

Дж.Л.Лэм
ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СОЛИТОНОВ
Содержание

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава 1. Введение	10
1.1. Уравнение Штурма—Лиувилля	11
1.2. Уравнение Кортевега—де Фриза	13
1.3. Многосолитонные решения как потенциалы Баргмана	17
1.4. Физическая система, приводящая к уравнению Кортевега—де Фриза	22
1.5. Распространение на случай других нелинейных уравнений	29
1.6. План дальнейшего изложения	30
Глава 2. Вопросы одномерной теории рассеяния	32
2.1. Колебания струны	32
2.2. Рассеяние осциллятором	36
2.3. Упруго закрепленная струна	39
2.4. Уравнение Шрёдингера	43
2.5. Рассеяние потенциалом вида sech^2	45
2.6. Соответствующие уравнения Штурма—Лиувилля	48
2.7. Двумерные волны в неоднородной среде	61
2.8. Общий подход к проблеме рассеяния	56
2.9. «Обрезанные» потенциалы	70
2.10. Рассеяние импульсов—уравнения Марченко	73
2.11. Задача рассеяния Захарова — Шабата	78
2.12. Связь между уравнением Шрёдингера и уравнениями Захарова—Шабата: уравнения Риккати	91
Глава 3. Одномерная обратная задача рассеяния	95
3.1. Соотношение между потенциалом и функциями $A_R(x, y)$ и $A_L(x, y)$	95
3.2. Наличие связанных состояний	98
3.3. Безотражательные потенциалы	101
3.4. Коэффициент отражения—рациональная функция k	103
3.5. Потенциалы Баргмана	106
3.6. Метод обратной задачи рассеяния Захарова — Шабата для действительных потенциалов	109
3.7. Безотражательные потенциалы для системы Захарова—Шабата	112
3.8. Коэффициент отражения для системы Захарова — Шабата в виде рациональной функции k	115
3.9. Система Захарова — Шабата с комплексным потенциалом	116
Глава 4. Уравнение Кортевега—де Фриза	122
4.1. Стационарное решение	122
4.2. Результаты численных решений	124
4.3. Обратная задача рассеяния и уравнение Кортевега — де Фриза	127
4.4. Многосолитонные решения	130

4.5. Сохраняющиеся величины	134
4.6. Начальный профиль импульса в виде $\delta'(x)$: автомодельное решение	138
4.7. Другой подход к линейным уравнениям для уравнения Кортевега — де Фриза	140
Глава 5. Некоторые эволюционные уравнения, связанные с системой Захарова—Шабата	142
5.1. Модифицированное уравнение Кортевега—де Фриза	143
5.2. Уравнение sine-Gordon	152
5.3. Кубическое уравнение Шрёдингера	164
5.4. Общий класс разрешимых нелинейных эволюционных уравнений	169
Глава 6. Приложения I	178
6.1. Волны на мелкой воде и уравнение Кортевега—де Фриза	178
6.2. Волны на мелкой воде и кубическое уравнение Шрёдингера	183
6.3. Ионно-звуковые волны в плазме и уравнение Кортевега—де Фриза	186
6.4. Классическая модель одномерной теории дислокаций — уравнение sine-Gordon	190
6.5. Выбор параметров разложения	194
Глава 7. Приложения II	198
7.1. Самоиндуцированный вихрь	199
7.2. Движение нити	202
7.3. Форма односолитонной нити	205
7.4. Другие солитонные уравнения	208
7.5. Описание электромагнитного поля	213
7.6. Двухуровневый атом	214
7.7. Уравнения модели	216
7.8. Неподвижные атомы—предел sine-Gordon	218
7.9. Движущиеся атомы и теорема площадей	221
7.10. Решение методом обратной задачи	224
7.11. Распространение в усилителе	229
7.12. Метод обратной задачи	234
7.13. Вырождение уровней	245
Глава 8. Преобразования Бэклунда	249
8.1. Преобразование Бэклунда для уравнения Кортевега—де Фриза	249
8.2. Преобразования Бэклунда для некоторых других эволюционных уравнений	256
8.3. Более общие преобразования Бэклунда	261
Глава 9. Теория возмущений	267
Уравнение Кортевега—де Фриза	267
9.1. Основные уравнения	267
9.2. Возмущение односолитонного решения	270
Кубическое уравнение Шрёдингера	279
9.3. Основные уравнения	279
9.4. Затухание единичного солитона	282
Литература	286

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Каждый приступающий к изучению традиционного курса математической физики скоро убеждается, что большую часть времени ему придется посвятить теории небольшого числа конкретных линейных дифференциальных уравнений в частных производных, среди которых особо важны всего три: волновое уравнение, уравнение теплопроводности и уравнение Лапласа. Первостепенная роль этих (и некоторых других) уравнений, сформулированных еще в прошлом веке, объясняется в основном их исключительной универсальностью — трудно найти раздел точного естествознания, в котором бы они не применялись.

Для последних двух десятилетий развития математической физики характерен важный прогресс. Оказалось, что список фундаментальных уравнений можно продолжить. В него следует включить несколько существенно нелинейных уравнений, по крайней мере три из которых — уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ), нелинейное уравнение Шрёдингера (НШ) и уравнение sine-Gordon, — возникая в самых разнообразных задачах физики, механики и отчасти чистой математики, по степени универсальности стали сравнимы с основными уравнениями математической физики.

Эти уравнения родственны между собой. Все они имеют специальные, специфически нелинейные частные решения — солитоны, локализованные в пространстве и во времени. Солитоны сталкиваются между собой, могут образовывать связанные состояния и вообще во многом ведут себя подобно классическим частицам. Упомянутые уравнения обладают также исключительным свойством «полной интегрируемости» в том смысле, что для них существуют бесконечные наборы коммутирующих интегралов движения. Кроме того, существует процедура эффективного исследования этих уравнений, позволяющая, в частности, точно вычислять бесконечные серии их частных решений. Эта процедура основана на теории прямой и обратной задач рассеяния для некоторых обыкновенных дифференциальных операторов типа Штурма — Лиувилля; она получила название метода обратной задачи рассеяния.

Несомненно, что солитоны широко распространены в природе. Первым изученным примером солитонов были уединенные волны на поверхности жидкости, но постепенно выяснилось, что с помощью солитонов можно описывать самые разные физические объекты — от элементарных частиц до черных дыр и рукавов галактик. И во многих случаях математическая модель,

используемая для построения солитонных решений, оказывается системой уравнений, интегрируемой методом обратной задачи рассеяния.

Предлагаемая читателю книга Дж. Лэма-мл. «Введение в теорию солитонов» была опубликована в США в 1980 г. В том же году в СССР вышла монография В. Е. Захарова, С. В. Манакова, С. П. Новикова и Л. П. Питаевского «Теория солитонов» (М.: Наука). В этих двух книгах впервые дано последовательное изложение теории солитонов и метода обратной задачи рассеяния. Книга Лэма по сравнению с «Теорией солитонов» гораздо более элементарна, и для предварительного знакомства с предметом следует рекомендовать именно ее. В книге осуществлен подробный вывод уравнения КдФ для трех различных физических задач, вполне характеризующий его универсальность, с большой полнотой описаны солитонные и многосолитонные решения КдФ. В книге содержится также достаточно полное описание солитонных решений уравнения sine-Gordon и «модифицированного» уравнения КдФ; решениям нелинейного уравнения Шрёдингера, однако, уделено меньшее внимание.

Большой интерес представляет седьмая глава, в которой, в частности, описано приложение метода обратной задачи рассеяния к теории лазера и к эффекту самондущированной прозрачности (следует напомнить, что в этих областях работы Дж. Лэма были новаторскими).

К сожалению, целый ряд работ советских авторов, в том числе широко цитируемых на Западе, в настоящей книге совершенно не упоминается. Чтобы восполнить этот пробел, мы включили их в составленный нами дополнительный список, помещенный в конце книги.

В. Е. Захаров

ПРЕДИСЛОВИЕ

Назначение этой книги — служить элементарным введением в теорию солитонов, предмет, который позволил нам чудесным образом понять внутренний механизм некоторых нелинейных процессов. У читателя предполагается тот объем знаний, который обычно накапливается у старшекурсника или недавнего выпускника, специализирующегося в области физики или прикладной математики. Предполагается некоторое умение интегрировать в комплексной плоскости; предварительное знакомство с задачами на собственные значения, желательно в контексте квантовой теории, окажется полезным, но не существенным. Поскольку вопрос касается решения нелинейных уравнений в частных производных, предполагается, конечно, некоторое знакомство с линейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Приложения предполагают некоторое знание гидродинамики, электромагнетизма и квантовой теории двухуровневого атома.

Предмет, таким образом, излагается на элементарном уровне, и внимание концентрируется на исходных представлениях и вводных понятиях, игравших важную роль в создании предпосылок для некоторых направлений текущих исследований в этой области. В книге не затрагиваются сделанные в последнее время переформулировки задач, использующие современную дифференциальную геометрию и теорию групп, а также остроумные методы Р. Хироты и результаты по солитонам в решетках, первооткрывателем которых был М. Тода.

Способ подачи материала определяется скорее педагогически, чем историческими соображениями, и для рассмотрения отобраны вопросы, которые, по мнению автора, выражают самым простым и непосредственным образом основные идеи этой области исследований. Используются такие аналитические формулировки задач, которые представляются естественными физикам, воспитанному в традициях прикладных наук; обычно физики-прикладники считают более строгие методы чистой математики менее наглядными.

После вводной главы, где вкратце указана связь между нелинейным дифференциальным уравнением, решение которого ведет себя как солитон (уравнение Кортевега — де Фриза), и линейной задачей на собственные значения для уравнения Шрёдингера, в двух последующих главах дается элементарное изложение одномерной теории рассеяния и методов обратной задачи рассеяния. Затем в гл. 4 этими методами рассматривается уравнение Кортевега —

де Фриза. Глава 5 дает соответствующее введение в другие наиболее распространенные солитонные уравнения. В гл. 6 и 7 даны некоторые примеры появления солитонных уравнений в различных физических ситуациях. Глава 8 служит введением в преобразования Бэклунда, и, наконец, в гл. 9 рассматривается ставший недавно популярным вопрос теории возмущений солитонов.

Изложение материала здесь не требует вспомогательных сведений, так что ссылки на оригинальную литературу не обязательны. В книгу включен ряд ссылок на дополнительный материал, равно как и ссылки на работы, расширяющие или дополняющие данное изложение; эти ссылки не вызваны стремлением документировать приоритет или вершины в истории развития данного раздела науки. Читатель, интересующийся обширной библиографией, может обратиться к статье Скотта, Чу и Мак-Лафлина «Солитоны: новое понятие в прикладных науках», *Proc. IEEE* 63, 1443—1483, а также к книге «Солитоны» под редакцией Буллафа и Кодри (пер. с англ. — М.: Мир, 1983).

Некоторые аспекты развития теории солитонов можно проследить начиная от исследований математиков XIX века. Опыт автора показывает, что именно в теории солитонов обращение к исследованиям предшественников особенно вознаграждается. Так, это в полной мере относится к работам Форсайта (A. R. Forsyth). Некоторые аспекты теории солитонов представляются осуществлением идеи заключительного абзаца шестого тома «Теории дифференциальных уравнений» Форсайта, где он пишет: «Мое желание — постоянно демонстрировать те аспекты предмета, которые... обещают быть руководством на путях исследований, по которым пойдут ученые грядущих дней».

Я хотел бы выразить благодарность Ф. А. Оттеру за замечание, касающееся появления в теории дислокаций уравнения, известного теперь как уравнение *sine-Gordon*. Используемый в этой книге метод решения основан на преобразованиях Бэклунда. Перенос этих результатов на случай распространения когерентных оптических импульсов, где тоже используется уравнение *sine-Gordon*, привели меня к рассмотрению явления, известного теперь как солитоны в когерентной оптике.

Я признателен А. Пирани за тщательное прочтение многих глав этой книги, а также М. Форесту и П. Шлейзеру, прочитавшим многие разделы; с их помощью были устранены некоторые ошибки и неясности, и сочинение стало менее несовершенным, чем оно было бы в противном случае.

Я признателен также У. Фергюссону-мл. за предоставление результатов численного решения уравнения Кортевега — де Фриза, приведенных в гл. 4, и М. Скалли и Ф. Хопфу за численные результаты, показанные на рис. 7.6. Я благодарен за помощь в использовании ЭВМ, которую оказали мне Л. Аппельбаум и Р. Диллон

при подготовке рисунков с профилями импульсов. Наконец, я благодарен моей жене Джоан за многие часы, ушедшие на печатание книги.

Я буду весьма признателен моим читателям, которые окажут мне любезность, прислав любые поправки и предложения по улучшению книги.

Дж. Л. Лэм-мл.

Тусон, Аризона, июль 1980

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

За последнее десятилетие очень продвинулось наше понимание того класса нелинейных уравнений в частных производных, которые обычно принято называть эволюционными. Ключом к нашим теперешним знаниям является уяснение факта, что такие уравнения обладают элементарными решениями специального вида. Эти решения имеют характер локализованных возмущений, или импульсов, и сохраняют свою форму даже после взаимодействия друг с другом, т. е. ведут себя в каком-то смысле подобно частицам. Для процессов, описываемых линейными уравнениями в частных производных, где применим принцип суперпозиции, подобная взаимная независимость элементарных решений хорошо известна, но обнаружение ее в процессах, определяемых нелинейными уравнениями в частных производных, явилось полной неожиданностью. Такие локализованные возмущения стали известны под названием *солитонов*.

Хотя дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие движения солитонов, нелинейны, они тесно связаны с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями типа Штурма — Лиувилля, поэтому изучению солитонов должна предшествовать сводка соответствующих результатов теории Штурма — Лиувилля; они излагаются в гл. 2 и 3 настоящей книги.

Однако перед изложением таких предварительных сведений мы вкратце опишем в гл. 1 некоторые существенные элементы теории солитонов. Во-первых, правильно поставленный вопрос, касающийся обыкновенного дифференциального уравнения типа Штурма — Лиувилля, должен привести нас к рассмотрению одного из нелинейных уравнений, обладающих солитонными решениями. Возникающее при этом уравнение известно как уравнение Кортевега — де Фриза; оно встречается в ряде физических задач, главным образом в гидродинамике. На уровне нашего теперешнего понимания такая фундаментальная связь между уравнениями Штурма — Лиувилля и Кортевега — де Фриза кажется неожиданной. Во-вторых, чтобы подчеркнуть тесную связь между солитонами и обыкновенными дифференциальными уравнениями, мы построим формулу, выражающую взаимодействие между двумя солитонами. С этой целью мы используем метод, разработанный Баргманом [11] для получения некоторого класса потенциалов в уравнении Шрёдингера, которое является частным случаем уравнения Штурма — Лиувилля. Несколько нестрого можно сказать, что аналитические выражения, описывающие многосолитонные ре-

нения, являются просто потенциалами Баргмана. Если рассмотреть это двухсолитонное решение, то природа солитона как частицы станет очевидной. Наконец, мы покажем, как уравнение Кортевега — де Фриза возникает в простом примере распространения нелинейных диспергирующих волн.

1.1. УРАВНЕНИЕ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

В прикладной математике часто встречается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda - U(x)] y = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (1.1.1)$$

с граничными условиями в точках $x = a$ и $x = b$ (каждая из них может быть бесконечно удаленной точкой). Это уравнение является простым примером уравнения Штурма — Лиувилля (Ince, [59]). Наиболее детально уравнение (1.1.1) изучалось в квантовой теории, где оно называется уравнением Шрёдингера. Иногда это название сохраняется даже в тех случаях, когда оно применяется в классической физике, например при описании распространения волн в неоднородных средах.

Для заданной функции $U(x)$, которая в задачах квантовой теории служит потенциалом, граничные условия могут привести к тому, что уравнение будет иметь ненулевое решение (собственную функцию $y_j(x)$) только при некоторых специальных значениях постоянной λ (собственных значениях λ_j). Задачей Штурма — Лиувилля называется определение зависимости решения y от параметра λ и зависимости собственных значений λ_j от граничных условий.

Одним из простейших примеров такой задачи на собственные значения является случай $U(x) = 0$ при нулевых граничных условиях, $y(a) = y(b) = 0$. Решение соответствующего уравнения $y'' + \lambda y = 0$ с указанными граничными условиями показывает, что собственными функциями являются функции $y_j(x) = \sin[(\lambda_j)^{1/2} x]$, $j = 1, 2, 3, \dots$, с собственными значениями $\lambda_j = [j\pi/(b-a)]^2$. С ростом длины системы $(b-a)$ значения λ_j становятся все более тесно расположенными, и в пределе $(b-a) \rightarrow \infty$ мы получаем непрерывную область собственных значений $0 < \lambda < \infty$. Если предыдущее уравнение описывает колебательную систему, то каждая собственная функция $y_j(x)$ представляет собой форму нормальной моды системы. Примером служит однородная струна, колеблющаяся в свободном пространстве, концы которой закреплены в точках $x = a$ и $x = b$. Так как собственные значения связаны с резонансными частотами колебаний системы, их обычно называют спектром собственных значений. В рассмотренном здесь случае однородной струны в каждой нормальной моде колеблется вся система целиком. Однако можно построить неоднородные системы

с неоднородностью, представленной функцией $U(x)$, для которых колебания ограничиваются только частью системы. В этом случае колебание ограничивается неоднородностью, а не границами. Примером служит колеблющаяся струна, часть которой погружена в упругую среду. Эта система будет обсуждаться подробно в гл. 2.

В последующем изложении мы всегда будем иметь дело с бесконечно протяженными системами; следовательно, любые локализованные решения всегда будут связаны с неоднородностями. Повидимому, полнее всего такие локализованные решения изучены в квантовой теории, где они используются для описания дискретных уровней энергии атомных систем.

Существует относительно мало функций $U(x)$, для которых решение соответствующего дифференциального уравнения (1.1.1) может быть выражено через стандартные трансцендентные функции. Например (это будет детально рассмотрено в гл. 2), выбор функции $U(x)$ в виде $U(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x$ при граничных условиях $y(\pm\infty) = 0$ приводит к единственному собственному значению $\lambda_1 = -1$ и отвечающей ему собственной функции $y_1 = \operatorname{sech} x$, т. е. $y_1 = \operatorname{sech} x$ является решением уравнения $y_1'' + (-1 + 2 \operatorname{sech}^2 x) y_1 = 0$, обращаясь в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$. В квантовой теории интерпретация этого результата состоит в том, что частица заперта в потенциальной яме, форма которой пропорциональна $\operatorname{sech}^2 x$, а единственное значение λ пропорционально энергии, которой может обладать частица в этой яме. В качестве классической интерпретации того же уравнения мы можем рассматривать туннельное распространение волны в среде с зависящим от глубины показателем преломления, $n^2 = 1 + 2 \operatorname{sech}^2 x$, где глубина измеряется от положения, соответствующего максимальному значению $n(x)$. Неоднородность создает в среде волновод. Волна может быть локализована на глубине, около которой показатель преломления достигает своего максимального значения. Если знак потенциала изменить на обратный, так что $U(x) = 2 \operatorname{sech}^2 x$, то потенциал является отталкивающим и связанного состояния нет. Аналогично, когда показатель преломления задается соотношением $n^2 = 1 - 2 \operatorname{sech}^2 x$, волны стремятся уйти из области изменения показателя преломления, и туннельного эффекта нет. Этот пример будет подробнее рассмотрен в гл. 2.

Когда область $(b - a)$ становится бесконечной, уравнения типа (1.1.1), кроме дискретных отрицательных значений λ_i и связанных с ними локализованных волновых функций $y_i(x)$, могут также обладать непрерывным семейством решений, соответствующих различным положительным значениям λ . В случае квантовой механики физическая интерпретация таких решений состоит в том, что некоторое препятствие, характеризуемое потенциалом $U(x)$, рассеивает падающую на него частицу с энергией, пропорциональной λ . В рассматриваемых здесь одномерных задачах наличие рассеивателя обычно проявляется через отражение и прохождение па-

дающей волны. (В последующих рассуждениях центральную роль будет играть тот факт, что в результате определенного выбора потенциала волна может проходить полностью, без отражения.) Конечно, на рассеивающий центр могут попадать частицы с любой положительной энергией, и, следовательно, мы ожидаем, что существует непрерывная область положительных собственных значений $0 < \lambda < \infty$. В примере упоминавшейся выше неоднородной среды случаю $\lambda > 0$ соответствует отражение и прохождение волны произвольно высокой частоты, при этом волна падает на неоднородный слой извне. Во второй главе мы покажем, что для приведенной выше потенциальной функции $U(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x$ решения рассеяния строятся как линейные комбинации функций $y_{\pm} = \exp(\pm i \sqrt{\lambda} x) (i \sqrt{\lambda} \mp \operatorname{th} x)$. Часто нахождение решения уравнения Шрёдингера с заданной потенциальной функцией $U(x)$ называется решением задачи рассеяния.

1.2. УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

Если бы функция $U(x)$ в уравнении (1.1.1) содержала параметр, например α , так что $U = U(x, \alpha)$, то можно было бы ожидать, что изменение формы потенциала при изменении параметра α приведет к некоторому соответствующему изменению собственных значений λ_j , т. е. можно было бы ожидать зависимости λ_j от α . Естественно задать вопрос: существуют ли потенциальные функции $U(x, \alpha)$, для которых λ_j при изменении α остается постоянным? Сразу же напрашивается достаточно тривиальный пример — замена любой функции $U(x)$ на $U(x + \alpha)$ просто переносит неоднородность потенциала или показателя преломления вдоль оси x , что изменяет положение запертой частицы или смещает звуковой канал и не влияет на энергию связанного состояния или частоту локализованной волны. Таким образом, это изменение α не влияет на собственные значения λ_j . Для сравнения с последующими результатами следует отметить, что функции $U(x + \alpha)$ удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению в частных производных $U_{\alpha} - U_x = 0$. Мы покажем, что есть и другие, более интересные возможности, которые приводят к *нелинейным* уравнениям в частных производных. В частности будет показано, что функции $U(x, \alpha)$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$U_{\alpha} + UU_x + U_{xxx} = 0, \quad (1.2.1)$$

тоже оставляют собственные значения неизменными. Если считать параметр α временем (конечно, соответствующее уравнение Штурма — Лиувилля не является зависящим от времени уравнением Шрёдингера), то уравнение (1.2.1) является уравнением Кортевега — де Фриза.

Таким образом, нахождение решений уравнения Кортевега — де Фриза может быть связано с определением зависящих от параметра

потенциалов в уравнении Штурма — Лиувилля и наоборот. Упомянутая в разд. 1.1 задача рассеяния касалась определения волновой функции y при заданном потенциале U . В данном случае речь идет об определении потенциала по некоторой заданной информации о волновой функции (более детально это будет рассмотрено в гл. 4). Задача определения потенциала по информации о волновой функции называется *обратной* задачей рассеяния.

Используя метод Лакса [77], мы можем легко видеть, что уравнение Кортевега — де Фриза является одним из бесконечного числа уравнений, описывающих такое изменение потенциала уравнения Шредингера, при котором собственные значения остаются постоянными. Чтобы убедиться в этом, удобно записать уравнение Шредингера, или Штурма — Лиувилля, в виде

$$Ly = \lambda y, \quad (1.2.2)$$

где $L = D^2 - u(x, t)$ и $D = d/dx$. Дифференцируя это уравнение по времени, получим

$$(Ly)_t = Ly_t + L_t y = \lambda_t y + \lambda y_t. \quad (1.2.3)$$

Так как $(Ly)_t = y_{xxt} - uy_t - u_t y = Ly_t - u_t y$, то $L_t = -u_t$. Нас интересует такая зависимость u и, следовательно, y от времени, при которой $\lambda_t = 0$. Рассмотрим случай, когда зависимость y от времени может быть выражена в виде $y_t = By$, где B — некоторый линейный дифференциальный оператор, подлежащий определению (не обязательно единственный). Конечно, пространственное изменение y дается уравнением (1.2.2). Теперь уравнение (1.2.3) может быть записано в виде

$$(-u_t + [L, B])y = \lambda_t y, \quad (1.2.4)$$

где $[L, B] \equiv LB - BL$. Мы замечаем, что λ будет постоянным ($\lambda_t = 0$) при условии, что B выбирается таким образом, чтобы оно удовлетворяло уравнению $-u_t + [L, B] = 0$. В общем случае это операторное уравнение; однако, как мы сейчас увидим, некоторые ограничения на вид B могут привести к тому, что выражение для $[L, B]$ не будет содержать дифференциальных операторов, а будет только функцией u и ее пространственных производных. В этом случае мы тем самым построили дифференциальное уравнение в частных производных для $u(x, t)$, такое, что если оно удовлетворяется, то $\lambda_t = 0$, т. е. собственные значения остаются постоянными во времени.

В качестве первого примера дифференциального оператора B , который может приводить к постоянным собственным значениям, рассмотрим $B_1 = aD$, где сначала допускается, что a может быть функцией u и ее пространственных производных. Затем по опре-

делению L

$$\begin{aligned}[L, B_1]y &= (LB_1 - B_1L)y = \\ &= (D^2 - u)(ay_x) - aD(y_{xx} - uy) = \\ &= 2a_x D^2 y + a_{xx} Dy + au_{xx}y.\end{aligned}\quad (1.2.5)$$

Если в этом последнем выражении коэффициенты при $D^2 y$ и Dy обращаются в нуль, т. е. если $a = \text{const}$, то $[L, B_1] = au_{xx}$ и соотношение (1.2.4) принимает вид

$$(u_t - au_{xx})y = -\lambda_t y. \quad (1.2.6)$$

Поэтому λ_t будет равно нулю и, таким образом, λ не будет зависеть от времени при условии, что u удовлетворяет уравнению в частных производных $u_t - au_{xx} = 0$. Так как решением этого уравнения является любая функция от $x + at$, мы видим, что любой потенциал вида $u(x + at)$ будет оставлять λ не зависящим от времени. Этот в каком-то смысле неинтересный пример, в котором параметр at просто переносит потенциал вдоль оси x со скоростью $-a$, уже упоминался косвенно в предыдущем рассмотрении.

Чтобы получить более интересный пример, можно было бы попытаться взять B в виде $B_2 = aD^2 + fD + g$, где f и g являются в общем случае функциями u и ее пространственных производных и снова, как и в предыдущем примере, $a = \text{const}$. Однако простые вычисления показывают, что никакого обобщения предыдущего результата при этом не получается: мы просто приходим к тому же самому дифференциальному уравнению в частных производных для u .

Если мы сделаем следующий шаг и рассмотрим $B_3 = aD^3 + fD + g$, мы найдем, что

$$\begin{aligned}[L, B_3]y &= (2f_x + 3au_x)D^2 y + (f_{xx} + 2g_x + 3au_{xx})Dy + \\ &+ (g_{xx} + au_{xxx} + fu_x)y.\end{aligned}\quad (1.2.7)$$

Если теперь снова потребовать, чтобы коэффициенты при $D^2 y$ и Dy обращались в нуль, то получится новое дифференциальное уравнение в частных производных. Обращение в нуль этих коэффициентов дает простые дифференциальные соотношения, которые легко проинтегрировать. Мы находим, что $f = -(3/2)au + c_1$ и $g = -(3/4)au_x + c_2$, где c_1 и c_2 — произвольные функции времени, появляющиеся в результате интегрирования. Тогда из (1.2.7) имеем

$$[L, B_3] = \left[\frac{1}{4} a (u_{xxx} - 6uu_x) + c_1 u_x \right] y. \quad (1.2.8)$$

Снова из соотношения $-u_t + [L, B_3] = 0$ следует дифференциальное уравнение в частных производных для u . Чтобы упростить коэффициенты полученного уравнения, можно положить постоянную a равной -4 . Функцию $c_1(t)$ также можно положить равной нулю, так как простым преобразованием к новым независимым

переменным, задаваемым соотношениями $dx' = dx + c_1(t)dt$ и $dt' = dt$, ее можно исключить из окончательного уравнения для u . Таким образом, находим, что новое уравнение для u имеет вид

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.2.9)$$

Если u определяется этим уравнением, то левая часть уравнения (1.2.4) обращается в нуль, и, следовательно, мы снова получим, что $\lambda_t = 0$. С точностью до множителя -6 , который можно устранить, полагая $u = -U/6$, это уравнение совпадает с нелинейным дифференциальным уравнением (1.2.1). Это одна из стандартных форм уравнения Кортевега — де Фриза. Таким образом, если эволюция потенциала, входящего в уравнение Шрёдингера, определяется уравнением Кортевега — де Фриза, то собственное значение λ остается постоянным.

Наконец, поскольку функции f и g в операторе B_3 теперь известны, известна и зависимость решения y от времени. Она дается уравнением

$$y_t = B_3 y = (-4D^3 + 6uD + 3u_x)y. \quad (1.2.10)$$

Функцию $c_2(t)$ мы также положили равной нулю, так как от нее можно избавиться, введя новую зависимую переменную $\tilde{y} = y \exp\left(\int c_2 dt\right)$. Следует отметить, что изменение y в пространстве, описываемое уравнением

$$y_{xx} - uy = \lambda y, \quad (1.2.11)$$

и его изменение во времени (уравнение (1.2.10)) выражаются с помощью линейных дифференциальных уравнений.

Как и следовало теперь ожидать, можно построить [77, 42] бесконечную последовательность уравнений более высокого порядка, характеризуемых нечетными линейными операторами B_5, B_7, \dots . Однако в настоящее время в прикладных физических задачах эти эволюционные уравнения более высокого порядка, по-видимому, не возникают, и здесь они рассматриваться не будут. Вместо этого мы проанализируем два простых решения уравнения Кортевега — де Фриза (1.2.9).

Односолитонное решение уравнения Кортевега — де Фриза

Простейшим решением уравнения Кортевега — де Фриза является стационарное решение, которое можно получить, полагая $u = u(x - ct)$. Решение представляет собой возмущение, движущееся в положительном направлении оси x с постоянной скоростью c .

В гл. 4 будет показано, что это решение уравнения Кортевега — де Фриза имеет вид

$$u = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right]. \quad (1.2.12)$$

В этом решении проявляется общая черта нелинейных волн — связь между амплитудой и скоростью импульса. Импульсы с большей амплитудой движутся быстрее и, кроме того, они уже. Простое интегрирование показывает, что ширина и амплитуда импульса связаны соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{|u|} = \pi. \quad (1.2.13)$$

Решение (1.2.12), представляющее собой локализованное возмущение, симметричное относительно своей средней точки, является односолитонным решением уравнения Кортевега — де Фриза. Однако истинно солитонный характер этого возмущения еще не очевиден. Существенная черта солитона состоит в том, что приведенное выше аналитическое выражение сохраняется (за исключением смещения по фазе) и при взаимодействии двух или более таких импульсов. Чтобы убедиться в этом, мы должны рассмотреть решение, более сложное, чем приведенное выше стационарное решение. В последующих главах будут описаны способы получения многосолитонных решений, основанные на методе обратной задачи рассеяния. Чтобы дать предварительный обзор этих более общих результатов, мы получим здесь двухсолитонное решение с помощью простого метода, предшествующего более сложным методам обратной задачи рассеяния. Этот метод был предложен Баргманом [11] для радиального уравнения Шрёдингера, но в равной мере он применим и в данном случае, когда областью изменения независимой переменной является вся ось x . Метод делает очевидной тесную связь между потенциалами и многосолитонными решениями.

1.3. МНОГОСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ КАК ПОТЕНЦИАЛЫ БАРГМАНА

Приведенное выше выражение для солитона $2 \operatorname{sech}^2 x$ в роли потенциала для уравнения Шрёдингера называется потенциалом Эккарта [33]. Его можно получить методом Баргмана. Здесь мы просто опишем метод в общих чертах, а также используем его затем для получения двухсолитонных решений. Детальнее этот метод будет описан в гл. 3.

Линейный потенциал Баргмана — одиночный солитон

Исходным пунктом метода Баргмана является предположение, состоящее в том, что существуют потенциалы уравнения Шрёдингера

$$y'' + (k^2 - u)y = 0, \quad (1.3.1)$$

такие, что решение этого уравнения может быть записано в виде

$$y = e^{ikx} F(k, x), \quad (1.3.2)$$

где $F(k, x)$ является полиномом от k . Если $F(k, x)$ имеет нулевой порядок по k и не зависит от x , мы просто получим очевидный выбор потенциала $u = 0$. Простейшим нетривиальным примером является линейная форма

$$y_1 = e^{ikx} [2k + ia(x)], \quad (1.3.3)$$

где числовые множители вводятся для удобства в дальнейшем. Подставляя это решение в уравнение Шрёдингера и приравнявая члены с одинаковыми степенями k , получим

$$a' = -u, \quad a'' = ua. \quad (1.3.4)$$

Исключая u и интегрируя, получим

$$a' + a^2/2 = 2\mu^2, \quad (1.3.5)$$

где $2\mu^2$ — постоянная интегрирования. Подстановка

$$a = 2w'/w \quad (1.3.6)$$

приводит к линейному уравнению

$$w'' - \mu^2 w = 0, \quad (1.3.7)$$

решение которого имеет вид

$$w = \alpha e^{\mu x} + \beta e^{-\mu x}. \quad (1.3.8)$$

Согласно первому из равенств (1.3.4) и подстановке (1.3.6), имеем

$$u = -2(\ln w)''. \quad (1.3.9)$$

Вместе с w в виде (1.3.8) это дает

$$u = -2\mu^2 \operatorname{sech}^2(\mu x - \varphi). \quad (1.3.10)$$

Далее, поскольку результат должен быть решением уравнения Кортевега — де Фриза, постоянные интегрирования α и β , а следовательно, и φ являются функциями времени. Подстановка выражения (1.3.10) в уравнение Кортевега — де Фриза (1.2.9) показывает, что

$$\varphi_t = 4\mu^3 \quad (1.3.11)$$

и, следовательно,

$$\mu = -2\mu^2 \operatorname{sech}^2(\mu x - 4\mu^3 t). \quad (1.3.12)$$

Мы пренебрегли постоянной интегрирования, фиксирующей начало координат. Если положить $\mu = \sqrt{c}/2$, то можно убедиться, что это выражение для u согласуется со стационарным решением, даваемым формулой (1.2.12). Таким образом, линейный случай метода Баргмана дает односолитонное решение уравнения Кортевега — де Фриза.

Квадратичный потенциал Баргмана — взаимодействие двух солитонов

Можно сделать следующий шаг, рассматривая квадратичный потенциал Баргмана. Мы покажем, что это обобщение даст нам желаемое асимптотическое выражение, описывающее взаимодействие двух солитонов. Мы начнем с предположения, что u_2 имеет вид

$$u_2 = e^{ika} [4k^2 + 2ika(x) + b(x)]. \quad (1.3.13)$$

Подстановка этого выражения в уравнение Шрёдингера дает три условия: $u = -a'$, $ua = a'' + b'$ и $ub = b''$. Детальное рассмотрение этих уравнений мы отложим до гл. 3, сейчас мы просто отметим, что, полагая, как и ранее, $a = 2w'/w$ и распространяя на этот случай анализ, описанный выше для случая линейного потенциала, мы находим, что w удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Решение его может быть записано в виде

$$w = \sigma (ae^{\rho x} + \alpha^{-1}e^{-\rho x}) + \rho (\beta e^{\sigma x} + \beta^{-1}e^{-\sigma x}), \quad (1.3.14)$$

где ρ и σ суть постоянные ($\rho > \sigma > 0$), а α и β являются постоянными интегрирования, которые, если потребовать, чтобы потенциал удовлетворял также и уравнению Кортевега — де Фриза, снова будут функциями времени. В гл. 3 будет показано, что собственные значения зависят только от двух постоянных ρ и σ и, таким образом, не зависят от времени.

Решение, даваемое формулой (1.3.14), удобнее выразить в виде

$$w = 2 [\sigma \operatorname{ch}(\rho x - \varphi) + \rho \operatorname{ch}(\sigma x - \psi)], \quad (1.3.15)$$

где $\exp(-\varphi) = \alpha$ и $\exp(-\psi) = \beta$. Затем мы находим, что

$$a = 2 \frac{w'}{w} = 2\rho\sigma \frac{\operatorname{sh}(\rho x - \varphi) + \operatorname{sh}(\sigma x - \psi)}{\sigma \operatorname{ch}(\rho x - \varphi) + \rho \operatorname{ch}(\sigma x - \psi)}. \quad (1.3.16)$$

Полагая

$$\rho = p + q, \quad \sigma = p - q, \quad \varphi = \theta + \chi, \quad \psi = \theta - \chi, \quad (1.3.17)$$

мы получим, что

$$a = 2(p^2 - q^2)(p \operatorname{cth} \xi - q \operatorname{th} \eta)^{-1}, \quad (1.3.18)$$

где $\xi = \rho x = \theta + \chi$ и $\eta = q x - \chi$. Тогда потенциал имеет вид

$$u = -a' = -2(p^2 - q^2) \frac{p^2 \operatorname{cosech}^2 \xi + q^2 \operatorname{sech}^2 \eta}{(p \operatorname{cth} \xi - q \operatorname{th} \eta)^2}. \quad (1.3.19)$$

Чтобы это выражение было также и решением уравнения Кортевега — де Фриза, функции θ и χ должны соответствующим образом зависеть от времени. Непосредственная подстановка в уравнение Кортевега — де Фриза выражения для u в виде (1.3.19) была бы, конечно, очень трудоемкой. Вместо этого заметим, что это выражение становится много проще для таких значений x и t , для которых либо $|\xi| = |px - \theta| \gg 1$, либо $|\eta| = |qx - \chi| \gg 1$. Так как θ и χ не зависят от x , их можно в этих пределах определить для всех x .

Для $|\xi| \gg 1$ и $|\eta| < 1$ мы легко получим

$$u \approx -\frac{2q^2(p^2 - q^2) \operatorname{sech}^2 \eta}{(\pm p - q \operatorname{th} \eta)^2}, \quad (1.3.20)$$

где верхний (нижний) знак берется для больших и положительных (отрицательных) ξ . Этот результат можно переписать в виде

$$u^{(q)} = -2q^2 \operatorname{sech}^2(qx - \chi \mp \Delta), \quad (1.3.21)$$

где

$$\Delta = \operatorname{arth}(q/p). \quad (1.3.22)$$

Верхний индекс был введен для того, чтобы подчеркнуть, что результат является просто выражением для единичного солитона (1.3.12), где q — параметр амплитуды — скорости. С другой стороны, для $|\eta| \gg 1$, но $|\xi| < 1$, аналогичное выражение дает

$$u^{(p)} = -2p^2 \operatorname{sech}^2(px - \theta \mp \Delta), \quad (1.3.23)$$

где верхний (нижний) знак берется для больших и положительных (отрицательных) η .

Теперь, подставляя (1.3.21) и (1.3.23) в уравнение Кортевега — де Фриза (1.2.9), можно легко получить зависимости θ и χ от времени. Результаты оказываются теми же, что и в линейном случае, а именно

$$\theta_t = 4p^3, \quad \chi_t = 4q^3. \quad (1.3.24)$$

Таким образом, существуют такие значения x и t , для которых квадратичный потенциал Баргмана сводится к двум отдельным солитонным импульсам. Так как $p > q$, то импульс $u^{(p)}$ перемещается с большей скоростью, чем импульс $u^{(q)}$. При $x \rightarrow \pm \infty$ решение принимает вид двух разделенных импульсов, как показано на рис. 1.1. Мы получаем следующую картину: более быстрый импульс догоняет более медленный, взаимодействует с ним и появляется впереди него. Возможно, эти результаты станут понятнее, если рассмотреть теперь полное решение (1.3.19) для всех x и t . Полагая $p = 3$ и $\sigma = 1$, мы получим часто упоминаемый численный пример (Забуски, [118]; Гарднер и др., [42]). Тогда $p = 2$, $q = 1$, $\theta = 32t$, $\chi = 4t$, и двухсолитонное решение (1.3.19) может

быть преобразовано к обычно цитируемому выражению

$$u = -12 \frac{4 \operatorname{ch}(2x - 8t) + \operatorname{ch}(4x - 64t) + 3}{[3 \operatorname{ch}(x - 28t) + \operatorname{ch}(3x - 36t)]^2}. \quad (1.3.25)$$

При $t=0$, когда оба солитона полностью перекрываются, это выражение сводится к следующему: $u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x$. Раньше

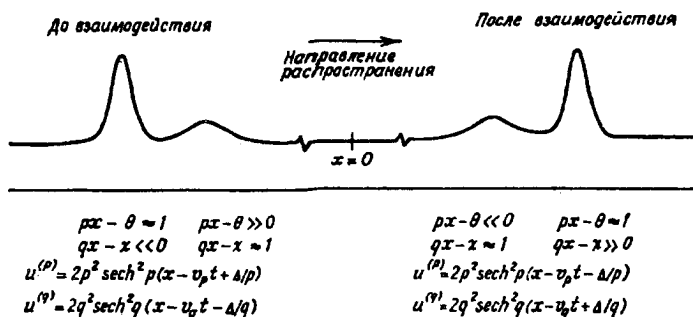


Рис. 1.1. Два изолированных солитона до и после взаимодействия.

