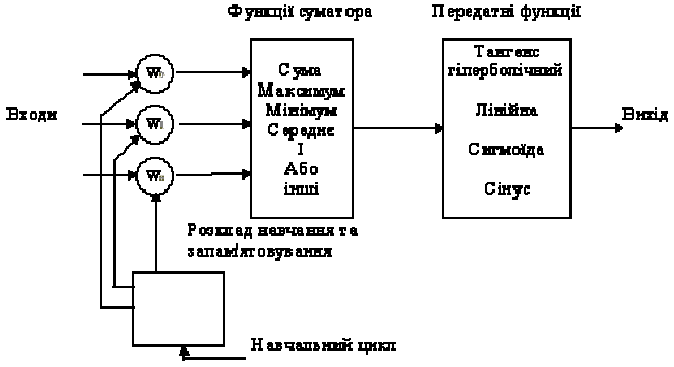


Рис. 3. Модель "елементу обробки"

Модифіковані входи передаються на функцію сумування, яка переважно тільки сумує добутки. Проте можна обрати багато різних операцій, такі як середнє, найбільше, найменше, OR, AND, тощо, які могли б виробляти деяку кількість різних значень.

Інколи функція сумування ускладнюється додаванням функції активації, яка дозволяє функції сумування оперувати в часі.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

В любому з цих випадків, вихід функції сумування надсилається у передатну функцію і скеровує весь ряд на дійсний вихід (0 або 1, -1 або 1, або яке-небудь інше число) за допомогою певного алгоритму. В існуючих нейромережах в якості передатних функцій можуть бути використані сигмоїда, синус, гіперболічний тангенс та ін. Приклад того, як працює передатна функція показаний на рис. 4.

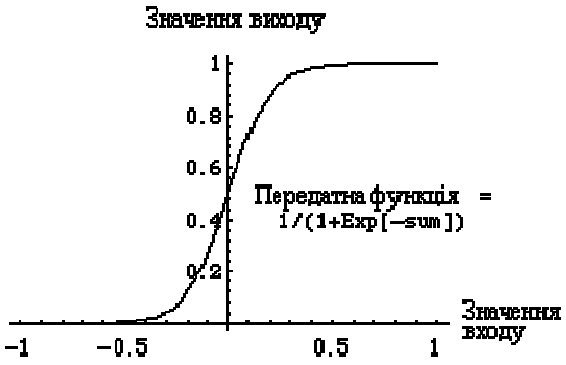


Рис. 4. Сигмоїдна передаточна функція

В любому з цих випадків, вихід функції сумування надсилається у передатну функцію і скеровує весь ряд на дійсний вихід (0 або 1, -1 або 1, або яке-небудь інше число) за допомогою певного алгоритму. В існуючих нейромережах в якості передатних функцій можуть бути використані сигмоїда, синус, гіперболічний тангенс та ін. Приклад того, як працює передатна функція показаний на рис. 4. Після обробки сигналу, нейрон на виході має результат передатної функції, який надходить на входи інших нейронів або до зовнішнього з'єднання, як це передбачається структурою нейромережі.

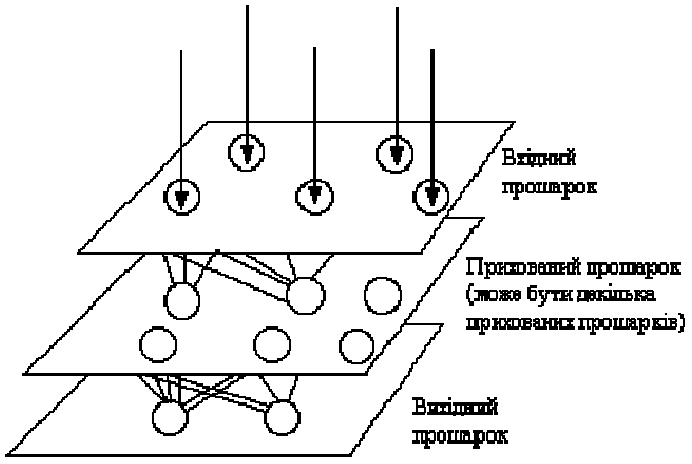


Рис. 5. Діаграма простої нейронної мережі

На рис. 5 показана типова структура штучних нейромереж. Хоча існують мережі, які містять лише один прошарок, або навіть один елемент, більшість застосувань вимагають мережі, які містять як мінімум три нормальних типи прошарків - вхідний, прихований та вихідний. Прошарок вхідних нейронів отримує дані або з вхідних файлів, або безпосередньо з електронних давачів. Вихідний прошарок пересилає інформацію безпосередньо до зовнішнього середовища, до вторинного комп'ютерного процесу, або до інших пристроїв. Напрямок зв'язку від одного нейрону до іншого є важливим аспектом нейромереж. У більшості мереж кожен нейрон прихованого прошарку отримує сигнали від всіх нейронів попереднього прошарку та звичайно від нейронів вхідного прошарку. Після виконання операцій над сигналами, нейрон передає свій вихід до всіх нейронів наступних прошарків, забезпечуючи шлях передачі вперед (feedforward) на вихід.

При зворотньому зв'язку, вихід нейронів прошарку скеровується до нейронів попереднього прошарку (рис. 6).

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

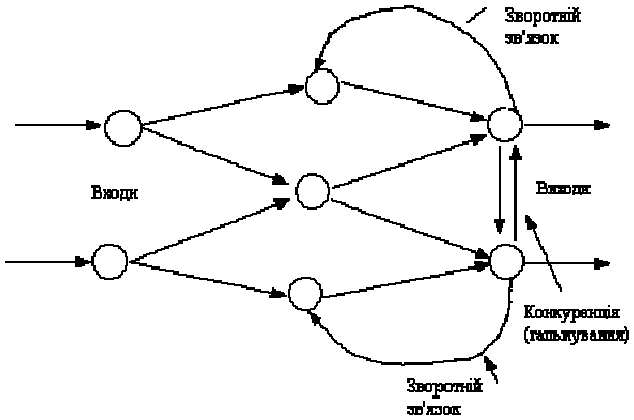


Рис. 6. Зворотній зв'язок в нейронній мережі

Здатність до навчання є фундаментальною властивістю мозку. Процес навчання може розглядатися як визначення архітектури мережі і налаштування ваг зв'язків для ефективного виконання спеціальної задачі.

Існують три загальні парадигми навчання:

- **"з вчителем"**(Нейромережа має у своєму розпорядженні правильні відповіді (виходи мережі) на кожен вхідний приклад. Ваги налаштовуються так, щоб мережа виробляла відповіді як можна більш близькі до відомих правильних відповідей)
- **"без вчителя" – самонавчання**(Навчання без вчителя не вимагає знання правильних відповідей на кожен приклад навчальної вибірки. У цьому випадку розкривається внутрішня структура даних та кореляція між зразками в навчальній множині, що дозволяє розподілити зразки по категоріях.)
- **Змішана**(При змішаному навчанні частина ваг визначається за допомогою навчання зі вчителем, у той час як інша визначається за допомогою самонавчання.)