и позже, когда два солитона в достаточной степени отделены друг от друга, выражение (1.3.25) приводится к сумме двух выражений, даваемых формулами (1.3.21) и (1.3.23). Нелинейное взаимодей-

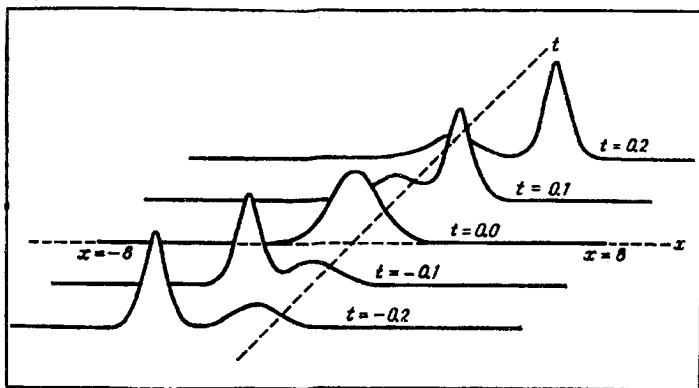


Рис. 1.2. Двухсолитонное взаимодействие.

ствие двух солитонов проявляется в том, что при $t=0$, когда они полностью перекрываются, амплитуда импульса равна 6, а это меньше амплитуды отдельного импульса при $p=2$, амплитуда которого равна 8. График двухсолитонного решения показан на рис. 1.2. Импульсы упруго проходят друг через друга, и единствен-

ным следствием их взаимодействия является фазовый сдвиг на 2Δ . Этот сдвиг по фазе отчетливо проявляется при рассмотрении траектории каждого импульса на плоскости (x, t) , как показано на рис. 1.3.

Мы сейчас видели, что можно установить тесную связь между решениями уравнения Кортевега — де Фриза и зависящими от параметра потенциалами в уравнении Шрёдингера. Для нахождения

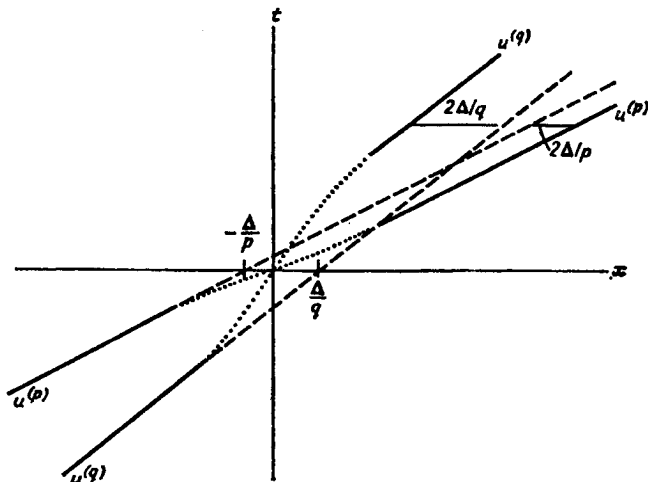


Рис. 1.3. Фазовый сдвиг пространственно-временных траекторий двух взаимодействующих солитонов.

солитонных решений уравнения Кортевега — де Фриза можно также использовать простой метод получения некоторого класса потенциалов (потенциалы Баргмана) и решений уравнения Шрёдингера. Прежде чем излагать далее этот и другие методы, покажем, как в простых физических ситуациях возникает уравнение Кортевега — де Фриза.

1.4. ФИЗИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, ПРИВОДЯЩАЯ К УРАВНЕНИЮ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

Можно указать много примеров физических систем, приводящих к уравнению Кортевега — де Фриза; некоторые из них будут описаны в гл. 6. Все они обладают двумя особенностями. Во-первых, им присуща характерная гидродинамическая нелинейность, описываемая членом вида $u \partial u / \partial x$. Во-вторых, ограничиваясь рассмотрением лишь возмущений малой амплитуды и пренебрегая вышеупомянутым членом, можно получить одночастотные реше-

ния с пространственно-временной зависимостью вида $\exp[i(kx - \omega t)]$. При этом имеет место связь между волновым числом k и частотой ω , которая для малых k и ω может быть аппроксимирована выражением $\omega = a_1 k + b_1 k^3$, где a_1 и b_1 — постоянные. Фазовая скорость волны дается соотношением $c_p = \omega/k$, и если $b_1 = 0$, мы видим, что c_p постоянно. При $b_1 \neq 0$ волны с различными значениями k будут двигаться с различными скоростями и форма импульса, составленного из спектра таких волн, при распространении будет меняться. В частности, локализованный импульс будет проявлять тенденцию к расплыванию. Можно сказать, что указанное волновое движение обладает дисперсией, и соотношение между ω и k называют дисперсионным соотношением задачи.

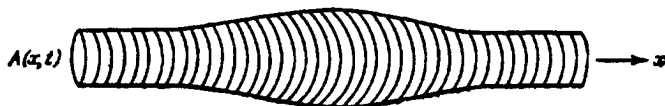


Рис. 1.4. Солитон на трубе, состоящей из упругих колец.

В этом случае основная часть импульса движется с групповой скоростью $v_g = \partial\omega/\partial k|_{k=k^*}$, где k^* — среднее значение величин k , составляющих импульс (Унзе, [117] гл. 11). Аналогичные соображения можно применить к эквивалентному соотношению $k = a_2\omega + b_2\omega^3$.

К сожалению, все примеры нелинейных диспергирующих сред таковы, что прежде чем получить интересующее нас уравнение, скажем уравнение Кортевега — де Фриза, придется проделать утомительные вычисления, связанные с нахождением возмущений. Не является исключением и рассматриваемая здесь физическая система, хотя, по-видимому, анализ возмущений здесь не приводит к столь длинным вычислениям, как в большинстве других примеров. К тому же соответствующая экспериментальная ситуация в этом случае весьма наглядна. Рассмотрим несжимаемую жидкость в бесконечно длинном круглом цилиндре. Стенки цилиндра составлены из упругих колец, как показано на рис. 1.4. Локальное увеличение давления в жидкости (рассматриваются только продольные изменения давления) вызывает радиально-симметричное растяжение упругих колец в области, где давление повышено. Так как кольца между собой не связаны (но расположены достаточно близко друг к другу, так что жидкость между ними не протекает), упругие волны в осевом направлении вдоль цилиндрической поверхности не распространяются. Такую границу иногда называют локально реагирующей. Движение жидкости описывается уравнениями сохранения массы и количества движения. Если длина каждого кольца вдоль оси мала по сравнению с интересующей нас

длиной, то уравнение сохранения массы может быть записано в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Av) = 0, \quad (1.4.1)$$

где v — скорость жидкости и A — площадь поперечного сечения цилиндра. Видно, что площадь играет роль, аналогичную роли плотности в сжимаемой жидкости. Для сохранения количества движения можно записать уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.4.2)$$

где ρ_0 — постоянная плотность жидкости и $p(x, t)$ — давление в жидкости. Нужно также получить третье уравнение, связывающее площадь кольца с давлением. Поскольку, как отмечалось выше, площадь аналогична плотности, недостающее уравнение играет роль уравнения состояния.

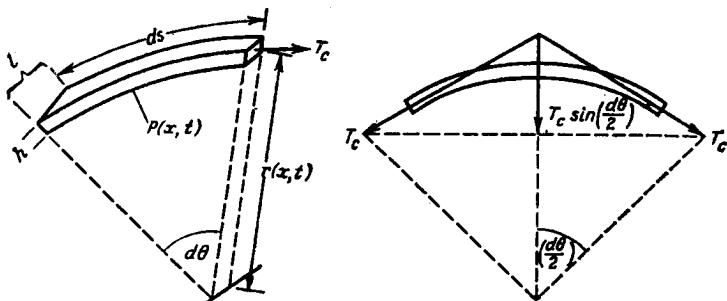


Рис. 1.5. Силы, действующие на сегмент упругого кольца.

Из рис. 1.5 можно видеть, что применение закона Ньютона к сегменту упругого кольца приводит к уравнению

$$\rho_R h l ds \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t) l ds - 2T_c h l \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right), \quad (1.4.3)$$

где $r(x, t)$ — радиус, ρ_R — плотность, а h и l — толщина и осевая длина кольца соответственно. Для малых углов $d\theta$ можно заменить синус угла его аргументом, а также положить $d\theta = ds/a$, где a — равновесный радиус кольца. Наконец, окружное напряжение в кольце связано с растяжением кольца посредством модуля Юнга обычным соотношением

$$E = \frac{\text{напряжение}}{\text{деформация}} = \frac{T_c}{2\pi(r-a)/2\pi a}. \quad (1.4.4)$$

Замечая, что $A = \pi r^2$, так что $\Delta A = A - \pi a^2 \approx 2\pi r \Delta r$, мы находим, что (1.4.3) можно переписать в виде

$$\frac{2\pi a}{\rho_R h} p(x, t) = \frac{E}{\rho_R a^2} \Delta A + \frac{\partial^2 \Delta A}{\partial t^2}. \quad (1.4.5)$$

Величина $(E/\rho_R a^2)^{1/2}$ является угловой частотой радиальных колебаний кольца [80]. Вводя безразмерные величины с помощью соотношений $A = \pi a^2 \tilde{A}$, $p = \rho_0 \tilde{p}$ и $t = T t'$, где $\rho_0 = Eh/2a$ и $T^2 = \rho_R a^2/E$, получим

$$\tilde{p} = (\tilde{A} - 1) + \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t'^2}. \quad (1.4.6)$$

Итак, вводя длину $L = (\rho_R ah/2\rho_0)^{1/2}$ и полагая $x = Lx'$ и $v = L\tilde{v}/t$, получаем безразмерные уравнения

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} (\tilde{A} \tilde{v}) = 0, \quad (1.4.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t'} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x'} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x'}. \quad (1.4.8)$$

Сначала исследуем дисперсионное соотношение для линеаризованного варианта системы (1.4.6)–(1.4.8). Линейные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t'} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x'} = 0, \quad (1.4.9a)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t'} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x'}, \quad (1.4.9b)$$

$$\tilde{p} = \tilde{A} - 1 + \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t'^2}. \quad (1.4.9c)$$

Если допустить, что зависимости функций \tilde{p} , \tilde{v} и $\tilde{A} - 1$ от координаты и времени имеют вид $\exp[i(\kappa x' - \tilde{\omega} t')]$, то система (1.4.9) становится системой однородных алгебраических уравнений для амплитуд \tilde{p} , \tilde{v} и $\tilde{A} - 1$. Нетривиальные решения этой системы находятся обычным образом из условия обращения в нуль определителя системы. Мы получаем

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2}, \quad (1.4.10)$$

что является дисперсионным соотношением данной задачи. Для малых $\tilde{\omega}$ и κ это соотношение можно записать в виде одного из двух приближенных выражений: $\kappa = \tilde{\omega} + \frac{1}{2} \tilde{\omega}^3$ или $\tilde{\omega} = \kappa - \kappa^3/2$. Таким образом, мы получаем те кубические члены, о которых упоминалось ранее. Следует отметить, что самый важный кубический член является следствием упругости цилиндрической стенки. Если бы в уравнении (1.4.5) не было производной по времени, то κ было пропорционально $\tilde{\omega}$. Тогда групповая скорость волны равнялась бы единице (в используемых здесь единицах измерения) и не было бы дисперсии.

Если выразить $\tilde{\omega}$ через κ , то введенный выше экспоненциальный множитель принимает вид $\exp\{i[\kappa x' - (\kappa - \kappa^3/2)t']\}$. (Можно было бы также рассмотреть этот множитель в случае, когда κ

выражается через $\bar{\omega}$.) При разложении нелинейных уравнений методом возмущений полезно в качестве отправного пункта рассмотреть случай линейной дисперсии. Это можно проделать, вводя новые независимые переменные $\xi = \kappa(x' - t')$ и $\eta = \kappa^3 t'$. Тогда дифференциальные операторы примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \kappa \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = -\kappa \frac{\partial}{\partial \xi} + \kappa^3 \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (1.4.11)$$

Записывая нелинейные уравнения (1.4.6)–(1.4.8) в переменных η и ξ , получим

$$-\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \xi} + \kappa^2 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{A} \bar{v}) = 0, \quad (1.4.12a)$$

$$-\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \kappa^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}, \quad (1.4.12b)$$

$$\bar{p} = \tilde{A} - 1 + \kappa^2 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \xi^2} - 2\kappa^4 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \xi \partial \eta} + \kappa^6 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \eta^2}. \quad (1.4.12c)$$

Подставим теперь в систему (1.4.12) разложения теории возмущений

$$\bar{p} = \kappa^2 p_1 + \kappa^4 p_2 + \dots, \quad (1.4.13a)$$

$$\tilde{A} = 1 + \kappa^2 A_1 + \kappa^4 A_2 + \dots, \quad (1.4.13b)$$

$$\bar{v} = \kappa^2 v_1 + \kappa^4 v_2 + \dots \quad (1.4.13c)$$

и потребуем, чтобы уравнения удовлетворялись для каждой степени κ^2 . Члены в (1.4.12), пропорциональные κ^2 , записываются в виде

$$-\frac{\partial A_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0, \quad (1.4.14a)$$

$$-\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = 0, \quad (1.4.14b)$$

$$p_1 = A_1, \quad (1.4.14c)$$

откуда мы можем сделать вывод, что $p_1 = A_1 = v_1 + \varphi(\eta)$, где $\varphi(\eta)$ — произвольная функция. Члены в (1.4.13), пропорциональные κ^4 , суть

$$-\frac{\partial A_2}{\partial \xi} + \frac{\partial A_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (A_1 v_1) + \frac{\partial v_2}{\partial \xi} = 0, \quad (1.4.15a)$$

$$-\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial p_2}{\partial \xi}, \quad (1.4.15b)$$

$$p_2 = A_2 + \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi^2}. \quad (1.4.15c)$$

Из этих уравнений легко исключить A_2 , v_2 и p_2 . В результате имеем

$$\frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \frac{3}{2} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \Phi \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0. \quad (1.4.16)$$

С помощью преобразований $\bar{v} = v_1 + \Phi(\eta)/2$ и $\tau = \eta$, $\zeta = \xi + \frac{3}{2} \int \Phi d\eta$ можно избавиться от двух последних членов этого уравнения. Тогда мы получаем уравнение Кортевега — де Фриза в виде

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (1.4.17)$$

В результате нашего предыдущего рассмотрения этого уравнения можно ожидать, что в исследуемой физической системе возмущение может распространяться в виде солитона. Из выражения (1.2.12), которое является односолитонным решением уравнения Кортевега — де Фриза стандартного вида (1.2.9), легко находим, что соответствующее решение уравнения (1.4.17) имеет вид

$$\bar{v} = c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} \left(\zeta - \frac{1}{2} c \tau \right) \right]. \quad (1.4.18)$$

Вернемся теперь к размерным переменным. Рассмотрим, в частности, радиальное смещение колец, так как его можно легко наблюдать. Изменение площади равно $\Delta A = 2\pi a(r - a) = \pi a^2 \kappa^2 \bar{v}$. Полагая теперь максимум амплитуды солитона равным r_0 (т. е. вводя определение $a \kappa^2/2 = r_0$), получаем

$$r - a = r_0 \operatorname{sech}^2 [(x - Vt)/W]. \quad (1.4.19)$$

Здесь W (которое можно считать полушириной амплитуды солитона) равно

$$W = L \sqrt{\frac{2a}{r_0}} = a \sqrt{\frac{h p_R}{r_0 p_0}}. \quad (1.4.20)$$

Входящую в (1.4.19) скорость солитона V удобно выразить через скорость низкочастотных линейных волн системы. Мы находим, что

$$V = V_0(1 + r_0/a), \quad (1.4.21)$$

где, как будет показано ниже, $V_0^2 = Eh/2\rho_0 a$. Итак, уравнение Кортевега — де Фриза принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + V_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{3}{2} v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} V_0 L^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (1.4.22)$$

Для рассмотрения низкочастотного ($\omega \ll T^{-1}$) предела линейных волн системы мы пренебрежем членом с производной по вре-

мени в уравнении (1.4.5), так что $\rho \simeq (Eh/2\pi a^3)\Delta A$. Кроме того, линеаризация (1.4.1) и (1.4.2) дает

$$\frac{\partial \Delta A}{\partial t} + \pi a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.4.23)$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{Eh}{2\pi \rho_0 a^3} \frac{\partial \Delta A}{\partial x}. \quad (1.4.24)$$

Исключая из этих двух уравнений v , получим линейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \Delta A}{\partial x^2} - \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 \Delta A}{\partial t^2} = 0, \quad (1.4.25)$$

где V_0 дается выражением, использованным в (1.4.21).

Из (1.4.21) видно, что при $r_0 \ll a$ (последнее необходимо для оправдания линеаризации уравнения (1.4.3), примененной при рассмотрении колебаний кольца) скорость солитона несколько больше скорости распространения линейных волн V_0 . Для отношения плотностей $\rho_R/\rho_0 = 8$ (это соответствует стали и воде) и отношения амплитуды солитона к толщине кольца $r_0/h = 2$ находим также, что ширина солитона $2W$ приближенно равна удвоенному диаметру кольца.

Основываясь на простых интуитивных соображениях, можно ожидать, что существует стационарное решение уравнения Кортевега — де Фриза. Это решение (и, таким образом, сам солитон) можно интерпретировать как результат баланса между двумя конкурирующими эффектами. Один из них является результатом нелинейности уравнения. Тип нелинейности таков, что она стремится вызвать укручение и опрокидывание волнового профиля, что происходит всегда при наличии дисперсии.

Чтобы детальнее рассмотреть эту конкуренцию, обратимся к уравнению Кортевега — де Фриза (1.4.22), записанному в системе координат, движущейся со скоростью V_0 . Тогда имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{3}{2} v \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (1.4.26)$$

где $\beta = V_0^2 L/2$. Стационарное решение имеет вид

$$v = 8 \left(\frac{\beta}{W^2} \right) \operatorname{sech}^2 \left[\frac{x - 4(\beta/W^2)t}{W} \right]. \quad (1.4.27)$$

Чтобы исследовать влияние нелинейного члена в уравнении (1.4.26), ограничимся лишь рассмотрением простого нелинейного уравнения $v_t + 3vv_x/2 = 0$. Член $3v/2$ играет роль скорости волны. Так как скорость зависит от самого решения, можно ожидать, что части профиля волны, где скорость v велика, будут двигаться

быстрее, чем части волны вблизи края профиля, где v приближается к нулю. Для стационарного решения, данного формулой (1.4.27), самая большая скорость должна соответствовать максимальному значению v и, следовательно, даваться выражением $(3/2) \cdot 8(\beta/W^2)$. Время t_{NL} , требуемое для того, чтобы пик переместился с этой скоростью на расстояние, равное полуширине импульса, и, таким образом, произошло опрокидывание волны, равно $t_{NL} = (2/3) \cdot (1/8) (W^2/\beta) W \approx W^3/\beta$, если пренебречь числовыми множителями.

Рассмотрим теперь влияние дисперсии в (1.4.26), для чего пренебрежем нелинейным членом. Тогда мы имеем линейное уравнение $v_t + \beta v_{xxx} = 0$. Оно обладает решениями в виде бегущих волн $\exp(ikx + i\beta k^3 t)$. Самые большие волновые числа k , дающие вклад в импульс ширины $2W$, приближению равны $k = 2\pi/2W \approx 1/W$. Такие волновые числа приведут к изменению фазы на π и тем самым вызовут значительную деформацию первоначальной формы волны за время t_D , даваемое соотношением $\beta(1/W)^3 t_D \approx \pi$, т. е. $t_D \approx W^3/\beta$, а это величина того же порядка, что и t_{NL} . Таким образом, для импульсов с амплитудой, равной амплитуде солитона β/W^2 , оба эффекта сравнимы, и неудивительно, что стационарный профиль импульса устанавливается вследствие баланса между этими двумя эффектами.

1.5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ НА СЛУЧАЙ ДРУГИХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой вводной главе мы кратко рассмотрели связь между зависящим от параметра потенциалом уравнения Шрёдингера и нелинейным эволюционным уравнением. Потенциал считался действительной функцией как координаты, так и параметра. Когда потенциал менялся в зависимости от параметра таким образом, что удовлетворялось уравнение Кортевега — де Фриза, было найдено, что собственные значения (энергетические уровни) остаются постоянными. В последующих главах будут рассмотрены другие нелинейные эволюционные уравнения, которые аналогичным образом будут связаны с другими линейными задачами на собственные значения. Эти линейные уравнения эквивалентны уравнению Шрёдингера с комплексным потенциалом, хотя это и не всегда самая удобная форма для анализа линейных уравнений. В частности, мы встретимся с уравнением

$$y_{xx} + (\zeta^2 + u^2 + iu_x)y = 0. \quad (1.5.1)$$

Будет найдено, что функция u связана с нелинейными эволюционными уравнениями, называемыми модифицированным уравнением Кортевега — де Фриза $u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0$ и уравнением sine-Gordon $\sigma_{xt} = \sin \sigma$, где $\sigma = u_x/2$.

Легко показать, что уравнение (1.5.1) получается в результате исключения z из двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} y_x + iuy &= \zeta z, \\ z_x - iuz &= -\zeta y. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Уравнения первого порядка, наиболее широко исследованные в теории солитонов, получаются из системы (1.5.2) с помощью преобразования $n_1 = (y + iz)/2$ и $in_2 = (y - iz)/2$. Найдено, что функции n_1 и n_2 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} n_{1x} + i\zeta n_1 &= un_2, \\ n_{2x} - i\zeta n_2 &= -un_1, \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

которые имеют тот же вид, что и уравнения (1.5.2), но в которых u и ζ поменялись местами. Эти линейные уравнения, так же как и уравнения более общего вида

$$\begin{aligned} n_{1x} + i\zeta n_1 &= qn_2, \\ n_{2x} - i\zeta n_2 &= rn_1, \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

где q и r могут быть комплексными, играют фундаментальную роль в теории солитонов (Абловиц и др., [2]). Особенно важен случай $r = -q^*$ в уравнении (1.5.4). Он приводит к рассмотрению нелинейного эволюционного уравнения $iq_t + q_{xx} + |q|^2 q = 0$, известного как кубическое, или нелинейное, уравнение Шрёдингера. Эти и другие нелинейные эволюционные уравнения будут рассмотрены после того, как в гл. 2 и 3 будут кратко изложены соответствующие свойства задач на собственные значения для линейных уравнений.

1.6. ПЛАН ДАЛЬНЕЙШЕГО ИЗЛОЖЕНИЯ

Сейчас мы познакомились с простым математическим описанием солитона и с его физическим смыслом для очень идеализированных физических ситуаций. В последующих главах этой книги затронутые здесь вопросы будут изучены более детально.

На этом этапе нужно уяснить, что решение солитонных уравнений тесно связано с решением некоторых линейных обыкновенных дифференциальных уравнений типа Штурма — Лиувилля. В гл. 2, особенно в разд. 2.8 и 2.11, дан элементарный обзор соответствующих вопросов теории Штурма — Лиувилля. Специальный аспект этой темы, представляющий интерес для теории солитонов, известен под названием обратной задачи рассеяния, и введение в этот вопрос дается в гл. 3.

Именно в гл. 4, где изучается уравнение Кортевега — де Фриза, мы снова рассматриваем солитоны как таковые. Покончив с изложением предварительных сведений из математики, мы сможем затем непосредственно перейти к специальному использованию

этих сведений для описания солитонов. Глава 4 и последующие содержат много ссылок на предварительные рассмотрения, проведенные в гл. 2 и 3, так что читатель, хотя бы формально знакомый с теорией Штурма — Лиувилля и обратной задачей рассеяния, может прямо перейти к гл. 4 и возвращаться назад только по мере надобности.

Глава 5 посвящена трем уравнениям, которые обычно чаще всего связываются с системой двух линейных уравнений первого порядка, а именно модифицированному уравнению Кортевега — де Фриза, уравнению sine-Gordon и кубическому (или нелинейному) уравнению Шрёдингера.

В гл. 6 и 7 рассматриваются некоторые из тех физических ситуаций, в которых возникают солитоны. Глава 8 является введением в преобразования Бэклунда, дающие иной подход к многосолитонным решениям. Наконец, в гл. 9 развивается теория возмущений для рассмотрения уравнений, мало отличающихся от известных солитонных уравнений. В качестве примера рассматриваются возмущенное уравнение Кортевега — де Фриза и кубическое уравнение Шрёдингера.

Глава 2

ВОПРОСЫ ОДНОМЕРНОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

В гл. 1 было показано, что если изменения потенциала, входящего в уравнение Шрёдингера, характеризуются параметром α , то если потребовать, чтобы форма потенциала изменялась согласно уравнению Кортевега — де Фриза, т. е. чтобы функция $U(x, \alpha)$ удовлетворяла уравнению $U_\alpha + UU_x + U_{xxx} = 0$, то связанные потенциалом энергетические уровни будут оставаться неизменными при изменении α . Данная глава содержит обзор некоторых аспектов решения уравнений Шрёдингера. В частности, мы рассмотрим как рассеяние волн, так и локализованные решения, или связанные состояния, соответствующие некоторым потенциалам, часто используемым в уравнении Шрёдингера.

Хотя объем имеющихся в настоящее время сведений по теории рассеяния велик, это связано главным образом с рассмотрением радиальной координаты при трехмерном квантовом рассеянии. В этом случае областью изменения независимой переменной является полубесконечный интервал $0 < r < \infty$. В интересующей нас ситуации речь идет о несколько иной задаче — об одномерном рассеянии на бесконечном интервале $-\infty < x < \infty$. Кроме приложений к одномерным моделям квантовой теории, подобные задачи рассеяния характерны для многих физических систем, описываемых посредством распространения волн в классической механике, и такие интерпретации здесь также будут рассмотрены.

Как отмечалось в конце гл. 1, иногда при анализе других нелинейных эволюционных уравнений удобнее использовать спектральную задачу Захарова — Шабата (1.5.3)¹⁾.

Читатель, уже знакомый с элементарной теорией распространения волн, может многое опустить в этой главе. Разделы 2.8 и 2.11 содержат материал, непосредственно связанный с теорией солитонов.

2.1. КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Так как при одномерном рассеянии понятия прохождения и отражения волн играют главную роль, полезно рассмотреть этот вопрос более детально. По-видимому, колеблющаяся струна является простейшей физической системой, на примере которой можно рассмотреть большую часть понятий, связанных с одномерным

¹⁾ Автор использует термин «двухкомпонентная система дифференциальных уравнений»; мы, однако, будем пользоваться термином, устоявшимся в мировой литературе. — *Прим. перев.*

рассеянием. Для однородной струны уравнение движения волн малой амплитуды имеет вид [88]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1.1)$$

где $y(x, t)$ — смещение струны и c — скорость волн, равная корню квадратному из отношения натяжения струны T , к ее плотности ρ . Общее решение уравнения (2.1.1), выраженное через произвольные профили волн, распространяющихся по струне в противоположных направлениях, записывается в виде

$$y = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (2.1.2)$$

Если струна колеблется с одной частотой $\omega = \omega/2\pi$, то

$$y = a \cos(kx - \omega t + \alpha) + b \cos(kx + \omega t + \beta), \quad (2.1.3)$$

где амплитуды a и b и фазы α и β постоянны и $k = \omega/c$. Удобно считать, что это выражение является действительной частью выражения

$$y = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)}, \quad (2.1.4)$$

где $A = ae^{i\alpha}$ и $B = be^{-i\beta}$. Теперь зависящие от времени множители одинаковы для волн в обоих направлениях, и ими можно пренебречь. Следовательно, пока мы предполагаем, что зависимость от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$, величина e^{ikx} является адекватным представлением для волны единичной амплитуды, распространяющейся в направлении положительных x , а e^{-ikx} — для волны, движущейся в направлении отрицательных x . Локализованное в пространстве и во времени возмущение можно построить методом Фурье ([52], разд. 5.15)

$$\varphi(x + ct) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \Phi(\omega) e^{-i\omega(t \pm x/c)}, \quad (2.1.5)$$

где $\Phi^*(-\omega) = \Phi(\omega)$, чтобы обеспечить действительность φ . Далее в этой главе будут приведены примеры использования этого метода.

Поток энергии вдоль струны

Одной из наиболее важных физических величин, связанных с распространением волн по струне, является перенос энергии. В общем случае энергия, связанная с отрезком струны между $x = a$ и $x = b$ ($b > a$), складывается из кинетической энергии E_k , даваемой соотношением

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_a^b dx (y_t)^2, \quad (2.1.6)$$

и потенциальной энергии E_p . Потенциальная энергия равна работе, совершаемой натяжением струны T_s при ее растяжении, следовательно,

$$E_p = T_s \int_a^b dx [\sqrt{1 + (y_x)^2} - 1] \approx \frac{1}{2} T_s \int_a^b dx (y_x)^2, \quad (2.1.7)$$

где аппроксимация справедлива при малых отклонениях от равновесия (т. е. при $(y_x)^2 \ll 1$). Таким образом, полная энергия волны на отрезке струны $a \leq x \leq b$ равна

$$E = \frac{1}{2} \rho \int_a^b dx (y_t^2 + c^2 y_x^2). \quad (2.1.8)$$

Тогда изменение энергии струны в этой области дается соотношением

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \rho \int_a^b dx (y_{tt} y_t + c^2 y_{xt} y_x) = \\ &= \rho c^2 \int_a^b dx (y_x y_t)_x, \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

где было использовано уравнение (2.1.1). После интегрирования по пространственной координате видно, что величина $\rho c^2 y_x y_t$ имеет физический смысл (и, следовательно, размерность) потока энергии. Если ввести определение

$$J(x, t) = -\rho c^2 y_x y_t, \quad (2.1.10)$$

то поток энергии $J(x, t)$ для волны, распространяющейся в положительном направлении x , будет положительным. Полагая $y = y_0 \cos(kx - \omega t)$, мы получим, что $J = \rho c^2 y_0^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t)$, и среднее по времени от этой величины за полный цикл $T = 1/\nu$ равно

$$\langle J \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt J(x, t) = \frac{\rho c \omega^2 y_0^2}{2}; \quad (2.1.11)$$

эта величина положительна. Теперь уравнения (2.1.9) и (2.1.10) дают

$$\frac{dE}{dt} = J_a - J_b. \quad (2.1.12)$$

Это выражение имеет очевидный физический смысл, состоящий в том, что изменение энергии в области между a и b является разностью между притоком энергии в a и оттоком из b .

Наконец, если выразить энергию между точками a и b через плотность энергии формулой $E = \int_a^b dx \mathcal{E}(x, t)$, то из (2.1.9) и (2.1.10) получим

$$\frac{dE}{dt} = \int_a^b dx \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = - \int_a^b dx \frac{\partial J}{\partial x}. \quad (2.1.13)$$

Этот результат должен быть справедлив для любой области $a < x < b$, поэтому должны быть равны сами подынтегральные выражения; отсюда получаем закон сохранения

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0. \quad (2.1.14)$$

Поскольку он справедлив для любого интервала $a < x < b$, его иногда называют локальным законом сохранения.

Удобно уметь вычислять усредненный по времени поток энергии в случае, когда используются комплексные обозначения. Так как энергия есть величина второго порядка, то при этом необходима некоторая осторожность. Обозначив $y = \text{Re}(fe^{-i\omega t})$, где Re — символ взятия действительной части, а $f = f_r + if_i$, получим из (2.1.10) и (2.1.11), что

$$\begin{aligned} \langle J \rangle &= -\frac{\rho c^2}{T} \int_0^T dt \text{Re}(-i\omega f e^{-i\omega t}) \text{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial x} e^{-i\omega t}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \rho c^2 \omega \left(-f_i \frac{\partial f_r}{\partial x} + f_r \frac{\partial f_i}{\partial x}\right). \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Это выражение можно записать в виде

$$\langle J \rangle = \frac{1}{2} \rho c^2 \omega \text{Im}(y^* y_x), \quad (2.1.16)$$

где Im означает «мнимая часть». Аналогичное выражение встретится в разд. 2.4, где оно описывает поток частиц, связанный с уравнением Шрёдингера.

Выражение для энергии колебаний струны (2.1.8) можно получить более красивым способом, используя плотность лагранжиана ([89], гл. 3; [45], гл. 7—9); этот способ удобен для дальнейшего рассмотрения движения волн. Заметим сначала, что волновое уравнение для струны можно получить из плотности лагранжиана $\mathcal{L}(y_t, y_x, y) = (1/2)\rho[(y_t)^2 - c^2(y_x)^2]$. Подставив это выражение для \mathcal{L} в уравнение Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad (2.1.17)$$

мы тотчас же получим волновое уравнение (2.1.1). Более интересен для нас здесь тот факт, что плотность гамильтониана, выражающая плотность энергии волн в струне, дается соотношением

$\mathcal{H} = y_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} - \mathcal{L}$. Для приведенной выше плотности лагранжиана получим $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \rho [(y_t)^2 + c^2 (y_x)^2]$. Теперь, поскольку $E = \int \mathcal{H} dx$, мы сразу же получаем (2.1.8).

Вычислим поток энергии в струне для случая, когда волна имеет вид $y = e^{ikx} + R(k)e^{-ikx}$, т. е. представляет собой суперпозицию двух волн: одной — единичной амплитуды, движущейся в направлении положительных x , другой — с амплитудой R (которая может быть комплексной и, таким образом, содержать информацию о фазе), движущейся в направлении отрицательных x . Такое волновое поле устанавливается в области $x < 0$ стационарной волной единичной амплитуды, приходящей из $x = -\infty$, и волной с амплитудой R , отраженной от некоторой неоднородности на струне, находящейся в точке $x = 0$. Из (2.1.16) легко найти, что поток энергии равен

$$\langle J \rangle = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 (1 - |R|^2). \quad (2.1.18)$$

Если $|R|^2 < 1$, то J положительно и существует результирующий поток энергии в положительном направлении. (Эта энергия может либо пройти через неоднородность в область $x > 0$, либо поглотиться ею.) Если $|R|^2 = 1$, то сколько энергии падает, столько и отражается, и ни в одном направлении нет результирующего потока энергии. Это случай волны, полностью отраженной «препятствием без потерь» (т. е. таким препятствием, которое не поглощает энергии). Тогда самая общая форма для коэффициента отражения — это $R = e^{i\delta}$, где δ действительно; самое большее, что может внести препятствие в отраженную волну, — это изменение фазы. Два различных препятствия без потерь, вносящие один и тот же фазовый сдвиг, могут быть названы фазово эквивалентными. Одномерные задачи рассеяния, которые будут рассмотрены в дальнейшем, дадут информацию о коэффициенте рассеяния, а также о коэффициенте прохождения волны, падающей на некоторое препятствие или на неоднородность на бесконечной струне.

2.2. РАССЕЯНИЕ ОСЦИЛЛЯТОРОМ

В качестве простого примера процесса рассеяния рассмотрим систему, состоящую из массы и пружины, прикрепленных к струне в точке $x = 0$, как показано на рис. 2.1, а. Стационарная волна единичной амплитуды с угловой частотой ω , падающая из $x = -\infty$, частично отражается назад на $-\infty$, а частично проходит через осциллятор на $x = +\infty$. Обозначая смещение струны через

$y_>$ для $x \geq 0$ и через $y_<$ для $x \leq 0$, можно записать

$$\begin{aligned} y_<(x, k) &= e^{ikx} + R(k)e^{-ikx}, \quad x \leq 0, \\ y_>(x, k) &= T(k)e^{ikx}, \quad x \geq 0, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

где снова $k = \omega/c$. В точке $x = 0$ смещение струны непрерывно и равно смещению осциллятора, однако наклон струны в точке $x = 0$ может быть разрывным. Как показано на рис. 2.1, б, разрыв

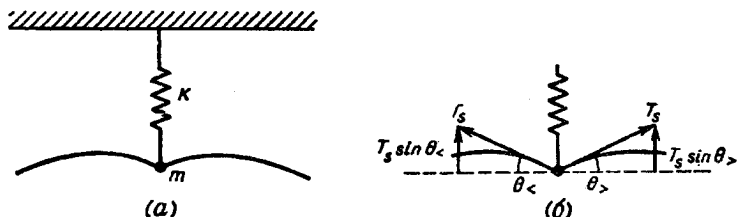


Рис. 2.1. Система масса — пружина, прикрепленная к струне (а); силы, действующие на массу из-за вибрации струны (б).

наклона в начале координат создает силу, движущую осциллятор. По второму закону Ньютона, смещение осциллятора $\tilde{y}(t)$ определяется уравнением

$$m \frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} = -K_0 \tilde{y} + T_s \left(\left. \frac{\partial y_>}{\partial x} \right|_{x=0} - \left. \frac{\partial y_<}{\partial x} \right|_{x=0} \right) e^{-i\omega t}, \quad (2.2.2)$$

где m и K_0 — масса и постоянная пружины соответственно. Смещение осциллятора можно записать в виде $\tilde{y} = y(0, k)e^{-ikct}$, где $y(0, k) = y_<(0, k) = y_>(0, k)$. Следовательно, $y(0, k) = 1 + R = T$. Из (2.2.1) и (2.2.2) получим

$$y(0, k) = \frac{2ik\kappa}{k^2 - k_0^2 + 2ik\kappa}, \quad (2.2.3)$$

где $\kappa = \rho/m$, а $k_0 c = \sqrt{K_0/m}$ есть резонансная частота осциллятора. Итак, коэффициенты прохождения и отражения суть приведенное выше выражение $T = y(0, k)$ и

$$R = T - 1 = \frac{k_0^2 - k^2}{k^2 - k_0^2 + 2ik\kappa}. \quad (2.2.4)$$

Если частота падающей волны равна резонансной частоте осциллятора, то $R = 0$ и $T = 1$, а в пределе при $m \rightarrow \infty$ имеем $R = -1$ и $T = 0$. В пределе при $m \rightarrow 0$ мы получим $R = (-iK_0/2T_s)$ и $T = k/(k + iK_0/2T_s)$.

Нули знаменателя в (2.2.3) или (2.2.4) являются сингулярностями в выражениях для коэффициентов прохождения и отраже-

ния. Они расположены в точках

$$k = -ik_0 \pm \sqrt{k_0^2 - \kappa^2}. \quad (2.2.5)$$

Сингулярности находятся в нижней полуплоскости комплексной плоскости k и расположены либо симметрично относительно мнимой оси (для $k_0 > \kappa$), либо на мнимой оси (для $k_0 < \kappa$). Для $k_2 = \kappa$ есть полюс второго порядка при $k = -ik_0$.

Расположение нулей в нижней полуплоскости гарантирует, что струна ослабляет, а не усиливает движение осциллятора. Действительно, уравнение (2.2.2) может быть записано в виде, соответствующем случаю вынужденных колебаний осциллятора с демпфированием. В этом можно убедиться, замечая, что выражение для движущей силы, действующей на осциллятор, задаваемое уравнением (2.2.2), может быть переписано в виде

$$T_s \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_0 - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_0 \right) e^{-i\omega t} = 2ikT_s(T-1)e^{-i\omega t}. \quad (2.2.6)$$

Так как $d\tilde{y}/dt = -i\omega T e^{-i\omega t}$ и $T_s = m\kappa c^2$, эту движущую силу можно записать в виде

$$-m \left(2\kappa c \frac{d\tilde{y}}{dt} + 2ik\kappa c^2 e^{-i\omega t} \right).$$

Следовательно, уравнение для осциллятора принимает вид

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + 2\kappa c \frac{d\tilde{y}}{dt} + \omega_0^2\tilde{y} = -2ik\kappa c^2 e^{-i\omega t}, \quad (2.2.7)$$

а это уравнение вынужденных колебаний осциллятора с демпфированием. Если выключить действующую на осциллятор вынуждающую силу, то колебания затухают за время, определяемое величиной $(\kappa c)^{-1}$. Это время, необходимое для того, чтобы накопленная в осцилляторе энергия ушла по струне.

Легко понять роль демпфирующего члена, рассматривая рассеяние падающего импульса, имеющего вид δ -функции. Последнюю можно представить в виде

$$\delta(t - x/c) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-x/c)}, \quad (2.2.8)$$

это пример упомянутого в разд. 2.1 фурье-представления. В этом случае все частоты дают вклады с одинаковой амплитудой, так что $\Phi(\omega) = 1$. Так как задача линейна и решения допускают суперпозицию, то рассеяние δ -импульса можно построить путем интегрирования по рассеянию синусоидальных волн равной амплитуды со всеми частотами. Тогда для отражения δ -импульса мы

имеем

$$y_<(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} y_<\left(x, \frac{\omega}{c}\right) e^{-i\omega t} = \\ = \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} R\left(\frac{\omega}{c}\right) e^{-i\omega(t+x/c)}, \quad (2.2.9)$$

где были использованы соотношения (2.2.1) и (2.2.8). Так как $R \rightarrow 1$ при $|k| \rightarrow \infty$, последний интеграл в (2.2.9) содержит дополнительную δ -функцию. Ее можно выделить, записав $R = 1 - T$. Вычисляя остающийся интеграл методом контурных интегралов (см., например, [52], гл. 10), получим

$$y_<(x, t) = \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) - \delta(\tau) + \\ + \frac{2\kappa c k_0}{\sqrt{k_0^2 - \kappa^2}} e^{-\kappa c t} \cos\left(c\tau \sqrt{k_0^2 - \kappa^2} + \alpha\right) \theta(\tau), \quad (2.2.10)$$

где $\tau = t + x/c$, $\alpha = \arctg(\kappa/\sqrt{k_0^2 - \kappa^2})$ и $\theta(\tau)$ — единичная ступенчатая функция. Вычисляя это выражение при $x = 0$, мы видим, как отмечалось выше, что звучание осциллятора затухает в течение промежутка времени, пропорционального $(\kappa c)^{-1}$.