Нейромережі не можна вважати доцільним рішенням для всіх обчислювальних проблем. Традиційні комп'ютери та обчислювальні методи є ідеальними для багатьох застосувань:

- Класифікація образів.
- Кластеризація/категоризація.
- Апроксимація функцій.
- Передбачення/прогноз.
- Оптимізація.
- Пам'ять, що адресується за змістом.
- Керування.

Але, незважаючи на переваги нейронних мереж в часткових галузях над традиційними обчисленнями, існуючі нейромережі є не досконалими рішеннями. Вони навчаються і можуть робити "помилки". Окрім того, не можна гарантувати, що розроблена мережа є оптимальною мережею. Застосування нейромереж вимагає від розробника виконання ряду умов.

Ці умови включають:

- множину даних, що включає інформацію, яка може характеризувати проблему;
- відповідно встановлену за розміром множину даних для навчання й тестування мережі;
- розуміння базової природи проблеми, яка буде вирішена;

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

- вибір функції суматора, передатної функції та методів навчання;
- розуміння інструментальних засобів розробника;
- відповідна потужність обробки.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

45. Метод обратного распространения ошибок

Рассмотрим многослойную сеть, в который каждый нейрон предыдущего слоясвязан со всеми нейронами последующего слоя. Для большей общности положим $X = \mathbb{R}^n, X = \mathbb{R}^M$.

Введём следующие обозначения. Пусть выходной слой состоит из *M* нейронов с функциями активации σ^m и выходами a^m , $m = 1, \ldots, M$. Перед ним находитсяскрытый слой из *H* нейронов с функциями активации σ^h и выходами u^h , $h = 1, \ldots, H$.Веса синаптических связей между *h*-м нейроном скрытого слоя и *m*-м нейроном выходного слоя будем обозначать через w_{hm} . Перед этим слоем может находиться либораспределительный слой, либо ещё один скрытый слой с выходами v^j , $j = 1, \ldots, J$и синаптическими весами w_{jh} . В общем случае число слоёв может быть произвольным. Если сеть двухслойная, то $J = n$ и $v^j \equiv x^j$. Обозначим через *w* вектор всехсинаптических весов сети.

Выходные значения сети на объекте x^i вычисляются как суперпозиция:

$$a^m(x_i) = \sigma_m\left(\sum_{h=0}^{H} w_{hm}u^h(x_i)\right); \qquad u^h(x_i) = \sigma_h\left(\sum_{j=0}^{J} w_{jh}v^j(x_i)\right)$$

Запишем функционал среднеквадратичной ошибки для отдельного объекта x^i :

$$Q_m(w) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{M}(a^m(x_i) - y_i^m)^2$$

В дальнейшем нам понадобятся частные производные *Q* по выходам нейронов.Выпишем их сначала для выходного слоя:

$$\frac{\partial Q(w)}{\partial a^m} = a^m(x_i) - y_i^m = \varepsilon^m$$

Оказывается, эта частная производная равна величине ошибки ε^m на объекте x^i .Теперь выпишем частные производные по выходам скрытого слоя:

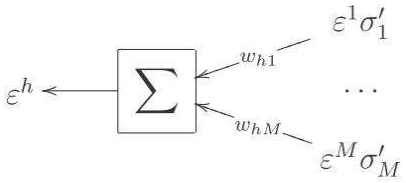
$$\frac{\partial Q(w)}{\partial u^h} = \sum_{m=0}^{M}(a^m(x_i) - y_i^m)\sigma_m^{'}w_{hm} = \sum_{m=0}^{M}\varepsilon^m\sigma_m^{'}w_{hm} = \varepsilon^h$$

Эту величину, по аналогии с ε^m , будем называть ошибкой сети на скрытом слоеи обозначать через ε^h .

Через $\sigma'm$ обозначена производная функции активации, вычисленная притом же значении аргумента, что и в первой формуле. Если используется сигмоидная функцияактивации, то для эффективного вычисления производной можно воспользоватьсяформулой $\sigma'_m = \sigma^m(1 - \sigma^m)$.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Заметим, что ε^h вычисляется по ε^m , если запустить сеть «задом наперёд», подавая на выходы нейронов скрытого слоя значения $\varepsilon^m\sigma'_m$ с теми же весами w_{hm} ,а результат ε^h считывать на входе:



Если слоёв больше, чем два, то остальные частные производные вычисляютсяаналогично:

$$\frac{\partial Q(w)}{\partial v^j} = \sum_{h=0}^{H} \varepsilon^h \sigma_h^{'} w_{jh} = \varepsilon^j$$

Имея частные производные по a^m и u^h , легко выписать градиент Q по весам:

$$\frac{\partial Q(w)}{\partial w_{hm}} = \frac{\partial Q(w)}{\partial w_{hm}} \frac{\partial w_{hm}}{\partial a^m} = \varepsilon^m \sigma_m^{'} u^h, \qquad m = 1,..M, \quad h = 1,..H$$

$$\frac{\partial Q(w)}{\partial w_{jh}} = \frac{\partial Q(w)}{\partial u^h} \frac{\partial u^h}{\partial w_{jh}} = \varepsilon^h \sigma_h^{'} v^j, \qquad j = 1,..J, \quad h = 1,..H$$

Алгоритм 1.2. Обучение двухслойной сети методом обратного распространения ошибки

Вход:

$(x_i, y_i)_{i=1}^{\ell}$ — обучающая выборка, $x_i \in \mathbb{R}^n$, $y_i \in \mathbb{R}^M$;
H — число нейронов в скрытом слое;
η — темп обучения;

Выход:

Синаптические веса w_{jh}, w_{hm};

1: Инициализировать веса небольшими случайными значениями:
$w_{jh} := \text{random}\left(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)$;
$w_{hm} := \text{random}\left(-\frac{1}{2H}, \frac{1}{2H}\right)$;
2: **повторять**
3: Выбрать объект x_i случайным образом;
4: Прямой ход — вычислить:
$u^h(x_i)$, σ'_h для всех $h = 1, \ldots, H$;
$a^m(x_i)$, σ'_m, ε^m для всех $m = 1, \ldots, M$;
$Q_i := \sqrt{\sum_{m=1}^{M} (\varepsilon^m)^2}$;
5: Обратный ход — вычислить:
$\varepsilon^h := \sum_{m=1}^{M} \varepsilon^m \sigma'_m w_{hm}$ для всех $h = 1, \ldots, H$;
6: Градиентный шаг:
$w_{hm} := w_{hm} - \eta \varepsilon^m \sigma'_m u^h$, для всех $h = 0, \ldots, H$, $m = 1, \ldots, M$;
$w_{jh} := w_{jh} - \eta \varepsilon^h \sigma'_h x^j$, для всех $j = 0, \ldots, n$, $h = 1, \ldots, H$;
7: $Q := \frac{\ell-1}{\ell} Q + \frac{1}{\ell} Q_i$;
8: **пока** Q не стабилизируется;