Использование изложенного метода для описания рассеяния волн более сложными динамическими системами привело бы к довольно утомительным вычислениям. В следующем разделе мы рассмотрим более удобный способ описания такого рассеяния некоторыми более сложными системами.

2.3. УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННАЯ СТРУНА

Если часть струны помещена в среду, обеспечивающую упругую восстанавливающую силу $K(x)$ на единицу длины струны, то стандартное применение второго закона Ньютона приводит к появлению дополнительного члена $-K(x)y$ в уравнении (2.1.1). Мы получаем

$$\rho \frac{d^2 y}{dt^2} = T_s \frac{d^2 y}{dx^2} - K(x)y. \quad (2.3.1)$$

Нас будут интересовать случаи, в которых сила $K(x)$ локализована, т. е. либо $K(x)$ обращается в нуль вне некоторого интервала, окружающего центральную точку, либо $K(x)$ экспоненциально затухает при удалении от этой точки. Можно ожидать, что падающая на упругую область волна частично отразится, частично пройдет. Очевидное физическое ограничение, налагаемое на функцию $K(x)$, состоит в том, что она должна представлять собой плотность восстанавливающей силы и, следовательно, не может быть отрицательной.

Уравнение (2.3.1) можно переписать в виде

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 y}{dt^2} - \mu^2(x) y = 0, \quad (2.3.2)$$

где $\mu^2(x) = K(x)/T_s$. Даже если $\mu(x)$ постоянно, решение этого уравнения не столь простое, как в случае уравнения, описывающего свободную струну. Причину этого найти нетрудно. Рассматривая простой случай постоянного $\mu = \mu_0$ и отыскивая решения с одной частотой ω в виде $y(x, t) = y(x, \omega) e^{-i\omega t}$, мы находим, что $y(x, \omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 y = 0, \quad (2.3.3)$$

где

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{c^2} - \left(\frac{\mu_0}{\omega}\right)^2. \quad (2.3.4)$$

Тогда смещение струны имеет вид

$$y(x, t) = a e^{-i\omega(t-x/v)} + b e^{-i\omega(t+x/v)}, \quad (2.3.5)$$

и видно, что v играет роль фазовой скорости волны. Теперь волновое движение обладает дисперсией, так как, согласно (2.3.4), фазовая скорость волны v зависит от частоты, и волна уже не может распространяться без искажения профиля, как это имело место в случае, описываемом соотношением (2.1.2), т. е. общим решением уравнения (2.1.1).

Кроме того, теперь у системы есть пороговая частота, поскольку, согласно (2.3.3) и (2.3.4), частоты, меньшие $\mu_0 c$, приводят к мнимому значению постоянной распространения. Такие низкочастотные возмущения вообще не распространяются как волна, а просто перемещают струну вверх и вниз в фазе. Это делает возможным возбуждение локализованных волновых движений неоднородно упруго закрепленной струны. В качестве простого примера рассмотрим случай

$$\mu^2(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ \mu_0^2, & |x| < a. \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Область $|x| < a$ может поддерживать низкочастотную стоячую волну, ограниченную нераспространяющимся возмущением, экспоненциально затухающим при $|x| > a$. Следует отметить, что ограниченное возмущение свободной струны, т. е.

$$\mu^2(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ -\mu_0^2, & |x| < a, \end{cases} \quad (2.3.7)$$

невозможно, поскольку, как отмечалось выше, $\mu^2 = K/T_s$ не может быть отрицательной величиной. Локализованные решения, связанные с отрицательными значениями $\mu^2(x)$, будут получены при

рассмотрении одномерных задач рассеяния в квантовой теории и двумерных задач классической теории распространения волн. После этого мы рассмотрим локализованные решения. Сейчас мы займемся рассеянием волн, падающих на неоднородность на струне.

В качестве примера рассеяния волн неоднородной упругой областью рассмотрим струну, отрезок которой с постоянным значением μ_0 упруго закреплен, так что

$$\mu^2 = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ \mu_0^2, & |x| < a. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Если из области отрицательных значений x приходит волна единичной амплитуды с частотой ω , то можно волновое движение записать для трех областей в виде

$$\begin{aligned} y_{<}(x) &= e^{ikx} + Re^{-ikx}, \\ y_{>}(x) &= Te^{ikx}, \\ y_t(x) &= Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

где $k = \omega/c$ и $\alpha = \sqrt{k^2 - \mu_0^2}$. По виду α легко заметить, что пока $k > \mu_0$, волна в упругой области не распространяется. Четыре постоянных A , B , R и T определяются из требования непрерывности смещения и наклона струны в точках $x = \pm a$. В точке $x = -a$ это дает

$$\begin{aligned} e^{-ika} + Re^{ika} &= A \cos \alpha a - B \sin \alpha a, \\ ik(e^{-ika} - Re^{ika}) &= \alpha(A \sin \alpha a + B \cos \alpha a), \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

а в точке $x = a$ мы находим, что

$$\begin{aligned} Te^{ika} &= A \cos \alpha a + B \sin \alpha a, \\ ikTe^{ika} &= \alpha(-A \sin \alpha a + B \cos \alpha a). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Решение этих уравнений дает

$$\begin{aligned} Re^{2ika} &= \frac{\mu_0^2}{D} \sin 2\alpha a, \\ Te^{2ika} &= \frac{2iak}{D}, \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

где

$$D = (k^2 + \alpha^2) \sin 2\alpha a + 2iak \cos 2\alpha a. \quad (2.3.13)$$

Как и в случае простого осциллятора, состоящего из массы и пружины, волна может проходить полностью ($R = 0$). Это имеет место для бесконечного числа частот, удовлетворяющих условию $\sin 2\alpha a = 0$ или $\alpha a = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \dots$, т. е. когда в эту область попадает целое число полупериодов волны, распространяющейся

в упруго закрепленной струне. Как и в случае простой системы масса — пружина, знаменатель в выражениях для R и T обращается в нуль и тоже в бесконечном числе точек. Определение положения этих нулей облегчается в первую очередь использованием тождества $\operatorname{tg} 2\theta = 2(\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{tg} \theta)^{-1}$ в уравнении $D = 0$. Это приводит к выражению

$$D = (k \operatorname{tg} \alpha a + i\alpha)(\alpha \operatorname{tg} \alpha a + ik) = 0, \quad (2.3.14)$$

обращающемуся в нуль при обращении в нуль одного из сомножителей. Первый множитель, появляющийся и в трехмерных задачах квантового рассеяния, был тщательно рассмотрен Нуссенцвайгом [91]. Существует бесконечное число решений, которые опять же все лежат в нижней полуплоскости k . Аналогичную процедуру можно применить ко второму сомножителю, однако нам не обязательно сколько-нибудь детально изучать решения этих уравнений.

Упражнение 1

В уравнении (2.3.2) с $\mu = \mu_0$ положите $\tau^2 = l^2 - x^2/c^2$ и покажите, что y удовлетворяет уравнению Бесселя вида $\tau \ddot{y} + \dot{y} + (\mu_0 c)^2 \tau y = 0$, где точка означает дифференцирование по τ .

Упражнение 2

Покажите, что соотношения (2.3.12) означают сохранение энергии (т. е. $|R|^2 + |T|^2 = 1$).

Упражнение 3

Покажите, что в соотношениях (2.3.12) предельный переход $a \rightarrow 0$, $\mu_0^2 \rightarrow \infty$, $2\mu_0^2 a = K_0/T_s$, дает $R = -i(K_0/2T_s)/(k + iK_0/2T_s)$ и $T = k/(k + iK_0/2T_s)$. Это согласуется с ранее упомянутыми предельными формами (2.2.3) и (2.2.4) в указанном пределе.

Упражнение 4

При определении δ -функций часто применяется использованный в упр. 3 предельный процесс. Можно получить результаты упр. 3, если в качестве исходного пункта принять, что в волновом уравнении $\mu_0^2(x)$ пропорционально δ -функции. Тогда уравнение (2.3.2) записывается в виде

$$y'' + \left[k^2 - \left(\frac{K_0}{T_s} \right) \delta(x) \right] y = 0.$$

Амплитуда δ -функции равна величине $2\mu_0^2 a$, введенной в упр. 3. Интегрирование этого уравнения с переходом через сингулярность в точке $x = 0$ дает

$$y'_{>}(0) - y'_{<}(0) = \left(\frac{K_0}{T_s} \right) y(0).$$

Так как $y_{<}(x) = e^{iks} + R e^{-iks}$ и $y_{>}(x) = T e^{iks}$, разрыв в производной дает $T(1 + iK_0c/T_s) = 1 - R$. Непрерывность $y(x)$ в начале налагает также условие $1 + R = T$. Если эти два уравнения разрешить относительно R и T , то снова получаются результаты, приведенные в упр. 3.

Упражнение 5

Исследуйте рассеяние волн потенциалом $u(x) = A[\delta(x+a) - \delta(x)]$, записав y в виде (2.3.9). Сравнивая решения для каждой δ -функции, как в упр. 4, покажите, что

$$R = \beta(\beta + i) \frac{1 - e^{-2ika}}{D},$$

$$T = D^{-1},$$

где $D = 1 + \beta^2(1 - e^{2ika})$ и $\beta = A/2k$.

Положите $A = B/a$ и покажите, что если $a \rightarrow 0$ так, что $u(x) \rightarrow B\delta'(x)$, мы получим $R = -1$ и $T = 0$.

Упражнение 6

Покажите, что при $ka \ll 1$, т.е. при $k \approx \mu_0$, второй множитель в (2.3.14) обладает решением $ka \approx (i/2) \pm \sqrt{(\mu_0 a)^2 - 1/4}$.

2.4. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Хотя случай упруго закрепленной струны может существенно помочь нам понять одномерную теорию рассеяния, в этой задаче есть сильное ограничение, состоящее в том, что $K(x)$, плотность упругой восстанавливающей силы, не может быть отрицательной. Однако в квантовой теории для одномерного рассеяния нет соответствующего ограничения, так как потенциал рассеяния $V(x)$ может быть либо отталкивающим ($V > 0$), либо притягивающим ($V < 0$). Случай $V < 0$ вводит возможность появления локализованных возмущений, или связанных состояний.

Основным уравнением в квантовой теории рассеяния является уравнение Шрёдингера. Для одномерных стационарных задач его можно записать в виде [96]

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi, \quad (2.4.1)$$

где m — масса частицы, E — полная энергия и \hbar — постоянная Планка, деленная на 2π . Полагая $2E/\hbar^2 = k^2$ и $2mV(x)/\hbar^2 = U(x)$, мы получим стандартное уравнение для описания одномерных волн в неоднородной среде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [k^2 - U(x)]\psi = 0. \quad (2.4.2)$$

Как показано в учебниках по квантовой механике, плотность потока, связанная с частицей, дается формулой

$$\text{поток} = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} \right); \quad (2.4.3)$$

это выражение нужно сравнивать с выражением для волн на струне (2.1.16).

Задача квантового рассеяния при $U > 0$ здесь рассматриваться не будет, так как анализ в этом случае не отличается от соответствующего анализа для струны. В случае $U < 0$, кроме решения рассеяния, появятся решения уравнения (2.4.2) в виде локализованных возмущений, или связанных состояний. Простейшим для аналитического рассмотрения случаем является притягивающий потенциал в виде δ -функции. Полагая $V(x) = V_0 a \delta(x)$ и следуя процедуре, изложенной в упр. 4, получим

$$\begin{aligned} R &= \frac{-iU_0 a/2}{k + iU_0 a/2}, \\ T &= \frac{k}{k + iU_0 a/2}, \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

где $U_0 = 2mV_0/\hbar^2$. Запишем теперь решение рассеяния в том виде, который соответствует падающей волне произвольной амплитуды A , т. е.

$$\begin{aligned} y_{<} &= Ae^{ikx} + AR e^{-ikx}, \\ y_{>} &= AT e^{ikx}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Полезно заметить, что здесь могут быть ненулевые решения для $A = 0$, если R^{-1} и T^{-1} также обращаются в нуль. Из (2.4.4) ясно, что это имеет место при $k = -iU_0 a/2$. Тогда $y_{<} \approx e^{-U_0 a x/2}$ и $y_{>} \approx e^{U_0 a x/2}$, а это при $U_0 < 0$ является локализованным решением, или связанным состоянием. Следует отметить, что тогда полюс R и T при $k = -iU_0 a/2$ лежит в верхней полуплоскости. Полученное здесь решение можно также получить, полагая $y_{>} = e^{-\gamma x}$, $y_{<} = e^{\gamma x}$ и сращивая решения, как в упр. 4.

В качестве несколько более сложного примера рассмотрим притягивающий потенциал в виде прямоугольной ямы. Если взять $V(x) = \hbar^2 \mu^2(x)/2m$ и использовать для $\mu(x)$ выражение (2.3.8), то отталкивающий потенциал прямоугольной формы эквивалентен случаю упруго закрепленной струны, поэтому рассматривать этот случай нам не нужно. Чтобы проанализировать роль связанных состояний, появляющихся в случае притягивающего потенциала

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ -V_0, & |x| < a, \end{cases} \quad (2.4.6)$$

где $V_0 = |V_0|$, подставим сначала $\mu_0^2 = -2mV_0/\hbar^2$ в результаты разд. 2.3. Тогда получим выражение $\alpha = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$, которое является действительной величиной для отрицательных значений E , пока выполняется $E > -V_0$. Соответствующие значения k являются чисто мнимыми, $k = \sqrt{2mE}/\hbar^2 = i\kappa$.

Допустимые значения k можно получить одним из двух способов. Можно непосредственно перейти к решениям, описывающим связанные состояния $e^{-\kappa|x|}$ для $|x| > a$ и повторить процедуру

сращения решений, изложенную в разд. 2.3, или, как показано выше для δ -потенциала, можно найти точки в верхней полуплоскости k , для которых знаменатели в выражениях для R и T обращаются в нуль. Первый подход используется в большинстве вводных курсов квантовой механики. Для второго способа нужно просто в выражении для $D(k)$ (2.3.13) положить $\alpha = \sqrt{k^2 + 2mV_0/\hbar^2}$. Опять же легче всего проанализировать множители в выражении (2.3.14). Полный анализ первого из этих выражений был также выполнен Нуссенцвайгом [91]. Кроме некоторого числа связанных состояний (зависящих от значения V_0), снова есть бесконечное число комплексных нулей в нижней полуплоскости плоскости k и так называемых антисвязанных состояний на мнимой оси в нижней полуплоскости.

2.5. РАССЕЯНИЕ ПОТЕНЦИАЛОМ ВИДА sech^2

Получение решений уравнения Шрёдингера для потенциалов, отличных от δ -функции или от прямоугольной ямы, представляет собой довольно сложное упражнение по использованию специальных функций. Здесь будет рассмотрен случай потенциала в виде sech^2 , так как этот потенциал будет играть важную роль в дальнейшем изложении. Кроме того, процесс рассеяния выражается с помощью линейных комбинаций решений способом, который затем будет обобщен.

Рассмотрим притягивающий потенциал

$$V(x) = -V_0 \text{sech}^2\left(\frac{x}{d}\right), \quad V_0 > 0. \quad (2.5.1)$$

Полагая в уравнении Шрёдингера (2.4.1) $e = 2md^2E/\hbar^2$, $v = 2md^2V_0/\hbar^2$ и $z = x/d$, получим

$$\psi'' + (e + v \text{sech}^2 z) \psi = 0, \quad (2.5.2)$$

где штрих означает дифференцирование по z . Это уравнение может быть преобразовано в гипергеометрическое [89]. Сначала, полагая

$$\psi = A \text{sech}^\beta z \cdot y(x), \quad (2.5.3)$$

где A — произвольная амплитуда, находим, что если β^2 выбрать равным $-e$, то функция $y(z)$ удовлетворяет уравнению

$$y'' - 2\beta \text{th} z \cdot y' + (v - \beta^2 - \beta) \text{sech}^2 z \cdot y = 0. \quad (2.5.4)$$

Последующее преобразование $u = \frac{1}{2}(1 - \text{th} z) = e^{-z}/(e^z + e^{-z})$ дает

$$u(1-u) \frac{d^2 y}{du^2} + [c - (a+b+1)u] \frac{dy}{du} - aby = 0, \quad (2.5.5)$$

где

$$c = 1 + \beta, \quad a + b + 1 = 2(1 + \beta), \quad ab = \beta^2 + \beta - v. \quad (2.5.6)$$

Уравнение (2.5.5) является стандартной формой гипергеометрического уравнения. Конечное при $u = 0$ (т. е. при $z \rightarrow \infty$) решение обычно записывается в виде [4]

$$y = F(a, b; c; u) = 1 + \frac{ab}{c} u + \dots \quad (2.5.7)$$

При $z \rightarrow \infty$ (т. е. при $u \rightarrow 0$) мы получаем, что $y \rightarrow 1$. Таким образом, выражение (2.5.3) принимает вид

$$\psi \xrightarrow{z \rightarrow \infty} A 2^\beta e^{-\beta z}. \quad (2.5.8)$$

Чтобы это выражение представляло собой плоскую волну $A e^{ikx}$, распространяющуюся на ∞ , мы должны положить $\beta = -ikd$. Тогда, согласно предыдущему определению β , мы имеем $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. Разрешая уравнения (2.5.6) относительно a , b и c и используя определение β , мы находим, что

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} - ikd + \sqrt{v + 1/4}, \\ b &= \frac{1}{2} - ikd - \sqrt{v + 1/4}, \\ c &= 1 - ikd. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Хотя решение $F(a, b; c; u)$ справедливо при $0 \leq u \leq 1$ (т. е. при $\infty > z > -\infty$), его легче понять в области $u \rightarrow 1$ (т. е. при $z \rightarrow -\infty$), записав как линейную комбинацию двух решений, выраженных через разложения в окрестности $u = 1$. Соответствующая комбинация, являющаяся одним из стандартных тождеств, связывающих гипергеометрические функции, имеет вид ([4], формула 15.3.6 на с. 373 русского издания)

$$\begin{aligned} F(a, b; c; u) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; 1-u) + \\ &+ (1-u)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-u), \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

где Γ означает гамма-функцию (см. с. 81 указанного издания). Мы покажем сейчас, что это соотношение действительно дает решение задачи рассеяния. Замечая, что $(1-u)^{c-a-b} = e^{-2\beta z}$ и что, согласно (2.5.7), гипергеометрические функции с аргументом $(1-u)$ будут стремиться к единице при $u \rightarrow 1$, мы находим, что (2.5.3) и (2.5.10) дают

$$\psi \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} A 2^\beta \left[\frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} e^{\beta z} + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} e^{-\beta z} \right]. \quad (2.5.11)$$

Полагая $\beta = -ikd$, как отмечалось выше, и записывая (2.5.11) в виде

$$\begin{aligned} \psi \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} A 2^\beta &\frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \left[e^{ikx} + \right. \\ &\left. + \frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} \cdot \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b-c)} e^{-ikx} \right]. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

мы можем сразу же определить коэффициент отражения и амплитуду падающей волны. Возвращаясь к (2.5.8) и вынося за скобки как общий множитель ту же самую амплитуду падающей волны, определяем также коэффициент прохождения. Результаты записываются в виде

$$\begin{aligned} R &= \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a+b-c)}, \\ T &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Используя определения a , b и c , данные в (2.5.9), и тождество $\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)=\pi/\cos \pi z$, находим, что R пропорционально $\cos(\pi\sqrt{v+1/4})$. Таким образом, для $\sqrt{v+1/4}=n+1/2$, где $n=1, 2, \dots$, потенциал является безотражательным. Следует отметить, что этот результат справедлив для падающих частиц любой энергии (т. е. для классических волн любой частоты ω).

Итак, как R , так и T имеют полюсы в плоскости k , определяемые соотношениями $1/2 - ikd \pm \sqrt{v+1/4} = -p$, где $p=0, 1, 2, \dots$. Полюсы в верхней полуплоскости комплексной плоскости k являются положительными решениями уравнения

$$kd = i \left[\sqrt{v + \frac{1}{4}} - \left(p + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (2.5.14)$$

Это налагает ограничение сверху на значение p . Если, кроме того, мы ограничимся рассмотрением безотражательных потенциалов, то $\sqrt{v+1/4}=n+1/2$ и $kd=i(n-p)$, где $p=0, 1, \dots, n-1$.

В заключение отметим, что безотражательные потенциалы и их собственные значения связаны с уравнением Шрёдингера

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + [-(n-p)^2 + n(n+1)\text{sech}^2 z] \psi = 0, \quad p=0, 1, \dots, (n-1), \quad (2.5.15)$$

$$n=1, 2, \dots$$

Собственные значения можно получить как предельные случаи гипергеометрической функции. Пример рассматривается ниже, в упр. 9. Однако в следующем разделе будет описан более простой метод порождения этих собственных функций.

Упражнение 7

Покажите, что R и T , даваемые соотношениями (2.1.13), удовлетворяют условию $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

Упражнение 8

В пределе $V_0 \rightarrow \infty$, $d \rightarrow 0$, так что $V_0 d = \text{const}$, потенциал (2.5.1) становится равным $-2V_0 \delta(x/d)$. Покажите, что для δ -потенциала коэффициенты отражения и прохождения можно получить из соответствующих предельных форм R и T , даваемых соотношениями (2.5.13),

Упражнение 9

Для безотражательных потенциалов, таких что $v = n(n+1)$, преобразование $u = \text{th } z$ приводит уравнение (2.5.2) к стандартному виду уравнения, определяющего присоединенные функции Лежандра $P_\nu^\mu(u)$ (см. [4], с. 154 русского издания). Тогда соответствующее решение уравнения Шрёдингера имеет вид

$$\psi(z) \approx P_n^{ikd}(\text{th } z).$$

Используя соотношения

$$P_0^\mu(\cos \theta) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\text{ctg } \frac{\theta}{2} \right)^\mu, \quad P_{-\nu-1}^\mu(x) = P_\nu^\mu(x)$$

([84], с. 63) и рекуррентное соотношение

$$(2\nu+1)xP_\nu^\mu(x) = (\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(x) + (\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(x),$$

покажите, что при $n=1$ волновая функция приводится к виду

$$\psi \approx e^{ikx} \left[ikd - \text{th} \left(\frac{x}{d} \right) \right].$$

2.6. СООТВЕТСТВУЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

В предыдущем разделе уравнение Шрёдингера для потенциала $-V_0 \text{sech}^2(x/d)$ решалось с помощью гипергеометрических функций. Некоторые значения $V_0 d^2$, произведения ширины потенциальной ямы на длину, привели к безотражательным потенциалам. В этих случаях решение может быть выражено через элементарные функции. Как указано в упр. 9, эти решения могут быть получены при рассмотрении соответствующих предельных форм общего решения. Однако, так как речь пойдет главным образом об этих элементарных случаях, хотелось бы иметь более прямой метод их рассмотрения. Уравнения, появляющиеся в случае безотражательных потенциалов, могут быть очень просто решены методом Дарбу ([28]; [29], т. 2, с. 210; [59], с. 132). Кроме получения решений некоторых специфических уравнений, можно использовать этот метод, чтобы вызвать изменения в потенциалах произвольной формы ([27]; [36]; [115]).

Метод Дарбу состоит в исследовании соотношения между уравнениями

$$y'' = [\lambda + u(x)]y, \quad (2.6.1)$$

$$z'' = [\lambda + v(x)]z, \quad (2.6.2)$$

где z связано с y с помощью линейной комбинации

$$z = A(x, \lambda)y + B(x, \lambda)y'. \quad (2.6.3)$$

Исследование становится особенно простым (и адекватным нашим целям), если положить функцию $B(x, \lambda)$ равной единице. Только этот случай и будет рассматриваться. Если подставить (2.6.3) в

(2.6.2) и приравнять по отдельности нулю коэффициенты при y и y_x , получим

$$A_{xx} + u_x + A(u - v) = 0, \quad (2.6.4)$$

$$2A_x + u - v = 0. \quad (2.6.5)$$

Исключая $(u - v)$ и интегрируя, находим, что

$$A^2 - A_x - u = \tilde{\lambda}, \quad (2.6.6)$$

где $\tilde{\lambda}$ — постоянная интегрирования.

Упражнение 10

Так как ни в (2.6.1), ни в (2.6.2) нет члена с первой производной, вронскианы решений этих уравнений постоянны. Соотношение (2.6.3) дает связь между этими вронскианами. Покажите, что при $B = 1$ постоянство вронскианов приводит к уравнению (2.6.6).

Уравнение (2.6.6) — это уравнение Риккати для A , и с помощью подстановки $A = -\tilde{y}'/\tilde{y}$ его можно сделать линейным (см. разд. 2.12). Тогда уравнение (2.6.6) примет вид

$$\tilde{y}'' = [\tilde{\lambda} + u(x)] \tilde{y}. \quad (2.6.7)$$

Таким образом, важность \tilde{y} состоит в том, что оно является частным решением уравнения (2.6.1) при $\lambda = \tilde{\lambda}$.

Из (2.6.5) находим, что $v = u - 2(\ln \tilde{y})''$, так что уравнение для z принимает вид

$$z'' = [\lambda + u - 2(\ln \tilde{y})''] z. \quad (2.6.8)$$

Итак, мы получаем уравнение Шрёдингера, в котором потенциал изменился на величину $\Delta u = -2(\ln \tilde{y})''$. Кроме того, тождество $2(\ln f)'' = f''/f - f(1/f)''$ дает

$$z'' = [\lambda - \tilde{\lambda} + \tilde{y}(1/\tilde{y})''] z. \quad (2.6.9)$$

Иногда удобно заметить, что при $\lambda = \tilde{\lambda}$ частное решение уравнения (2.6.9) имеет вид $z = 1/\tilde{y}$.

В заключение, если y есть общее решение уравнения

$$y'' = [\lambda + u(x)] y, \quad (2.6.10)$$

а \tilde{y} — любое частное решение, соответствующее значению $\lambda = \tilde{\lambda}$, то

$$z = y' - y(\tilde{y}'/\tilde{y}) \quad (2.6.11)$$

является общим решением уравнения

$$z'' = \left[\lambda - \tilde{\lambda} + \tilde{y} \left(\frac{1}{\tilde{y}} \right)'' \right] z, \quad (2.6.12)$$

или, что эквивалентно, уравнения

$$z'' = [\lambda + u - 2(\ln \tilde{y})''] z. \quad (2.6.13)$$

В качестве простого примера рассмотрим уравнение (2.6.10) при $u = 0$. Общее решение получившегося уравнения имеет вид $y = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. В качестве частного решения возьмем $\lambda = 1$ и $A = B = 1/2$, так что $\bar{y} = \operatorname{ch} x$. Так как в этом случае $2(\ln y)'' = 2 \operatorname{sech}^2 x$, то (2.6.11) или (2.6.12) дают общее решение уравнения

$$z'' = (\lambda - 2 \operatorname{sech}^2 x) z \quad (2.6.14)$$

в виде

$$z = Ae^{\sqrt{\lambda}x} (\sqrt{\lambda} - \operatorname{th} x) - Be^{-\sqrt{\lambda}x} (\sqrt{\lambda} + \operatorname{th} x). \quad (2.6.15)$$

Уравнение (2.6.14) эквивалентно уравнению (2.5.15) при $n = 1$. Решение, полученное в упр. 9, имеет тот же вид, что и полученное здесь решение. Как показывается в следующем примере, метод может быть распространен на большие значения n .

Упражнение 11

Рассмотрите уравнение $y'' = [\lambda - n(n+1) \operatorname{sech}^2 x] y_n$ и обратите внимание, что $y = \operatorname{ch}^{n+1} x$ является частным решением уравнения при $\lambda = (n+1)^2$. Покажите, что общее решение при $n = 2$ имеет вид

$$y_2 = \left(\frac{d}{dx} - 2 \operatorname{th} x \right) \left(\frac{d}{dx} - \operatorname{th} x \right) y_0,$$

где $y_0 = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. В общем случае $y_p = O_p O_{p-1} \dots O_1 y_0$, где $O_p = d/dx - p \operatorname{th} x$.

Описанный метод дает также процедуру такого изменения потенциала, при котором появляется дополнительное собственное значение (связанное состояние). В качестве конкретного примера отметим, что уравнение

$$y''_\lambda = [\lambda - n(n+1) \operatorname{sech}^2 x] y_\lambda \quad (2.6.16)$$

имеет n собственных значений. Согласно (2.6.13), если положить $\bar{y} = \operatorname{ch}^{n+1} x$, то добавление к потенциалу величины $\Delta u = -2(\ln \bar{y})''$ увеличит число собственных значений на единицу. В этом случае $\Delta u = -2(n+1) \operatorname{sech}^2 x$, и уравнение (2.6.13) примет вид

$$z'' = [\lambda - (n+1)(n+2) \operatorname{sech}^2 x] z, \quad (2.6.17)$$

что является формой уравнения (2.6.16) для $n+1$ собственных значений.

Выбранное выше выражение для \bar{y} можно получить следующим образом. Уравнение с n собственными значениями записывается в виде

$$y''_{k,n} = [k^2 - n(n+1) \operatorname{sech}^2 x] y_{k,n}, \quad (2.6.18)$$

а уравнение для $n+1$ собственных значений — в виде

$$z''_{k,n+1} = \left[k^2 - \tilde{k}^2 + \bar{y} \left(\frac{1}{\bar{y}} \right)'' \right] z_{k,n+1}, \quad (2.6.19)$$

где $k = n + 1$ является собственным значением уравнения (2.6.19), но не уравнения (2.6.18). Полагая в (2.6.18) $k = \bar{k} = n + 1$, мы получим $z_{n+1, n+1} = \bar{y}$. Но уравнение для $z_{n+1, n+1}$ имеет частное решение $\text{sech}^{n+1} x$. Следовательно, как и требовалось, $\bar{y} = \text{ch}^{n+1}$. Аналогичные соображения могут быть применены к произвольным потенциалам [115].

Упражнение 12

Описанный метод может быть использован также для непосредственного порождения решений, описывающих связанные состояния. Воспользуемся тем, что уравнение $y''_{n, n} = [m^2 - n(n+1) \text{sech}^2 x] y_{n, n}$ имеет решения $y_{n, n} = \text{sech}^n x$ и $y_{n, n-1} = \text{ch}^n x$, чтобы показать, что

$$y_{n, n+1} = \left[\frac{d}{dx} - (n+1) \text{th } x \right] \text{sech}^2 x,$$

$$y_{n, n+2} = \left[\frac{d}{dx} - (n+2) \text{th } x \right] y_{n, n+1}.$$

Для $n = 2$ получите результат $y_{1, 2} = \text{th } x \text{ sech } x$.

Другой процедурой, также обеспечивающей простой подход к результатам этого раздела, является метод факторизации ([61]; [89]).

2.7. ДВУМЕРНЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Решения, описывающие связанные состояния, могут совершенно естественно появляться и в классическом случае распространения двумерных или трехмерных волн в неоднородной среде. Они встречаются всякий раз, когда есть область среды, в которой в результате отражения может быть заключена волна. Это может иметь место в том случае, когда в среде есть слой, где достигается минимум фазовой скорости волны. Пример распространения звука под водой показан на рис. 2.2. Легче всего понять этот эффект на языке геометрической оптики. Для простоты предполагается, что звуковое поле порождается источником, расположенным на глубине, где скорость звука минимальна. Лучи, исходящие из источника под достаточно большим углом к горизонтали (как, например, луч A на рис. 2.2), будут попадать на $z = \pm \infty$, а лучи, уходящие под достаточно малыми углами, B и C на рис. 2.2, будут непрерывно изгибаться обратно в сторону глубины источника и, таким образом, будут распространяться по «звуковому каналу» в горизонтальном направлении.

Для двумерных волн с одной частотой $\nu = \omega/2\pi$ волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega}{c(z)} \right]^2 p = 0, \quad (2.7.1)$$

где $p(x, z)$ — звуковое давление. Это уравнение справедливо при условии, что фазовая скорость волны не слишком быстро меняется на расстоянии порядка длины волны ([17]; [15]). Удобно записать фазовую скорость в виде

$$c^2(z) = \frac{c_0^2}{1 + \mu^2(z)}, \quad (2.7.2)$$

где μ стремится к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$. Затем стандартная процедура разделения переменных приводит к решениям уравнения (2.7.1) вида

$$p(x, z) = e^{ikhx} v(z). \quad (2.7.3)$$

Находим, что функция $v(z)$ удовлетворяет уравнению Штурма — Лиувилля

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + [k^2 - U(z)] v = 0, \quad (2.7.4)$$

где $k^2 = (\omega/c_0)^2 - k_x^2$ и $U(z) = -[\omega\mu(z)/c_0]^2$. Для $\mu^2 > 0$ это эквивалентно уравнению Шрёдингера с притягивающим потенциалом,

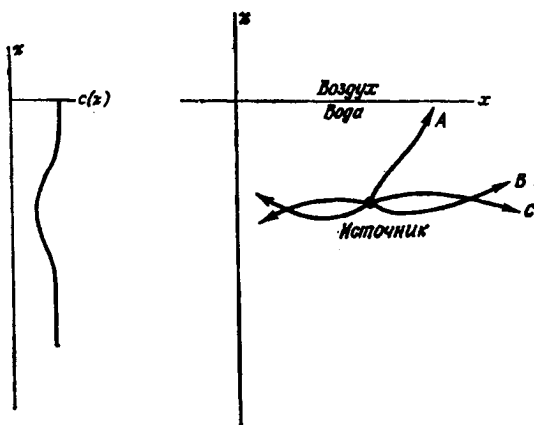


Рис. 2.2. Звуковые лучи, захваченные неоднородностью в виде слоя.

поэтому в этой классической задаче могут иметь место решения, отвечающие связанным состояниям, т. е. решения, локализованные в слое на глубине, соответствующей максимуму $\mu^2(z)$. Это происходит при таких значениях k_x , для которых постоянная k^2 является собственным значением уравнения Штурма — Лиувилля (2.7.4). С физической точки зрения ясно, что такого образования каналов не может быть на глубине, где скорость звука достигает своего максимума (т. е. $\mu^2 < 0$).

Часто бывает полезно выразить решение дифференциального уравнения в частных производных в виде разложения по системе собственных функций. Для некоторых задач эта система собственных функций бывает полной, только если она содержит функции двух типов. Один тип можно рассматривать как решения рассеяния, распространяющиеся в бесконечность, а функции другого типа имеют смысл локализованных решений, или решений, описывающих связанные состояния. Так как приводимая здесь задача образования звукового канала предоставляет идеальную возможность для рассмотрения той роли, которую при разложении по собственным функциям играют решения, соответствующие связанным состояниям, мы сейчас займемся (возможно, несколько пространно) изложением конкретной задачи, на примере которой легко понять эту роль.

Рассмотрим детально задачу о двумерном линейном источнике с интенсивностью Q и частотой ω , расположенном в бесконечной среде на глубине, соответствующей минимуму скорости. Анализ оказывается очень простым, если $\mu^2(z)$ в формуле (2.7.2) дается выражением $2 \operatorname{sech}^2(\omega z/c)$. Записывая k_0 вместо ω/c , получаем основное уравнение в виде

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dz^2} + k_0^2(1 + 2 \operatorname{sech}^2 k_0 z) p = -Q \delta(x) \delta(z) \quad (2.7.5)$$

с граничным условием излучения, состоящим в том, что при x и z , стремящихся к $\pm\infty$, нет приходящих волн. Первый и наиболее очевидный подход к решению этой задачи состоит в том, чтобы ввести фурье-представление звукового поля, записывая

$$p(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} e^{ik_x x} \bar{p}(k_x, z). \quad (2.7.6)$$

Выражая через интеграл также и $\delta(x)$, $\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (dk_x/2\pi) e^{ik_x x}$, находим, что преобразованная переменная $\bar{p}(k_x, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \bar{p}}{dz^2} + (k_0^2 - k_x^2 + 2k_0^2 \operatorname{sech}^2 k_0 z) \bar{p} = -Q \delta(z). \quad (2.7.7)$$

Это неоднородное уравнение можно решить, интегрируя с переходом через сингулярность при $z=0$, как описано в общих чертах в упр. 4. Обозначая преобразованное звуковое давление в верхнем и нижнем полупространствах через $\bar{p}_>$ и $\bar{p}_<$ соответственно, получим

$$\left. \frac{d\bar{p}_>}{dz} \right|_0 - \left. \frac{d\bar{p}_<}{dz} \right|_0 = -Q. \quad (2.7.8)$$

Для $z \neq 0$ функция \bar{p} удовлетворяет однородному уравнению вида (2.6.14). Так как \bar{p} должно содержать только уходящие от источника волны, решения $\bar{p}_>$ и $\bar{p}_<$, как видно из (2.6.15), суть

$$\begin{aligned}\bar{p}_> &= A(k_x) e^{i\eta z} (i\eta - k_0 \operatorname{th} k_0 z), \\ \bar{p}_< &= B(k_x) e^{-i\eta z} (i\eta + k_0 \operatorname{th} k_0 z),\end{aligned}\quad (2.7.9)$$

где $\eta = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$. Звуковое поле должно быть непрерывно при $z = 0$; таким образом, $\bar{p}_>(k_x, 0) = \bar{p}_<(k_x, 0)$ и поэтому $A(k_x) = B(k_x)$.

Из (2.7.8) мы находим, что

$$A(k_x) = Q/[2(2k_0^2 - k_x^2)]. \quad (2.7.10)$$

Возвращаясь к (2.7.2), мы видим, что звуковое поле имеет вид

$$p(x, z) = \frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x + i\eta |z|} \frac{i\eta - k_0 \operatorname{th} k_0 |z|}{2k_0^2 - k_x^2}. \quad (2.7.11)$$

Таким образом, мы получаем интегральное фурье-представление для звукового поля. Решение является просто интегралом по полной системе функций $e^{ik_x x}$.

Вместо того чтобы выражать звуковое поле через интеграл от волновой функции по координате x , как в (2.7.11), решению можно придать другой вид, выразив его через интеграл от решений уравнения (2.6.14), т. е. от волновых функций для координаты z . В дополнение к интегралу от распространяющихся решений, мы найдем вклад, пропорциональный решению $\operatorname{sech} k_0 z$, описывающему связанные состояния. Только тогда, когда мы включаем вклад от связанных состояний, мы имеем полную систему функций. Чтобы получить этот результат из приведенного выше решения, заменим (2.7.11) контурным интегралом. Для положительных значений x и z мы можем замкнуть контур в верхней полуплоскости комплексной плоскости k_x , если $\operatorname{Im} \eta > 0$. Из-за наличия члена $\exp(i\eta z)$ вклад от дуги на бесконечности будет тогда экспоненциально стремиться к нулю. Так как $\eta = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$, подынтегральное выражение многозначно, и мы должны выбрать разрез таким образом, чтобы гарантировать всюду выполнение условия $\operatorname{Im} \eta > 0$. Соответствующий контур легко выбрать, если принять сначала, что k_0 является величиной с малой комплексной частью, так что $k_0 \rightarrow k_0 + i\varepsilon$. [Это может быть либо результатом введения в среду малой диссипации, либо результатом предположения, что в задаче зависимость от времени включается постепенно (адиабатически) заменой $e^{-i\omega t}$ на $e^{-i(\omega + i\varepsilon)t}$.] Полагая $k_x = \sigma + i\tau$, получим $\eta = \eta_r + i\eta_i = \sqrt{(k_0 + i\varepsilon)^2 - (\sigma + i\tau)^2}$. Возводя в квадрат и разделяя действи-

тельную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned}\eta_r^2 - \eta_i^2 &= k_0^2 - \varepsilon^2 - \sigma^2 + \tau^2, \\ \eta_r - \eta_i &= k_0 \varepsilon - \sigma \tau.\end{aligned}\quad (2.7.12)$$

Так как мы требуем, чтобы $\eta_i > 0$, мы определим сначала геометрическое место точек, для которых $\eta_i = 0$. Из второго из уравнений (2.7.12) видно, что это геометрическое место точек является равнобочной гиперболой $\sigma\tau = k_0\varepsilon$. Из первого уравнения (2.7.12)

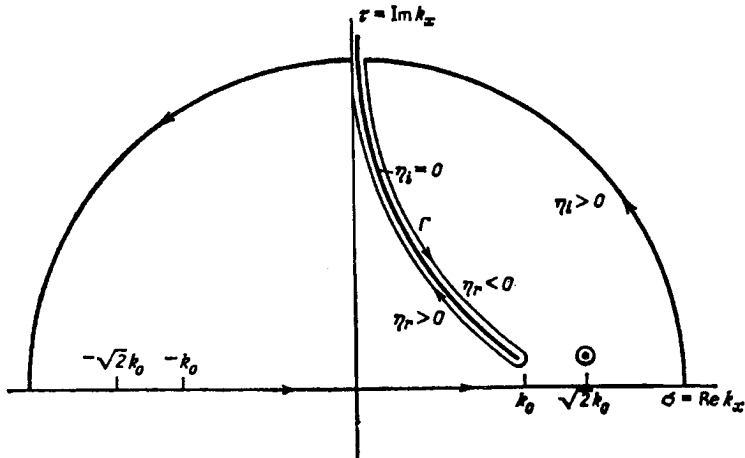


Рис. 2.3. Контур интегрирования для вычисления интеграла в (2.7.11).

мы видим, что на этой гиперболке η_r будет равно нулю при $\sigma = k_0$ и $\tau = \varepsilon$. Так как η_r^2 положительно, мы должны ограничить σ и τ той частью гиперболы, где $\sigma < k_0$ и $\tau > \varepsilon$. Таким образом, ветвь разреза Γ в первом квадранте идет от $(\sigma, \tau) = (k_0, \varepsilon)$ до $(\sigma, \tau) = (0, \infty)$, как показано на рис. 2.3. Функция η будет, таким образом, действительна вдоль линии Γ , но разрывна при переходе через нее. Чтобы определить природу разрыва, заметим, что если мы движемся от Γ к точке над Γ , либо увеличивая σ при постоянном τ , либо увеличивая τ при постоянном σ , то правая часть в (2.7.12) становится отрицательной. Левая часть также должна быть отрицательной, и так как $\eta_i > 0$, мы видим, что η_r должно быть отрицательным над Γ . Аналогично, $\eta_r > 0$ под Γ .

Подынтегральное выражение содержит также полюсы при $k_x = \pm \sqrt{2} k_0$. Снова заменяя k_0 через $k_0 + i\varepsilon$, можно передвинуть полюсы в первый и третий квадранты. На рис. 2.3 показан контур для вычисления интеграла в (2.7.11). Поэтому представление

Фурье звукового поля может быть переписано в виде

$$p(x, z) = 2\pi i \left(\text{вычет полюса при } k_x = \sqrt{2} k_0 \right) - \\ - \frac{Q}{4\pi} \int_1 dk_x e^{ik_x x + i\eta z} \frac{i\eta - \text{th } k_0 z}{2k_0^2 - k_x^2}. \quad (2.7.13)$$

Вклад от полюса равен $(iQ/4\sqrt{2}) e^{i\sqrt{2} k_0 x} \text{sech } k_0 z$, а интеграл вокруг разреза — это интеграл, где η меняется от $\eta = -\infty$ до $\eta = 0$ вдоль верхней стороны разреза плюс интеграл от $\eta = 0$ до $\eta = +\infty$ вдоль нижней стороны разреза. Преобразовывая интеграл в интеграл до η посредством замены $k_x = \sqrt{k_0^2 - \eta^2}$ и $dk_x = -\eta d\eta/k_x$, мы получим окончательно

$$p(x, z) = \frac{Q}{4\sqrt{2}} e^{i\sqrt{2} k_0 x + i\pi/2} \text{sech } k_0 z + \\ + \frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{i\eta z} (i\eta - k_0 \text{th } k_0 z) F(\eta), \quad (2.7.14)$$

где

$$F(\eta) = \frac{\eta e^{ix\sqrt{k_0^2 - \eta^2}}}{\sqrt{k_0^2 - \eta^2} (k_0^2 + \eta^2)}. \quad (2.7.15)$$

Как указывалось выше, сами по себе функции $e^{i\eta z} (i\eta - k_0 \text{th } k_0 z)$ с действительным η не составляют полной системы функций. Мы видели, что нужно включить и вклад от связанного состояния $\text{sech } k_0 z$. Заметим, что это можно сделать вычислением функции $e^{i\eta z} (i\eta - k_0 \text{th } k_0 z)$ при $\eta = ik_0$.

Упражнение 13

Покажите, что решение, описывающее связанные состояния, ортогонально распространяющимся решениям, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \text{sech } k_0 z (i\eta - k_0 \text{th } k_0 z) e^{i\eta z} = 0.$$

2.8. ОБЩИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ РАССЕЯНИЯ

Для локализованных потенциалов $u(x)$ все решения уравнения Шрёдингера

$$y'' + [k^2 - u(x)] y = 0 \quad (2.8.1)$$

сведутся при x , стремящемся к $\pm\infty$, к линейной комбинации функций $e^{\pm ikx}$. Для задачи рассеяния на бесконечном интервале стало обычным (мы следуем в этом разделе изложению Фаддеева [35],

[36]) выражать все решения уравнения Шрёдингера в виде линейных комбинаций решения $f_1(x, k)$ (которое при x , стремящемся к $+\infty$, сводится к e^{ikx}) и решения $f_2(x, k)$ (сводящегося при x , стремящемся к $-\infty$, к e^{-ikx}), т. е.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-ikx} f_1(x, k)] = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^{ikx} f_2(x, k)] = 1. \quad (2.8.2)$$

Эти решения часто называют фундаментальными решениями уравнения Шрёдингера (или функциями Йоста).

Фундаментальные решения

Хотя для произвольного потенциала фундаментальные решения не могут быть определены в явном виде, многие из их свойств могут быть установлены при рассмотрении некоторых интегральных уравнений, которым они удовлетворяют. Эти интегральные уравнения можно получить, считая, что член $u(x)y$ в уравнении (2.8.1) является неоднородным членом в правой части этого уравнения, и затем пользуясь методом вариации параметров. Рассматривая два случая, соответствующие предельным формам (2.8.2), мы легко находим (упр. 14), что

$$f_1(x, k) = e^{ikx} - \frac{1}{k} \int_x^{\infty} dx' \sin k(x - x') u(x') f_1(x', k), \quad (2.8.3)$$

$$f_2(x, k) = e^{-ikx} + \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x dx' \sin k(x - x') u(x') f_2(x', k). \quad (2.8.4)$$

Если $u(x)$, и k — действительные величины, то $f_1(x, -k) = f_1^*(x, k)$ и $f_2(x, -k) = f_2^*(x, k)$, где звездочка означает комплексно-сопряженную величину. Эти равенства являются следствием того, что функции удовлетворяют одному и тому же интегральному уравнению и имеют один и тот же асимптотический вид.

Если бы нам нужно было решать эти интегральные уравнения методом итераций, например, подставляя в уравнение (2.8.3) вместо $f_1(x, k)$ функцию e^{ikx} и т. д., мы нашли бы, что для $\text{Im } k > 0$ получившиеся интегралы сходятся. Кроме того, известно, что получающееся разложение в ряд для интегральных уравнений типа Вольтерры, подобных уравнениям (2.8.3) и (2.8.4), всегда сходится [81]. Следовательно, $f_1(x, k)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексной плоскости k . Аналогично находится, что это справедливо и для функции $f_2(x, k)$. Таким образом, для $\text{Im } k > 0$ функции f_1 и f_2 удовлетворяют уравнениям (2.8.3) и (2.8.4) соответственно.

Упражнение 14

Методом вариации параметров получите фундаментальные решения (2.8.3) и (2.8.4). Конкретнее, запишите решение уравнения (2.8.1) в виде $y = A(x)e^{ikx} + B(x)e^{-ikx}$ и покажите, что можно получить $A(x) = (2ik)^{-1} \int_0^x dx' u y e^{-ikx'} + C_1$, $B(x) = (2ik)^{-1} \int_0^x dx' u y e^{ikx'} + C_2$. Для $f_1(x, k)$ получите, что $C_1 = 1 - (2ik)^{-1} \times \int_0^\infty dx' u y e^{-ikx'}$ и $C_2 = (2ik)^{-1} \int_0^\infty dx' u y e^{ikx'}$. Для $f_2(x, k)$ получите $C_1 = -(2ik)^{-1} \int_{-\infty}^0 dx' u y e^{-ikx'}$ и $C_2 = 1 - (2ik)^{-1} \int_{-\infty}^0 dx' u y e^{ikx'}$. Соответствующие функции $A(x)$ и $B(x)$ теперь дают результаты, приведенные в (2.8.3) и (2.8.4).

Соотношение для вронскианов

Определим следующим образом вронскиан двух любых решений уравнения Шрёдингера (2.8.1):

$$W(y_1; y_2) \equiv y_1' y_2 - y_1 y_2' \quad (2.8.5)$$

(для удобства в последующем это выражение отличается от обычного определения знаком «минус»). В уравнении Шрёдингера (2.8.1) нет члена с первой производной, поэтому вронскиан двух любых линейно независимых решений является постоянной величиной, которая может зависеть от k . Так как фундаментальные решения $f_1(x, k)$ и $f_2(x, k)$ принимают простые предельные формы (2.8.2), легко вычислить некоторые соотношения для вронскианов. В частности, вычисляя f_1 при $x \rightarrow \infty$ и f_2 при $x \rightarrow -\infty$, получим

$$W[f_1(x, k); f_1(x, -k)] = 2ik, \quad W[f_2(x, k); f_2(x, -k)] = -2ik. \quad (2.8.6)$$

Так как любое третье решение может быть выражено как линейная комбинация двух линейно независимых решений, можно записать

$$f_2(x, k) = c_{11}(k) f_1(x, k) + c_{12}(k) f_1(x, -k), \quad (2.8.7a)$$

$$f_1(x, k) = c_{21}(k) f_2(x, -k) + c_{22}(k) f_2(x, k). \quad (2.8.7b)$$

Из предельных форм фундаментальных решений видно, что (2.8.7a) представляет собой решение уравнения Шрёдингера, которое при $x \rightarrow -\infty$ сводится к e^{-ikx} , а при $x \rightarrow \infty$ — к линейной комбинации $c_{11}e^{ikx} + c_{12}e^{-ikx}$. Поэтому это решение соответствует задаче рассеяния, в которой из $x = +\infty$ на рассеивающий потенциал $u(x)$ падает волна с амплитудой c_{12} . Волна отражается с амплитудой c_{11} , а проходит на $-\infty$ с единичной амплитудой, как показано

на рис. 2.4, а. Подобным образом (2.8.7b) представляет собой решение рассеяния, где падающая волна приходит из $-\infty$, как показано на рис. 2.4, б. (Соотношение между различными решениями аналогично тому, которое уже встречалось в (2.5.10) для гипергеометрических функций.)

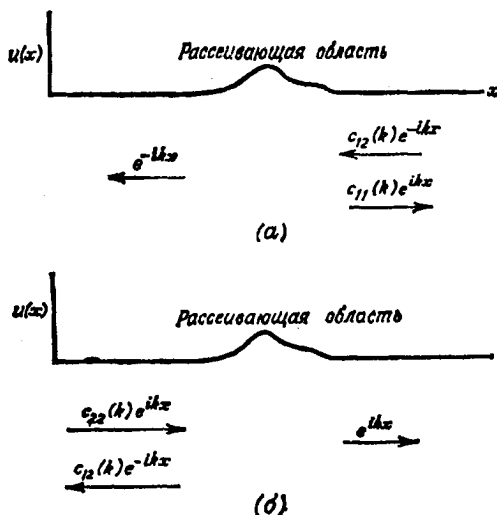


Рис. 2.4. Рассеяние волн, падающих: (а) справа; (б) слева.

Для обычно используемых коэффициентов отражения и прохождения в случае падающей волны единичной амплитуды мы имеем

$$R_R(k) = \frac{c_{11}(k)}{c_{12}(k)}, \quad T_R(k) = \frac{1}{c_{12}(k)}, \quad (2.8.8)$$

где индекс R относится к волне, падающей справа. Аналогично, для падающей слева волны единичной амплитуды мы имеем соотношения

$$R_L(k) = \frac{c_{22}(k)}{c_{21}(k)}, \quad T_L(k) = \frac{1}{c_{21}(k)}. \quad (2.8.9)$$

Между коэффициентами c_{ij} есть ряд соотношений, которые будут теперь сведены воедино. Подставляя $f_1(x, k)$ из (2.8.7b) в (2.8.7a) и приравнявая коэффициенты при $f_2(x, k)$ и $f_2(x, -k)$, находим, что для совместности этих уравнений нужно, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} 1 &= c_{11}(k)c_{22}(k) + c_{12}(k)c_{21}(-k), \\ 0 &= c_{11}(k)c_{21}(k) + c_{12}(k)c_{22}(-k). \end{aligned} \quad (2.8.10)$$

Аналогичная подстановка (2.8.7а) в (2.8.7b) дает

$$\begin{aligned} 1 &= c_{21}(k) c_{12}(-k) + c_{22}(k) c_{11}(k), \\ 0 &= c_{21}(k) c_{11}(-k) + c_{22}(k) c_{12}(k). \end{aligned} \quad (2.8.11)$$

Далее, подстановка (2.8.6) и (2.8.7) в различные возможные соотношения для вронскиана и использование того факта, что $W[f_1(x, k); f_1(x, k)] = W[f_2(x, k); f_2(x, k)] = 0$, дает

$$\begin{aligned} c_{11}(k) &= \frac{1}{2ik} W[f_2(x, k); f_1(x, -k)], \\ c_{22}(k) &= \frac{1}{2ik} W[f_2(x, -k); f_1(x, k)], \\ c_{12}(k) &= c_{21}(k) = \frac{1}{2ik} W[f_1(x, k); f_2(x, k)]. \end{aligned} \quad (2.8.12)$$

Из последнего из этих соотношений следует, что $T_L(k) = T_R(k)$. Чтобы показать, что для действительных u и k имеют место соотношения

$$c_{12}(-k) = c_{12}^*(k), \quad c_{11}(k) = -c_{22}^*(k) = -c_{22}(-k), \quad (2.8.13)$$

можно использовать соотношения $f_i^*(x, -k) = f_i(x, k)$ для $i = 1, 2$. Тогда совместность уравнений (2.8.10) и (2.8.11) дает

$$|c_{12}(k)|^2 = 1 + |c_{11}(k)|^2 = 1 + |c_{22}(k)|^2, \quad (2.8.14)$$

что, согласно (2.8.8) и (2.8.9), можно записать в виде

$$1 = |T(k)|^2 + |R_R(k)|^2 = |T(k)|^2 + |R_L(k)|^2. \quad (2.8.15)$$

Из (2.8.10) и (2.8.11) получим

$$R_R(k)T(-k) + R_L(-k)T(k) = 0. \quad (2.8.16)$$

Этот последний результат дает полезное соотношение между R_L и R_R . Наконец, мы имеем $R_L^*(-k) = R_L(k)$ и аналогичное соотношение для $R_R(k)$.

Упражнение 15

Сравните асимптотические выражения для (2.8.4) и (2.8.7а) при $x \rightarrow \infty$ и покажите, что

$$\begin{aligned} c_{11}(k) &= \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} u(x) f_2(x, k), \\ c_{12}(k) &= 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} u(x) f_2(x, k). \end{aligned}$$

Покажите, таким образом, что до тех пор, пока $\int_{-\infty}^{\infty} dx' u(x') f_2(x', 0) \neq \infty$, справедливо соотношение

$$R_R(0) = \frac{c_{11}(0)}{c_{12}(0)} = -1.$$

Аналогичный результат имеет место для $R_L(0)$.

Полюсы коэффициента прохождения

Мы уже встречались с некоторыми конкретными примерами, в которых для получения информации о локализованных решениях, или решениях, описывающих связанные состояния, использовалось расположение полюсов у коэффициентов отражения и прохождения в верхней полуплоскости. Сейчас мы рассмотрим этот вопрос в более общем виде. Из (2.8.8) и (2.8.9) ясно, что нас интересуют нули $c_{12}(k)$. Во-первых, из (2.8.14), которое справедливо только для действительных k , видно, что c_{12} никогда не может обращаться в нуль, если $\text{Im } k = 0$. Таким образом, все нули c_{12} расположены вне действительной оси. Во-вторых, можно также показать, что для действительных потенциалов все полюсы в верхней полуплоскости должны быть на мнимой оси. Чтобы убедиться в этом, предположим, что один из полюсов лежит в точке $k = k_0$, и запишем

$$\begin{aligned} y'' + k_0^2 y &= u(x) y, \\ y'' + k_0^{*2} y^* &= u(x) y^*, \end{aligned} \quad (2.8.17)$$

где y может быть любым из двух фундаментальных решений, а y^* — комплексно-сопряженная этого решения. Умножая первое из этих уравнений на y^* , второе — на y , вычитая и интегрируя по всем x , получим

$$(y^* y' - y y'^*)|_{-\infty}^{\infty} = -(k_0^2 - k_0^{*2}) \int_{-\infty}^{\infty} dx |y|^2. \quad (2.8.18)$$

Левая часть обращается в нуль, так как выражение в скобках — это один из двух вронскианов (2.8.6), и, таким образом, имеет одно и то же значение в обоих пределах. Записывая $k_0 = k_{0r} + ik_{0i}$, мы находим, что мнимая часть (2.8.18) равна

$$k_{0r} k_{0i} \int_{-\infty}^{\infty} dx |y|^2 = 0. \quad (2.8.19)$$

Таким образом, $k_{0r} = 0$, так как $k_{0i} \neq 0$, как отмечалось выше, и интеграл при $\text{Im } k > 0$ является конечной положительной величиной.

Наконец, если c_{12} обращается в нуль, то $f_1(x, k_0)$ и $f_2(x, k_0)$ линейно зависимы, так как тогда (2.8.7a) и (2.8.7b) дают

$$f_2(x, k_0) = c_{11}(k_0) f_1(x, k_0) \quad (2.8.20)$$

и $c_{22}(k_0) = 1/c_{11}(k_0)$.

В последующих приложениях нужно будет знать вычет в каждом полюсе для величины $1/c_{12}(k)$. Следовательно, мы должны вычислить $\dot{c}_{12}(k_l) = dc_{12}(k)/dk|_{k=k_l}$, где k_l является l -м нулем c_{12} на мнимой оси в верхней полуплоскости. Из последнего из соотношений (2.8.12) имеем

$$\begin{aligned} \dot{c}_{12}(k_l) &= \frac{1}{2ik_l} \{W[f_1; f_2] + W[f_1; \dot{f}_2]\} = \\ &= \frac{1}{2ik_l} \{c_{11}(k_l) W[f_1; f_1] + c_{22}(k_l) W[f_2; \dot{f}_2]\}. \end{aligned} \quad (2.8.21)$$

В последнем соотношении вронскианы можно вычислить следующим образом. Из уравнения Шрёдингера можно записать

$$\begin{aligned} f_1''(x, k) + k^2 f_1(x, k) &= u(x) f_1(x, k), \\ f_1''(x, k_l) + k_l^2 f_1(x, k_l) &= u(x) f_1(x, k_l). \end{aligned} \quad (2.8.22)$$

Умножая первое из этих уравнений на $f(x, k_l)$, второе — на $f(x, k)$ и вычитая, находим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [f_1'(x, k_l) f_1(x, k) - f_1'(x, k) f_1(x, k_l)] - \\ - (k^2 - k_l^2) f_1(x, k) f_1(x, k_l) = 0. \end{aligned} \quad (2.8.23)$$

Дифференцируя этот результат по k и полагая затем $k = k_l$, получим

$$\frac{d}{dx} W[f_1(x, k_l; \dot{f}_1(x, k_l))] = 2k_l [f_1(x, k_l)]^2. \quad (2.8.24)$$

Интегрирование от x до $+\infty$ дает

$$W[f_1(x, k_l; \dot{f}_1(x, k_l))] = -2k_l \int_x^\infty dx' [f_1(x', k_l)]^2, \quad (2.8.25)$$

так как вронскиан, вычисленный в верхнем пределе, при $\text{Im } k > 0$ обращается в нуль. Аналогичное вычисление показывает, что

$$W[f_2(x, k_l; \dot{f}_2(x, k_l))] = 2k_l \int_{-\infty}^x dx' [f_2(x', k_l)]^2, \quad (2.8.26)$$

и тогда (2.8.21) дает формулу для $c_{12}(k_1)$:

$$i\gamma_1 = \text{Res} \left[\frac{1}{c_{12}(k_1)} \right] = \frac{1}{c_{12}(k_1)} = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} dx f_1(x, k_1) f_2(x, k_1)}. \quad (2.8.27)$$

Чтобы переписать этот результат в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx c_{11}(k_1) \gamma_1 [f_1(x, k_1)]^2 = 1, \quad (2.8.28a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx c_{22}(k_1) \gamma_1 [f_2(x, k_1)]^2 = 1, \quad (2.8.28b)$$

можно использовать уравнение (2.8.20). Таким образом, величины $[\gamma_1 c_{11}(k_1)]^{1/2}$ и $[\gamma_1 c_{22}(k_1)]^{1/2}$ являются нормировочными постоянными для волновых функций связанных состояний $f_1(x, k_1)$ и $f_2(x, k_1)$ соответственно.

Использование соотношения (2.8.20) дает также

$$c_{12}(k_1) = -i c_{11}(k_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx [f_1(x, k_1)]^2. \quad (2.8.29)$$

Можно воспользоваться этим результатом, чтобы показать, что при действительном потенциале $c_{12}(k_0)$ никогда не обращается в нуль. Следовательно, все нули c_{12} , т. е. все полюсы коэффициента прохождения, должны быть простыми. Необращение $c_{12}(k_0)$ в нуль следует как из условия нормировки (2.8.2), которое требует, чтобы c_{11} не обращалось в нуль в нулях c_{12} , так и из выражения (2.8.3), которое показывает, что для действительного потенциала функция $f_1(x, k)$ действительна в нулях c_{12} , где k — чисто мнимая величина; таким образом, подынтегральное выражение в (2.8.29) положительно и интеграл не равен нулю.

Так как f_1 и f_2 действительны в нулях c_{12} , то из (2.8.27) видно, что γ_1 действительно. Наконец, используя (2.8.7), можно записать нормировочные постоянные в виде

$$m_{R1} = \gamma_1 c_{11}(k_1) = -i \frac{c_{11}(k_1)}{c_{12}(k_1)} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx f_2^2(x, k_1) \right]^{-1}, \quad (2.8.30a)$$

$$m_{L1} = \gamma_1 c_{22}(k_1) = -i \frac{c_{22}(k_1)}{c_{12}(k_1)} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx f_1^2(x, k_1) \right]^{-1}. \quad (2.8.30b)$$

Так как f_1 и f_2 действительны для мнимых k , то m_{R1} и m_{L1} также действительны и положительны.

Как отмечалось в разд. 1.5, мы встретимся с линейными задачами на собственные значения, которые эквивалентны уравнению

Шрёдингера с комплексным потенциалом. В этих случаях полюсы больше не должны быть ни простыми, ни расположенными на мнимой оси.

Для последующих приложений этих результатов полезно иметь выражения для преобразований Фурье коэффициентов отражения и прохождения, введенных формулами (2.8.8) и (2.8.9). Так как при больших k коэффициент прохождения стремится к единице, удобно определить преобразование следующим образом:

$$\Gamma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikz} [T(k) - 1], \quad (2.8.31)$$

$$r_R(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} R_R(k), \quad (2.8.32)$$

$$r_L(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikz} R_L(k).$$

Как отмечалось ранее, при действительном потенциале $R_L(-k) = R_R(k)$; аналогично для $R_R(k)$. Поэтому для действительных потенциалов $r_R(z)$ и $r_L(z)$ действительны. При $z < 0$ интеграл $\Gamma(z)$ легко вычислить. Если в верхней полуплоскости нет полюсов, то $\Gamma(z)$ обращается в нуль. Для задач со связанными состояниями, где есть ряд полюсов в верхней полуплоскости на мнимой оси в точках $k = ik_i$, имеем

$$\Gamma(z) = - \sum_{i=1}^n \gamma_i e^{\gamma_i z}, \quad z < 0, \quad (2.8.33)$$

где γ_i выражается формулой (2.8.27), подсчитанной при $k_i = ik_i$.

Упражнение 16

Из (2.6.14) и (2.6.15) видно, что для потенциала $u(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x$ фундаментальными решениями являются функции $f_1(x, k) = e^{ikx} (ik - \operatorname{th} x) / (ik - 1)$ и $f_2(x, k) = e^{-ikx} (ik + \operatorname{th} x) / (ik - 1)$. Покажите, что $c_{12}(k) = (k - i) / (k + i)$, а $c_{11}(k) = c_{22}(k) = 0$. Таким образом, $R_L = R_R = 0$ и потенциал является безотражательным. Используйте в выражении для потока частиц (2.4.3) в качестве ψ функцию f_1 и покажите, что поток равен $\hbar k/m$, как это было бы в случае плоской волны e^{ikx} .

Упражнение 17

Используя результат упр. 11, покажите, что для потенциала $u(x) = -6 \operatorname{sech}^2 x$ фундаментальными решениями являются функции

$$f_1(x, k) = e^{ikx} \frac{1 + k^2 + 3ik \operatorname{th} x - 3 \operatorname{th}^2 x}{(k + i)(k + 2i)},$$

$$f_2(x, k) = e^{-ikx} \frac{1 + k^2 - 3ik \operatorname{th} x - 3 \operatorname{th}^2 x}{(k + i)(k + 2i)}$$

и что

$$c_{12}(k) = \frac{(k-i)(k-2i)}{(k+i)(k+2i)}.$$

Упражнение 18

Дифференцируя по k дифференциальные уравнения для функций $f_1(x, k)$ и $f_2(x, k)$, покажите, что

$$W(f_1; f_2) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = 2k \int_{-\infty}^{\infty} dx (f_2 f_1' - f_1 f_2').$$

Упражнение 19

Для δ -функции $u(x) = 2b\delta(x)$ уравнение Шредингера (2.8.1) имеет вид $y'' + [k^2 - 2b\delta(x)]y = 0$. Покажите, что фундаментальными решениями являются функции

$$\begin{aligned} f_1(x, k) &= \begin{cases} e^{ikx}, & x \geq 0, \\ e^{ikx} - (2b \sin kx)/k, & x \leq 0, \end{cases} \\ f_2(x, k) &= \begin{cases} e^{-ikx} + (2b \sin kx)/k, & x \geq 0, \\ e^{-ikx}, & x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Покажите также, что коэффициенты $c_{ij}(k)$ суть $c_{11}(k) = -c_{22}(-k) = -ib/k$ и $c_{12}(k) = 1 + ib/k$, так что $R_L(k) = -ib/(k+ib) = R_R(k)$. Эти результаты справедливы как для положительных, так и для отрицательных значений b .

Соотношение между коэффициентами прохождения и отражения

Коэффициенты прохождения и отражения связаны условием сохранения энергии (2.8.15) и соотношением (2.8.16). Следует выяснить, нельзя ли выразить коэффициент прохождения только через коэффициент отражения. Сейчас мы покажем, что если нам известно положение полюсов и нулей функции $T(k)$ в верхней полуплоскости, то коэффициент прохождения можно выразить либо через $R_L(k)$, либо через $R_R(k)$.

Сначала рассмотрим случай, когда у функции $T(k)$ в верхней полуплоскости нет ни нулей, ни полюсов. Тогда у логарифма коэффициента прохождения также нет сингулярностей в этой полуплоскости, и по теореме Коши

$$\ln T(k) = \oint_C \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{\ln T(\xi)}{\xi - k}. \quad (2.8.34)$$

Так как $T(k) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, то в этом пределе $\ln T \rightarrow 0$. Контур C можно выбрать вдоль действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$ и затем замкнуть его в верхней полуплоскости на ∞ с помощью дуги полуокружности. От дуги на бесконечности вклада нет, так как $\ln T(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, и можно записать

$$\ln T(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{\ln T(\xi)}{\xi - k}. \quad (2.8.35)$$

Так как k^* лежит в нижней полуплоскости и поэтому вне контура C , можно записать также

$$0 = \oint_C \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{\ln T(\zeta)}{\zeta - k^*} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{\ln T(\zeta)}{\zeta - k^*}, \quad (2.8.36)$$

где при написании второго равенства снова можно пренебречь контуром C на бесконечности в верхней полуплоскости. Беря комплексно-сопряженное от этого последнего уравнения, вычитая результат из (2.8.35) и используя (2.8.15), получим

$$\ln T(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{\ln [1 - |R(\zeta)|^2]}{\zeta - k}, \quad (2.8.37)$$

где в качестве $R(\zeta)$ может быть взята либо функция $R_R(\zeta)$, либо функция $R_L(\zeta)$. Таким образом, у нас есть рецепт получения $T(k)$ из $R(k)$, когда у $\ln T(k)$ нет сингулярностей в верхней полуплоскости. Для вычислений удобно переписать результат в виде

$$\frac{d}{dk} \ln T(k) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{\frac{d}{d\zeta} |R(\zeta)|^2}{(\zeta - k)[1 - |R(\zeta)|^2]}, \quad (2.8.38)$$

где мы проинтегрировали по частям. Особенно легко вычислить интеграл (2.8.38), когда $R(\zeta)$ является отношением полиномов от ζ , умноженным на фазовый множитель $e^{ia\zeta}$. При получении $T(k)$ из формулы (2.8.38) постоянная интегрирования в окончательном результате определяется из требования, чтобы $T(k) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$.

Если у подынтегрального выражения (2.8.38) есть полюс первого порядка на действительной оси, то исходный контур в (2.8.34) должен быть отождествлен с полуокружностью в верхней полуплоскости. Тогда интеграл в (2.8.38) понимается в смысле главного значения.

В качестве примера рассмотрим отталкивающий потенциал, выраженный δ -функцией. По формуле (2.4.4) имеем $R_L(k) = -i\beta/(k + i\beta)$, $\beta > 0$. Тогда уравнение (2.8.38) принимает вид

$$\frac{d}{dk} \ln T(k) = -2\beta^2 P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{1}{\zeta(\zeta - k)(\zeta^2 + \beta^2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k + i\beta}. \quad (2.8.39)$$

Требую, чтобы $T(k)$ стремилось к единице для больших k , мы получим второе выражение для коэффициента прохождения; оно также приводится в формуле (2.4.4). Имеем

$$T(k) = \frac{k}{k + i\beta}, \quad \beta > 0. \quad (2.8.40)$$

Если у $T(k)$ есть нули или полюсы первого порядка в верхней полуплоскости в точках α_i и β_i соответственно, то вычисление, по-

добное тому, которое было проделано выше, может быть выполнено для функции

$$\tilde{T}(k) = T(k) \prod_l \left(\frac{k - \alpha_l^*}{k - \alpha_l} \right) \left(\frac{k - \beta_l}{k - \beta_l^*} \right), \quad (2.8.41)$$

которая теперь обладает свойствами, которые требовались в предыдущих вычислениях от функции $T(k)$. Замечая, что для действительных k

$$|\tilde{T}(k)|^2 = |T(k)|^2 = 1 - |R(k)|^2, \quad (2.8.42)$$

мы можем следовать той же процедуре, что и в предыдущих вычислениях, что дает

$$T(k) = \prod_l \left(\frac{k - \alpha_l}{k - \alpha_l^*} \right) \left(\frac{k - \beta_l^*}{k - \beta_l} \right) \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{\ln [1 - |R(\xi)|^2]}{(\xi - k)} \right\}. \quad (2.8.43)$$

В качестве примера рассмотрим притягивающий потенциал в виде δ -функции, для которого $R_L = -i\beta/(k + i\beta)$, $\beta < 0$. У коэффициента прохождения также есть полюс при $k = i|\beta|$. Мы, таким образом, полагаем

$$\tilde{T}(k) = T(k) \frac{k - i|\beta|}{k + i|\beta|} = T(k) \frac{k + i\beta}{k - i\beta} \quad (2.8.44)$$

и затем получаем тот же интеграл, который был получен в (2.8.39), за исключением того, что теперь $\beta < 0$. Интегрирование дает

$$\frac{d}{dk} \ln \tilde{T}(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k - i\beta}. \quad (2.8.45)$$

Таким образом, $\tilde{T}(k) = k/(k - i\beta)$, и по формуле (2.8.44) мы снова получаем, что $T(k) = k/(k + i\beta)$, где теперь $\beta < 0$.

Асимптотическое решение

Хотя в общем случае решение дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами не может быть выражено в квадратурах (т. е. в виде явных интегралов), можно получить асимптотическое решение уравнения Шрёдингера для больших k , выраженное через потенциал и его производные ([111], [20]). Кроме того, что оно является полезной формой решения для больших k , асимптотическое разложение дает бесконечную последовательность сохраняющихся величин, которые будут играть важную роль при рассмотрении связи теории рассеяния с нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных.

Записав фундаментальное решение f_2 в виде

$$f_2(x, k) = e^{-ikx + h(x, k)}, \quad (2.8.46)$$

можно получить его асимптотическое разложение. Согласно (2.8.2), мы должны потребовать, чтобы $h(-\infty, k) = 0$. Уравнение Шрёдингера (2.8.1) для функции $h(x, k)$ примет вид

$$h'' - 2ikh' + (h')^2 = u; \quad (2.8.47)$$

оно является уравнением Риккати для h' . Это уравнение можно решить, вводя разложение

$$h'(x, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n(x)}{(2ik)^{n+1}}. \quad (2.8.48)$$

Можно показать, что ряд является асимптотическим [111] в том смысле, что ([64], гл. 17)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ h'(x, k) - \sum_{n=0}^N \frac{g_n(x)}{(2ik)^{n+1}} \right\} k^N = 0. \quad (2.8.49)$$

Если (2.8.48) подставить в уравнение Риккати (2.8.47) и приравнять члены с одинаковыми степенями k , мы получим $g_0 = -u$, $g_1 = g_0' = -u'$, и

$$g_{n+1} = g_n' + \sum_{m=0}^{n-1} g_m g_{n-m-1}, \quad n \geq 1. \quad (2.8.50)$$

Первые коэффициенты выражаются следующим образом:

$$g_0 = -u, \quad g_1 = -u', \quad g_2 = -u'' + u^2, \quad g_3 = -u''' + 4uu', \quad g_4 = -u^{(iv)} + 5(u')^2 + 6uu'' - 2u^3, \quad \text{и т. д.} \quad (2.8.51)$$

Из формулы (2.8.7а) видно, что предельные формы решения $f_2(x, k)$ имеют вид

$$f_2(x, k) \sim \begin{cases} e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty, \\ c_{11}(k)e^{ikx} + c_{12}(k)e^{-ikx}, & x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (2.8.52)$$

Следовательно, при $x \rightarrow +\infty$ $f_2(x, k)e^{ikx} \rightarrow c_{12}(k) + c_{11}(k)e^{2ikx}$, и для $\text{Im } k > 0$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x, k)e^{ikx} = c_{12}(k). \quad (2.8.53)$$

Из (2.8.46) и (2.8.52) получим $h(\infty, k) = \ln c_{12}(k)$. Так как $h(-\infty) = 0$, интегрирование разложения (2.8.48) по всей оси x дает

$$h(\infty, k) = \ln c_{12}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2ik)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx g_n(x). \quad (2.8.54)$$

Теперь, когда k становится большим, так что $k^2 \gg u$, потенциал в уравнении Шрёдингера становится пренебрежимо малым и вся

энергия волны проходит через рассеиватель. Таким образом, при $k \rightarrow \infty$ $c_{12}(k) \rightarrow 1$. Соответственно в этом пределе $\ln c_{12}(k)$ стремится к нулю. Если ввести асимптотическое разложение $\ln c_{12}(k) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n/k^n$ и сравнить коэффициенты с коэффициентами разложения (2.8.54), то получится

$$c_n = \frac{1}{(2i)^n} \int_{-\infty}^{\infty} dx g_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.8.55)$$

Этот результат окажется очень полезным при использовании этих асимптотических разложений для решения эволюционных уравнений. Рассматривая некоторые стандартные предельные случаи, можно понять значение функций g_n , даваемых формулами (2.8.51). Случаю медленного изменения потенциала на длине волны соответствует ВКБ-решение волнового уравнения ([96], разд. 28). Его можно здесь получить, пренебрегая всеми производными в выражениях для $g_n(x)$ и используя приближенные соотношения $g_0 = -u$, $g_2 = u^2$, $g_4 = -2u^3$, ... и $g_{2k+1} = 0$ для $k=0, 1, 2, \dots$. Если потенциал мал, так что $u \ll k^2$, применимо приближение Борна ([96], разд. 26). Его можно здесь получить, сохраняя только члены, линейные относительно функции u и ее производных. Это дает $g_0 = -u$, $g_1 = -u'$, $g_2 = -u''$, $g_3 = -u'''$, $g_4 = -u^{(iv)}$, ...

Упражнение 20

При медленном изменении функции $u(x)$ на расстоянии k^{-1} можно было бы ожидать, что функция $f_2(x, k)$ будет иметь вид $f_2 = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^x dx' (\sqrt{k^2 - u} - k) - ikx \right\}$. Покажите, что при подстановке этого выражения в (2.8.46) полученные значения g_n согласуются с приведенными выше для ВКБ-предела.

Упражнение 21

Приближение Борна для $f_2(x, k)$ получается, если в подынтегральном выражении в (2.8.4) положить функцию $f_2(x, k)$ равной e^{-ikx} . Рассмотрите интеграл как малую поправку к e^{-ikx} и покажите путем повторного интегрирования по частям выражения для $f_2'(x, k)/f_2(x, k)$, что коэффициенты при $(2ik)^{-n}$ согласуются с теми, которые были приведены выше для приближения Борна.

Число полюсов в выражении для коэффициента прохождения

В общем случае из рассмотрения функции $c_{12}(k)$ не видно, каково число полюсов в верхней полуплоскости в выражении для коэффициента прохождения. Полезно иметь метод определения полного числа отыскиваемых полюсов, особенно в тех случаях,

когда полюса находятся численно. Это можно сделать, замечая, что число простых полюсов N дается выражением

$$N = \oint_C \frac{dk}{2\pi i} \frac{\dot{c}_{12}(k)}{c_{12}(k)}, \quad (2.8.56)$$

где точка означает дифференцирование по k и C — контур в верхней полуплоскости, охватывающий все нули $c_{12}(k)$. Чтобы получить этот результат, заметим сначала, что $c_{12}(k)$ строится согласно формуле (2.8.12) из фундаментальных решений f_1 и f_2 , аналитичных в верхней полуплоскости. Поэтому внутри контура C у $c_{12}(k)$, а также у $\dot{c}_{12}(k)$ нет полюсов. Внутри этого контура вклад в число полюсов могут внести лишь нули $c_{12}(k)$. Если в качестве контура C взять действительную ось, замкнув ее на бесконечности в верхней полуплоскости с помощью дуги полуокружности, то вклада от дуги на бесконечности не будет. Это следует из асимптотического вида $c_{12}(k)$, записываемого как $c_{12}(k) - 1 \sim k^{-1}$ при $|k| \rightarrow \infty$. Таким образом, $\dot{c}_{12}/c_{12} \sim k^{-2}$, и интеграл на дуге полуокружности обращается в нуль. Если мы запишем $c_{12}(k) = |c_{12}| \exp[i\varphi(k)]$ и заметим, что $|c_{12}| \rightarrow 1$ при $|k| \rightarrow \infty$, то можно проинтегрировать (2.8.56) и получить выражение

$$N = \frac{1}{2\pi i} \ln c_{12}(k) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi} [\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)], \quad (2.8.57)$$

связывающее число полюсов с полным изменением фазы функции c_{12} при движении вдоль действительной оси. В квантовой теории рассеяния этот результат известен как теорема Левинсона ([90], разд. 5) ¹⁾.

В качестве простого примера вспомним, что для потенциала $u(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x$ мы получили в упр. 15, что $c_{12}(k) = (k-i)/(k+i)$. Фаза c_{12} дается выражением $\varphi = \operatorname{arctg}[2k/(1-k^2)]$. Когда k пробегает значения от $-\infty$ до -1 , фаза возрастает от 0 до $\pi/2$. При изменении k от -1 до 0 фаза возрастает от $\pi/2$ до π и подобным же образом увеличивается на π при движении k к $+\infty$. Полное изменение фазы составляет, таким образом, 2π , и, как и ожидалось, уравнение (2.8.56) дает $N = 1$.

2.9. «ОБРЕЗАННЫЕ» ПОТЕНЦИАЛЫ ²⁾

Используя некоторые общие результаты, связанные с «обрезанными» потенциалами, можно расширить класс форм потенциалов, приводящих к простым аналитическим результатам. Рассмотрим показанные на рис. 2.5 потенциал $u(x)$ и «обрезанный» потенциал

$$u^T(x) = u(x)\theta(x - x_1), \quad (2.9.1)$$

¹⁾ Соотношение (2.8.56) в теории функций комплексного переменного называют принципом аргумента. — Прим. ред.

²⁾ Знакомством с использованным здесь методом я обязан Коксу (J. R. Cox).