Достоинства метода обратного распространения.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

- Достаточно высокая эффективность. Прямой ход, обратный ход и вычисления-градиента требуют порядка *O(Hn + HM)* операций.
- Через каждый нейрон проходит информация только о связных с ним нейронах.Поэтомуback-propagation легко реализуется на вычислительных устройствахс параллельной архитектурой.
- Высокая степень общности. Алгоритм легко записать для произвольного числаслоёв, произвольной размерности выходов и произвольных функций активации (возможно, различных у разных нейронов). Кроме того, back-propagationне накладывает никаких ограничений на используемый метод оптимизации.Его можно применять вместе с любыми градиентными методами: скорейшегоспуска, сопряженных градиентов, и другими.

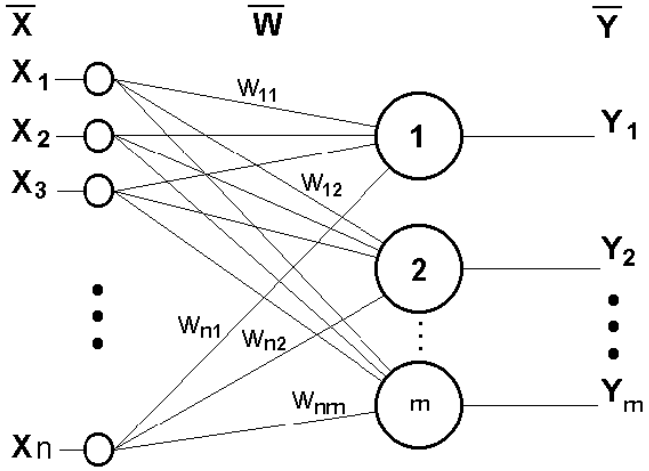
Недостатки метода обратного распространения.

- Метод не всегда сходится. Для улучшения сходимости приходится применятьбольшое количество различных эвристических ухищрений.
- Процесс градиентного спуска склонен застревать в многочисленных локальныхминимумах функционала *Q*.
- Приходится заранее фиксировать число нейронов скрытого слоя *H*. В то же время, это критичный параметр сложности сети, от которого может существеннозависеть качество обучения и скорость сходимости.
- При чрезмерном увеличении сложности сеть склонна к переобучению.
- Если применяются функции активации с горизонтальными асимптотами, типасигмоидной или th, то сеть может попадать в состояние «паралича». Чем больше значения синаптических весов на входе нейрона, тем ближе значение производной σ' к нулю, тем меньше изменение синаптических весов в соответствииспоследнимиформулами.Если нейрон один раз попадает в такую «мёртвуюзону», то у него практически не остаётся шансов из неё выбраться. Парализоваться могут отдельные связи, нейроны, или вся сеть в целом.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

46. Метод Розенблата навчання нейронної мережі.

Даний метод був запропонований Розенблатом в 1959р. для нейронних мереж(НМ), що мають назву персептрон (на рисунку зображено одношаровий персептрон):



Процедуру навчання за методом Розенблата для одношарового персептрона можна представити як:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + ax_i d_j$$

Де:

w_{ij} – ваговий коефіцієнт зв'зку і-го нейрону з j-им виходом;

X_i – і-й вхід НМ;

d_j – бажаний (ідеальний) j-ий вихід НМ;

a – коефіцієнт(характеризує швидкість навчання) $0<a\leq 1$

Вагові коефіцієнти змінюються лише в разі, якщо реальне вихідне значення НМ не співпадає з ідеальним.

Повний алгоритм виглядає наступним чином:

1. Значення вагових коефіцієнтів ініціюються малими випадковими значеннями

2. На вхід мережі подається навчальний приклад

3. Якщо вихід НМ Y_j не співпадає з ідеальним значенням D_j , то відбувається модифікація вагових коефіцієнтів за формулою

4. Цикл з пункту 2, доки не виконуватиметься умова $\forall i : y_i = d_i$ або вагові коєфіцієнти перестануть змінюватись.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

47.Метод Відроу-Хоффа

Персептрон Розенблатта обмежувався бінарними виходами. Відроу і Хофф змінили модель Розенблатта. Їх модель - ADALINE (Adaptive Linear Element) мала один вихідний нейрон і неперервну лінійну функцію активації нейронів $y = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j$ Даний метод відомий також як дельта-правило (delta-rule) .Ціль методу -мінімізація функції похибки E в просторі вагових коефіцієнтів $E = \sum_{k=1}^{P} E(k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{P} (d^k - y^k)^2$,де P – к-ть оброблених і мережа прикладів, E(k) – похибка для k-го прикладу.yk - реальный вихід мережі для k-го прикладу, dk - бажаний(ідеальний) вихід мережі для k-го прикладу. Мінімізація E здійснюється методом градієнтного спуску $w_j(t+1) = w_j(t) - a * \frac{\partial E(k)}{\partial w_j(t)}$.Де $\frac{\partial E(k)}{\partial w_j(t)} = \frac{\partial E(k)}{\partial y^k} * \frac{\partial y^k}{\partial w_j(t)} = (y^k - d^k) * x_j^k$.Таким чином вагові коефіцієнти міняються за правилом $w_j(t+1) = w_j(t) - a * (y^k - d^k) * x_j^k$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

48. Метод Хебба навчання нейронної мережі.

Власне Метод Хебба.

$$\omega_{ij}^{n}(t+1) = \omega_{ij}^{n}(t) + \ a y_j^{n-1} y_j^{n}$$

t – номер ітераційної процедури

a – коефіцієнт швидкості навчання

n – номер шару.

В даній мережі закріплюються ті зв'язки, які підводять сигнал до виходу, на якому він найчастіше з'являється.

Обучение без учителя

Для методов обучения "без учителя", так же как и методов обучения "с учителем", требуется *множество учебных примеров*. Процесс обучения, как и в случае обучения "с учителем", сводится к подстраиванию весовых коэффициентов. Но в отличии от обучения "с учителем", здесь нет эталонных выходов и веса изменяются по алгоритму, учитывающему только входные и производные от них сигналы.

4.1 Метод Хебба

Метод Хебба основывается на биологическом феномене обучения путем повторения и привыкания. Этот феномен еще известен как эффект проторения[7].

При обучении искусственной нейронной сети **сигнальным методом Хебба**[8] усиливаются связи между возбужденными нейронами, в данном случае веса изменяются по следующему правилу:

$$w_{ij}(t+1)=w_{ij}(t)+a * y_i^{[n-1]} * y_j^{[n]} \quad (13)$$

где

- $y_i^{[n-1]}$ выходное значение нейрона i слоя n-1;
- $y_j^{[n]}$ выходное значение нейрона j слоя n;
- $w_{ij}(t)$ и $w_{ij}(t-1)$ весовой коэффициент синапса, соединяющего эти нейроны, на итерациях t и t-1 соответственно;
- a - коэффициент скорости обучения.

Существует также **дифференциальный метод обучения Хебба**.

$$w_{ij}(t+1)=w_{ij}(t) + a * (y_i^{[n-1]}(t) - y_i^{[n-1]}(t-1)) * (y_j^{[n]}(t) - y_j^{[n]}(t-1)) \quad (14)$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Здесь

- $y_i^{[n-1]}(t)$ и $y_i^{[n-1]}(t-1)$ выходное значение нейрона i слоя n-1 соответственно на итерациях t и t-1;
- $y_j^{[n]}(t)$ и $y_j^{[n]}(t-1)$ то же самое для нейрона j слоя n.

Как видно из (14), сильнее всего обучаются синапсы, соединяющие те нейроны, выходы которых наиболее динамично изменились в сторону увеличения.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

49. Классификатор на основе однослойной нейронной сети.

Рассмотрим классификатор распознающий картинки с цифрами от 0 до 9. Для реализации классификатора используется однослойная нейронная сеть.

Классификатор представляет собой однослойную нейронною сеть(персептрон) из 10 обрабатывающих нейронов (рис.1).

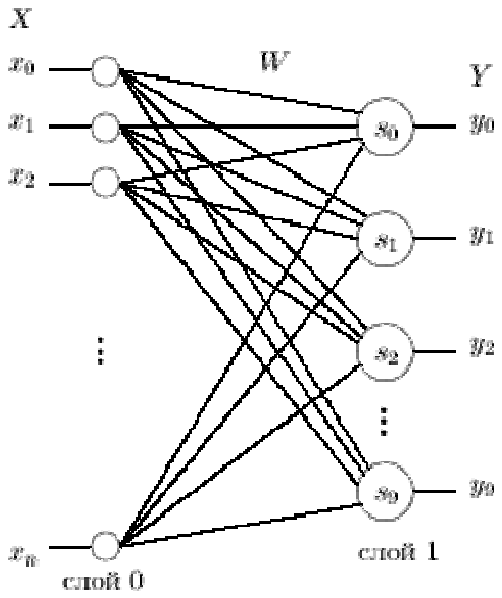


Рисунок 1: однослойная нейронная сеть (персептрон)

На вход нейронной сети подаётся слово $X(x_0 \ldots x_n)$ где $x_i=1$ или -1, описывающее образ для обработки. На выходе получаем слово $Y(y_0 \ldots y_9)$ где $y_i=1$ или -1. Номер j , для которого выход $y_j=1$, соответствует номеру класса входного образца.

Параметры сети

Состояние нейрона i определим следующим образом:

$$s_i = \sum_{j=0}^{n} x_j \cdot w_{ij} \qquad (1)$$

В качестве функции активации будем использовать пороговою функцию с порогом T=0 :

$$y_i = f(s_i) = \begin{cases} 1 & , \ s_i \geq T \\ -1 & , \ s_i < T \end{cases} \qquad (2)$$

Метод обучения

В качестве метода обучения используется дельта-правило Видроу-Хоффа (обучение "с учителем").

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

$w_{ij}(t+1)=w_{ij}(t)+ a * x_j * e_i^k$ (3)
где

- w_{ij} - весовой коэффициент связи i -того нейрона с j-тым входом
- a=0.001 - коэффициент скорости обучения
- x_j - j-тый вход сети
- e_i^k - ошибка нейрона i на k-том образце

$e_i^k=d_i^k - s_i$ (4)

здесь s_i - состояние (1) нейрона i, d_i^k - верный выход нейрона i на k-том образце

Так же необходимо определить :
E^k - ошибка сети на k-том образце

$$E^k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{9} (e_i^k)^2 \quad (5)$$

E - максимальная ошибка сети

$$E = \max_{k=0...9} (E^k) \quad (6)$$

R=0.0001 - допустимая максимальная ошибка сети

Алгоритм обучения нейронной сети построен следующим образом:

1. Инициализировать матрицу весов случайными значениями на отрезке [-0.05 , 0.05].
2. Пропустить через сеть все образцы из множества учебных примеров и рассчитать ошибку сети E по (6).
3. Если ошибка E меньше допустимой максимальной ошибки R то конец работы.
4. В случайном порядке подать на вход сети все образцы из множества учебных примеров, для каждого образца k и выхода сети y^k рассчитать ошибку e^k по (4) и скорректировать веса w по (3).
5. перейти на п.2

Примером реализации может быть работа с картинками. На вход классификатора подаются картинки, представляющие собой матрицы 51 x 31 точку, таким образом входной (или распределительный) слой сети состоит из 51 x 31 = 1581 нейронов. На вход классификатора подается изображение цифр от 0 до 9 , на выходе получаем слово Y(y_0 ... y_9) где y_i=1 или -1. Номер j , для которого выход y_j=1 , соответствует номеру класса входного образца.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

50. Робота класифікатора, побудованого на двошаровій нейронній мережі.

Искусственные нейронные сети– вид математических моделей, которые строятся по принципу организации и функционирования их биологических аналогов – сетей нервных клеток (нейронов) мозга. В основе их построения лежит идея о том, что нейроны можно моделировать довольно простыми автоматами (называемыми *искусственными нейронами*), а вся сложность мозга, гибкость его функционирования и другие важнейшие качества определяются связями между нейронами.

Для описания биологического нейрона испльзуется модель формально нейрона.