где $\theta(x)$ — единичная ступенчатая функция. Если обозначить через $f_1(x, k)$ и $f_2(x, k)$ фундаментальные решения для потенциала $u(x)$, а через $f_1^T(x, k)$ и $f_2^T(x, k)$ — для «обрезанного» потенциала, то из



Рис. 2.5. Произвольный потенциал $u(x)$ и связанный с ним потенциал $u^T(x)$, обрезанный слева при $x = x_1$.

(2.8.3) и (2.8.4) легко видеть, что для $x > x_1$

$$\begin{aligned} f_{1>}^T(x, k) &= f_1(x, k), \\ f_{2>}^T(x, k) &= e^{-ikx} + \frac{1}{k} \int_{x_1}^x dx' \sin k(x - x') u(x') f_2^T(x', k), \end{aligned} \quad (2.9.2)$$

а для $x < x_1$

$$\begin{aligned} f_{1<}^T(x, k) &= e^{ikx} - \frac{1}{k} \int_{x_1}^{\infty} dx' \sin k(x - x') u(x') f_1(x', k), \\ f_{2<}^T(x, k) &= e^{-ikx}. \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

Как $f_1^T(x, k)$, $f_2^T(x, k)$, так и их первые производные по x непрерывны в точке $x = x_1$.

Определяя

$$c_{12}^T(k) = \frac{1}{2ik} W[f_1^T(x, k); f_2^T(x, k)] \quad (2.9.4)$$

и вычисляя вронскиан в точке $x = x_1$, получим

$$c_{12}^T(k) = \frac{e^{-ikhx_1}}{2ik} [f_1'(x_1, k) + ikf_1(x_1, k)], \quad (2.9.5)$$

где $f_1'(x_1, k) = \partial f_1(x, k) / \partial x|_{x=x_1}$.

Аналогичным образом находим, что

$$\begin{aligned} c_{11}^T(k) &= -\frac{e^{-ikhx_1}}{2ik} [f_1'(x_1, -k) + ikf_1(x_1, -k)], \\ c_{22}^T(k) &= -\frac{e^{ikhx_1}}{2ik} [f_1'(x_1, k) - ikf_1(x_1, k)]. \end{aligned} \quad (2.9.6)$$

При x_1 , стремящемся к $+\infty$, мы получим, что $c_{12}^T(k) \rightarrow 1$, $c_{11}^T(k) \rightarrow 0$ и $c_{22}^T(k) \rightarrow 0$; это ожидаемые результаты в пределе обращаемого в нуль потенциала. Кроме того, при x_1 , стремящемся к $-\infty$,

можно использовать формулу (2.8.7b), чтобы выразить f_1 через f_2 и снова получить ожидаемые результаты $c_{ij}^T(k) \rightarrow c_{ij}(k)$. Детальнее этот предел будет обсуждаться после того, как мы рассмотрим следующий пример.

Как отмечалось в упр. 16, в случае потенциала $u = -2 \operatorname{sech}^2 x$ уравнение имеет фундаментальное решение $f_1 = e^{ikx}(ik - \operatorname{th} x)/(ik - 1)$. Подстановка в предыдущие результаты показывает, что для «обрезанного» потенциала $u(x) = -2\theta(x - x_1)\operatorname{sech}^2 x$ коэффициенты c_{ij}^T имеют вид

$$c_{12}^T(k) = \frac{k^3 + 1 + (k + i \operatorname{th} x_1)^3}{2k(k + i)}, \quad (2.9.7)$$

$$c_{11}^T(k) = -c_{22}^T(-k) = \frac{e^{-2ikx_1}}{2k(k - i)} \operatorname{sech}^2 x_1. \quad (2.9.8)$$

Эти выражения очень полезны для понимания аналитической структуры коэффициентов $c_{ij}(k)$. В частности, мы видели, что для безотражательного потенциала $c_{11}(k) = c_{22}(k) = 0$ и $c_{12}(k) = (k - i)/(k + i)$ для действительного k , в то время как в нуле коэффициента c_{12} мы имеем $c_{11}(i) = f_2(x, i)/f_1(x, i) = 1 = 1/c_{22}(i)$. Так как аналитическая функция равна всюду нулю, если она равна нулю хотя бы на некотором конечном отрезке линии ([22], стр. 188), предыдущие результаты могли бы показаться парадоксальными. Однако рассматривая выражения для коэффициентов в случае «обрезанного» потенциала, приведенные выше, можно видеть, что все результаты для безотражательных потенциалов получены в пределе при $x_1 \rightarrow -\infty$. В частности, нулем функции $c_{12}^T(k)$ в верхней полуплоскости является точка $k_0 = i(-\operatorname{th} x_1 + \sqrt{1 + \operatorname{sech}^2 x_1})/2$. Мы имеем также

$$c_{22}^T(k_0) = -\frac{e^{2ik_0x_1} \operatorname{sech}^2 x_1}{2k_0(k_0 + i)}; \quad (2.9.9)$$

когда x_1 стремится к $-\infty$, k_0 стремится к i , и мы получим $c_{22}^T(i) \rightarrow 1$. С другой стороны, для действительных k мы получаем, что $c_{22}^T(k) \rightarrow 0$ при $x_1 \rightarrow -\infty$. Аналогичный результат получается из поведения $c_{11}^T(k)$, но в этом случае надо раскрыть неопределенность, поскольку при $x_1 \rightarrow -\infty$ и $k_0 \rightarrow i$ как числитель, так и знаменатель обращаются в нуль.

Полюсы коэффициента прохождения определяются корнями уравнения $c_{12}^T(k) = 0$. Из приведенного выше выражения для корня этого уравнения, обозначенного через k_0 , видно, что один из двух корней всегда лежит в верхней полуплоскости. Таким образом, сколь бы малым ни был «обрезанный» притягивающий потенциал, всегда есть связанное состояние. Это частный пример общего результата, состоящего в том, что в одномерных задачах для всех

действительных притягивающих потенциалов, обращающихся в нуль на бесконечности, есть по крайней мере одно связанное состояние [89].

Упражнение 22

Покажите, что для потенциала, «обрезанного» справа, так что $u^T(x) = u(x)\theta(x_1 - x)$, коэффициенты имеют вид

$$c_{12}^T(k) = e^{ikx_1} \frac{[-f_2'(x_1, k) + ikf_2(x_1, k)]}{2ik},$$

$$c_{11}^T(k) = e^{-ikx_1} \frac{[f_2'(x_1, k) + ikf_2(x_1, k)]}{2ik} = -c_{22}^T(-k).$$

Упражнение 23

Другой потенциал, связанный с $u(x)$, коэффициенты которого $c_{ij}(k)$ могут быть легко определены, это потенциал $\tilde{u}(x) = u(x)\theta(x - x_1) + a\theta(x - x_1)$, где a — постоянная. Теперь у фундаментального решения есть разрыв первой производной в точке $x = x_1$, где имеет место соотношение $f_1'>(x_1, k) - f_1'<(x_1, k) = -af(x_1, k)$. Обозначая через $\tilde{c}_{ij}(k)$ коэффициенты, связанные с потенциалом $\tilde{u}(x)$, покажите, что

$$\tilde{c}_{12}(k) = e^{-ikx_1} \frac{f_1'(x_1, k) + (ik - a)f_1(x_1, k)}{2ik},$$

$$\tilde{c}_{11}(k) = -e^{-ikx_1} \frac{f_1'(x_1, -k) + (ik - a)f_1(x_1, -k)}{2ik},$$

$$\tilde{c}_{22}(k) = -e^{ikx_1} \frac{f_1'(x_1, k) - (ik + a)f_1(x_1, k)}{2ik}.$$

2.10. РАССЕЯНИЕ ИМПУЛЬСОВ — УРАВНЕНИЯ МАРЧЕНКО

При предыдущих рассмотрении процесса рассеяния падающая волна была стационарной волной только с одной частотой. Хотя можно было бы построить рассеяние произвольного падающего импульса по результатам вычислений таких стационарных состояний с помощью фурье-синтеза, как в (2.2.9), есть некоторые преимущества рассматривать рассеяние импульсов непосредственно во временной области. В частности, это легко приведет нас к новому представлению фундаментальных решений $f_1(x, k)$ и $f_2(x, k)$. Конечно, простейшим для анализа импульсом является δ -функция. Так как импульсы $\delta(t \pm x/c)$ суть функции $t \pm x/c$, они являются точными решениями простого волнового уравнения $y_{tt} - c^2 y_{xx} = 0$. Однако для упруго закрепленной струны, описываемой уравнением

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \mu^2(x)y = 0, \quad (2.10.1)$$

такие функции больше не являются решениями. Если $\mu^2(x)$ — локализованная функция, мы ожидаем, что может существовать точное решение, сводящееся к δ -функции вдали от упругой области. Вследствие наличия упругой области мы ожидаем, что импульс частично рассеется и оставит, таким образом, некий след за острой передней кромкой. Следовательно, разумно записать решение уравнения (2.10.1) в виде [10]

$$y_1(x, t) = \delta(t - x/c) + c\theta(t - x/c) A_R(x, ct), \quad (2.10.2)$$

где $\theta(x)$ — единичная ступенчатая функция и $A_R(x, ct)$ — функция, описывающая рассеяние, или след. Множители c были введены для последующего удобства. Если сделать преобразование Фурье решения и положить затем $ct = x'$ и $k = \omega/c$, получим

$$Y_1(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} y(x, t) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} dx' A_R(x, x') e^{ikx'}. \quad (2.10.3)$$

Это решение обладает тем свойством, что $\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-ikx} Y_1(x, \omega)] = 1$.

Теперь при $\mu^2(x) = u(x)$ функция $Y_1(x, \omega)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - u(x) \right] Y = 0, \quad (2.10.4)$$

для которого в разд. 2.8 мы ввели фундаментальное решение, обладающее следующим свойством: $\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-ikx} f_1(x, k)] = 1$. Так как это решение единственно, мы делаем вывод, что функция $Y_1(x, \omega)$ должна быть другим представлением фундаментального решения $f_1(x, k)$. Следовательно, можно записать

$$f_1(x, k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} dx' A_R(x, x') e^{ikx'}. \quad (2.10.5)$$

Это окажется удобным при дальнейшем использовании фундаментальных решений ¹⁾.

Аналогично, импульс, распространяющийся в отрицательном направлении x , можно записать в виде

$$y_2(x, t) = \delta(t + x/c) + c\theta(t + x/c) A_L(x, -ct). \quad (2.10.6)$$

¹⁾ Задаваемое формулой (2.10.2) решение описывает процесс рассеяния, в котором подходящая группа падающих волн создает уходящую δ -функцию, отступающую к $+\infty$. Это является следствием наличия в (2.10.3) временной зависимости вида $e^{i\omega t}$ и выбора знаков для фундаментальных решений (2.10.5). Более естественное решение, описывающее рассеяние падающего импульса, выраженного δ -функцией, потребовало бы изменения одного из этих соглашений о знаках, что не кажется оправданным.

Преобразование Фурье этого выражения приводит к следующему результату:

$$Y_2(x, \omega) = f_2(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x dx' A_L(x, x') e^{-ikx'}. \quad (2.10.7)$$

Из предшествующих результатов можно получить некоторые аналитические свойства фундаментальных решений. Обратное преобразование Фурье выражения (2.10.5) имеет вид

$$A_R(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')} [f_1(x, k) e^{-ikx} - 1], \quad (2.10.8)$$

где $A_R(x, x')$ равно нулю для $x' < x$. Так как для $x' < x$ интеграл (2.10.8) замыкается в верхней полуплоскости, мы делаем вывод, что выражение $f_1(x, k) e^{-ikx} - 1$ должно быть аналитично в верхней полуплоскости, так что для $x' < x$ интеграл дает $A_R(x, x') = 0$. Аналогично, формула (2.10.7) приводит к заключению, что функция $f_2(x, k) e^{ikx} - 1$ также аналитична в верхней полуплоскости. Аналитичность этих выражений была установлена ранее при рассмотрении (2.8.3) и (2.8.4), и из нее можно было бы получить приведенные здесь представления (2.10.5) и (2.10.7).

Преобразование Фурье решения $f_1(x, -k) = Y_1(x, -\omega)$ дает

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f_1(x, -k) &= y_1(x, -t) = \\ &= \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) + c\theta(-ct - x) A_R(x, -ct). \end{aligned} \quad (2.10.9)$$

Это обращенное во времени решение, представляющее собой импульс, движущийся в направлении отрицательных x , перед которым движется возмущение. Аналогичным образом мы находим, что функция $f_2(x, -k)$ связана с решением, движущимся в положительном направлении x , впереди которого движется возмущение. Решение во временной области имеет вид

$$y_2(x, -t) = \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) + c\theta(x - ct) A_L(x, ct). \quad (2.10.10)$$

Легко понять смысл этих четырех решений, особенно тех, которые содержат обращенные во времени решения, рассматривая рассеяние потенциалом в виде δ -функции во временной области. Функции $f_1(x, k)$ и $f_2(x, k)$ приводятся в упр. 19. Соответствующие решения $y_1(x, t)$ и $y_2(x, t)$ получаются с помощью преобразования Фурье фундаментальных решений, приведенных в упр. 19. Легко выполнить вычисления, рассматривая сначала dy_1/dt . Для

$x < 0$ мы находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1(x, t)}{\partial t} &= \delta' \left(t - \frac{x}{c} \right) + \frac{bc}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} (e^{i\omega x/c} - e^{-i\omega x/c}) = \\ &= \delta' \left(t - \frac{x}{c} \right) + \frac{bc}{2} \left[\delta \left(t - \frac{x}{c} \right) - \delta \left(t + \frac{x}{c} \right) \right], \quad (2.10.11) \end{aligned}$$

где δ' означает производную δ -функции по ее аргументу. Следовательно,

$$y_1(x, t) = \begin{cases} \delta \left(t - \frac{x}{c} \right), \\ \delta \left(t - \frac{x}{c} \right) + \frac{bc}{2} \left[\theta \left(t - \frac{x}{c} \right) - \theta \left(t + \frac{x}{c} \right) \right]. \end{cases} \quad (2.10.12)$$

Так как $\theta(t - x/c) - \theta(t + x/c) = \theta(t - x/c)\theta(-t - x/c)$ для $x < 0$, мы находим также из (2.10.2), что в этом примере $A_R(x, ct) = (b/2)\theta(-ct - x)$. Обращенное во времени решение имеет вид

$$y_1(x, -t) = \begin{cases} \delta \left(t + \frac{x}{c} \right), \\ \delta \left(t + \frac{x}{c} \right) + \frac{bc}{2} [\theta(-ct - x) - \theta(-ct + x)]. \end{cases} \quad (2.10.13)$$

Рассмотрение (2.10.12) показывает, что $y_1(x, t)$ описывает процесс рассеяния, в котором из $-\infty$ приходит импульс в виде δ -функции, за которым следует положительная ступенька с амплитудой $bc/2$. После взаимодействия с потенциалом в виде δ -функции в начале координат, импульс в виде δ -функции проходит в направлении положительных x , а отраженная отрицательная ступенька с амплитудой $-bc/2$ возвращается из $-\infty$ и взаимно сокращается с падающей ступенькой положительной амплитуды. Рассмотрение решения $y_1(x, -t)$ показывает, что оно представляет собой процесс рассеяния, в котором есть как импульс в виде δ -функции, приходящий из $+\infty$, так и ступенчатая функция с амплитудой $bc/2$, приходящая из $-\infty$. После рассеяния потенциалом в виде δ -функции, помещенным в начало координат, δ -видный импульс проходит в положительном направлении вместе с отрицательной ступенькой с амплитудой $-bc/2$, которая уничтожает амплитуду падающей ступеньки. Аналогичные результаты получаются для решения $y_2(x, t)$.

Согласно (2.8.7а), фундаментальные решения связаны соотношением

$$T(k)f_2(x, k) = R_R(k)f_1(x, k) + f_1(x, -k), \quad (2.10.14)$$

где коэффициенты отражения и прохождения были введены формулами (2.8.8). Теперь мы получим соответствующее соотношение во временной области. Это делается с помощью преобразования

Фурье выражения (2.10.14). Используя (2.8.31) и (2.8.32), запишем преобразование Фурье правой части уравнения (2.10.14) в виде

$$\begin{aligned}
 \text{Пр. ч.} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i\omega z/c} r_R(z) \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega t'} y_1(x, t') + y_1(x, -t) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dt' r_R(z) y_1(x, t') \delta\left(t' - t - \frac{z}{c}\right) + y_1(x, -t) = \\
 &= c \int_{-\infty}^{\infty} dt' r_R[c(t' - t)] y_1(x, t') + y_1(x, -t) = \\
 &= cr_R(x - ct) + c^2 \int_{x/c}^{\infty} dt' r_R[c(t' - t)] A_R(x, ct') + \\
 &\quad + \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) + c\theta(-ct - x) A_R(x, -ct). \quad (2.10.15)
 \end{aligned}$$

Аналогичное преобразование левой части уравнения дает

$$\begin{aligned}
 \text{Л. ч.} &= \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) + c\theta\left(t + \frac{x}{c}\right) A_L(x, -ct) + c\Gamma(ct + x) + \\
 &\quad + c^2 \int_{-x/c}^{\infty} dt' \Gamma[c(t - t')] A_L(x, -ct'). \quad (2.10.16)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай $t + x/c < 0$. Тогда интеграл в (2.8.31), определяющий $\Gamma(t + x/c)$, замыкается в верхней полуплоскости, и если в верхней полуплоскости плоскости k нет полюсов, то функция $\Gamma(t + x/c)$ будет равна нулю. Итак, интеграл в (2.10.16) берется только по области, где функция $\Gamma[c(t - t')]$ равна нулю. Следовательно, этот интеграл также обращается в нуль. Следовательно, для $t + x/c < 0$ все члены в выражении (2.10.16) обращаются в нуль. Полагая $ct' = x'$ и $-ct = y$, получаем, что преобразование Фурье для (2.10.14) имеет вид

$$0 = r_R(x + y) + A_R(x, y) + \int_x^{\infty} dx' r_R(x' + y) A_R(x, x'), \quad x < y. \quad (2.10.17)$$

Аналогичная процедура в применении к (2.8.7b) дает

$$0 = r_L(x + y) + A_L(x, y) + \int_{-\infty}^x dx' r_L(x' + y) A_L(x, x'), \quad x > y. \quad (2.10.18)$$

Часто уравнения (2.10.17) и (2.10.18) называются уравнениями Марченко (Агранович и Марченко [5]). В гл. 3 при рассмотрении

обратной задачи рассеяния эти уравнения будут центральными. Они будут использоваться для определения $A_R(x, y)$ или $A_L(x, y)$, когда задан один из коэффициентов отражения $r_L(x)$ или $r_R(x)$. Там же мы рассмотрим и обобщение, необходимое в случае, когда у функции $T(k)$ есть полюсы в верхней полуплоскости.

Уравнения Марченко могут быть также использованы для решения прямой задачи рассеяния, т. е. для определения коэффициентов отражения, когда известен потенциал и, следовательно, фундаментальные решения и функции A_R или A_L . Однако, если фундаментальные решения уже известны, много проще определить коэффициенты $c_{ij}(k)$ и, таким образом, непосредственно получить преобразование Фурье коэффициента рассеяния. Для обратной задачи рассеяния такого прямого пути нет, и нужно рассматривать интегральное уравнение.

2.11. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ЗАХАРОВА — ШАБАТА

До сих пор рассматривались задачи рассеяния, связанные с уравнением Шрёдингера с действительным потенциалом. Мотивировка этих исследований была кратко изложена в гл. 1, где указывалась связь между уравнениями Шрёдингера и Кортвега — де Фриза. Как упоминалось в разд. 1.5, аналогичным образом с другой задачей рассеяния связан ряд других дифференциальных уравнений в частных производных, решения которых ведут себя как солитоны. В этом случае удобнее всего записать обыкновенное дифференциальное уравнение в виде пары уравнений первого порядка. Простейшая форма этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{dx} + ikn_1 &= u(x)n_2, \\ \frac{dn_2}{dx} - ikn_2 &= -u(x)n_1,\end{aligned}\tag{2.11.1}$$

где параметр k опять же является собственным значением. Чтобы ввести метод в его простейшей форме, будем предполагать, что функция $u(x)$ действительна. Как отмечалось в разд. 1.5, система (2.11.1) эквивалентна уравнению Шрёдингера с комплексным потенциалом. В разд. 5.4 будут рассмотрены более общие пары уравнений, содержащие две различные потенциальные функции, которые могут быть комплексными.

Нестационарная задача

Чтобы интуитивно понять приведенные выше линейные уравнения, рассмотрим нестационарную задачу, как это было сделано в разд. 2.10 для уравнения Шрёдингера. Рассмотрим два типа частиц, например с положительным и отрицательным зарядом. Они проходят друг через друга в противоположных направлениях со

скоростью c , как показано на рис. 2.6. Они отделены барьером от резервуара, содержащего дополнительные положительные и отрицательные частицы. Участок барьера содержит полупроницаемую мембрану, которая позволяет как положительным, так и отрицательным частицам проходить из резервуара в верхнюю область, где затем положительные частицы движутся налево со скоростью c , а отрицательные — с той же скоростью направо. Предполагается, что число положительных (отрицательных) частиц, проходящих за единицу времени вверх через барьер в произвольной точке барьера x , пропорционально избыточному (по сравнению со средним) числу отрицательных (положительных) частиц, расположенных

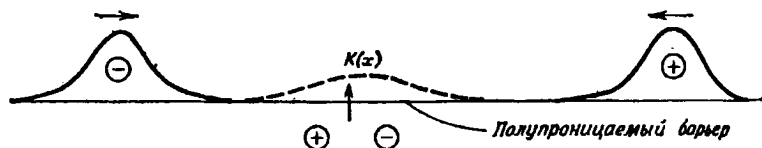


Рис. 2.6. Взаимодействие частиц через полупроницаемую мембрану.

над барьером в этой точке. Допускается, что коэффициент пропорциональности может зависеть от x . Обозначая избыточную плотность положительных и отрицательных частиц в точке x в момент времени t через $n_+(x, t)$ и $n_-(x, t)$ соответственно и коэффициент пропорциональности в проницаемости через $K(x)$, имеем следующие уравнения для n_+ и n_- :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_+}{\partial t} - c \frac{\partial n_+}{\partial x} &= K(x) n_-, \\ \frac{\partial n_-}{\partial t} + c \frac{\partial n_-}{\partial x} &= K(x) n_+. \end{aligned} \quad (2.11.2)$$

Будет рассмотрен случай только одного пространственного измерения. Пространственными неоднородностями, связанными с высотой над барьером, будем пренебрегать. Введем теперь преобразование Фурье с помощью соотношений

$$\begin{aligned} n_1(x, k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ikct} n_+(x, t), \\ n_2(x, k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ikct} n_-(x, t) \end{aligned} \quad (2.11.3)$$

и предположим, что при t , стремящемся к $\pm\infty$, n_+ и n_- обращаются в нуль; если положить $u(x) = -K(x)/c$, то преобразованные уравнения (2.11.2) принимают вид (2.11.1).

Прежде чем исследовать преобразованные уравнения, рассмотрим сначала возможный вид решения во временной области. По

аналогии с решениями уравнения второго порядка, введенными в разд. 2.10, рассмотрим ситуацию, в которой есть только δ -функция положительных частиц, достигающих $x = -\infty$. [Снова применимо примечание после (2.10.5).] Можно ожидать, что это решение будет иметь вид

$$\begin{aligned}\varphi_+(x, t) &= \delta(t + x/c) + c\theta(t + x/c) A_1(x, -ct), \\ \varphi_-(x, t) &= c\theta(t + x/c) A_2(x, -ct),\end{aligned}\quad (2.11.4)$$

где $\theta(x)$ — единичная ступенчатая функция. Как и в разд. 2.10, функции A_1 и A_2 представляют след, а также отраженные частицы, которые могут встречаться в случае $K(x) \neq 0$. Аналогично, δ -функция отрицательных частиц, приходящих в $x = \infty$, представима в виде

$$\begin{aligned}\psi_+(x, t) &= c\theta(t - x/c) B_1(x, ct), \\ \psi_-(x, t) &= \delta(t - x/c) + c\theta(t - x/c) B_2(x, ct).\end{aligned}\quad (2.11.5)$$

После замены переменной преобразование Фурье этих решений дает

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, k) &= e^{-ikh} + \int_{-\infty}^x dx' A_1(x, x') e^{-ikh'}, \\ \varphi_2(x, k) &= \int_{-\infty}^x dx' A_2(x, x') e^{-ikh'}\end{aligned}\quad (2.11.6)$$

и

$$\begin{aligned}\psi_1(x, k) &= \int_x^{\infty} dx' B_1(x, x') e^{ikh'}, \\ \psi_2(x, k) &= e^{ikh} + \int_x^{\infty} dx' B_2(x, x') e^{ikh'},\end{aligned}\quad (2.11.7)$$

где связь между функциями с индексами $+$, $-$ и $1, 2$ та же, что и в (2.11.3). Как и в случае уравнения Шрёдингера, решения такого вида будут играть центральную роль при рассмотрении обратной задачи рассеяния для системы (2.11.1).

Фундаментальные решения

Четыре функции φ_1 , φ_2 , ψ_1 и ψ_2 можно считать фундаментальными решениями преобразованной задачи (2.11.1). Сейчас мы получим интегральные уравнения, которым удовлетворяют эти решения. Они соответствуют уравнениям (2.8.3) и (2.8.4) для уравнения Шрёдингера. Удобно сначала преобразовать уравнения (2.11.1) в векторное уравнение для двухкомпонентного вектора

$n(x) = (n_1, n_2)^T$, где T означает операцию транспонирования, т. е. $(n_1, n_2)^T = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$. Вводя матрицу

$$A = ik \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.11.8)$$

и вектор $w(x) = (un_2, -un_1)^T$, мы можем записать систему (2.11.1) в матричной форме

$$n_x + An = w. \quad (2.11.9)$$

Как и при получении уравнений (2.8.3) и (2.8.4) для уравнения Шрёдингера, превратим (2.11.9) в интегральное уравнение для вектора $n(x)$, используя метод вариации параметров.

Так как однородное уравнение, соответствующее (2.11.9), имеет два линейно независимых решения,

$$n_1 = \begin{pmatrix} e^{-ikx} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{ikx} \end{pmatrix}.$$

можно решение уравнения (2.11.9) записать в виде линейной комбинации

$$n(x) = \alpha(x)n_1 + \beta(x)n_2, \quad (2.11.10)$$

где α и β — амплитуды, подлежащие определению. Подстановка в (2.11.9) дает

$$\alpha_x n_1 + \beta_x n_2 = w. \quad (2.11.11)$$

Разделяя на компоненты и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \int_{x_0}^x dx' un_2 e^{ikx'}, \\ \beta &= \beta_0 - \int_{x_0}^x dx' un_1 e^{-ikx'}, \end{aligned} \quad (2.11.12)$$

где постоянные α_0 , β_0 и x_0 определяются начальными условиями.

Если мы рассмотрим решение $n = \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$, данное формулами (2.11.6), которое удовлетворяет соотношению

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} n(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx}, \quad (2.11.13)$$

то из (2.11.10) мы видим, что

$$\begin{aligned}\sigma_0 + \int_{x_0}^{-\infty} dx' u n_2 e^{ikx} &= 1, \\ \beta_1 - \int_{x_0}^{-\infty} dx' u n_1 e^{-ikx} &= 0,\end{aligned}\quad (2.11.14)$$

и поэтому, полагая $n_1 = \varphi_1$, $n_2 = \varphi_2$, имеем

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, k) &= e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x dx' e^{ik(x'-x)} u(x') \varphi_2(x', k), \\ \varphi_2(x, k) &= - \int_{-\infty}^x dx' e^{-ik(x'-x)} u(x') \varphi_1(x', k).\end{aligned}\quad (2.11.15)$$

Аналогичным образом решение, имеющее предельную форму

$$\lim_{x \rightarrow \infty} n(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx}, \quad (2.11.16)$$

можно отождествить с решением ψ , данным формулой (2.11.7). Мы получим

$$\begin{aligned}\psi_1(x, k) &= - \int_x^{\infty} dx' e^{-ik(x'-x)} u(x') \psi_2(x', k), \\ \psi_2(x, k) &= e^{ikx} + \int_x^{\infty} dx' e^{ik(x'-x)} u(x') \psi_1(x', k).\end{aligned}\quad (2.11.17)$$

Так как $u(x)$ действительно, то для действительных k

$$\varphi^*(x, -k) = \varphi(x, k) \quad \text{и} \quad \psi^*(x, -k) = \psi(x, k).$$

Соотношения для вронскианов

Если $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T$ и $\chi = (\chi_1, \chi_2)^T$ — любые два решения системы (2.11.1) для одного и того же значения k , то их линейная независимость гарантируется необращением в нуль выражения

$$W(\theta; \chi) = \theta_1 \chi_2 - \theta_2 \chi_1. \quad (2.11.18)$$

Если уравнения (2.11.1) записать для θ и χ , то комбинируя эти уравнения, можно показать, что $dW/dx = 0$, или $W = \text{const}$.

Сейчас мы исследуем линейную независимость различных решений преобразованных уравнений (2.11.1). Сначала следует заметить, что если $n(x, k) = (n_1(x, k), n_2(x, k))^T$ представляет собой решение системы (2.11.1) для некоторого значения k , то рассматри-

вая уравнения, получающиеся при замене k на $-k$, мы видим, что $\bar{n}(x, k) \equiv (n_2(x, -k), -n_1(x, -k))^T$ также является решением уравнений (2.11.1). Следует отметить, что $\bar{n}(x, k) = -n(x, k)$. Итак, характер решения линейных уравнений (2.11.1) не зависит существенно от знака u , как это имело место в случае уравнения Шрёдингера. Точнее, если $n(x, k) = (n_1(x, k), n_2(x, k))^T$ является решением (2.11.1), то $n(x, k) = (n_2(x, -k), n_1(x, -k))^T$ является решением этих уравнений, если u заменить на $-u$. Легко показать, что решения $\varphi(x, k) = (\varphi_1(x, k), \varphi_2(x, k))^T$ и $\bar{\varphi}(x, k) = (\varphi_2(x, -k), -\varphi_1(x, -k))^T$ линейно независимы, так как вычисление вронскиана $W(\varphi, \bar{\varphi})$ при $x = -\infty$ дает $W(\bar{\varphi}, \varphi) = 1$. Аналогично находим, что $W(\bar{\psi}, \psi) = 1$.

Так как любое третье решение может быть выражено как линейная комбинация двух линейно независимых решений, можно записать

$$\varphi(x, k) = c_{11}(k)\psi(x, k) + c_{12}(k)\bar{\psi}(x, k), \quad (2.11.19a)$$

$$\bar{\psi}(x, k) = c_{21}(k)\bar{\varphi}(x, k) + c_{22}(k)\varphi(x, k) \quad (2.11.19b)$$

и

$$\bar{\varphi}(x, k) = c_{11}(-k)\bar{\psi}(x, k) - c_{12}(-k)\psi(x, k), \quad (2.11.20a)$$

$$\bar{\psi}(x, k) = -c_{21}(-k)\varphi(x, k) + c_{22}(-k)\bar{\varphi}(x, k), \quad (2.11.20b)$$

где $c_{ij}(k)$ — скаляры.

Как и в случае уравнения Шрёдингера, есть ряд соотношений между различными коэффициентами $c_{ij}(k)$. Эти коэффициенты определяются через вронскианы следующим образом¹⁾:

$$\begin{aligned} c_{11}(k) &= W(\bar{\psi}, \varphi) = c_{22}(-k), \\ c_{12}(k) &= W(\varphi, \psi) = -c_{21}(k), \\ c_{22}(k) &= W(\bar{\varphi}, \psi) = c_{11}(-k), \\ c_{12}(-k) &= W(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) = -c_{21}(-k). \end{aligned} \quad (2.11.21)$$

Так как $\varphi^*(x, k) = \varphi(x, -k)$ и аналогичное соотношение имеет место для ψ , мы получаем

$$c_{11}^*(k) = c_{22}(k), \quad c_{12}^*(k) = c_{12}(-k). \quad (2.11.22)$$

Для совместности как (2.11.19), так и (2.11.20) нужно, чтобы

$$\begin{aligned} 1 &= c_{11}(k)c_{22}(k) - c_{12}(k)c_{21}(-k), \\ 0 &= c_{11}(k)c_{21}(k) + c_{12}(k)c_{22}(-k), \\ 0 &= c_{11}(k)c_{21}(-k) + c_{12}(-k)c_{22}(-k). \end{aligned} \quad (2.11.23)$$

¹⁾ Часто $c_{ij}(k)$ записываются через два коэффициента $a(k) = c_{12}(k)$ и $b(k) = -c_{11}(k)$.

Линейные комбинации в (2.11.19) и (2.11.20) можно интерпретировать как задачи рассеяния подобно случаю уравнения Шрёдингера. Рассмотрим детально (2.11.19a). Из определений ϕ и $\bar{\phi}$ видно, что (2.11.19a) является решением, которое сводится к $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx}$, когда $x \rightarrow -\infty$, и с использованием определения $\bar{\phi}$ сводится к $c_{11}(k) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx} + c_{12}(k) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx}$ при x , стремящемся к $+\infty$. Во временной области член $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx}$ представляет δ -функцию положительных частиц, уходящих на $-\infty$. Член $c_{11}(k) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ представляет поток отрицательных частиц, уходящих на $+\infty$, а $c_{12}(k) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx}$ — падающий поток положительных частиц. Единичный поток (т. е. δ -функция) положительных частиц из $+\infty$ получается при делении (2.11.19a) на c_{12} . Тогда, как и для уравнения Шрёдингера, коэффициенты отражения и прохождения суть

$$R_R(k) = \frac{c_{11}(k)}{c_{12}(k)}; \quad T(k) = \frac{1}{c_{12}(k)}. \quad (2.11.24)$$

Соотношение (2.11.19b) сводится к $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx}$ при x , стремящемся к $+\infty$, и к $-c_{21}(k) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx} + c_{22}(k) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx}$, когда x стремится к $-\infty$. Поэтому мы можем определить

$$R_L(k) = -\frac{c_{22}(k)}{c_{21}(k)}; \quad T(k) = -\frac{1}{c_{21}(k)} \quad (2.11.25)$$

как коэффициенты отражения и прохождения для единичного потока отрицательных частиц, приходящих из $-\infty$. Вследствие (2.11.21) два последних уравнения из (2.11.23) удовлетворяются тождественно. Их можно переписать в виде

$$R_R(k)T(-k) - R_L(-k)T(k) = 0. \quad (2.11.26)$$

Уравнения (2.11.22) и (2.11.23) дают

$$1 = |c_{11}(k)|^2 + |c_{12}(k)|^2, \quad (2.11.27)$$

или

$$|T(k)|^2 = 1 + |R_L(k)|^2 = 1 + |R_R(k)|^2. \quad (2.11.28)$$

Эти результаты следует сравнить с результатами (2.8.14) и (2.8.15) для уравнения Шрёдингера. Для описанной в начале этого раздела модели видно, что число участвующих в процессе частиц не сохра-

няется. Результатом этого является соотношение между коэффициентами, отличающееся от закона сохранения энергии, выраженного формулой (2.8.14).

Полюсы коэффициента прохождения

При определении связанных состояний снова важны полюсы коэффициента прохождения или нули $c_{12}(k) = -c_{21}(k)$. Для задач рассеяния, описываемых уравнением Шрёдингера с действительным потенциалом, из (2.8.19) было найдено, что все полюсы коэффициента прохождения, находящиеся в верхней полуплоскости, должны лежать на мнимой оси. В данном случае это не обязательно, поскольку, как отмечалось во введении, пара линейных уравнений (2.11.1) эквивалентна уравнению Шрёдингера с комплексным потенциалом. Однако пока функция $u(x)$ в (2.11.1) действительна, ограничение на положение полюсов может быть выведено из приведенного в (2.11.22) соотношения

$$c_{12}(k) = c_{12}^*(-k). \quad (2.11.29)$$

Чтобы получить это ограничение, вспомним сначала, что фундаментальные решения f_1 и f_2 аналитичны в верхней полуплоскости. Фундаментальные решения ϕ и ψ , входящие в соотношение $c_{12} = W(\phi, \psi)$, также могут быть продолжены в верхнюю полуплоскость. Следовательно, в верхней полуплоскости можно ввести соответствующее продолжение (аналитическое продолжение) соотношения (2.11.29) для действительных k . Продолжение соотношения (2.11.29) в верхнюю полуплоскость, которое на действительной оси сводится к (2.11.29), имеет вид

$$c_{12}(\zeta) = c_{12}^*(-\zeta^*), \quad (2.11.30)$$

где $\zeta = k + i\eta$ и $\eta > 0$. Записывая $c_{12}(\zeta) = u(k, \eta) + iv(k, \eta)$, мы видим, что (2.11.30) означает, что $u(k, \eta) = u(-k, \eta)$ и $v(k, \eta) = -v(-k, \eta)$. Таким образом, нуль $c_{12}(\zeta)$ означает, что u и v должны обращаться в нуль для обоих наборов аргументов. Этого можно достичь либо при $k = 0$, как в случае уравнения Шрёдингера с действительным потенциалом, либо в случае парных нулей в точках $\zeta_i = \pm k_i + i\eta_i$, т. е. нулей, расположенных симметрично относительно мнимой оси.

Чтобы найти вычеты в точках ζ_i , нужно снова вычислить $c_{12}(\zeta_i) = dc_{12}(\zeta)/d\zeta|_{\zeta=\zeta_i}$. Из определения c_{12} через вронскиан и из того факта, что $\phi = c_{11}\psi$ и $\psi = c_{22}\phi$ в нулях c_{12} , находим, что

$$c_{12} = c_{22}(\dot{\phi}_1\phi_2 - \dot{\phi}_2\phi_1) + c_{11}(\dot{\psi}_2\psi_1 - \dot{\psi}_1\psi_2). \quad (2.11.31)$$

Этот результат можно переписать с помощью общего соотношения для решений линейных уравнений (2.11.1). Если через $n = (n_1, n_2)^T$ и $m = (m_1, m_2)^T$ обозначить решения системы (2.11.1)

для $k = \zeta_1$ и ζ_2 соответственно, то

$$\frac{d}{dx}(m_2 n_1 - m_1 n_2) + l(\zeta_1 - \zeta_2)(m_2 n_1 + m_1 n_2) = 0. \quad (2.11.32)$$

Полагая в (2.11.32) $n = \varphi(x, \zeta)$ и $m = \psi(x, \zeta)$, дифференцируя затем уравнение по ζ и, наконец, полагая $\zeta = \zeta_l$, получим

$$\frac{d}{dx}(\varphi_2 \dot{\varphi}_1 - \varphi_1 \dot{\varphi}_2) = -2i\varphi_1 \varphi_2. \quad (2.11.33)$$

Теперь интегрирование дает

$$\varphi_2 \dot{\varphi}_1 - \varphi_1 \dot{\varphi}_2 = -2i \int_{-\infty}^x dx' \psi_1 \psi_2. \quad (2.11.34)$$

Аналогично, выбирая $n = \psi(x, \zeta)$ и $m = \varphi(x, \zeta)$, получим также

$$\psi_2 \dot{\varphi}_1 - \varphi_1 \dot{\psi}_2 = 2i \int_x^{\infty} dx' \psi_1 \psi_2. \quad (2.11.35)$$

С этими результатами можно, наконец, из (2.11.31) получить c_{12} . Имеем

$$c_{12}(\zeta_l) = -2i \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_1(x, \zeta_l) \varphi_2(x, \zeta_l). \quad (2.11.36)$$

Так как $c_{12}(\zeta_l) = 0$, можно использовать (2.11.19), чтобы получить соотношения

$$m_R(\zeta_l) = -i \frac{c_{11}(\zeta_l)}{c_{12}(\zeta_l)} = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_1(x, \zeta_l) \psi_2(x, \zeta_l) \right]^{-1}. \quad (2.11.37a)$$

$$m_L(\zeta_l) = -i \frac{c_{22}(\zeta_l)}{c_{12}(\zeta_l)} = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_1(x, \zeta_l) \varphi_2(x, \zeta_l) \right]^{-1}. \quad (2.11.37b)$$

Так как для чисто мнимых ζ_l четыре решения ψ_1 , ψ_2 , φ_1 и φ_2 являются чисто действительными, то постоянные $m_R(\zeta_l)$ и $m_L(\zeta_l)$ также чисто действительны. Для двух нулей ζ_1 и ζ_2 , симметрично расположенных относительно мнимой оси, так что $\zeta_2 = -\zeta_1^*$, постоянные $m_R(\zeta_1)$ и $m_R(\zeta_2)$ связаны соотношением

$$m_R(\zeta_2) = [m_R(\zeta_1)]^*. \quad (2.11.38)$$

Это следует из того, что $\psi_2(x, \zeta_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi_2(x, \zeta_1) = e^{l\zeta_1 x} - \int_x^{\infty} dx' e^{l\zeta_1(x'-x)} u(x') \int_x^{\infty} dx'' e^{-l\zeta_1(x''-x')} u(x'') \psi_2(x'', \zeta_1), \quad (2.11.39)$$

как показывает исключение ψ_1 из (2.11.17). Для действительных $u(x)$ это уравнение не меняется, если заменить ζ_1 на $-\zeta_1^*$ и взять комплексно-сопряженное уравнение. Поэтому $\psi_2(x_1, \zeta_1) = [\psi_2(x_1, -\zeta_1)]^*$. Из первого из уравнений (2.11.17) видно, что $\psi_1(x, \zeta_1)$ также обладает этим свойством. Теперь соотношение между $m_R(\zeta_2)$ и $m_R(\zeta_1)$ следует из (2.11.37а).