Он имеет входы, куда подаются некоторые числа $x_1, \ldots, x_n$. Затем стоит блок, называемый *адаптивным сумматором*. На его выходе мы имеем взвешенную сумму входов:

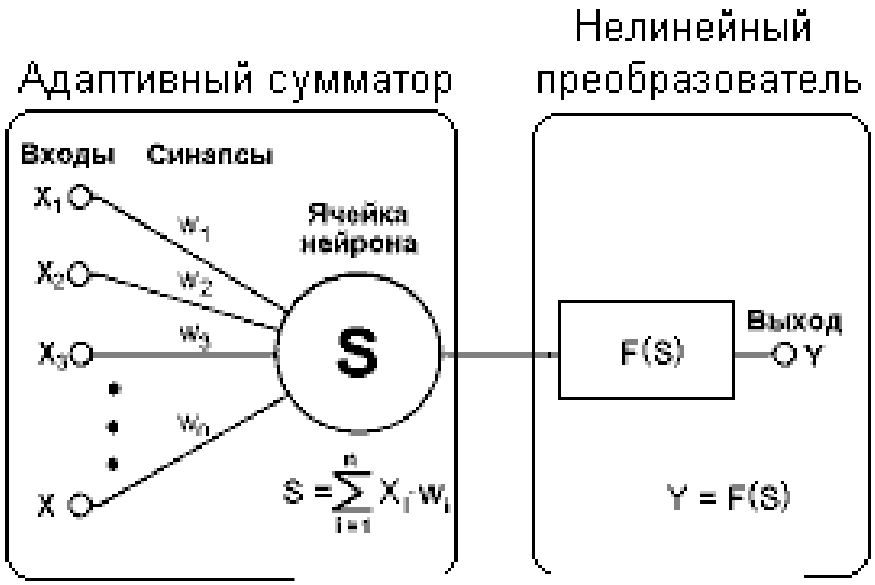


Рис. 1. Искусственный нейрон.

$$s = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot w_i \quad (1)$$

Затем она подается на нелинейный преобразователь и на выходе мы имеем:

$$y = F(S) \quad (2)$$

Функция *F* нелинейного преобразователя называется *активационной функцией* нейрона.

$$F(S) = \begin{cases} 0, & S < 0, \\ 1, & S \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

По аналогии с нейроном, когда суммарное воздействие на входе превысит критическое значение, генерируется импульс 1. Иначе нейрон остается в состоянии покоя, то есть выдается 0.

Существует множество других функций активации. Одной из наиболее распространенных является логистическая функция (сигмоид).

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-\alpha x}} \qquad (4)$$

При уменьшении α сигмоид становится более пологим, в пределе при α=0 вырождаясь в горизонтальную линию на уровне 0.5, при увеличении α сигмоид приближается по внешнему виду к функции единичного скачка с порогом в точке *x*=0. Одно из ценных свойств сигмоидной функции – простое выражение для ее производной, применение которого будет рассмотрено в дальнейшем.

$$f'(x) = \alpha \cdot f(x) \cdot (1 - f(x)) \qquad (5)$$

Можно выделить две базовые архитектуры нейронных сетей: *полносвязные* и *многослойные* сети.

В *полносвязных нейронных сетях* каждый нейрон передает свой выходной сигнал остальным нейронам, в том числе и самому себе. Все входные сигналы подаются всем нейронам. Выходными сигналами сети могут быть все или некоторые выходные сигналы нейронов после нескольких тактов функционирования сети.

В *многослойных нейронных сетях* (их часто называют *персептронами*) нейроны объединяются в слои. Слой содержит совокупность нейронов с едиными входными сигналами. Число нейронов в слое может быть любым и не зависит от количества нейронов в других слоях. В общем случае сеть состоит из нескольких слоев, пронумерованных слева на право. Внешние входные сигналы подаются на входы нейронов входного слоя (его часто нумеруют как нулевой), а выходами сети являются выходные сигналы последнего слоя. Кроме входного и выходного слоев в многослойной нейронной сети есть один или несколько так называемых *скрытых слоев*.

В свою очередь, среди многослойных сетей выделяют:

1) Сети прямого распространения (feedforwardnetworks) – сети без обратных связей. В таких сетях нейроны входного слоя получают входные сигналы, преобразуют их и передают нейронам первого скрытого слоя, и так далее вплоть до выходного, который выдает сигналы для интерпретатора и пользователя. Если не оговорено противное, то каждый выход

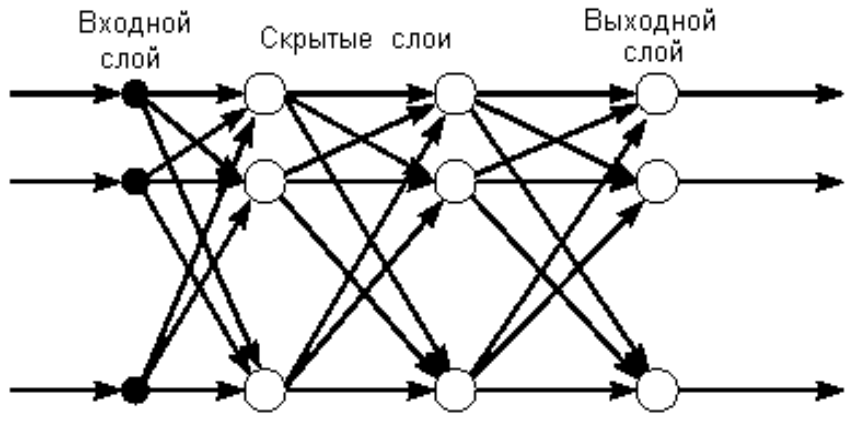


Рис. 4. Многослойная (трехслойная) сеть прямого распространения.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

ной сигнал n-го слоя передастся на вход всех нейронов (n+1)-го слоя; однако возможен вариант соединения *n*-го слоя с произвольным (*n*+*p*)-м слоем. Пример слоистой сети представлен на рисунке 4.

2. Сети с обратными связями (recurrentnetworks). Тут информация передается с последующих слоев на предыдущие. После введения обратных связей сеть она превращается в динамическую систему и возникает вопрос об ее устойчивости.

Число слоев и число нейронов в каждом слое ограничено ресурсами компьютера.

Задачи которые решает нейросеть:

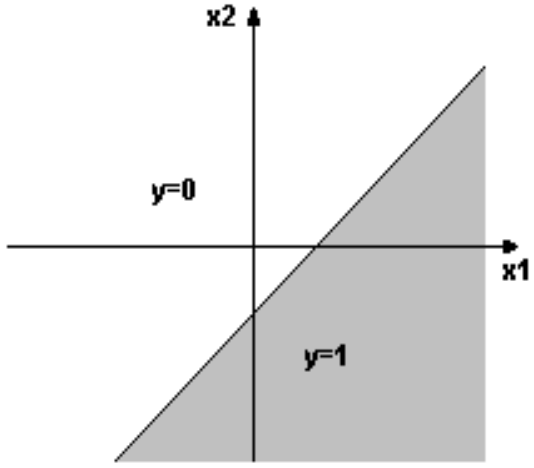


Рис. 5. Нейрон с пороговой функцией активации разделяет пространство входов гиперплоскостью на две части

1. Задача классификации.

Рассмотрим более подробно, что делает один формальный нейрон в самом простом случае, когда его функцией активации является ступенька.

Он дает на выходе 1 если $S = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + w_0 \geq 0$ и 0 если $S < 0$. Таким образом, он разбивает пространство входов на две части с помощью некоторой гиперплоскости. Если у нас всего два входа, то это пространство двухмерно и нейрон будет разбивать его с помощью прямой линии. Это разбиение определяется весовыми коэффициентами w_i нейрона.