Пример

Известно много потенциалов, для которых уравнение Шрёдингера может быть решено аналитически (см., например, [17]). Не так легко привести перечень функций, для которых можно аналитически решить систему линейных уравнений (2.11.1). Важный класс функций, для которых можно решить эти линейные уравнения, будет получен позднее методом обратной задачи рассеяния. В качестве простого примера, предваряющего эти результаты, можно следовать методу, разработанному Баргманом для уравнения Шрёдингера и изложенному в разд. 1.3. Мы ищем решение (2.11.1) в виде

$$\begin{aligned} n_1 &= e^{-ikx} [4ik + a(x)], \\ n_2 &= e^{-ikx} b(x). \end{aligned} \quad (2.11.40)$$

Так как здесь нет члена, пропорционального e^{ikx} , мы ожидаем, что найденный потенциал будет безотражательным. Уравнения (2.11.1) приводят к соотношениям

$$a' = ub, \quad b = 2u, \quad b' = -ua. \quad (2.11.41)$$

Исключая u из первого и третьего из этих уравнений и затем интегрируя, получим $a^2 + b^2 = 4\mu^2$, где μ — постоянная интегрирования. Из первого и второго уравнений находим также, что $b^2 = 2a'$. Таким образом, функция $a(x)$ удовлетворяет уравнению (1.3.5), тому же самому нелинейному уравнению первого порядка, которому удовлетворяет функция $a(x)$, введенная при решении уравнения Шрёдингера. Снова решение можно записать в виде

$$a = 2w'/w, \quad (2.11.42)$$

где

$$w = \alpha e^{\mu x} + \beta e^{-\mu x} = 2e^{\mu x} \operatorname{ch}(\mu x - \phi), \quad (2.11.43)$$

и снова $\phi = (1/2) \ln(\beta/\alpha)$. Тогда

$$u^2 = \frac{1}{2} a' = \mu^2 \operatorname{sech}^2(\mu x - \phi). \quad (2.11.44)$$

Таким образом, мы получаем

$$u = \pm \mu \operatorname{sech}(\mu x - \phi). \quad (2.11.45)$$

Достаточно будет рассмотреть случай $\mu > 0$. Функции $a(x)$ и $b(x)$ также легко определить. Из (2.11.40) находим, что фундаментальное решение (2.11.1) имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, k) &= e^{-ikx} \frac{2ik + \mu \operatorname{th}(\mu x - \phi)}{2ik - \mu}, \\ \varphi_2(x, k) &= \pm \mu e^{-ikx} \frac{\operatorname{sech}(\mu x - \phi)}{2ik - \mu}.\end{aligned}\quad (2.11.46)$$

Повторяя предыдущие вычисления с

$$\begin{aligned}n_1 &= e^{ikh} q(x), \\ n_2 &= e^{ikh} [4ik + p(x)],\end{aligned}\quad (2.11.47)$$

находим, что $q = b$ и $p = -a$. Теперь фундаментальное решение имеет вид

$$\begin{aligned}\psi_1(x, k) &= \pm \mu e^{ikh} \frac{\operatorname{sech}(\mu x - \phi)}{2ik - \mu}, \\ \psi_2(x, k) &= e^{ikh} \frac{2ik - \mu \operatorname{th}(\mu x - \phi)}{2ik - \mu}.\end{aligned}\quad (2.11.48)$$

Из вронскиана для c_{12} находим, что

$$c_{12}(k) = \frac{k - i\mu/2}{k + i\mu/2}; \quad (2.11.49)$$

c_{12} обращается в нуль при $k = i\mu/2$ и $\operatorname{Res}[1/c_{12}(i\mu/2)] = i\mu$. Мы находим также, что $c_{11}(k) = c_{22}(k) = 0$, так что потенциал, как и ожидалось, является безотражательным. Локализованные решения имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, i\mu/2) &= \frac{1}{2} e^{-\mu x/2} \operatorname{sech} \mu x, \\ \varphi_2(x, i\mu/2) &= \mp \frac{1}{2} e^{\mu x/2} \operatorname{sech} \mu x, \\ \psi_1(x, i\mu/2) &= \mp \frac{1}{2} e^{-\mu x/2} \operatorname{sech} \mu x, \\ \psi_2(x, i\mu/2) &= \frac{1}{2} e^{\mu x/2} \operatorname{sech} \mu x.\end{aligned}\quad (2.11.50)$$

Из (2.11.37) видно, что нормировочные постоянные имеют вид

$$m_R(i\mu/2) = m_L(i\mu/2) = \mp \mu, \quad (2.11.51)$$

где верхний и нижний знаки отвечают соответственно верхнему и нижнему знаку у функции $u(x)$, даваемой соотношением (2.11.45).

Упражнение 24

Еще одним профилем, позволяющим решать систему, является прямоугольный барьер: $u(x) = u_0$ для $0 < x < a$ и $u(x) = 0$ всюду вне этого интервала. Используйте (2.11.19а) для сравнения решений уравнения (2.11.1) в этих трех

областях и покажите, что

$$R_R(k) = -u_0 e^{-2ika} \frac{\sin \alpha a}{D}, \quad T(k) = \frac{\sigma e^{-ika}}{D},$$

где $\alpha = (k^2 + u_0^2)^{1/2}$ и $D = \alpha \cos \alpha a - ik \sin \alpha a$.

Асимптотическое решение

Для системы Захарова — Шабата (2.11.1) можно получить асимптотическое решение, аналогичное тому, которое было получено в разд. 2.8 для уравнения Шрёдингера. Комбинируя уравнения Захарова — Шабата, получим уравнение второго порядка для n_1 :

$$n_1'' - \left(\frac{u'}{u}\right) n_1' + \left(k^2 + u^2 - \frac{iku'}{u}\right) n_1 = 0. \quad (2.11.52)$$

Если считать n_1 решением ϕ_1 , даваемым формулой (2.11.15), то можно записать

$$n_1 = e^{-ikx + h(x, k)}, \quad (2.11.53)$$

где $h(-\infty, k) = 0$. Из (2.11.52) находим, что уравнение, которому удовлетворяет h , имеет вид

$$2ikh' = u^2 + (h')^2 + u \frac{d}{dx} \left(\frac{h'}{u} \right). \quad (2.11.54)$$

Если разложение

$$h' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n(x)}{(-2ik)^{n+1}} \quad (2.11.55)$$

подставить в (2.11.54), то получим $g_0 = -u^2$, $g_1 = uu'$ и

$$g_{n+1} = -u \frac{d}{dx} \left(\frac{g_n}{u} \right) - \sum_{m=0}^{n-1} g_m g_{n-m-1}, \quad n \geq 1. \quad (2.11.56)$$

Несколько первых коэффициентов имеют вид

$$\begin{aligned} g_0 &= -u^2, \quad g_1 = uu', \quad g_2 = -(uu'' + u'^2), \quad g_3 = uu''' + 5u^3u', \\ g_4 &= -uu^{(iv)} - 11u^2(u')^2 - 7u^3u'' - 2u^6 = \\ &= -uu^{(iv)} + 10u^2(u')^2 - 2u^6 - 7(u^3u')'. \end{aligned} \quad (2.11.57)$$

«Обрезанные» потенциалы

Можно расширить область потенциалов, для которых задача Захарова — Шабата решается аналитически, рассматривая «обрезанные» потенциалы. Вычисления подобны тем, которые были проведены для уравнения Шрёдингера в разд. 2.9. Рассмотрим детально случай потенциала, «обрезанного» слева. Тогда $u^T(x) =$

$= u(x)\theta(x-x_1)$, и из (2.11.15) и (2.11.17) мы находим, что в области $x < x_1$ фундаментальные решения имеют вид

$$\begin{aligned}\psi_{1<}^T &= - \int_{x_1}^{\infty} dx' e^{-ik(x'-x)} u(x') \psi_2(x', k), \\ \psi_{2<}^T &= e^{ikx} + \int_{x_1}^{\infty} dx' e^{ik(x'-x)} u(x') \psi_1(x', k), \\ \varphi_{1<}^T &= e^{-ikx}, \quad \varphi_{2<}^T = 0.\end{aligned}\quad (2.11.58)$$

Для $x > x_1$ фундаментальные решения имеют вид

$$\begin{aligned}\psi_{1>}^T &= \psi_1(x, k), \quad \psi_{2>}^T = \psi_2(x, k), \\ \varphi_{1>}^T &= e^{-ikx} + \int_{x_1}^x dx' e^{ik(x'-x)} u(x') \varphi_{2>}^T(x', k), \\ \varphi_{2>}^T &= \int_{x_1}^x dx' e^{ik(x'-x)} u(x') \varphi_{1>}^T(x', k).\end{aligned}\quad (2.11.59)$$

Эти решения должны быть непрерывны при переходе через $x = x_1$.

Теперь связанные с этим «обрезанным» потенциалом коэффициенты c_{ij}^T получаются из (2.11.23). Мы находим, что

$$\begin{aligned}c_{11}^T(k) &= e^{-ikx_1} \psi_1(x_1, -k), \\ c_{12}^T(k) &= -c_{21}^T(k) = e^{-ikx_1} \psi_2(x_1, k), \\ c_{22}^T(k) &= e^{ikx_1} \psi_1(x_1, k).\end{aligned}\quad (2.11.60)$$

Фундаментальные решения для потенциала $u(x) = \mu \operatorname{sech} \mu x$ были приведены в формулах (2.11.46) и (2.11.48). Можно теперь эти предварительные результаты использовать для определения коэффициентов c_{ij}^T в случае «обрезанного» потенциала $u^T(x) = \pm \mu \theta(x - x_1) \operatorname{sech} \mu x$. Мы получаем

$$\begin{aligned}c_{11}^T(k) &= \mp e^{-2ikx_1} \mu \frac{\operatorname{sech} \mu x_1}{2ik + \mu}, \\ c_{12}^T(k) &= -c_{12}^T(k) = \frac{2ik - \mu \operatorname{th} \mu x_1}{2ik - \mu}, \\ c_{22}^T(k) &= \pm e^{2ikx_1} \mu \frac{\operatorname{sech} \mu x_1}{2ik - \mu}.\end{aligned}\quad (2.11.61)$$

При $k = -(1/2)i\mu \operatorname{th} \mu x_1$ коэффициент прохождения имеет полюс. При $\mu > 0$ он лежит в верхней полуплоскости для $x_1 < 0$, а для $x_1 = 0$ — на действительной оси k . Отметим, что этот результат отличается от (2.9.7) — результата, полученного для уравнения Шрёдингера с действительным потенциалом. Там было найдено,

что полюс никогда не может лежать на действительной оси k , но всегда есть полюс в верхней полуплоскости, сколь малым бы ни был отрицательный потенциал.

2.12. СВЯЗЬ МЕЖДУ УРАВНЕНИЕМ ШРЁДИНГЕРА И УРАВНЕНИЯМИ ЗАХАРОВА — ШАБАТА: УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

В разд. 1.5 мы видели, что линейные уравнения

$$\begin{aligned} y_x + iuy &= \zeta z, \\ z_x - iuz &= -\zeta y \end{aligned} \quad (2.12.1)$$

эквивалентны уравнению второго порядка типа уравнения Шрёдингера с комплексным потенциалом. Конкретнее, мы нашли, что

$$y_{xx} = (\zeta^2 + u^2 + iux)y = 0. \quad (2.12.2)$$

Аналогично мы можем получить

$$z_{xx} + (\zeta^2 + u^2 - iux)z = 0. \quad (2.12.3)$$

Теперь получим этот результат другим методом, с помощью нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, называемого уравнением Риккати. Уравнения Риккати снова встретятся нам при дальнейшем рассмотрении теории солитонов, и для удобства в последующем мы сейчас дадим сводку некоторых свойств этого уравнения [31].

Если первое и второе уравнения (2.12.1) умножить на z и y соответственно и вычесть одно из другого, то в результате деления на z^2 получим нелинейное уравнение

$$\varphi_x + 2iu\varphi = \zeta(1 + \varphi^2), \quad (2.12.4)$$

где $\varphi \equiv y/z$. Это нелинейное уравнение первого порядка является примером уравнения Риккати. В данный момент просто отметим, что подстановка $\varphi = -\theta_x/\zeta\theta$ приводит к линейному уравнению второго порядка

$$\theta_{xx} + 2iu\theta_x + \zeta^2\theta = 0. \quad (2.12.5)$$

Если с помощью подстановки $\theta = \psi \exp\left(-i \int u dx\right)$ исключить член с первой производной, мы получим уравнение

$$\psi_{xx} + (\zeta^2 + u^2 - iu_x)\psi = 0, \quad (2.12.6)$$

которое имеет тот же вид, что и уравнение (2.12.3) для z . Таким образом, если граничные условия для обеих функций одинаковы, то ψ равно z .

Возвращение назад от уравнения Риккати (2.12.4) к линейной системе (2.12.1) несколько сложнее, поскольку подстановка $\varphi = -y/z$ преобразует уравнение Риккати в уравнение $z(y_x + iuy -$

$-\zeta z) - y(z_x - iuz + \zeta y) = 0$, которому может удовлетворять решение системы (2.12.1), хотя и не единственным образом. Однако заметив, что

$$\varphi = -\frac{\theta_x}{\zeta\theta} = -\frac{\psi_x - iu\psi}{\zeta\psi}, \quad (2.12.7)$$

мы можем положить $\psi_x - iu\psi = \lambda y$ и $\zeta\psi = \lambda z$, где λ подлежит определению. Исключая ψ_x , мы видим, что выбирая λ постоянным, мы восстанавливаем второе уравнение системы (2.12.1).

Для ссылок в последующем мы сейчас кратко рассмотрим некоторые общие свойства уравнений Риккати. Стандартная форма этого уравнения имеет вид

$$\varphi_x + A(x)\varphi + B(x)\varphi^2 = C(x). \quad (2.12.8)$$

Подстановка

$$\varphi = \theta_x / (B\theta) \quad (2.12.9)$$

преобразует уравнение Риккати в линейное уравнение второго порядка

$$\theta_{xx} + (A - B_x/B)\theta_x - BC\theta = 0. \quad (2.12.10)$$

Общая структура решения уравнения Риккати может быть получена из общего решения этого линейного уравнения. Если θ_1 и θ_2 — два линейно независимых решения уравнения (2.12.10), то общее решение имеет вид $\theta = a\theta_1 + b\theta_2$, где a и b — постоянные. Из (2.12.8) мы видим, что уравнение Риккати имеет общее решение $\varphi = [(a/b)\theta_{1x} + \theta_{2x}] / [(a/b)\theta_1 + \theta_2]$, т. е. решение вида

$$\varphi = \frac{kP + Q}{kR + S}, \quad (2.12.11)$$

где $k(=a/b)$ — постоянная интегрирования, а P, Q, R и S являются функциями x .

Хотя, как показано выше, уравнение Риккати всегда можно преобразовать в линейное уравнение, получить общее решение этого линейного уравнения может быть трудно. Однако ситуация оказывается много проще, если есть частное решение уравнения Риккати. Если обозначить через φ_1 частное решение, то легко показать, что функция f_1 , определенная соотношением $1/f_1 \equiv \varphi - \varphi_1$, будет удовлетворять линейному уравнению

$$f_{1x} - (A + 2B\varphi_1)f_1 - B = 0. \quad (2.12.12)$$

Теперь можно получить общее решение этого уравнения, и следовательно, исходного уравнения Риккати.

Если известно еще одно частное решение $\varphi = \varphi_2$, то можно аналогичным образом ввести функцию f_2 , определяемую соотношением $1/f_2 \equiv \varphi - \varphi_2$, и показать, что

$$f_{2x} - (A + 2B\varphi_2)f_2 - B = 0. \quad (2.12.13)$$

Если разделить (2.12.11) и (2.12.12) на f_1 и f_2 соответственно, получим уравнение

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)_x = B(\varphi_1 - \varphi_2)\left(\frac{f_1}{f_2}\right), \quad (2.12.14)$$

у которого есть решение вида

$$\frac{f_1}{f_2} = ae^{\int dx B(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (2.12.15)$$

где a — постоянная интегрирования. Из данного выше определения f_1 и f_2 находим, что общее решение уравнения Риккати имеет вид

$$\frac{\varphi - \varphi_2}{\varphi - \varphi_1} = ae^{\int B(\varphi_1 - \varphi_2) dx}. \quad (2.12.16)$$

Наконец, приведем общий вид преобразования, использованного выше для исключения первых производных в линейном уравнении второго порядка (2.12.5). Подстановка $\theta = \psi \exp\left[-\frac{1}{2} \times \int a(x) dx\right]$ преобразует дифференциальное уравнение

$$\theta_{xx} + a(x)\theta_x + b(x)\theta = 0 \quad (2.12.17)$$

в уравнение

$$\psi_{xx} + \left[b - \frac{1}{4}(a^2 + 2a_x)\right]\psi = 0. \quad (2.12.18)$$

Упражнение 25

Покажите, что линейная система (1.5.3) эквивалентна уравнению Риккати $\varphi_x + 2i\zeta\varphi = u(1 + \varphi^2)$, где $\varphi = n_1/n_2$. С помощью преобразования $\varphi = -0_x/u\theta$ и $\theta = \psi u^{1/2} e^{-i\zeta x}$ преобразуйте это уравнение Риккати в уравнение Шрёдингера $\psi_{xx} + \left[\zeta^2 + u^2 + i\zeta(u_x/u) - \frac{1}{4}(u_x/u)^2 + \frac{1}{2}(u_x/u)_x\right] = 0$. Используя изложенный выше метод, возвратитесь от уравнения Риккати к линейным уравнениям.

Упражнение 26

Рассмотрите уравнение Риккати, получающееся, если в уравнении (2.12.4) положить $u = \operatorname{sech} x$. Если положить $\varphi = i\bar{\varphi}$, то получится уравнение для $\bar{\varphi}$, которое встретится нам в гл. 8. Покажите, что получившееся линейное уравнение может быть преобразовано в уравнение $\bar{\varphi}_{yy} + (4\zeta^2 + 2\operatorname{sech}^2 y)\bar{\varphi} = 0$, где $y = x/2 + \pi/4$. Используйте уравнение (2.6.14), чтобы показать, что частное решение уравнения Риккати для $\bar{\varphi}$ имеет вид $\bar{\varphi}_1 = -[2\zeta + i \exp(-i\sigma/2)]/[2\zeta + i \exp(i\sigma/2)]$, где $\sigma = 4 \arctg e^x$.

Используйте в качестве второго решения $\varphi_2 = -1/\varphi_1$ и, применив (2.12.15), покажите, что общее решение уравнения Риккати

$$\bar{\varphi}_x + 2i(\operatorname{sech} x)\bar{\varphi} + i\zeta(1 - \bar{\varphi}^2) = 0$$

имеет вид (2.12.11) с

$$\begin{aligned}P &= e^{-i\nu x}(\nu + ie^{-i\sigma/2}), \\Q &= \nu - ie^{-i\sigma/2}, \\R &= e^{-i\nu x}(\nu + ie^{i\sigma/2}), \\S &= -(\nu - ie^{i\sigma/2}),\end{aligned}$$

где $\nu = 2\zeta$ и $\sigma = 4 \operatorname{arctg} e^x$.

Покажите, что общее решение уравнения Риккати, в котором u и ζ поменились местами, т. е. $\chi + 2i\zeta\chi + i(\operatorname{sech} x)(1 - \chi^2) = 0$, имеет вид $\chi = (\varphi + 1)/(\varphi - 1)$.

Упражнение 27

Если решить уравнение (2.12.16) для φ , мы получим $\varphi = (\varphi_2 - af\varphi_1)/(1 - af)$, где $f = \exp\left[\int B(\varphi_2 - \varphi_1) dx\right]$. Четыре различных значения постоянной a дают четыре различных решения уравнения Риккати (2.12.8). Покажите, что эти четыре решения удовлетворяют теореме ангармонического отношения

$$\frac{(\varphi_1 - \varphi_3)(\varphi_2 - \varphi_4)}{(\varphi_1 - \varphi_4)(\varphi_2 - \varphi_3)} = \frac{(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)}{(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)} = \text{const}.$$

Из этого результата следует, что если известны три решения уравнения Риккати, то общее решение можно получить без интегрирования.

ОДНОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

В гл. 2 мы рассмотрели примеры так называемой прямой задачи рассеяния, т. е. нахождения рассеянных волн при заданной форме рассеивающего потенциала или заданном профиле показателя преломления. Использование теории рассеяния при изучении солитонов требует рассмотрения обратной задачи, а именно, задачи определения потенциала при заданной информации о рассеянной волне (и связанных состояниях, если они есть). В последующих главах метод обратной задачи рассеяния будет использоваться для анализа начальных задач, связанных с различными нелинейными эволюционными уравнениями. В настоящей главе излагаются те аспекты обратной задачи рассеяния, которые необходимы для рассмотрения этих эволюционных уравнений.

3.1. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ПОТЕНЦИАЛОМ И ФУНКЦИЯМИ

$$A_R(x, y) \text{ и } A_L(x, y)$$

В разд. 2.10 мы видели, что уравнение Марченко (2.10.17) даст соотношение (интегральное уравнение) между $r_R(x)$, преобразованием Фурье коэффициента отражения $R_R(k)$, и функцией $A_R(x, y)$, входящей в определение фундаментального решения $f_1(x, k)$, описываемого формулой (2.10.5). Теперь рассмотрим, каким образом знание функции $A_R(x, y)$ позволяет определить потенциал $U(x)$. Тогда у нас будет метод перехода от коэффициента отражения $R_R(k)$ к потенциалу $U(x)$ через функции $r_R(x)$ и $A_R(x, y)$. Аналогичный результат получится для коэффициента отражения $R_L(x)$ и функции $A_L(x, y)$.

Из обсуждения распространения импульсов в виде δ -функции (разд. 2.10) ясно, что функция $A_R(x, y)$ должна быть непосредственно связана с потенциалом, поскольку если в волновом уравнении (2.10.1) $U(x) = \mu^2(x) = 0$, то сама δ -функция $\delta(t - x/c)$ является точным решением волнового уравнения. Функция $A_R(x, ct)$ в выражении (2.10.2), представляющая собой след за импульсом в виде δ -функции или в общем случае дополнительную часть решения, которую можно приписать действию функции $U(x)$, в этом случае равна нулю. Чтобы найти связь между $A_R(x, y)$ и $U(x)$ при ненулевом потенциале, мы просто подставим выражение $y_1(x, t)$, даваемое формулой (2.10.2), в волновое уравнение (2.10.1) и по-

лучим

$$\delta\left(t - \frac{x}{c}\right) \left[2 \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial x} + \frac{2}{c} \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial x} + U(x) \right] - \\ - c\theta\left(t - \frac{x}{c}\right) \left[\frac{\partial^2 A_R(x, ct)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_R(x, ct)}{\partial t^2} - U(x) A_R(x, ct) \right] = 0. \quad (3.1.1)$$

Коэффициент при ступенчатой функции, как и ожидалось, показывает, что уравнение, которому удовлетворяет функция $A_R(x, y)$, не проще уравнения для функции $y_1(x, t)$. Однако нас интересует лишь коэффициент при δ -функции. Интегрируя (3.1.1) по времени от $x/c - \varepsilon$ до $x/c + \varepsilon$, получим

$$2 \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial x} \Big|_{ct=x} + 2 \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial ct} \Big|_{ct=x} + U(x) = 0. \quad (3.1.2)$$

Это дает искомое соотношение, а именно

$$U(x) = -2 \frac{d}{dx} A_R(x, x). \quad (3.1.3)$$

Это рецепт для получения потенциала из функции $A_R(x, y)$. Аналогичные вычисления с использованием функции $y_2(x, t)$, определяемой формулой (2.10.6), дают

$$U(x) = 2 \frac{d}{dx} A_L(x, x). \quad (3.1.4)$$

Если задается коэффициент отражения и решается одно из уравнений Марченко, т. е. (2.10.17) для $A_R(x, y)$ или (2.10.18) для функции $A_L(x, y)$, то уравнение (3.1.3) или (3.1.4) дает потенциал, создающий заданный коэффициент отражения.

Довольно длинные рассуждения приводят к критерию

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (1 + |x|) |u(x)| < \infty \quad (3.1.5)$$

справедливости этой процедуры (Фаддеев [37]). Таким образом, метод неприменим, если интеграл в (3.1.5) расходится. Это происходит тогда, когда либо потенциал слишком сингулярен, как в случае, когда он является производной от δ -функции $u(x) = \delta'(x)$, либо когда он слишком медленно убывает для больших значений x .

К сожалению, в большинстве случаев решать уравнение Марченко непросто. Это интегральное уравнение, и хотя оно и линейное, аналитически его можно решить только в некоторых простых случаях.

Приведенный в гл. 2 вывод уравнения Марченко ограничивался случаями, когда у потенциала не было связанных состояний.

В следующем разделе это ограничение будет ослаблено. Сначала, рассматривая простой пример, в котором нет связанных состояний, укажем метод построения потенциала по коэффициенту отражения и рассмотрим коэффициент отражения, который приведет к отталкивающему потенциалу в виде δ -функции.

Пример — отталкивающий потенциал в виде δ -функции

В упр. 19 гл. 2 был получен коэффициент отражения для потенциала $u(x) = 2b\delta(x)$ в случае волн, падающих слева. Результат имеет вид

$$R_L(k) = \frac{-ib}{k + ib}, \quad b > 0. \quad (3.1.6)$$

Это выражение мы сейчас используем в качестве отправной точки для восстановления потенциала в виде δ -функции. Согласно (2.8.32), преобразование Фурье выражения (3.1.6) дает

$$r_L(z) = -be^{-bz}\theta(z). \quad (3.1.7)$$

Тогда уравнение Марченко (2.10.18) примет вид

$$be^{-b(x+y)}\theta(x+y) + b \int_{-y}^x dx' e^{-b(x'+y)} A_L(x, x') - A_L(x, y) = 0. \quad (3.1.8)$$

Для $x < -y$ как ступенчатая функция, так и интеграл равны нулю, так что $A_L(x, y) = 0$ для $x + y < 0$. Для $x + y > 0$ можно удовлетворить интегральному уравнению, полагая функцию $A_L(x, y)$ равной постоянной. Приводящая к этому результату обшая процедура описывается в упр. 1. Полагая $A_L(x, y) = K$, прямой подстановкой в интегральное уравнение находим, что $K = b$. Тогда решение имеет вид

$$A_L(x, y) = b\theta(x + y), \quad (3.1.9)$$

и формула для потенциала (3.1.4) дает ожидаемый результат

$$U(x) = 2b \frac{d}{dx} \theta(2x) = 2b\delta(x). \quad (3.1.10)$$

Изложим теперь другой подход к этой задаче.

Упражнение 1

В разд. 3.4 будет показано, что если коэффициент отражения является отношением полиномов по k , как в случае коэффициента отражения, задаваемого формулой (3.1.6), то можно ожидать, что решение уравнения Марченко будет суммой произведений вида $A_L(x, y) = \sum_{i=1}^N X_i(x) Y_i(y)$. Возьмите $N = 1$ и проделайте дальнейшую факторизацию $Y(y) = h(y)e^{-by}$. Подстановкой в (3.1.8) покажите,

что $dh(y)/dy = be^{2by}h(-y)$. Заменяя y на $-y$, используйте полученное уравнение, чтобы вывести уравнение второго порядка

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} - 2b\frac{d}{dy} + b^2\right)h(y) = 0.$$

Решите уравнение и определите постоянные интегрирования таким образом, чтобы удовлетворялось уравнение Марченко. Получите потенциал в виде $U(x) = 2b\delta(x)$.

3.2. НАЛИЧИЕ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Сейчас мы вернемся к приведенному в разд. 2.10 выводу уравнения Марченко и распространим этот вывод на случай, когда есть связанные состояния. Как указывалось в разд. 2.8, связанные состояния соответствуют полюсам коэффициента прохождения в точках ix_l , лежащих на мнимой оси в верхней полуплоскости. Преобразование Фурье левой части выражения (2.10.14), как и ранее, дается формулой (2.10.16). Однако для $t + x/c < 0$ это выражение больше не обращается в нуль. Согласно (2.8.33), мы теперь имеем

$$\Gamma(z) = -\sum \gamma_l e^{x_l t}, \quad t < 0. \quad (3.2.1)$$

Для $t + x/c < 0$ выражение (2.10.16) принимает вид

$$\begin{aligned} \text{Л. ч.} &= -c \sum \gamma_l e^{x_l (ct+x)} - c \sum \gamma_l e^{x_l ct} \int_{-\infty}^x dx' e^{x_l x'} A_L(x, x') = \\ &= -c \sum \gamma_l e^{x_l ct} f_2(x, ix_l), \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

где было использовано определение фундаментального решения (2.10.7). В точках $k = ix_l$ два фундаментальных решения линейно зависимы и, согласно (2.8.20),

$$f_2(x, ix_l) = c_{11}(ix_l) f_1(x, ix_l). \quad (3.2.3)$$

Используя определение $f_1(x, k)$ формулой (2.10.5) и снова полагая $ct' = x' - ct = y$, можно записать

$$\begin{aligned} \text{Л. ч.} &= -c \sum \gamma_l c_{11}(ix_l) e^{-x_l(x+y)} - \\ &- c \sum \gamma_l c_{11}(ix_l) \int_x^\infty dx' A_R(x, x') e^{-x_l(x'+y)}. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Если определить

$$\Omega_R(z) = r_R(z) + \sum_{l=1}^N \gamma_l c_{11}(ix_l) e^{-x_l z}, \quad (3.2.5)$$

то уравнение Марченко будет иметь точно тот же вид, что и в случае отсутствия связанных состояний. Согласно (2.8.8) и (2.8.32),

это можно записать в виде

$$\Omega_R(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{c_{11}(k)}{c_{12}(k)} e^{ikz} - i \sum_{l=1}^N \frac{c_{11}(ix_l)}{c_{12}(ix_l)} e^{-x_l z}. \quad (3.2.6)$$

Наконец, интегральное уравнение имеет вид

$$\Omega_R(x+y) + A_R(x, y) + \int_x^{\infty} dx' \Omega_R(x' + y) A_R(x, x') = 0, \quad x < y, \quad (3.2.7)$$

где Ω_R даётся выражением (3.2.6). Таким образом, мы получаем точно то же интегральное уравнение, которое было получено в отсутствие связанных состояний, за исключением того, что коэффициент отражения r_R заменяется на Ω_R . Чтобы определить Ω_R , мы должны знать не только коэффициент отражения $r_R(z)$, но также и число связанных состояний, точки ix_l , определяющие их положение на комплексной плоскости, и нормировочные постоянные $m_{Rl} = \gamma c_{11}(ix_l)/c_{12}(ix_l)$ для каждой из волновых функций связанного состояния.

Аналогичная процедура в применении к (2.8.7b) даёт

$$\Omega_L(x+y) + A_L(x, y) + \int_{-\infty}^x dx' A_L(x+x') \Omega_L(x'+y) = 0, \quad x > y, \quad (3.2.8)$$

где

$$\Omega_L(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{c_{22}(k)}{c_{12}(k)} e^{-ikz} - i \sum_{l=1}^N \frac{c_{22}(ix_l)}{c_{12}(ix_l)} e^{x_l z}. \quad (3.2.9)$$

В качестве простого примера со связанным состоянием рассмотрим притягивающий потенциал в виде δ -функции.

Пример: притягивающий потенциал в виде δ -функции

Рассмотрим задачу рассеяния для приходящих слева волн. Коэффициент отражения $R_L(k) = c_{22}(k)/c_{12}(k)$. В упр. 19 гл. 2 было найдено, что коэффициенты рассеяния для потенциала в виде δ -функции $u(x) = 2b\delta(x)$ имеют вид $c_{12}(k) = 1 + ib/k$ и $c_{22}(k) = -ib/k$. Для притягивающего потенциала b отрицательно и нуль c_{12} лежит в верхней полуплоскости в точке $k_1 = i|b|$. Итак, коэффициент отражения равен $R_L(k) = -ib/(k+ib)$. Согласно (2.8.32), преобразование Фурье этого коэффициента отражения записывается в виде

$$r_L(z) = \begin{cases} -|b|e^{b|z|}, & z < 0, \\ 0, & z > 0. \end{cases} \quad (3.2.10)$$

Согласно (3.2.9), мы можем построить величину

$$\Omega_L(z) = r_L(z) - i \frac{c_{22}(ix_1)}{c_{12}(ix_1)} e^{x_1 z}, \quad (3.2.11)$$

где $\kappa_i = |b|$. С ранее полученными значениями c_{12} и c_{22} находим, что

$$\Omega(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ |b|e^{b|z|}, & z > 0, \end{cases} \\ = -be^{-bz}\theta(z), \quad (3.2.12)$$

где $\theta(z)$ — единичная ступенчатая функция. Это совпадает с выражением (3.1.7), которое было получено для $r_L(z)$ в случае отталкивающего потенциала в виде δ -функции. Уравнение Марченко решается, как и раньше, и для потенциала получается тот же результат, только теперь $b < 0$.

Упражнение 2

Для «обрезанного» потенциала $u(x) = -2\theta(x)\operatorname{sech}^2 x$ из (2.9.7) и (2.9.8) получаем, что

$$R_R(k) = \frac{k+i}{(k-i)(2k^2+1)}, \quad R_L(k) = -\frac{1}{2k^2+1}, \quad T(k) = \frac{2k(k+i)}{2k^2+1}.$$

Для единственного полюса в точке $k = i/\sqrt{2}$ покажите, что $\gamma_1 = (1 + \sqrt{2})/2\sqrt{2}$, и получите

$$\Omega_L = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ (1/\sqrt{2})\operatorname{sh}(z/2), & z > 0, \end{cases} \\ \Omega_R = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)e^{z/\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)e^{-z/\sqrt{2}}, & z < 0, \\ 2e^{-z}, & z > 0. \end{cases}$$

Простая процедура для восстановления потенциала состоит в том, чтобы использовать Ω_L для $z < 0$ и показать, что $U(x) = 0$ для $x < 0$ и затем использовать Ω_R для $z > 0$. Покажите, что $A_R(x, y) = -e^y \operatorname{sech} x$, и получите потенциал $U(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x$, $x > 0$.

Упражнение 3

Как показано в упр. 16 гл. 2, коэффициент отражения для потенциала $u(x) = 2 \operatorname{sech}^2 x$ равен нулю, $c_{12}(k) = (k-i)/(k+i)$, и в пределе при $x_1 \rightarrow \infty$ мы находим из (2.9.7) и (2.9.8), что $c_{22}(i) = 1$. Используйте эту информацию, чтобы определить в рассматриваемом случае Ω_L и получить уравнение Марченко (3.2.7). Полагая $A_L(x, y) = f(x)e^y$, решите это уравнение и восстановите потенциал $U(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x$.

Упражнение 4

Решите уравнение Марченко (3.2.7) для безотражательного потенциала, у которого есть один полюс в верхней полуплоскости при $\kappa_1 = \kappa$. Положите $m_{R1} = 2\kappa \exp(2\kappa\xi)$ и покажите, что

$$A_1(x, y) = \frac{-2\kappa e^{\kappa(2\xi-x-y)}}{1 + e^{2\kappa(\xi-x)}}, \quad \Omega_R = 2\kappa e^{\kappa(2\xi-x)}, \\ u = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - \xi).$$

Покажите, что фундаментальные решения имеют вид

$$f_1(x, k) = e^{ikx} \frac{k + ix \operatorname{th} z}{k + ix}, \quad f_2(x, k) = e^{-ikx} \frac{k - ix \operatorname{th} z}{k + ix},$$

где $z = x(x - \xi)$. Этот вид решения окажется полезным в гл. 9.

3.3. БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Безотражательные потенциалы образуют один из классов потенциалов, для которых уравнение Марченко может быть решено полностью. Простейший пример этого класса рассматривался выше в упр. 3. Мы обобщим метод, использованный для решения этого примера, и рассмотрим случай, когда коэффициент отражения, например $R_L(k)$, равен нулю, а коэффициент прохождения имеет n полюсов в заданных точках ix_l ($l = 1, 2, \dots, N$) на положительной мнимой оси. Согласно (3.2.8),

$$\Omega_L(z) = \sum_{l=1}^N m_{Ll} e^{x_l z}, \quad (3.3.1)$$

где нормировочные постоянные m_{Ll} также предполагаются заданными. Уравнение Марченко (3.2.8) удобно решать, введя некоторые N -компонентные векторы. Определяя

$$\Psi(z) = (m_{L1} e^{x_1 z}, \dots, m_{LN} e^{x_N z}), \quad (3.3.2)$$

$$\Phi(z) = (e^{x_1 z}, \dots, e^{x_N z}), \quad (3.3.3)$$

можно записать

$$\Omega_L(x+y) = \Psi(x) \cdot \Phi(y). \quad (3.3.4)$$

Теперь можно решать уравнение Марченко, записывая неизвестные функции $A_L(x, y)$ в виде

$$A_L(x, y) = \mathcal{A}(x) \cdot \Phi(y), \quad (3.3.5)$$

где функция $\mathcal{A}(x)$ подлежит определению. Тогда уравнение Марченко принимает вид

$$\mathcal{A}(x) \cdot \left[I + \int_{-\infty}^x dx' \Phi(x') \Psi(x') \right] \cdot \Phi(y) + \Psi(x) \cdot \Phi(y) = 0, \quad (3.3.6)$$

где I — единичная $N \times N$ -матрица. Полагая

$$V(x) = I + \int_{-\infty}^x dx' \Phi(x') \Psi(x'), \quad (3.3.7)$$

мы приходим к соотношению

$$[\mathcal{A}(x) \cdot V(x) + \Psi(x)] \cdot \Phi(y) = 0. \quad (3.3.8)$$

Так как функция $\Phi(y)$ не равна нулю и можно менять ее ориентацию, изменяя y , то можно удовлетворить этому уравнению, полагая первый множитель равным нулю. Таким образом,

$$\mathcal{A}(x) \cdot V(x) = -\Psi(x), \quad (3.3.9)$$

или

$$\mathcal{A}(x) = -\Psi(x) \cdot V^{-1}(x). \quad (3.3.10)$$

Матрица V всегда имеет обратную [72]. Таким образом, неизвестная функция $A_L(x, y)$ определяется соотношением

$$A_L(x, y) = -\Psi(x) \cdot V^{-1}(x) \cdot \Phi(y). \quad (3.3.11)$$

Для получения потенциала нам нужно знать только $A_L(x, x)$. Это можно записать в виде

$$A_L(x, x) = -\Psi(x) \cdot V^{-1}(x) \cdot \Phi(x). \quad (3.3.12)$$

Эквивалентное выражение имеет вид

$$A_L(x, x) = -\text{Tr}[\Phi(x) \Psi(x) \cdot V^{-1}(x)], \quad (3.3.13)$$

где Tr означает след матрицы, стоящей в скобках. Легко установить эквивалентность этих выражений для $A_L(x, x)$, вводя набор единичных векторов e_i и записывая $\Psi = e_i \psi_i$, $\Phi = e_i \phi_i$ и $V^{-1} = v_{jk}^{-1} e_j e_k$, где суммирование производится по повторяющимся индексам. Сразу видно, что оба выражения для $A_L(x, x)$ сводятся к $\psi_i \phi_k v_{ik}^{-1}$. Из определения $V(x)$ (3.3.7) имеем

$$\frac{dV}{dx} = \Phi(x) \Psi(x), \quad (3.3.14)$$

так что соотношение (3.3.13) может быть записано в виде

$$A_L(x, x) = -\text{Tr}\left[\frac{dV}{dx} \cdot V^{-1}\right] = -\frac{d}{dx} \ln(\det V), \quad (3.3.15)$$

где $\det V$ означает определитель матрицы V . В последнем равенстве (3.3.15) используется результат матричного исчисления [24], состоящий в том, что если V и A — матрицы, такие, что $dV/dx = AV$ и, следовательно, $dV/dx \cdot V^{-1} = A$, то $d(\det V)/dx = (\text{Tr } A) \det V$. Таким образом,

$$\text{Tr } A = \text{Tr}\left(\frac{dV}{dx} \cdot V^{-1}\right) = \frac{d(\det V)/dx}{\det V} = \frac{d}{dx} [\ln(\det V)]. \quad (3.3.16)$$

Теперь для определения потенциала используем (3.1.4) и получим

$$U(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln(\det V). \quad (3.3.17)$$

В качестве примера использования этого результата покажем, что случай $N = 2$ приводит к рассмотренному в гл. 1 квадратичному потенциалу Баргмана. Следует отметить, что рассмотренный в упр. 3 случай $N = 1$ дает линейный потенциал Баргмана.