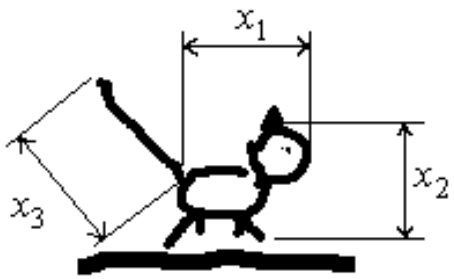


Рис. 6. Кошка, характеризуемая ее линейными размерами.

Если мы теперь составим из N таких нейронов слой, то получим разбиение пространства входов N гиперплоскостями. Каждой области в этом пространстве будет соответствовать некий набор нулей и единиц, формирующийся на выходе нашего слоя.



Рис. 7. Простая задача распознавания – линейно разделимые множества.

Таким образом, такая нейронная сеть пригодна для решения задачи многомерной классификации или распознавания образов.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Допустим у нас есть некий объект, имеющий набор свойств $x_1, \ldots, x_n$. Это может быть, скажем, кошка, характеризуемая ее линейными размерами. Мы можем подать эти параметры на вход нашей сети и сказать, что определенная комбинация нулей и единиц на выходе соответствует объекту «кошка». Таким образом, наша сеть способна выполнять операцию распознавания.

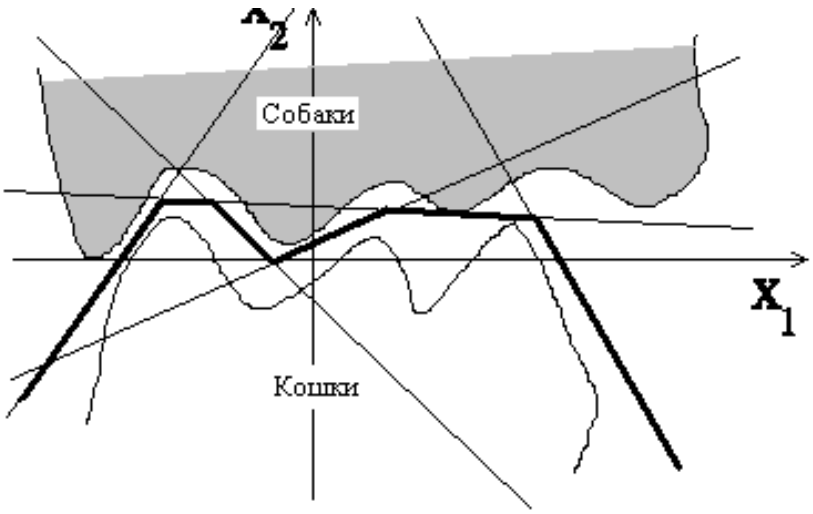


Рис. 8. Задача распознавания с линейно неразделимыми множествами.

Не для всякой задачи распознавания, существует однослойная сеть ее решающая. Если у нас, например, стоит задача различения кошек и собак, причем распределение точек в пространстве параметров такое, как показано на рисунке, когда достаточно провести одну линию (или гиперплоскость) чтобы разделить эти два множества. Тут достаточно одного нейрона.

В более общем случае такое невозможно, например, как на рис.7. В этом случае мы можем использовать слой нейронов, но одному множеству (скажем, кошка) будет соответствовать уже не одна, а множество комбинаций нулей и единиц.

Если мы теперь выходы нашего первого слоя нейронов используем в качестве входов для нейронов второго слоя, то нетрудно убедиться, что каждая комбинация нулей и единиц на выходе второго слоя может соответствовать некоему объединению, пересечению и инверсии областей, на которые пространство входов разбивалось первым слоем нейронов. Двухслойная сеть, таким образом, может выделять в пространстве входов произвольные выпуклые односвязные области.

В случае еще более сложной задачи, когда требуется различать многосвязные области произвольной формы, всегда достаточно трехслойной сети.

Нейронные сети с пороговыми функциями активации способны решить произвольную задачу многомерной классификации.

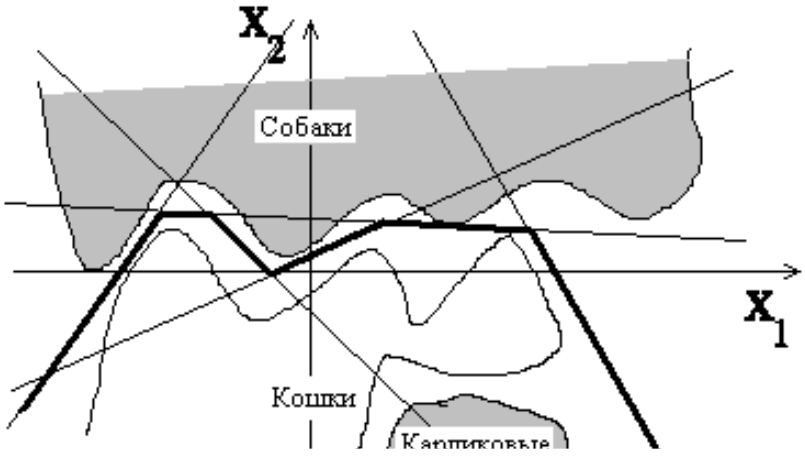


Рис. 9. Задача распознавания с многосвязными областями.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

51. Классификатор на основе нейронной сети Хемминга

Рассмотрим классификатор распознающий картинки с цифрами от 0 до 9. Для реализации классификатора используется нейронная сеть Хемминга.

Искусственная нейронная сеть Хемминга (рис.1) была предложена в 1987 г. Р. Липманом. Она представляет собой сеть с двумя обрабатывающими слоями: первый слой - слой Хемминга, второй слой - немного изменённая сеть Хопфилда.

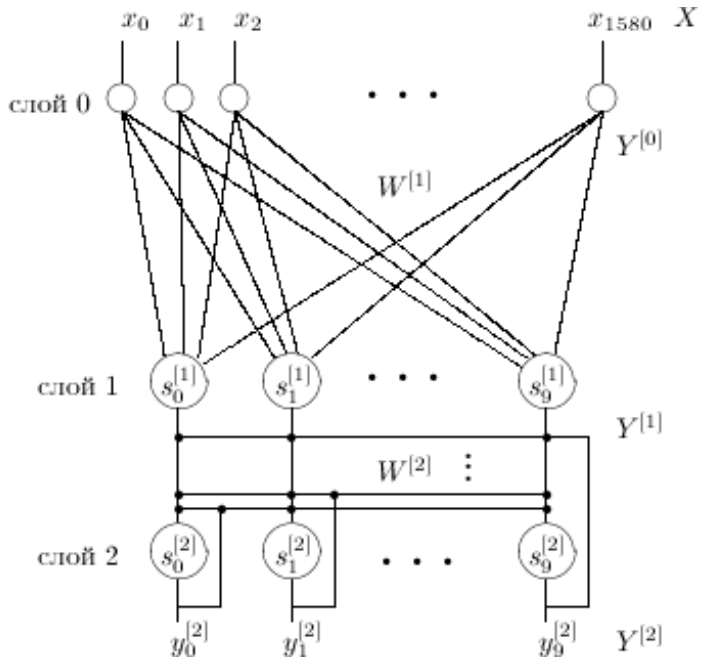


Рисунок 1: нейронная сеть Хемминга

На вход нейронной сети подаётся картинка, представляющая собой матрицу 51 x 31 точек, таким образом входной (или распределительный) слой сети (слой 0 на рис.1) состоит из 51 x 31 = 1581 нейронов.