Пример: случай $N=2$

Чтобы восстановить численный результат для квадратичного потенциала Баргмана, приведенный в формуле (1.3.25), зададим значения $\kappa_1 = 1$ и $\kappa_2 = 2$. Тогда

$$\Psi(x) = (m_{L1}e^x, m_{L2}e^{2x}), \quad \Phi(x) = (e^x, e^{2x}), \quad (3.3.18)$$

и из (3.3.7) находим

$$V(x) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} m_{L1}e^{2x} & \frac{1}{3} m_{L2}e^{3x} \\ \frac{1}{3} m_{L1}e^{3x} & 1 + \frac{1}{4} m_{L2}e^{4x} \end{bmatrix}. \quad (3.3.19)$$

Определитель матрицы $V(x)$ имеет вид

$$\det V(x) = 1 + \frac{1}{2} m_{L1}e^{2x} + \frac{1}{4} m_{L2}e^{4x} + \frac{1}{72} m_{L1}m_{L2}e^{6x}. \quad (3.3.20)$$

Теперь из (3.3.13) легко получить функцию $A_L(x, x)$. Полагая $\lambda = (1/2)\ln(m_{L2}/2m_{L1})$ и $\mu = (1/2)\ln(m_{L1}m_{L2}/72)$, находим, что

$$A_L(x, x) = -\frac{3e^{-(x+\lambda)} + 6e^{x+\lambda} + 3e^{3x+\mu}}{3\operatorname{ch}(x+\lambda) + \operatorname{ch}(3x+\mu)}. \quad (3.3.21)$$

Последующее дифференцирование и использование (3.1.4) дают

$$u(x) = -12 \frac{3 + \operatorname{ch}(\psi x + \mu + \lambda) + \psi \operatorname{ch}(2x + \mu - \lambda)}{[3\operatorname{ch}(x + \lambda) + \operatorname{ch}(3x + \mu)]^2}. \quad (3.3.22)$$

Если λ и μ , связанные с m_{L1} и m_{L2} , как показано выше, выбираются таким образом, чтобы этот результат удовлетворял также уравнению Кортевега — де Фриза, получается выражение, приведенное в (1.3.25). Этот пример будет рассмотрен снова в разд. 4.4.

3.4. КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ — РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ k

Если коэффициент отражения, например $R_L(k)$, является рациональной функцией k , то его преобразование Фурье $r_L(z)$ снова будет суммой экспоненциальных членов и, таким образом, будет иметь вид, аналогичный тому, который был получен в предыдущем разделе для безотражательных потенциалов. Самый общий вид для таких коэффициентов отражения — это

$$R_L(k) = c \frac{\prod_{i=1}^m (k - \alpha_i)}{\prod_{i=1}^n (k - \beta_i)}, \quad (3.4.1)$$

где $m \leq n-1$. Для $m = n-1$, как в (2.4.4), потенциал будет содержать δ -функцию. Мы будем рассматривать только некоторые

характерные примеры. Более общее обсуждение задачи можно найти в [73].

Сначала рассмотрим случай, когда у функции $R_L(k)$ нет полюсов в верхней полуплоскости. Тогда, согласно определению $r_L(z)$ (2.8.32), имеем $r_L(z) = 0$ при $z < 0$. Если кроме того потребовать, чтобы и у функции $T(k)$ не было полюсов в верхней полуплоскости, то для определения потенциала можно использовать уравнение Марченко (2.10.18), и мы видим, что при $x + y < 0$ нет вклада от интеграла и $A_L(x, x) = 0$ при $x < 0$. Таким образом, $U = 0$ при $x < 0$.

При $x > 0$ нижним пределом в интеграле в уравнении Марченко является $-y$, а не $-\infty$. В результате любая попытка построить решение уравнения Марченко подобно тому, как это было сделано в предыдущем разделе, была бы чрезвычайно трудоемкой. Однако если $R_R(k)$ получается из $R_L(k)$ и $T(k)$ посредством (2.8.16) и (2.8.38), мы находим, что у $R_R(k)$ есть сингулярности в обеих полуплоскостях. Таким образом, $R_R(z)$ не обращается в нуль при $z > 0$. Тогда верхним пределом интеграла в уравнении Марченко (2.10.17) остается $+\infty$, и его можно решить относительно A_R , используя метод предыдущего раздела.

В качестве примера определим потенциал, дающий коэффициент отражения

$$R_L(k) = \frac{\alpha\beta}{(k + i\alpha)(k + i\beta)}. \quad (3.4.2)$$

где α и β — действительные положительные постоянные. Из (2.8.32) видно, что $r_L(z)$ обращается в нуль при $z < 0$. Таким образом, $A_L(x, y)$ и $u(x)$ также равны нулю при $x < 0$. Чтобы получить потенциал для $x > 0$, вычислим $r_R(z)$. Тогда из (2.8.38) получим

$$\frac{d}{dk} T(k) = 2\alpha^2\beta^2 P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{2\zeta^2 + \gamma^2}{\zeta(\zeta - k)(\zeta^2 + \alpha^2)(\zeta^2 + \beta^2)(\zeta^2 + \gamma^2)}, \quad (3.4.3)$$

где $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$, а P означает, что интеграл берется в смысле главного значения. Интегрирование дает

$$T(k) = \frac{k(k + i\gamma)}{(k + i\alpha)(k + i\beta)}. \quad (3.4.4)$$

Из (2.8.16) имеем

$$R_R(k) = - \frac{\alpha\beta(k + i\gamma)}{(k + i\alpha)(k + i\beta)(k - i\gamma)}, \quad (3.4.5)$$

и для $z > 0$

$$r_R(z) = m_0 e^{-\gamma z}, \quad (3.4.6)$$

где $m_0 = -2\alpha\beta/[(\gamma + \alpha)(\gamma + \beta)]$. Постоянная m_0 , таким образом, отрицательна. Полагая $A_R(x, y) = \rho(x)e^{-\gamma y}$, находим, что уравне-

ние Марченко (2.10.17) сводится к алгебраическому уравнению

$$m_0 e^{-\gamma x} + \rho(x) + \rho(x) \left(\frac{m_0}{2\gamma} \right) e^{-2\gamma x} = 0. \quad (3.4.7)$$

Решая это уравнение относительно $\rho(x)$, находим, что

$$A_R(x, x) = \gamma e^{-(\gamma x + \varphi)} \operatorname{cosech}(\gamma x + \varphi), \quad (3.4.8)$$

где $e^\varphi = \sqrt{2\gamma/m_0}$. Тогда потенциал имеет вид

$$u(x) = 2\gamma^2 \theta(x) \operatorname{cosech}^2(\gamma x + \varphi), \quad (3.4.9)$$

где $\theta(x)$ — единичная ступенчатая функция. Так как обе величины, γ и φ , положительны, сингулярность в выражении для $u(x)$ уничтожается ступенчатой функцией. Волновая функция для этого потенциала может быть получена описанным в разд. 2.6 методом Дарбу с $A = e^\varphi/2$, $B = -e^{-\varphi}/2$ или же общим методом, описанным в работе [73]. Получим

$$y = A e^{ikx} [ik - \gamma \operatorname{cth}(\gamma x + \varphi)] - B e^{-ikx} [ik + \operatorname{cth}(\gamma x + \varphi)], \quad (3.4.10)$$

что нужно сравнить с (2.6.15).

Если коэффициенты отражения и прохождения имеют полюсы в верхней полуплоскости, можно поступить, как в разд. 2.8, введя функцию $T(k)$ без сингулярностей. Тогда вычисления аналогичны изложенным выше. В качестве примера рассмотрим коэффициент отражения

$$R_L(k) = -\alpha^2/(k^2 + \alpha^2) \quad (3.4.11)$$

с действительным α . Для простоты выберем положение полюса $T(k)$ в верхней полуплоскости также в точке $k = i\alpha$. Тогда, вводя $T(k) = T(k)(k - i\alpha)/(k + i\alpha)$, находим, что

$$\frac{d\tilde{T}(k)}{dk} = 4\alpha^2 P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{1}{\zeta(\zeta - k)(\zeta^2 + \alpha^2)(\zeta^2 + 2\alpha^2)}. \quad (3.4.12)$$

Интегрирование приводит к коэффициенту прохождения

$$T(k) = k(k + i\alpha\sqrt{2})/(k^2 + \alpha^2). \quad (3.4.13)$$

Если $R_R(k)$ получено из (2.8.16), обратное преобразование Фурье дает

$$r_R(z) = \begin{cases} 2\alpha\sqrt{2} e^{\alpha\sqrt{2}z}, & z < 0, \\ 2\alpha\sqrt{2} e^{-\alpha\sqrt{2}z} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right) e^{-\alpha z}, & z > 0. \end{cases} \quad (3.4.14)$$

Поскольку у $T(k)$ есть полюс в верхней полуплоскости, мы должны построить функцию $\Omega_R(z)$ и рассмотреть уравнение Марченко (2.10.17). Так как у $c_{12}(k)$ только один нуль в верхней полуло-

скости в точке $k = i\alpha$, функция $\Omega_R(z)$ дается выражением

$$\Omega_R(z) = r_R(z) + \gamma_0 c_{11}(i\alpha) e^{-\alpha z}. \quad (3.4.15)$$

Значение γ_0 следует из (2.8.27). Мы получаем

$$i\gamma_0 = \text{Res} \left[\frac{1}{c_{12}(i\alpha)} - 1 \right] = \frac{i\alpha}{2} (1 + \sqrt{2}). \quad (3.4.16)$$

Так как $c_{11}(i\alpha) = R_R(i\alpha)/T(i\alpha) = (\sqrt{2} - 1)^{-1}$, то

$$\gamma_0 c_{11}(i\alpha) = \alpha(\sqrt{2} + 1)/(2(\sqrt{2} - 1)).$$

Тогда для $z \geq 0$ соотношение (3.4.15) дает

$$\Omega_R(z) = 2\alpha \sqrt{2} e^{-\alpha \sqrt{2} z}. \quad (3.4.17)$$

Вводя $A_R(x, y) = f(x) e^{-\alpha \sqrt{2} y}$, мы находим из уравнения Марченко (2.10.17), что $f(x) = -2\gamma e^{-\gamma x}/(1 + e^{-\gamma x})$, где $\sqrt{2}$. Наконец, потенциал равен

$$U(x) = 2 \frac{d}{dx} A_L(x, x) = -4\alpha^2 \vartheta(x) \text{sech}^2 \alpha \sqrt{2} x. \quad (3.4.18)$$

Для $\alpha^2 = 1/2$ это выражение представляет собой «обрезанный» потенциал, рассмотренный в разд. 2.9 для специального случая $x_1 = 0$.

3.5. ПОТЕНЦИАЛЫ БАРГМАНА

В двух предыдущих разделах мы рассмотрели, как методом обратной задачи рассеяния можно построить потенциал, зная только коэффициент отражения (в случае отталкивающего потенциала) или (в случае притягивающих потенциалов) зная коэффициент отражения и располагая некоторой информацией о связанных состояниях (уровнях энергии и нормировочных постоянных). В данном разделе мы рассмотрим более простой метод построения некоторых потенциалов (с нулевым коэффициентом отражения). Применение этого метода к радиальному уравнению Шрёдингера (Баргман, 1949 [11]) предшествовало открытию метода обратной задачи рассеяния. Именно результаты, полученные методом Баргмана, дали толчок развитию более полного метода обратной задачи рассеяния. Метод был уже введен в гл. 1, где линейный и квадратичный потенциалы Баргмана были соотнесены с одно- и двухсолитонными решениями уравнения Кортевега—де Фриза. Сейчас мы рассмотрим метод более детально, особенно для случая квадратичного потенциала. В этом примере мы найдем, что уровни энергии, связанные с этими решениями, зависят только от двух параметров, в то время как форма потенциала характеризуется четырьмя параметрами. Форма потенциала может, таким образом, непрерывно деформироваться, а собственные значения остаются

постоянными, и то, что это может иметь место, является решающим фактом, позволяющим использовать теорию обратной задачи рассеяния в теории нестационарного распространения импульса.

Подход Баргмана состоит в рассмотрении решений радиального уравнения Шрёдингера в виде функции e^{ikx} , умноженной на полином от k . В нашей версии метода вводятся фундаментальные решения вида

$$\begin{aligned} f_1(x, k) &= e^{ikh} P_1(x, k), \\ f_2(x, k) &= e^{-ikh} P_2(x, k), \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

где функции $P_i(x, k)$ суть полиномы от k . Будут рассматриваться только случаи линейных и квадратичных полиномов. Так как решения предполагаемого вида содержат только e^{ikh} или e^{-ikh} , ожидается, что полученный потенциал будет безотражательным. Из соотношений (2.8.7), которые связывают фундаментальные решения, видно, что

$$\begin{aligned} P_2(x, k) &= c_{12} P_1(x, -k), \\ P_1(x, k) &= c_{21} P_2(x, -k). \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Так как $c_{12}(k) = c_{21}(k)$, получаем

$$P_1(x, k) P_1(x, -k) = P_2(x, k) P_2(x, -k). \quad (3.5.3)$$

Линейный случай

Простейшим случаем является линейный, более или менее подробно рассмотренный в гл. 1. Фундаментальные решения имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(x, k) &= e^{ikh} \frac{2k + ia_1(x)}{2k + ia_1(\infty)}, \\ f_2(x, k) &= e^{-ikh} \frac{2k + ia_2(x)}{2k + ia_2(-\infty)}. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Подстановка в уравнение Шрёдингера показывает, что $u(x) = -a_2(x) = -a_1(x)$. Из (3.5.2) находим, что

$$c_{12}(k) = \frac{2k - ia_1(\infty)}{2k + ia_1(-\infty)}. \quad (3.5.5)$$

В гл. 1 было показано, что $a_1(x) = 2\mu \operatorname{th}(\mu x - \varphi)$, где μ и φ — постоянные интегрирования. Таким образом, нулем функции $c_{12}(k)$ является точка $k = (1/2)a_1(\infty) = i\mu$. Положение полюса зависит, таким образом, только от μ , в то время как потенциал зависит как от μ , так и от φ . В этом линейном случае лишняя степень свободы, связанная с формой потенциала, приводит просто к смещению потенциала вдоль оси x .

Квадратичный случай

В квадратичном случае оказывается, что потенциал зависит от четырех параметров, причем только два из этих параметров связаны с расположением собственных значений. Тогда при изменении двух добавочных независимых параметров потенциал может деформироваться непрерывным образом. Как указывалось в гл. 1, эта деформация приводит к решению, которое можно использовать для описания взаимодействия двух солитонов. Сейчас мы рассмотрим подробнее это квадратичное решение.

Вводя фундаментальные решения

$$f_1(x, k) = e^{ikx} \frac{4k^2 + 2ika_1(x) + b_1(x)}{4k^2 + 2ika_1(\infty) + b_1(\infty)}, \quad (3.5.6)$$

$$f_2(x, k) = e^{-ikx} \frac{4k^2 + 2ika_2(x) + b_2(x)}{4k^2 + 2ika_2(-\infty) + b_2(-\infty)} \quad (3.5.7)$$

и подставляя их в уравнение Шрёдингера, мы находим, что $a_2(x) = -a_1(x)$, $b_2(x) = b_1(x)$ и

$$a_1'(x) = -u(x). \quad (3.5.8)$$

Мы находим также, что

$$L_1 = b_1' + a_1'' - a_1 u = 0, \quad (3.5.9)$$

$$L_2 = b_1'' - b_1 u = 0. \quad (3.5.10)$$

Комбинируя (3.5.8) и (3.5.9) и интегрируя, получаем

$$b_1 + a_1' + \frac{1}{2} a_1^2 = 2c_1, \quad (3.5.11)$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Интегрирование $b_1 L_1 - a_1 L_2$ дает

$$(1/2) b_1^2 + b_1 a_1' - a_1 b_1' = 2c_2, \quad (3.5.12)$$

где c_2 — вторая постоянная интегрирования. Снова вводя функцию w с помощью определения $a_1 = 2w'/w$, мы получим из (3.5.11), что

$$b_1 = 2(c_1 - w''/w). \quad (3.5.13)$$

Теперь уравнение (3.5.12) принимает вид

$$2w'w''' - (w'')^2 - 2c_1(w')^2 + w^2(c_1^2 - c_2) = 0, \quad (3.5.14)$$

и после дифференцирования сводится к много более простому линейному уравнению

$$w^{(IV)} - 2c_1 w'' + (c_1^2 - c_2) w = 0. \quad (3.5.15)$$

Это уравнение имеет решения вида $e^{\omega x}$, где

$$\omega^2 = c_1 \pm \sqrt{c_2}. \quad (3.5.16)$$

Обозначая корни через $\pm \rho = \pm \sqrt{c_1 + \sqrt{c_2}}$ и $\pm \sigma = \pm \sqrt{c_1 - \sqrt{c_2}}$, откуда следует

$$c_1 = (\rho^2 + \sigma^2)/2, \quad c_2 = (\rho^2 - \sigma^2)^2/4, \quad (3.5.17)$$

мы находим, что w может быть записано в виде

$$w = \gamma_1 e^{\rho x} + \gamma_2 e^{-\rho x} + \delta_1 e^{\sigma x} + \delta_2 e^{-\sigma x}. \quad (3.5.18)$$

Требование, чтобы w удовлетворяло уравнению третьего порядка (3.5.14), налагает связь на эти четыре постоянные интегрирования. Подставляя в (3.5.14), находим, что

$$\gamma_1 \gamma_2 \rho^2 = \delta_1 \delta_2 \sigma^2. \quad (3.5.19)$$

Этому условию можно удовлетворить, полагая $\gamma_1 = \sigma \alpha$, $\gamma_2 = \sigma/\alpha$, $\delta_1 = \rho \beta$ и $\delta_2 = \rho/\beta$. Тогда выражение (3.5.18) сводится к цитированному в гл. 1 результату, а именно

$$w = 2\sigma \operatorname{ch}(\rho x - \varphi) + 2\rho \operatorname{ch}(\sigma x - \psi), \quad (3.5.20)$$

где $\alpha = e^{-\varphi}$ и $\beta = e^{-\psi}$.

Из (3.5.2) имеем

$$c_{12}(k) = \frac{4k^2 - 2ika_1(\infty) + b_1(\infty)}{4k^2 - 2ika_1(-\infty) + b_1(-\infty)}. \quad (3.5.21)$$

Таким образом, нули $c_{12}(k)$ зависят только от двух параметров, $a_1(\infty)$ и $b_1(\infty)$, в то время как потенциал зависит от четырех. Чтобы детальнее рассмотреть это, отметим, что мы анализируем случай $\rho > \sigma$, $w \sim e^{\rho x}$ при $x \rightarrow +\infty$. Кроме того, в этом пределе $a_1 = 2w'/w \sim 2\rho$. Аналогично, $b_1 = 2c_1 - 2w''/w \sim \sigma^2 - \rho^2$ при $x \rightarrow +\infty$. Таким образом, положение нулей c_{12} зависит от двух параметров ρ и σ , в то время как потенциал зависит также от φ и ψ . Возможно непрерывное изменение параметров φ и ψ и, следовательно, формы потенциала без изменения двух собственных значений уравнения Шрёдингера.

3.6. МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ЗАХАРОВА — ШАБАТА ДЛЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

В разд. 2.11 было показано, что систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dx} + ikn_1 &= un_2, \\ \frac{dn_2}{dx} - ikn_2 &= -un_1 \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

можно исследовать так же, как уравнение Шрёдингера в разд. 2.8, т. е. можно ввести фундаментальные решения и провести достаточно общий анализ процесса рассеяния. Эти решения были свя-

заны соотношениями

$$\varphi(x, k) = c_{11}(k)\psi(x, k) + c_{12}(k)\bar{\psi}(x, k), \quad (3.6.2a)$$

$$\bar{\psi}(x, k) = c_{21}(k)\bar{\varphi}(x, k) + c_{22}(k)\varphi(x, k), \quad (3.6.2b)$$

где

$$\varphi(x, k) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, k) \\ \varphi_2(x, k) \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi}(x, k) = \begin{pmatrix} \varphi_2(x, -k) \\ -\varphi_1(x, -k) \end{pmatrix} \quad (3.6.3)$$

и аналогично для $\psi(x, k)$. С помощью преобразования Фурье выражения (3.6.2a) можно получить пару сцепленных интегральных уравнений типа уравнений Марченко. Из (3.6.2b) следует вторая пара таких интегральных уравнений. Поэтому можно сформулировать метод решения обратных задач рассеяния для уравнений Захарова — Шабата. Анализ, приводящий к интегральным уравнениям, аналогичен тому, который использовался в разд. 2.10 и 3.2 для уравнения Шрёдингера, так что будет дан лишь набросок этого вывода.

Для получения интегральных уравнений, связанных с парой (3.6.2b), запишем их сначала в виде

$$[T(k) - 1 + 1]\varphi_1(x, k) = -\varphi_2(x, -k) + R_L(k)\varphi_1(x, k), \quad (3.6.4a)$$

$$[T(k) - 1 + 1]\varphi_2(x, k) = \varphi_1(x, -k) + R_L(k)\varphi_2(x, k), \quad (3.6.4b)$$

где $T(k) = 1/c_{21}(k)$ и $R_L(k) = -c_{22}(k)/c_{21}(k)$, как в (2.11.25). Определяя преобразование Фурье от $T(k) - 1$ и от $R_L(k)$, как в (2.8.31) и (2.8.32), и используя затем (2.11.6) и (2.11.7) для преобразований от φ и от $\bar{\psi}$, получим

$$\begin{aligned} c \int_{x/c}^{\infty} dt' \Gamma[c(t-t')] \psi_+(x, t') + \psi_+(x, t) = \\ = -\varphi_-(x, -t) + c \int_{-x/c}^{\infty} dt' r_L[c(t-t')] \varphi_+(x, t'), \end{aligned} \quad (3.6.5a)$$

$$\begin{aligned} c \int_{x/c}^{\infty} dt' \Gamma[c(t-t')] \psi_-(x, t') + \psi_-(x, t) = \\ = \varphi_+(x, -t) + c \int_{-x/c}^{\infty} dt' r_L[c(t-t')] \varphi_-(x, t'). \end{aligned} \quad (3.6.5b)$$

Так как обе функции, $\psi_+(x, k)$ и $\psi_-(x, k)$, при $t - x/c < 0$ обращаются в нуль, то второй член в левой части обоих уравнений обращается в нуль при выполнении этого неравенства. Рассмотрим подробнее уравнение (3.6.5a) в случае $t - x/c < 0$. При $\psi_+(x, t')$, заданной соотношением (2.11.5), и $\Gamma(z)$, заданной соотношением (2.8.31) (несмотря на то что, как отмечалось в разд. 2.11, полюсы k_i могут и не лежать на мнимой оси), левая часть уравнения (3.6.5a)

приводится к виду

$$\text{Л. ч.} = -c \sum \gamma_l e^{-ik_l ct} \psi_1(x, k_l). \quad (3.6.6)$$

Здесь для $\psi_1(x, k)$ было использовано определение (2.11.7). Так как $\psi_1(x, k_l) = c_{22}(k_l) \varphi_1(x, k_l)$, мы окончательно получим

$$\begin{aligned} \text{Л. ч.} = & -c \sum \gamma_l c_{22}(k_l) e^{-ik_l(x+ct)} - \\ & - c \int_{-\infty}^x dx' A_1(x, x') \sum \gamma_l c_{22}(k_l) e^{-ik_l(x'+ct)}. \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

Аналогично правую часть можно записать в виде

$$\begin{aligned} \text{Пр. ч.} = & -c A_2(x, ct) + c r_L(ct + x) + \\ & + c^2 \int_{-x/c}^{\infty} dt' r_L[c(t-t')] A_1(x, -ct'). \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Приравнивая эти два выражения и определяя

$$\begin{aligned} \Omega_L(z) & \equiv r_L(z) + \sum \gamma_l c_{22}(k_l) e^{-ik_l z} = \\ & = r_L(z) - i \sum \frac{c_{22}(k_l)}{c_{12}(k_l)} e^{-ik_l z}, \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

получим интегральное уравнение

$$-A_2(x, y) + \Omega_L(x+y) + \int_{-\infty}^x dx' A_1(x, x') \Omega_L(x'+y) = 0, \quad x > y, \quad (3.6.10a)$$

где $x' = ct'$. Аналогичная процедура для (3.6.5b) дает

$$A_1(x, t) + \int_{-\infty}^x dx' A_2(x, x') \Omega_L(x'+y) = 0, \quad x > y. \quad (3.6.10b)$$

Уравнения (3.6.10) являются интегральными уравнениями Марченко для этой обратной задачи Захарова — Шабата. Аналогичная пара уравнений следует из (3.6.2a). Результат записывается в виде

$$B_2(x, y) + \int_x^{\infty} dx' B_1(x, x') \Omega_R(x'+y) = 0, \quad (3.6.11)$$

$$-B_1(x, y) + \Omega_R(x+y) + \int_x^{\infty} dx' B_2(x, x') \Omega_R(x'+y) = 0, \quad x < y,$$

где

$$\Omega_R(z) = r_R(z) + \sum \gamma_l c_{11}(k_l) e^{ik_l z} = r_R(z) + i \sum \frac{c_{11}(k_l)}{c_{21}(k_l)} e^{ik_l z}. \quad (3.6.12)$$

Наи нужно также найти соотношение между функцией $u(x)$ и функциями ядер A_1 и A_2 или B_1 и B_2 . Снова мы следуем методу, близкому тому, который использовался для уравнения Шрёдингера. Подставляя зависящие от времени решения $\varphi_+(x, t)$ и $\varphi_-(x, t)$ в (2.11.2), находим, что

$$c\partial\left(t + \frac{x}{c}\right)\left[\frac{\partial A_1}{\partial t} - c\frac{\partial A_1}{\partial x} - K(x)A_2\right] = 0, \quad (3.6.13)$$

$$c\partial\left(t + \frac{x}{c}\right)\left[2A_2 - \frac{K(x)}{c}\right] + \\ + c\partial\left(t + \frac{x}{c}\right)\left[\frac{\partial A_2}{\partial t} + c\frac{\partial A_2}{\partial x} - K(x)A_1\right] = 0. \quad (3.6.14)$$

Для $t + x/c > 0$, полагая $y = -ct$ и $u = -K/c$, получим

$$\frac{\partial A_1(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial A_1(x, y)}{\partial x} = u(x)A_2(x, y), \\ \frac{\partial A_2(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial A_2(x, y)}{\partial x} = u(x)A_1(x, y), \quad x > y. \quad (3.6.15)$$

Кроме того, интегрируя (3.6.14) по времени с переходом через сингулярность в δ -функции, получим

$$u = -2A_2(x, x). \quad (3.6.16)$$

Полагая $x = y$ в первом из уравнений (3.6.15), получим в результате

$$u^2 = -2\frac{dA_1(x, x)}{dx}. \quad (3.6.17)$$

Аналогичное рассмотрение, основанное на решении $\varphi_+(x, t)$ и $\varphi_-(x, t)$, заданном формулой (2.11.5), дает

$$\frac{\partial B_1(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial B_1(x, y)}{\partial y} = u(x)B_2(x, y), \\ \frac{\partial B_2(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial B_2(x, y)}{\partial y} = -u(x)B_1(x, y), \quad x < y, \quad (3.6.18)$$

$$u(x) = -2B_1(x, x), \quad (3.6.19)$$

$$u^2(x) = 2\frac{dB_2(x, x)}{dx}. \quad (3.6.20)$$

3.7. БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЗАХАРОВА — ШАБАТА

Для безотражательных потенциалов система уравнений Марченко, полученная в предыдущем разделе, может быть решена точно. Мы последуем методу, использованному для уравнения Шрёдингера в разд. 3.3. Рассмотрим решение системы (3.6.10) при

$r_L = 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
 -A_2(x, y) + \Omega_L(x + y) + \int_{-\infty}^x dx' A_1(x, x') \Omega_L(x' + y) &= 0, \\
 A_1(x, y) + \int_{-\infty}^x dx' A_2(x, x') \Omega_L(x' + y) &= 0, \quad x > y,
 \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

с

$$\Omega_L(z) = \sum_1^N m_{Li} e^{-ik_i z}, \tag{3.7.2}$$

где $m_{Li} = \gamma_i c_{22}(k_i)$. Снова введем векторы

$$\begin{aligned}
 \Psi(z) &= (m_{L1} e^{-ik_1 z}, \dots, m_{LN} e^{-ik_N z}), \\
 \Phi(z) &= (e^{-ik_1 z}, \dots, e^{-ik_N z}).
 \end{aligned} \tag{3.7.3}$$

Полагая

$$\begin{aligned}
 A_i(x, y) &= \mathcal{A}_i(x) \cdot \Phi(y), \quad i = 1, 2, \\
 \Omega_L(x + y) &= \Psi(x) \cdot \Phi(y),
 \end{aligned} \tag{3.7.4}$$

находим, что интегральное уравнение можно свести к алгебраическим уравнениям, как в разд. 3.2. В результате имеем

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{A}_2(x) + \Psi(x) + \mathcal{A}_1(x) \cdot M(x) &= 0, \\
 \mathcal{A}_1(x) + \mathcal{A}_2(x) \cdot M(x) &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

где $M(x)$ — матрица

$$M(x) = \int_{-\infty}^x dx' \Phi(x') \Psi(x'). \tag{3.7.6}$$

Исключая $\mathcal{A}_1(x)$, получим

$$\mathcal{A}_2(x) = \Psi(x) \cdot D^{-1}(x), \tag{3.7.7}$$

где $D^{-1}(x)$ — матрица, обратная матрице

$$D(x) = I + M(x) \cdot M(x). \tag{3.7.8}$$

Следуя использованной в разд. 3.3 процедуре, находим, что потенциал можно выразить в виде

$$\begin{aligned}
 u(x) &= -2A_2(x, x) = -2\Phi(x) \cdot \mathcal{A}_2(x) = \\
 &= -2\Phi(x) \cdot \Psi(x) \cdot D^{-1}(x) = \\
 &= -2 \operatorname{Tr} \left[\frac{dM}{dx} \cdot (I + M \cdot M)^{-1} \right].
 \end{aligned} \tag{3.7.9}$$

Можно получить также формулу для u^2 . Используем (3.6.17) и заметим, что

$$\begin{aligned} A_1(x, x) &= \Phi(x) \cdot \mathcal{A}_1(x) = \\ &= -\Phi(x) \cdot [\Psi(x) \cdot D^{-1}(x)] \cdot M(x) = \\ &= -\text{Tr}[\Phi(x) \Psi(x) \cdot D^{-1}(x) \cdot M(x)] = \\ &= -\text{Tr}\left[M \cdot \frac{dM}{dx} \cdot D^{-1}(x)\right], \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

где использовалось соотношение (3.7.6) и инвариантность следа при циклической перестановке. Используя (3.3.16) и записывая

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\ln \det D) &= \text{Tr}\left(\frac{dD}{dx} \cdot D^{-1}\right) = \\ &= 2 \text{Tr}\left(M \cdot \frac{dM}{dx} \cdot D^{-1}\right) = -2A_1(x, x), \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

мы можем, наконец, использовать (3.6.17) и получить

$$u^2 = \frac{d^2}{dx^2}(\ln \det D). \quad (3.7.12)$$

Особенно простой результат можно получить из соотношений (3.6.16) и (3.6.17). Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} u^2 + iu_x &= -2 \frac{d}{dx}(A_1 + iA_2) = \\ &= 2 \frac{d}{dx} \left[\text{Tr}\left(M \cdot \frac{dM}{dx} \cdot D^{-1} - i \frac{dM}{dx} \cdot D^{-1}\right) \right] = \\ &= -2i \frac{d}{dx} \left\{ \text{Tr}\left[(I + iM) \cdot \frac{dM}{dx} \cdot D^{-1}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

Снова применяя циклическую перестановку следа и тот факт, что $D^{-1} = (I - iM)^{-1}(I + iM)^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} u^2 + iu_x &= -2i \frac{d}{dx} \left\{ \text{Tr}\left[\frac{dM}{dx} \cdot (I - iM)^{-1}\right] \right\} = \\ &= 2 \frac{d^2}{dx^2} [\ln \det (I - iM)], \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

где было использовано соотношение (3.7.11). Беря мнимую часть этого результата, находим, что

$$u = 2 \frac{d}{dx} [\text{Im} \ln \det (I - iM)]. \quad (3.7.15)$$

Таким образом, окончательное выражение для $u(x, t)$ имеет вид

$$u = 2 \frac{d}{dx} \arctg \left[\frac{\text{Im} \det (I - iM)}{\text{Re} \det (I - iM)} \right]. \quad (3.7.16)$$

Из (3.7.3) и (3.7.6) получаем

$$M_{II} = \frac{im_L}{\kappa_I + \kappa_J} e^{-i(\kappa_I + \kappa_J)z}. \quad (3.7.17)$$

Следует отметить, что этот простой результат может быть получен только тогда, когда u действительно. Некоторые примеры использования этих выражений для построения многосолитонных решений будут рассмотрены в гл. 5.

3.8. КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЗАХАРОВА — ШАБАТА В ВИДЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ k

Если коэффициент отражения является рациональной функцией k , то систему уравнений Марченко (3.6.10) и (3.6.11) можно решить, используя метод, разработанный в разд. 3.4 для уравнения Шрёдингера. Единственное различие состоит в том, что теперь соотношение между коэффициентами прохождения и отражения имеет вид $|T|^2 = 1 + |R|^2$, где в качестве R может быть взято либо R_L , либо R_R . В случае когда коэффициент прохождения не имеет полюсов в верхней полуплоскости, мы теперь получим

$$\frac{d \ln T(k)}{dk} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{d|R(\zeta)|/d\zeta}{(\zeta - k)[1 + |R(\zeta)|^2]}. \quad (3.8.1)$$

Если у $T(k)$ есть полюсы в верхней полуплоскости, мы снова вводим функцию $\tilde{T}(k)$ и следуем методу, развитому в разд. 2.11. Если есть полюсы на действительной оси, то соотношение (3.8.1) следует понимать в смысле главного значения интеграла, как в разд. 2.8.

В качестве простого примера рассмотрим потенциал, дающий коэффициент отражения $R_L(k) = i\beta/k$, где β — действительная положительная постоянная. В этом случае интеграл (3.8.1) понимается в смысле главного значения,

$$\frac{d \ln T(k)}{dk} = -2\beta^2 P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{1}{\zeta(\zeta - k)(\zeta^2 + \beta^2)}. \quad (3.8.2)$$

а это тот же интеграл, который был получен в (3.4.3). Следовательно,

$$T(k) = \frac{k + i\beta}{k}. \quad (3.8.3)$$

Сначала определим потенциал для $x < 0$. Так как теперь имеется полюс на действительной оси в начале координат, определим $\Omega_L(z) = r_L(z) + \frac{1}{2} \gamma_0(0) c_{22}(0)$. Беря при вычислении интеграла главное значение, находим, что $r_L(z) = \text{sign}(z)\beta/2$. Кроме

того, из (2.8.27) получим $\gamma_0 = -i \operatorname{Res} [T(0)] = \beta$ и $c_{22}(0) = R_L(0)/T(0) = 1$. Таким образом,

$$\Omega_L(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \beta, & z > 0. \end{cases} \quad (3.8.4)$$

Так как $\Omega_L(z)$ обращается в нуль при $z < 0$, из уравнения Марченко (3.6.10а) следует, что $A_2(x, y) = 0$ при $x < 0$; значит, и потенциал равен нулю при $x < 0$.

Для $x > 0$ опять же легче работать с интегральным уравнением, содержащим $r_R(z)$. Из (2.11.26) имеем

$$R_R(k) = -\frac{i\beta}{k} \left(\frac{k+i\beta}{k-i\beta} \right). \quad (3.8.5)$$

Преобразование Фурье имеет вид

$$r_R(z) = \begin{cases} \beta \left(-\frac{1}{2} + 2e^{-\beta z} \right), & z > 0, \\ -\frac{1}{2}\beta, & z < 0. \end{cases} \quad (3.8.6)$$

Итак, поскольку $\frac{1}{2} \gamma_0(0) c_{11}(0) = \frac{1}{2} \gamma_0(0) R_r(0)/T(0) = \frac{1}{2} \beta$, получим $\Omega_r(z) = 2\beta e^{-\beta z}$ при $z > 0$. Полагая $B_i(x, y) = b_i(x) e^{-\beta y}$, $i = 1, 2$, находим, что система уравнений Марченко (3.6.11) сводится к алгебраическим уравнениям

$$\begin{aligned} b_1 e^{-2\beta x} + b_2 &= 0, \\ b_1 - b_2 e^{-2\beta x} &= 2\beta e^{-\beta x}, \end{aligned} \quad (3.8.7)$$

которые имеют решение $b_1 = 2\beta e^{-\beta x} / (1 + e^{-4\beta x})$, $b_2 = -2\beta e^{-3\beta x} (1 + e^{-4\beta x})$. Из (3.6.19) получаем, что $u(x) = -2B(x, x) = 2\beta \operatorname{sech} 2\beta x$, и окончательный результат имеет вид

$$u(x) = -2\beta \theta(x) \operatorname{sech} 2\beta x. \quad (3.8.8)$$

Если β заменить на $\mu/2$, это выражение становится «обрезанным» потенциалом, рассмотренным в разд. 2.11.

3.9. СИСТЕМА ЗАХАРОВА — ШАБАТА С КОМПЛЕКСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В некоторых последующих приложениях метода Захарова — Шабата встретятся комплексные потенциалы. Линейные уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} n_{1x} + i k n_1 &= q(x) n_2, \\ n_{2x} - i k n_2 &= -q^*(x) n_1, \end{aligned} \quad (3.9.1)$$

где $q^*(x)$ — комплексно-сопряженная комплексного потенциала $q(x)$. Следуя использованному в разд. 2.11 методу, можно рассма-

тривать эти уравнения как преобразования Фурье от уравнений

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} - c \frac{\partial n_+}{\partial x} = -cq(x)n_+, \quad (3.9.2a)$$

$$\frac{\partial n_-}{\partial t} + c \frac{\partial n_-}{\partial x} = -cq^*(x)n_+. \quad (3.9.2b)$$

Можно снова использовать фундаментальные решения φ и ψ в том же виде, что и в разд. 2.11. Подставляя (2.11.4) в уравнения (3.9.2), получим

$$q^*(x) = -2A_2(x, x), \quad (3.9.3)$$

$$|q(x)|^2 = -2 \frac{d}{dx} A_1(x, x). \quad (3.9.4)$$

Аналогично из фундаментальных решений (2.11.5) находим, что

$$q(x) = 2B_1(x, x), \quad (3.9.5)$$

$$|q(x)|^2 = 2 \frac{d}{dx} B_2(x, x). \quad (3.9.6)$$

В дополнение к двум фундаментальным решениям

$$\varphi(x, k) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, k) \\ \varphi_2(x, k) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \psi(x, k) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, k) \\ \psi_2(x, k) \end{pmatrix}$$

можно получить два других решения, рассматривая комплексно-сопряженные линейных уравнений (3.9.1). Если k комплексно, то находим, что другое решение системы (3.9.1) имеет вид

$$\bar{\varphi}(x, k) = \begin{pmatrix} \varphi_2^*(x, k^*) \\ -\varphi_1^*(x, k^*) \end{pmatrix}; \quad (3.9.7)$$

аналогично для $\bar{\psi}$. Рассматривая различные вронскианы, как в разд. 2.11, можно показать, что эти решения независимы. Для действительных k можно снова ввести линейные комбинации, определяющие различные задачи рассеяния, и записать

$$\varphi = c_{11}\psi + c_{12}\bar{\psi}, \quad (3.9.8a)$$

$$\psi = c_{21}\bar{\varphi} + c_{22}\varphi, \quad (3.9.8b)$$

$$\bar{\varphi} = c_{11}^*\bar{\psi} - c_{12}^*\psi, \quad (3.9.9a)$$

$$\psi = -c_{21}^*\varphi + c_{22}^*\bar{\varphi}. \quad (3.9.9b)$$

Эти выражения аналогичны соотношениям (2.11.19) и (2.11.20). Различные коэффициенты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} c_{11}(k) &= w(\bar{\psi}, \varphi) = c_{22}^*(k), \\ c_{12}(k) &= w(\varphi, \psi) = -c_{21}(k), \\ c_{22}(k) &= w(\bar{\varphi}, \psi) = c_{11}^*(k), \\ c_{12}^*(k) &= w(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) = -c_{21}^*(k), \end{aligned} \quad (3.9.10)$$

где определитель Вронского является линейной комбинацией решений и дается формулой (2.11.18). Совместность (3.9.8) и (3.9.9) требует выполнения соотношений

$$\begin{aligned} 1 &= c_{11}(k) c_{22}(k) - c_{12}(k) c_{21}^*(k), \\ 0 &= c_{11}(k) c_{21}(k) + c_{12}(k) c_{22}^*(k), \\ 0 &= c_{11}^*(k) c_{21}(k) + c_{12}(k) c_{22}(k). \end{aligned} \quad (3.9.11)$$

Коэффициенты отражения и прохождения те же, что были получены в разд. 2.11 для действительного потенциала, и связь между ними также дается формулами (2.11.26) и (2.11.28).