Размерность скрытого слоя (слой 1 на рис.1) определяется количеством идеальных образцов, хранимых сетью, т.е. 10 нейронов. Размерность выходного слоя равна размерности скрытого слоя нейронной сети, т.е. так же 10 нейронов.

На выходе получаем вектор $y(y_0...y_9)$. Номер j , для которого $y_j^{[2]} > 0$, соответствует номеру класса входного образца.

Параметры сети

Первый слой - слой Хемминга, представляет собой нейронную сеть с прямыми связями. Этот слой вычисляет меру подобия (расстояние Хемминга) между всеми эталонными образцами, хранящимися в сети, и текущим входом сети. Расстояние Хемминга это количество отличающихся компонент во входном и эталонном векторах.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Для этого слоя используется линейная функция активации. Состояние и выходное значение нейрона i слоя 1 определяется следующим образом:

$$y_i^{[1]} = s_i^{[1]} = \sum_{j=0}^{1580} y_j^{[0]} \cdot w_{ij}^{[1]}$$

где

- $y_i^{[1]}$ - выходное значение нейрона i слоя 1;
- $s_i^{[1]}$ - состояние нейрона i слоя 1;
- $y_j^{[0]}$ - вход нейронной сети номер j ;
- $w_{ij}^{[1]}$ - весовой коэффициент синаптической связи, соединяющей вход j нейронной сети и нейрон i слоя 1;

Второй слой это сеть Хопфилда, она используется для разрешения конфликтов, когда входной вектор оказывается похож по Хеммингу на более чем один идеал.

Начальное состояние нейронов слоя 2 определяется выходом первого слоя:

$s_i^{[2]}(0)=y_i^{[1]}$

Отношение переходов между состояниями нейронов слоя 2 определяется следующим образом:

$$s_i^{[2]}(t+1) = y_i^{[2]}(t) - c \cdot \sum_{j \neq i} y_j^{[2]}(t) \qquad (1)$$

где

- $s_i^{[2]}(t)$ - состояние нейрона i слоя 2 в момент времени t;
- $y_i^{[2]}(t)$ - выходное значение нейрона i слоя 2 в момент времени t;
- c - коэффициент торможения, $0< c < 0.1$;

Легко видеть, что отношение переходов (1) эквивалентно обычному определению состояния нейрона (сумма взвешенных входов) с постоянной матрицей весов(2).

$$w_{ij}^{[2]} = \begin{cases} 1 & , \ i = j \\ -c & , \ i \neq j \end{cases} \qquad (2)$$

В качестве функции активации слоя 2 будем использовать следующую функцию :

$$y_i^{[2]} = f(s_i^{[2]}) = \begin{cases} s_i^{[2]} & , \ s_i^{[2]} > 0 \\ 0 & , \ s_i^{[2]} \leq 0 \end{cases}$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Метод обучения

Для нейронной сети Хемминга используется метод обучения "без учителя". Весовые коэффициенты слоя 1 определяются следующим образом:

$$w_{ji}^{[1]} = 0.5 * x_i^j \quad (3)$$

где

- $w_{ji}^{[1]}$ - весовой коэффициент синаптической связи, соединяющей вход i нейронной сети и нейрон j слоя 1;
- x_i^j - компонента номер i идеального (учебного) вектора номер j;

Весовые коэффициенты слоя 2 фиксированы отношением переходов(1).

Алгоритм обучения нейронной сети сводится к начальной инициализации матрицы весов слоя 1 по (3).

Примером реализации описанной выше модели классификатора может быть работа с картинками.

На вход классификатора подаются картинки размером 51 x 31 точек, на выходе получаем - номер класса, к которому принадлежит входная картинка. Такой классификатор обладает хорошими способностями к обобщению, может корректно распознавать даже сильно искаженные и зашумленные картинки, к тому же, в отличии от классификатора на основе многослойной нейронной сети, он не требует идеальных выходных векторов и длительного процесса обучения.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

52. Асоціативна пам'ять на базі нейронної мережі Хопфілда.

Ассоциативная память это память с адресацией по содержанию, т.е. выборка и запись в ячейки такой памяти выполняется в зависимости от их содержимого.

Ассоциативную память можно успешно реализовать как нейронную сеть, которая должна восстанавливать предъявленный слегка измененный образ, например, с наложенным шумом или содержащий лишь важную часть исходного образа. На основе таких систем можно создавать базы знаний, эффективный поиск в которых осуществляется не по ключу, а на основе предъявленного фрагмента требуемого образа.

1 Модель

Ассоциативную память будем строить на основе сети Хопфилда, которая представляет собой однослойную нейронную сеть с обратными связями (рис.1) и принадлежит классу т.н. релаксационных нейронных сетей.

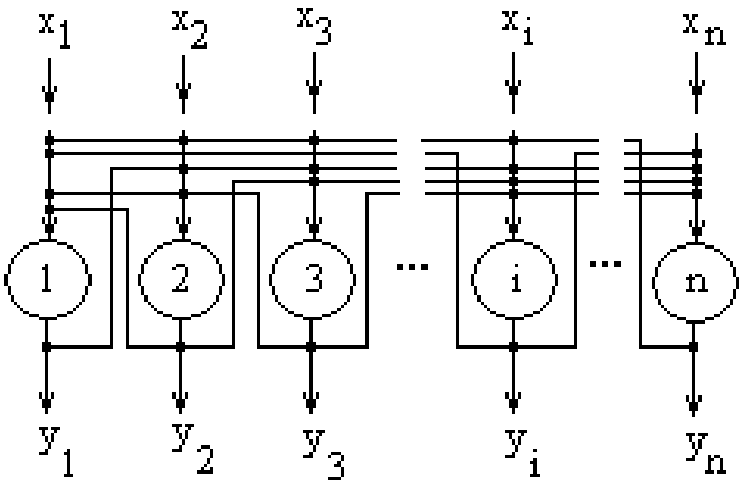


Рисунок 1: сеть Хопфилда

В основе функционирования таких сетей лежит итеративный принцип работы. На каждой итерации происходит обработка результата, полученного на предыдущем шаге. Циркуляция информации в нейронной сети происходит до тех пор, пока не установится состояние равновесия, т.е. значения её выходов перестанут изменяться.

Матрица весовых коэффициентов для сети Хопфилда - симметрична $w_{ij}=w_{ji}$ и имеет нулевую главную диагональ $w_{ii}=0$, т.е. отсутствует обратная связь нейрона на себя.

Хопфилд ввел понятие энергии сети. Главное свойство функции энергии (1) состоит в том, что в процессе эволюции состояний сети она уменьшается и достигает локального минимума - аттрактора, в котором сохраняет постоянное значение.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

Все возможные состояния сети можно представить как некое подобие холмистой поверхности. Каждая точка такой поверхности соответствует определенному сочетанию активностей нейронов данной сети, а высота подъема поверхности в данной точке характеризует значение энергии для такого сочетания активностей нейронов. Поведение сети аналогично поведению тяжелого шарика, который скатывается по склону в ближайшую ложбину.

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} y_j y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; ; \quad i \neq j \qquad (1)$$

здесь: E - энергия сети; w_{ij} - весовой коэффициент; x_i - вход i-го нейрона; y_i, y_j - выходы нейронов i, j.

Сеть Хопфилда можно использовать как ассоциативную память. В этом случае хранимые в сети образцы являются аттракторами. Ассоциативная память на основе сети Хопфилда работает в двух режимах:

- сохранения - веса связей в сети устанавливаются так, чтобы каждому из образцов, хранимых сетью, соответствовал свой аттрактор (ложбина на поверхности). Для достижения этой цели обычно используется метод обучения Хебба.
- восстановления - входной пример используется как начальное состояние сети, далее сеть эволюционирует согласно своей динамике. Выходной образец устанавливается, когда сеть достигает равновесия.

Экспериментально показано, что максимальное число образцов, которые может хранить сеть Хопфилда, 0.15 * n (где n - число нейронов сети). Когда число сохраняемых образцов p < 0.15 * n, данные успешно извлекаются из памяти. Число ложных аттракторов возрастает, когда p достигает емкости сети.

1.2 Параметры сети

Состояние нейрона номер i определим следующим образом:

$$s_i = \sum_{j=1}^{100} w_{ij} \cdot y_j \; ; \; (w_{ii} = 0) \qquad (2)$$

Будем использовать пороговою функцию с порогом T=0 :

$$y_i = f(s_i) = \begin{cases} 0 & , \; s_i = T \\ 1 & , \; s_i > T \\ -1 & , \; s_i < T \end{cases} \qquad (3)$$

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com

1.2 Метод обучения

В качестве способа обучения используется метод Хебба:

$$w_{ij}(t+1)=w_{ij}(t)+y_i(t) * y_j(t) \quad ; \quad (\text{для } i = j \ : \ w_{ii}=0) \qquad 4)$$

где

- w_{ij} - весовой коэффициент связи i-того и j-того нейронов.
- y_i, y_j - выходы i-того и j-того нейронов.

2 Реализация

В начале в память "записываются" несколько разных картинок. Далее - памяти предъявляются другие, похожие картинки, по которым восстанавливаются оригиналы.

Данная реализация ассоциативной памяти хранит картинки 10 x 10 символов, используется дискретная сеть Хопфилда из 100 нейронов.

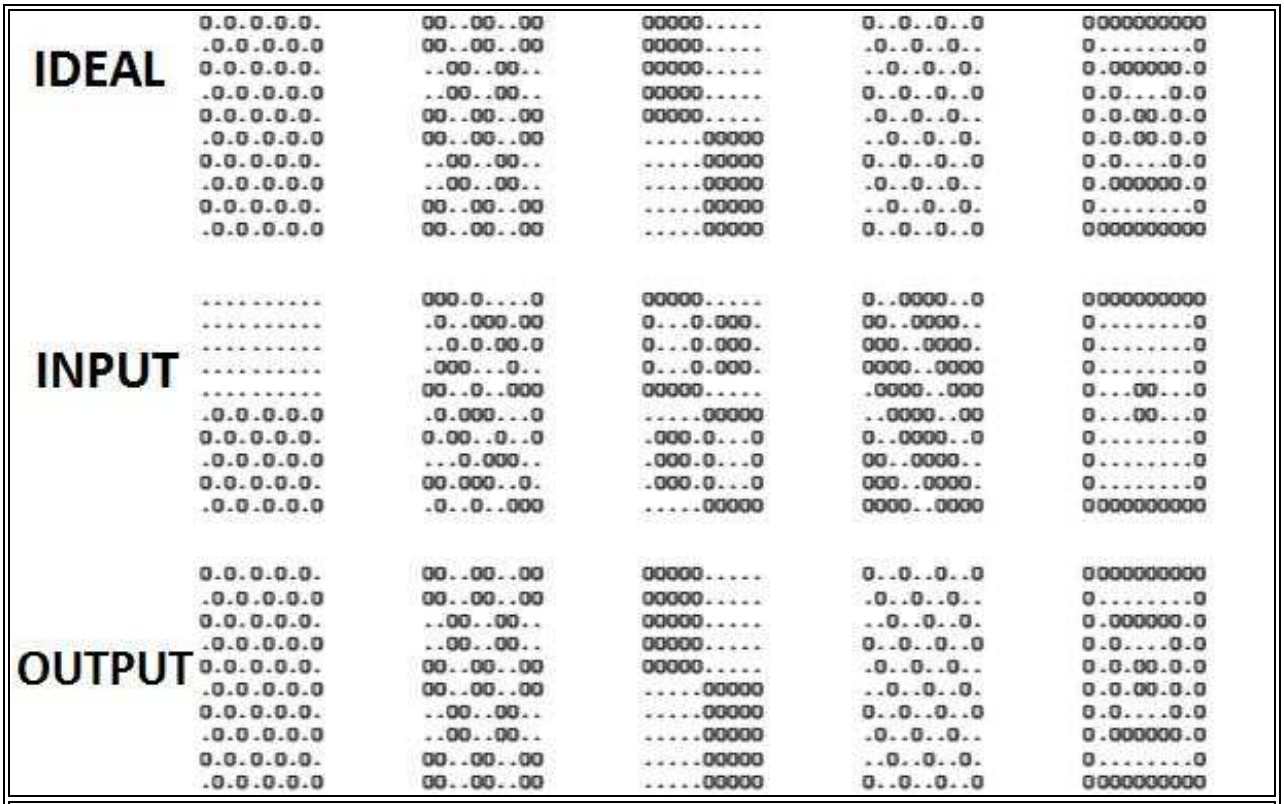


Рисунок 2: Результат работы программы

PS.Неплохо было бы почитать еще и билет 50.Если время будет.

Распечатано программой FinePrint - Купить www.fineprint.com