Поскольку интегралы в определении φ и ψ по формулам (2.11.15) и (2.11.17) по-прежнему сходятся при комплексном k , если $\text{Im } k > 0$, можно в верхней полуплоскости плоскости k использовать определение $c_{12}(k)$, приведенное в (3.9.10). Как и в рассмотренном в разд. 2.11 случае действительного q , локализованные решения получаются из нулей c_{12} в верхней полуплоскости. Однако теперь нет ограничения, состоявшего в том, что нули должны либо лежать на мнимой оси, либо представлять собой пары, симметрично расположенные относительно мнимой оси. Сейчас мы рассмотрим пример с единственным нулем в произвольной точке верхней полуплоскости.

Чтобы получить систему уравнений Марченко, возьмем преобразование Фурье от уравнений (3.9.8). Метод идентичен тому, который приводит к уравнениям (3.6.10) и (3.6.11) в случае действительного потенциала, за исключением того, что нужно рассматривать преобразование Фурье от функций $\varphi^*(x, k)$ и $\psi^*(x, k)$. Чтобы получить эти выражения, используем (2.11.3) и (2.11.4) и запишем

$$\varphi_2^*(x, k) = c \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-ikct'} A_2^*(x, -ct') \theta\left(t' + \frac{x}{c}\right). \quad (3.9.12)$$

Следовательно, преобразование Фурье имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \varphi_2^*(x, k) = c A_2^*(x, ct) \theta\left(-t + \frac{x}{c}\right). \quad (3.9.13)$$

Окончательный результат преобразования Фурье от уравнения (3.9.8a) имеет вид

$$\begin{aligned} B_2^*(x, y) + \int_x^{\infty} dx' B_1(x, x') \Omega_R(x' + y) &= 0, \\ -B_1^*(x, y) + \Omega_R(x + y) + \int_x^{\infty} dx' B_2(x, x') \Omega_R(x' + y) &= 0, \quad x < y, \end{aligned} \quad (3.9.14)$$

где, как в (3.6.12),

$$\Omega_R(z) = r_R(z) + \sum m_{Rl}(k_l) e^{ik_l z}. \quad (3.9.15)$$

Из (3.9.8b) получим

$$A_1^*(x, y) + \int_{-\infty}^x dx' A_2(x, x') \Omega_L(x' + y) = 0, \quad (3.9.16)$$

$$-A_2^*(x, y) + \Omega_L(x + y) + \int_{-\infty}^x dx' A_1(x, x') \Omega_L(x' + y) = 0, \quad x < y,$$

где, как в (3.6.9),

$$\Omega_L(z) = r_L(z) + \sum m_{Ll}(k_l) e^{-ik_l z}. \quad (3.9.17)$$

Чтобы получить чисто безотражательные потенциалы, мы будем следовать методу, использованному в разд. 3.7. Рассмотрим интегральные уравнения, связывающие B_1 и B_2 . Сначала определим N -компонентные векторы

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= (e^{ik_1 z}, \dots, e^{ik_N z}), \\ \Psi(z) &= (m_1 e^{ik_1 z}, \dots, m_N e^{ik_N z}) \end{aligned} \quad (3.9.18)$$

и затем набор $B_i = \mathcal{B}_i(x) \Phi^*(y)$ для $i = 1, 2$. Затем найдем $\mathcal{B}_1^* = \Psi \cdot (I + M^* \cdot M)^{-1}$ и $\mathcal{B}_2 = -\mathcal{B}_1 \cdot M$, где

$$M(x) = \int_x^\infty dx' \Phi^*(x') \Psi(x'). \quad (3.9.19)$$

Окончательные выражения получаются из (3.9.5) и (3.9.6). Они имеют вид

$$q(x) = 2\Phi^* \cdot \Psi^* \cdot (I + M \cdot M^*)^{-1}, \quad (3.9.20)$$

$$|q(x)|^2 = \frac{d^2}{dx^2} \{\ln [\det (I + M \cdot M^*)]\}. \quad (3.9.21)$$

Для $N = 1$ и $k_1 = \alpha + i\beta$ находим, что $M(x) = (m_{R1}/2\beta) e^{-2\beta x}$. Полагая $m_{R1}/2\beta = e^{\delta + i\theta}$, получим

$$q(x) = 2\beta \operatorname{sech}(2\beta x - \delta) e^{-i(2\alpha x + \theta)}. \quad (3.9.22)$$

При $\alpha = \theta = 0$ полюс лежит на мнимой оси, $q(x)$ тогда действительно и решение сводится к (2.11.45). Те же результаты могли бы быть, конечно, получены при решении (3.9.16) относительно A_1 и A_2 .

Упражнение 5

Если предположить, что $p_1 = e^{ikx} q(x)$ и $p_2 = e^{ikx} [2ik + p(x)]$, где p и q — комплексные величины, то непосредственной подстановкой в (3.9.1) можно получить потенциал и фундаментальное решение (3.9.1), отвечающее одному полюсу.

При соответствующей нормировке это решение оказывается фундаментальным решением ψ . Покажите, что результаты имеют вид $u(x) = 2\beta \operatorname{sech} \zeta \exp[i(-2\alpha x + \theta)]$ и

$$\psi = \frac{e^{ikx}}{k - \alpha + i\beta} \begin{pmatrix} -i\beta e^{i(-2\alpha x + \theta)} \operatorname{sech} \zeta \\ k - \alpha + i\beta \operatorname{th} \zeta \end{pmatrix},$$

где $\zeta = 2\beta x + \zeta_0$, а α , β , ζ_0 и θ являются постоянными интегрирования. Аналогичным образом получим

$$\varphi = \frac{e^{-ikx}}{k - \alpha + i\beta} \begin{pmatrix} k - \alpha - i\beta \operatorname{th} \zeta \\ -i\beta e^{i(2\alpha x - \theta)} \operatorname{sech} \zeta \end{pmatrix}.$$

Эти результаты окажутся полезными в гл. 9.

Асимптотическое решение

В разд. 2.11 было рассмотрено асимптотическое решение системы двух уравнений с действительным потенциалом. Использованный там метод легко распространить на случай комплексного потенциала (Захаров, Шабат [119]). Если из (3.9.1) получить уравнение второго порядка для n_1 , то

$$n_{1xx} + (k^2 + |q|^2)n_1 - \frac{(n_{1x} - ikn_1)}{q} = 0. \quad (3.9.23)$$

Отождествляя n_1 с фундаментальным решением φ_1 , приведенным в (2.11.16), и записывая

$$n_1 = e^{-ikx + h(x, k)}, \quad (3.9.24)$$

где $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x, k) = 0$, так что n_1 в этом пределе сведется к φ_1 , мы находим из (3.9.23), что функция $h(x, k)$ удовлетворяет уравнению

$$2ikh_x = |q|^2 + (h_x)^2 + q \left(\frac{h_x}{q_x} \right)_x. \quad (3.9.25)$$

Подставляя в (3.9.25) разложение

$$h_x = \sum_1^{\infty} \frac{g_n(x)}{(2ik)^n} \quad (3.9.26)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k , имеем

$$g_1 = |q|^2, \\ g_{n+1} = q \left(\frac{g_n}{q} \right)_x + \sum_{k+l=n} g_k g_l, \quad n \geq 1. \quad (3.9.27)$$

Первые несколько коэффициентов после g_1 имеют вид

$$\begin{aligned}
 g_2 &= qq_x^*, \\
 g_3 &= qq_{xx}^* + |q|^4 = |q|^4 - |q_x|^2 + (qq_x^*)_x, \\
 g_4 &= qq_{xxx}^* + q^* |q|^2 q_x + 4q |q|^2 q_x^* = \\
 &= qq_{xxx}^* + 3q |q|^2 q_x^* - \frac{1}{2} (|q|^4)_x, \\
 g_5 &= q \left(\frac{g_4}{q} \right)_x + 2g_1 g_3 + g_2^2 = \\
 &= |q_{xx}|^2 + 2|q|^6 - 6|q|^2 |q_x|^2 - [(|q|^2)_x]^2 + P_x,
 \end{aligned} \tag{3.9.28}$$

где $P = qq_{xxx}^* - q_x q_{xx}^* + q[(q^*)^2 q_x + 6|q|^2 q_x^*]$.

Из соотношения (3.9.8а) находим, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_1 e^{ikhx} = c_{12}(k)$ при $\operatorname{Im} k > 0$. Поэтому $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x, k) = \ln c_{12}(k)$. Снова пользуясь тем, что коэффициент прохождения стремится к единице при $k \rightarrow \infty$, введем асимптотическое разложение

$$\ln c_{12}(k) = \sum \frac{c_n}{k^n}. \tag{3.9.29}$$

Проводя тот же анализ, что и в разд. 2.8, получим постоянные

$$(2i)^n c_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx g_n(x). \tag{3.9.30}$$

Если $q(x)$ локализовано, то при использовании (3.9.30) можно, конечно, отбросить в (3.9.28) полные производные.

Глава 4

УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

В гл. 2 и 3 была описана техника математических вычислений, используемая для решения нелинейных эволюционных уравнений методами обратной задачи рассеяния. В данной главе мы используем эту технику для решения уравнения Кортевега — де Фриза. Это простейший пример такой процедуры, поскольку здесь нужны только методы обратной задачи рассеяния, используемые для уравнения Шрёдингера. Эволюционные уравнения, решаемые методами обратной задачи, связанными с менее известными системами двух уравнений, будут рассматриваться в гл. 5. В последние годы появилось много обзоров, посвященных свойствам уравнения Кортевега — де Фриза; см., например, [63].

4.1. СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ

Прежде чем переходить к общему решению уравнения Кортевега — де Фриза, получим сначала самое общее стационарное решение этого уравнения. В гл. 1 мы рассмотрели уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.1)$$

и нашли его стационарное решение в виде импульса, т. е. решение $u = \frac{1}{2} c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} (x - ct) \right]$. Теперь мы получим более общее стационарное решение. Оно имеет колебательный характер и в пределе, когда период осцилляций стремится к бесконечности, может быть сведено к ранее рассмотренному решению в форме импульса. Удобно рассматривать колебательное решение, которое в конце концов сводится к импульсу положительной амплитуды. Мы получим это и другие алгебраические удобства, если положим в (4.1.1) $u = -2f$. Записывая стационарное решение в виде $f(x - ct)$, имеем $f_t = -cf_x$, и уравнение Кортевега — де Фриза сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, для которого можно сразу получить первый интеграл. Затем, умножая первый интеграл на f_x , можно проинтегрировать второй раз. Находим, что

$$(f_x)^2 = -4f^3 + cf^2 + af + b, \quad (4.1.2)$$

где a и b — постоянные интегрирования. Укажем факторизованную форму кубического выражения

$$(f_x)^2 = -4(f - \alpha_1)(f - \alpha_2)(f - \alpha_3) = 4\Phi(f). \quad (4.1.3)$$

График зависимости $\varphi(f)$ от f с тремя действительными корнями ($\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$) будет иметь вид, показанный на рис. 4.1. Чтобы убедиться, что все корни действительны, заметим, что при действительном f_x функция $\varphi(f)$ должна быть положительной. Таким образом, для колебаний конечной амплитуды f должна быть ограничена областью $\alpha_2 \leq f \leq \alpha_3$, т. е. должно быть по крайней мере два

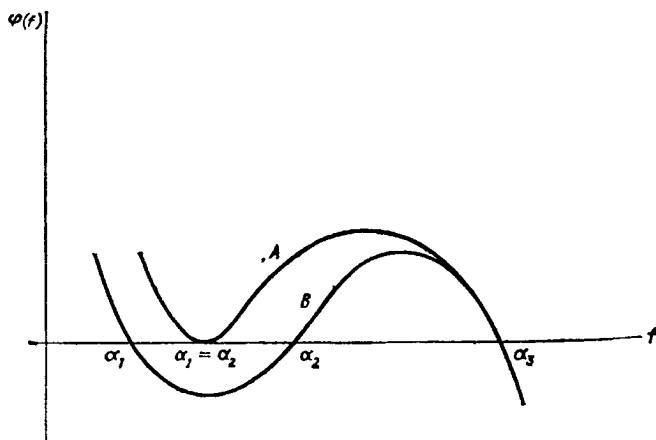


Рис. 4.1. Поведение $\varphi(f)$ для солитонного решения (A) и колебательного решения (B).

действительных корня (и, следовательно, три, так как коэффициенты уравнения (4.1.2) действительны). Записывая единственный отрицательный множитель в (4.1.3) в виде $f - \alpha_3 = -g$, находим, что уравнение для g имеет вид

$$(g_x)^2 = 4g(\alpha_3 - \alpha_2 - g)(\alpha_3 - \alpha_1 - g). \quad (4.1.4)$$

Полагая $g = (\alpha_3 - \alpha_2)v^2$, получим

$$(v_x)^2 = (\alpha_3 - \alpha_1)(1 - v^2)(1 - k^2v^2), \quad (4.1.5)$$

где $k^2 = (\alpha_3 - \alpha_2)/(\alpha_3 - \alpha_1)$.

Уравнение

$$(\omega_x)^2 = (1 - \omega^2)(1 - k^2\omega^2) \quad (4.1.6)$$

является уравнением, определяющим эллиптическую функцию Якоби $\operatorname{sn}(z, k)$ [31]. Постоянная k называется модулем эллиптической функции. Функция $\operatorname{sn}(z, k)$ имеет две предельные формы $\operatorname{sn}(z, 0) = \sin z$ и $\operatorname{sn}(z, 1) = \operatorname{th} z$. Поэтому решение уравнения (4.1.5) имеет вид $v(x) = \operatorname{sn}(\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}x, k)$ и, таким образом,

$$f(x - ct) = \alpha_3 - (\alpha_3 - \alpha_2) \operatorname{sn}^2[\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}(x - ct), k]. \quad (4.1.7)$$

Так как во всяком кубическом уравнении коэффициент при квадратичном члене равен сумме корней, взятой с обратным знаком, сравнение (4.1.2) и (4.1.3) показывает, что $c = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)/4$. Функция $\text{sn}^2(z, k)$ колеблется между нулем и единицей с периодом, равным $2K$, где $K = \int_0^1 dx [(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{-1/2}$. Следовательно, $f(x-ct)$ колеблется между α_2 и α_3 с периодом $2K/(\alpha_3 - \alpha_1)^{1/2}$. При α_2 , стремящемся к α_1 , модуль k стремится к единице, а $K \rightarrow \infty$. Тогда мы получим выражение

$$f(x-ct) = \alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_2) \text{sech}^2[\sqrt{\alpha_3 - \alpha_2}(x-ct)], \quad (4.1.8)$$

описывающее импульс с полушириной $(\alpha_3 - \alpha_2)^{-1/2}$, амплитуда которого относительно уровня отсчета α_2 равна $\alpha_3 - \alpha_2$. Если $\alpha_2 = 0$ (так что $\alpha_1 = c/4$), мы получаем

$$u(x-ct) = -2f(x-ct) = -\frac{1}{2} \text{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right], \quad (4.1.9)$$

а это есть ранее полученный стационарный импульс.

Так как в приложениях уравнение Кортевега — де Фриза встречается с различными коэффициентами, заметим, что уравнение вида $u_t + c_1 u u_x + c_2 u_{xxx} = 0$ имеет решение в виде единичного солитона $u = u_0 \text{sech}^2[(x-Vt)/L]$, где $L = 2\sqrt{3c_2/u_0c_1}$, а $V = u_0c_1/3$.

С другой стороны, если α_3 стремится к α_2 и k становится малым, мы получаем стационарное решение в виде колебаний малой амплитуды. В этом пределе

$$f(x-ct) = \alpha_3 - (\alpha_3 - \alpha_2) \sin^2[\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}(x-ct)], \quad (4.1.10)$$

где $c = 4(2\alpha_1 + \alpha_3)$. В дальнейшем наше внимание будет почти целиком направлено на решения в виде импульсов, а стационарные осцилляторные решения рассматриваться не будут.

4.2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Если выбрать $c = 4$, то стационарное решение в виде импульса, рассмотренное в предыдущем разделе, принимает вид

$$u(x, t) = -2 \text{sech}^2(x-4t). \quad (4.2.1)$$

Мы можем интерпретировать этот результат, считая, что это выражение описывает распространение начального возмущения $u(x, 0) = -2 \text{sech}^2 x$. Кроме того, в разд. 1.3 было показано, что начальный профиль $u(x, 0) = -6 \text{sech}^2 x$ превращается в два солитона, согласно (1.3.25). Как мы увидим в разд. 4.4, если n — положительное целое число, то начальные профили $u(x, 0) = -n(n+1) \text{sech}^2 x$, соответствующие безотражательным потенциалам, полученным в (3.3.22), превратятся в чисто многосолитон-

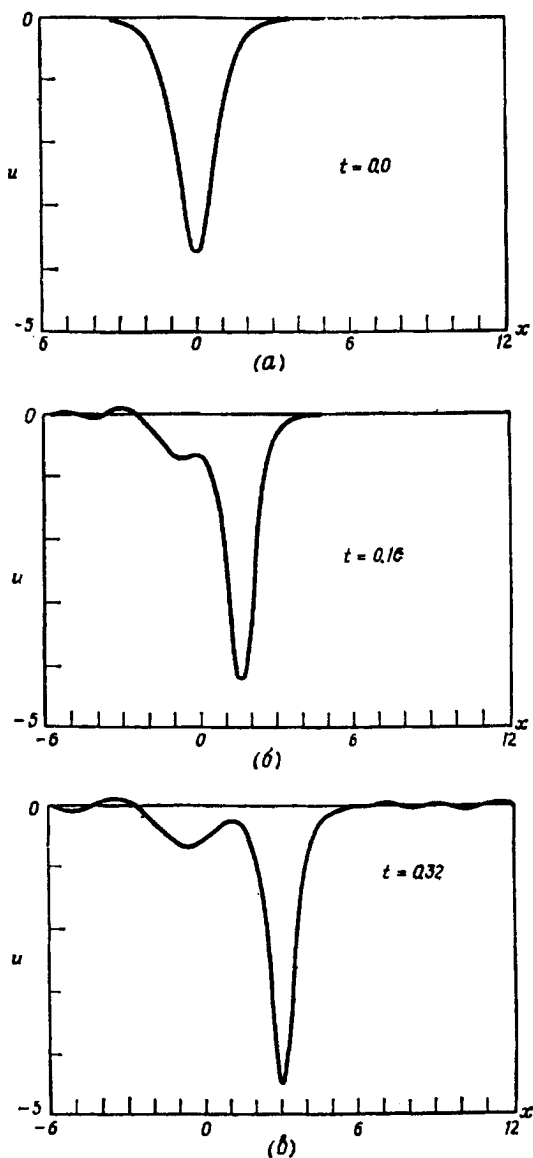


Рис. 4.2. Несолитонный вклад в решение уравнения Кортевега — де Фриза $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ для начального профиля $u(x, 0) = 15/4 \operatorname{sech}^2 x$. Направление распространения — слева направо. Появление колебаний впереди импульса связано с наложением периодических граничных условий. Решение получено У. Фергюсоном мл.

ные решения. Два только что упомянутых случая соответствуют $n = 1$ и $n = 2$.

Критерий появления многосолитонных решений может быть пересчитан различным образом посредством изменения масштаба исходного уравнения. Например, преобразования координат $\xi = Lx$, $\tau = Tt$ и $v = -6(L/T)u$ дают уравнение $v_\tau + uv_\xi + \beta v_{\xi\xi\xi} = 0$,

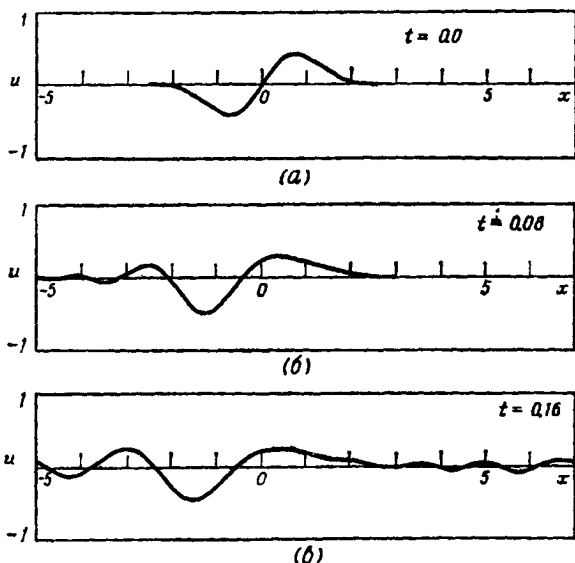


Рис. 4.3. Несолитонный вклад в решение уравнения Кортевега — де Фриза $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ для начального профиля $u(x, 0) = xe^{-x^2}$. Направление распространения — слева направо. Появление колебаний впереди импульса связано с наложением периодических граничных условий. Решение получено У. Фергюсоном мл.

где $\beta = L^3/t$. Тогда начальное значение, соответствующее случаю n солитонов, имеет вид $u = 6n(n+1)(\beta/L^2)\text{sech}^2(\xi/L)$. Если положить эту амплитуду равной u_0 и ввести параметр $\sigma^2 = L^2u_0/\beta$, видно, что односолитонное решение соответствует случаю $\sigma = \sqrt{12}$. Для больших значений σ появится более одного солитона. Обсуждение уравнений такого вида содержится в статье В. И. Карпмана и В. П. Соколова [68].

Если $u(x, 0)$ не является одним из этих специальных профилей, то последующая эволюция импульса находится из численного решения, включающего, кроме солитонов, осцилляторный волновой шлейф. На рис. 4.2 показан пример эволюции профиля начального импульса $u(x, 0) = (15/4)\text{sech}^2(x)$, соответствующего значению $n = 3/2$ в амплитуде волны $n(n+1)$. Видно, что осцилляторный

шлейф весьма мал. Для больших нецелых значений n отношение энергии шлейфа к энергии солитонов еще меньше. В последующих разделах этой главы будут рассматриваться как точные, так и приближенные методы определения амплитуд различных солитонов при наличии волнового шлейфа. Для значений n , меньших единицы, солитон по-прежнему возникает, но большая часть энергии связана теперь с волновым шлейфом. Другим типом начального профиля, который, как можно ожидать, усилит несолитонную часть решения, является профиль, в котором $u(x, 0)$ содержит разрывы, или знакопеременный начальный профиль; пример последнего показан на рис. 4.3. Можно определять волновой шлейф из решения линейного интегрального уравнения (уравнения Марченко), но количественный анализ этого уравнения, хотя оно и линейно, все равно весьма трудоемок. К счастью, при гладком изменении начального профиля и появлении более чем одного солитона, осцилляторная часть решения относительно мала.

4.3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ И УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

В гл. 1 мы видели, что уравнение Кортевега — де Фриза вида

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.3.1)$$

может рассматриваться как условие, которое нужно наложить на потенциал $u(x, t)$ в уравнении

$$y_{xx}(x, t) + [k^2 - u(x, t)]y(x, t) = 0, \quad (4.3.2)$$

чтобы спектральный параметр k^2 оставался постоянным при изменении параметра t . Кроме того, было показано, что зависимость решения $u(x, t)$ от времени определяется решением

$$y_t = -4y_{xxx} + 6uy_x + 3u_xy. \quad (4.3.3)$$

Сейчас мы рассмотрим, как можно использовать эти линейные уравнения для получения уравнения Кортевега — де Фриза.

Как было показано в гл. 2, два фундаментальных решения уравнения Шрёдингера (4.3.2) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} f_1(x, k; t) &= e^{ikx} + \int_x^\infty dx' A_R(x, x'; t) e^{ikx'}, \\ f_2(x, k; t) &= e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x dx' A_L(x, x'; t) e^{-ikx'}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Параметрическая зависимость от времени, возникающая из-за потенциала $u(x, t)$, была указана явно. Как показывают соотношения (2.8.6) и (2.8.7), функции f_1 и f_2 можно записать как линейные

комбинации друг друга. В частности, функции f_1 и f_2 связаны соотношением

$$f_1(x, k; t) = c_{21} f_2(x, -k; t) + c_{22} f_2(x, k; t). \quad (4.3.5)$$

Кроме того, согласно (3.1.4), потенциал в уравнении Шрёдингера и $A_L(x, x'; t)$ связаны соотношением

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} A_L(x, x; t). \quad (4.3.6)$$

Функция $A_L(x, y; t)$ удовлетворяет ранее приведенному интегральному уравнению (3.2.8), а именно

$$\Omega_L(x+y; t) + A_L(x, y; t) + \int_{-\infty}^x dx' \Omega_L(x' + y; t) A_L(x, x'; t) = 0, \quad x > y, \quad (4.3.7)$$

где

$$\Omega_L(z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{c_{22}(k, t)}{c_{21}(k, t)} e^{-ikz} + \sum_1^N m_{L1}(ix_1, t) e^{x_1 t^*}. \quad (4.3.8)$$

Мы имеем также $m_{L1}(ix_1, t) = \dot{\gamma}_1(t) c_{22}(ix_1, t) = -ic_{22}(ix_1, t) / \dot{c}_{21}(ix_1, t)$, где точка означает дифференцирование по k , а не по t . Согласно (4.3.6), изменение во времени u известно, как только определена функция $A_L(x, x; t)$. Функции $A_L(x, y; t)$ и $\Omega_L(x+y; t)$ связаны интегральным уравнением (4.3.7). Но изменение во времени функции $\Omega_L(x+y; t)$ оказывается неожиданно простым! Оно содержится только в коэффициентах рассеяния c_{21} , c_{22} и m_L , связанных с коэффициентами отражения и прохождения. Если мы найдем изменение во времени этих величин, то изменение во времени $u(x, t)$ и, таким образом, решение уравнения Кортевега — де Фриза, будет определено по крайней мере в принципе. Сейчас мы покажем, что зависимость коэффициентов рассеяния от времени чрезвычайно проста и дается линейными уравнениями (4.3.2) и (4.3.3). Нам только нужно рассмотреть эти уравнения в области тех значений x , для которых $u(x, t) \rightarrow 0$. В этой области уравнение (4.3.3) сводится к

$$y_t = -4y_{xxx}. \quad (4.3.9)$$

Конечно, это дает зависимость от времени только для отраженных и прошедших волн, но могущество метода обратной задачи рассеяния в том и состоит, что информация о коэффициентах отражения и прохождения (и об их аналитических продолжениях в верхнюю полуплоскость) достаточна для определения самого потенциала рассеяния.

Рассмотрим решение $y(x, k, t)$, пропорциональное $f_1(x, k, t)$. Так как коэффициент пропорциональности может зависеть от времени, мы запишем $y(x, k, t) = h(k, t) f_1(x, k; t)$. Сначала мы пока-

жем, что можно определить функцию $h(k, t)$, рассматривая решение при $x \rightarrow +\infty$. В этом пределе из (4.3.9) следует, что $h(k, t)$ удовлетворяет уравнению $h_t = 4ik^3h$, так что $h(k, t) = h(k, 0)\exp(4ik^3t)$. Теперь временная зависимость c_{21} и c_{22} может быть получена при рассмотрении $y(x, k, t)$, когда x стремится к $-\infty$, где, используя (4.3.5), можно записать

$$y(x, k, t) \sim h(k, 0)e^{4ik^3t}(c_{21}e^{ikx} + c_{22}e^{-ikx}). \quad (4.3.10)$$

Снова подставляя в уравнение (4.3.9) и приравнявая коэффициенты при $\exp(\pm ikx)$, находим, что $c_{21t} = 0$ и $c_{22t} = -8ik^3c_{22}$. Таким образом, мы получаем

$$c_{21}(k, t) = c_{21}(k, 0), \quad (4.3.11a)$$

$$c_{22}(k, t) = c_{22}(k, 0)e^{-8ik^3t}. \quad (4.3.11b)$$

Нормировочная постоянная m_{Li} , которая находится из (2.8.30b), имеет вид

$$m_{Li}(k_i, t) = -i \frac{c_{22}(k_i, t)}{c_{21}(k_i, t)} = m_{Li}(k_i, 0)e^{-8ik_i^3t}. \quad (4.3.12)$$

Как было показано в разд. 2.8, точки k_i лежат в верхней полуплоскости на мнимой оси, $k_i = ik_i$.

Можно использовать соотношения между c_{il} (2.8.12) и (2.8.13), чтобы показать, что

$$c_{11}(k, t) = c_{11}(k, 0)e^{8ik^3t}, \quad (4.3.13a)$$

$$c_{12}(k, t) = c_{12}(k, 0), \quad (4.3.13b)$$

$$m_{Ri}(k_i, t) = m_{Ri}(k_i, 0)e^{8ik_i^3t}. \quad (4.3.14)$$

Зависимость коэффициента отражения $R_L = c_{22}/c_{21}$ от времени имеет вид

$$R_L(k, t) = R_L(k, 0)e^{-8ik^3t}. \quad (4.3.15)$$

Таким образом, зависимость функции Ω_L от времени определена полностью, и мы имеем

$$\Omega_L(z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} R_L(k, 0)e^{-i(kz+8k^3t)} + \sum_1^N m_{Li}(0)e^{-8k_i^3t + k_i z}. \quad (4.3.16)$$

Согласно этому результату, как только получены коэффициент отражения $R_L(k, 0)$, нормировочные постоянные связанных состояний $m_{Li}(0)$ и соответствующие исходному потенциалу $u(x, 0)$ полюса k_i , то определена и последующая временная эволюция функции $\Omega_L(z; t)$. Затем по уравнению Марченко (4.3.7) определяется временная зависимость $A_L(x, y, t)$. Тогда решение уравнения Кор-

тевега — де Фриза следует из соотношения

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} A_L(x, x; t).$$

К сожалению, член с временной зависимостью фазы в интеграле от коэффициента отражения $R_L(k, t)$ приводит к тому, что этот интеграл трудно вычислить аналитически. Однако, если ограничиться рассмотрением безотражательных потенциалов, этого интегрирования можно избежать, так как тогда $R_L(k, 0) = 0$. Уравнение Марченко (4.3.7) в этом случае легко решается, и решение уравнения Кортевега — де Фриза может быть получено в замкнутом виде. Полученные решения являются чисто многосолитонными.

Аналогичное вычисление $\Omega_R(z; t)$ дает

$$\Omega_R(z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} R_R(k, 0) e^{i(kz + 8k^3t)} + \sum_1^N m_{Rl}(0) e^{8\kappa_l^3 t - i\kappa_l z}. \quad (4.3.17)$$

Используя это выражение для $\Omega_R(z, t)$ в уравнении Марченко (3.2.6), можно снова получить решение уравнения Кортевега — де Фриза. Теперь, если интегральное уравнение (3.2.6) решено относительно A_R , это решение следует из соотношения

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} A_R(x, x; t).$$

4.4. МНОГОСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

В разд. 3.3 было получено решение уравнения Марченко для безотражательных потенциалов. При применении теории обратной задачи рассеяния к решению уравнения Кортевега — де Фриза, обсуждаемому в этой главе, зависимость от времени входит только параметрически, поэтому мы снова ожидаем, что при начальном условии $u(x, 0)$ для уравнения Кортевега — де Фриза, соответствующем безотражательному потенциалу, мы можем получить точные решения. Полученные решения являются многосолитонными. Поэтому мы имеем

$$\Omega_L(z; t) = \sum_1^N m_{Ll}(t) e^{\kappa_l z}, \quad (4.4.1)$$

где, согласно (4.3.12), $m_{Ll}(t) = m_{Ll}(0) \exp(-8\kappa_l^3 t)$. Из (3.3.17) решение уравнения Марченко имеет вид

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} A_L(x, x; t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln [\det V(x, t)], \quad (4.4.2)$$

где $V(x, t)$ является $N \times N$ -матрицей с элементами

$$V_{lj}(x, t) = \delta_{lj} + \frac{m_{Ll}(t) e^{(\kappa_l + \kappa_j)x}}{\kappa_l + \kappa_j}. \quad (4.4.3)$$

Пример: двухсолитонное решение ($N = 2$)

Рассмотрим случай двух полюсов в верхней полуплоскости в точках $i\kappa_1$ и $i\kappa_2$ ($\kappa_2 > \kappa_1$). Тогда

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 + \frac{m_1(t)}{2\kappa_1} e^{2\kappa_1 x} & \frac{m_2(t)}{\kappa_1 + \kappa_2} e^{(\kappa_1 + \kappa_2)x} \\ \frac{m_1(t)}{\kappa_1 + \kappa_2} e^{(\kappa_1 + \kappa_2)x} & 1 + \frac{m_2(t)}{2\kappa_2} e^{2\kappa_2 x} \end{vmatrix}. \quad (4.4.4)$$

Заметим, что если i -й столбец разделить на $\sqrt{m_i(t)/2\kappa_i} e^{\kappa_i x}$, а i -ю строку умножить теперь на тот же множитель, то определитель можно записать в симметричной форме. Такая симметризация может быть проделана для произвольного N [114].

Сейчас мы продифференцируем $\ln(\det V)$ и умножим числитель и знаменатель получившегося выражения на

$$2 \left(\frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \right) \left(\frac{\kappa_1 \kappa_2}{m_1 m_2} \right)^{1/2} \exp[-(\kappa_1 + \kappa_2)x].$$

Положим $\exp(\lambda) = (m_2 \kappa_1 / m_1 \kappa_2)^{1/2}$ и

$$\exp(\mu) = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{\kappa_1 \kappa_2} \right)^{1/2} \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1}.$$

Находим, что

$$\frac{\partial}{\partial x} (\ln \det V) = \frac{\frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} (\kappa_1 e^{-\varphi} + \kappa_2 e^{\varphi}) + (\kappa_1 + \kappa_2) e^{\psi}}{\operatorname{ch} \varphi + \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \operatorname{ch} \psi}, \quad (4.4.5)$$

где $\varphi = (\kappa_2 - \kappa_1)x + \lambda$ и $\psi = (\kappa_2 + \kappa_1)x + \mu$. Более простая форма этого результата имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (\ln \det V) = \kappa_1 + \kappa_2 + (\kappa_2^2 - \kappa_1^2) \frac{\operatorname{sh} \varphi + \operatorname{sh} \psi}{(\kappa_2 + \kappa_1) \operatorname{ch} \varphi + (\kappa_2 - \kappa_1) \operatorname{ch} \psi}. \quad (4.4.6)$$

Записывая

$$\operatorname{sh} \varphi + \operatorname{sh} \psi = 2 \operatorname{sh} \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right)$$

и используя аналогичные тождества для $\operatorname{ch} \varphi \pm \operatorname{ch} \psi$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} (\ln \det V) = \kappa_1 + \kappa_2 + \frac{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}{\kappa_2 \operatorname{ch} \gamma_2 - \kappa_1 \operatorname{ch} \gamma_1}, \quad (4.4.7)$$

где $\gamma_2 = (\varphi + \psi)/2 = \kappa_2 x + (\lambda + \mu)/2$ и $\gamma_1 = (\psi - \varphi)/2 = \kappa_1 x + (\mu - \lambda)/2$. Так как

$$e^{\mu + \lambda} = \frac{m_2(t)}{2\kappa_2} \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1} \right) = \frac{m_2(0)}{2\kappa_2} e^{-8\kappa_2^3 t} \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_3} \right), \quad (4.4.8a)$$

$$e^{\mu - \lambda} = \frac{m_1(t)}{2\kappa_1} \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1} \right) = \frac{m_1(0)}{2\kappa_1} e^{-8\kappa_1^3 t} \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1} \right). \quad (4.4.8b)$$

можно записать

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \kappa_1 x - 4\kappa_1^3 t + \delta_1, \\ \gamma_2 &= \kappa_2 x - 4\kappa_2^3 t + \delta_2, \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

где

$$\delta_i = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{m_i(0)}{2\kappa_i} \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1} \right) \right].$$

Если найти вторую производную от $\ln(\det V)$, используя (4.4.7), мы получим

$$u(x, t) = -2(\kappa_2^2 - \kappa_1^2) \frac{\kappa_2^2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 + \kappa_1^2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_1}{(\kappa_2 \operatorname{cth} \gamma_2 - \kappa_1 \operatorname{th} \gamma_1)^2}. \quad (4.4.10)$$

За исключением дополнительных фазовых членов δ_1 и δ_2 , являющихся постоянными интегрирования, которыми мы пренебрегли при интегрировании системы (1.3.24), этот результат совпадает с тем, который был дан формулой (1.3.19).

В разд. 1.3 было показано, что для времен, далеко отстоящих в прошлое от момента взаимодействия двух солитонов, выражение для $u(x, t)$ сводится к виду

$$u(x, t) = -2\kappa_1^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_1 - \Delta) - 2\kappa_2^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_2 + \Delta), \quad (4.4.11)$$

где

$$\Delta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) = 2 \ln \left(\frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \right).$$

Для времен, далеко отстоящих в будущее после момента взаимодействия, мы получаем

$$u(x, t) = -2\kappa_1^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_1 + \Delta) - 2\kappa_2^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_2 - \Delta). \quad (4.4.12)$$

Положение пика импульса, связанного с κ_2 , смещается, таким образом, вперед на величину $2\Delta/\kappa_2$ из точки $x_2 = 4\kappa_2^2 t - (\delta_2 - \Delta)/\kappa_2^2$ в точку $x_2 = 4\kappa_2^2 t - (\delta_2 + \Delta)/\kappa_2^2$. Аналогично, более медленный импульс замедляется на величину $2\Delta/\kappa_1$. С детальным анализом взаимодействия произвольного числа солитонов можно ознакомиться в работе [114].

Двухсолитонное взаимодействие для $\kappa_1 = 1$ и $\kappa_2 = 2$ показано на рис. 1.2. При $t = 0$ оба импульса сливаются в один с амплитудой, равной —6. (Заметим, что на рисунке изображена функция $-u(x, t)$.) На рис. 4.4 показано слияние двух солитонов для случая $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 1.5$ и $\delta_1 = \delta_2 = 0$. В этом примере единственный импульс не формируется. Чтобы получить критерий различения двух случаев, заметим, что на рис. 1.2 $u_{xx}(0, 0) > 0$, в то время как на рис. 4.4 $u_{xx}(0, 0) < 0$. Выражение для $u_{xx}(0)$ можно полу-

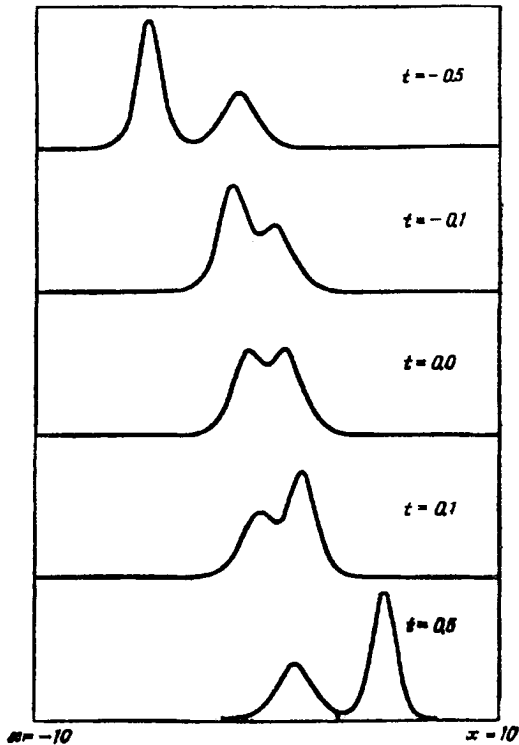


Рис. 4.4. Взаимодействие двух солитонов, при котором одиночный пик не образуется.

чить, используя уравнение Кортевега — де Фриза и формулу (4.4.2). Находим, что

$$u_{xx}(x, t) = 3u^2(x, t) - 2 \frac{\partial}{\partial t} A_L(x, x; t). \quad (4.4.13)$$

Используя (4.4.10) для получения $u^2(0, 0)$ и замечая, что из (4.4.7) можно получить $\frac{\partial}{\partial t} A_L(x, x; t)$, находим, что

$$u_{xx}(0, 0) = 4(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)(\kappa_2^2 - 3\kappa_1^2), \quad \kappa_2 > \kappa_1. \quad (4.4.14)$$

Поэтому два солитона сольются в один пик только при $\kappa_2/\kappa_1 > \sqrt{3}$.

Мы сейчас видели, что эволюция начального профиля импульса чрезвычайно проста, если коэффициент отражения $R_L(k, 0)$ для задачи рассеяния, связанной с $u(x, 0)$, обращается в нуль. N полюсов коэффициента прохождения $T(k, 0)$ приводят к N солитонам

с амплитудами $-2\kappa_n^2$. Если коэффициент отражения не равен нулю, решение по-прежнему содержит солитон для каждого полюса. Однако, как показано на рис. 4.2, есть и осцилляторная часть. Теперь количественное аналитическое описание решения намного сложнее, и в настоящее время оно является областью активной исследовательской деятельности. Однако, как и прежде, амплитуду и скорость каждого солитона можно легко определить. Амплитуды равны $-2\kappa_n^2$, а скорость $4\kappa_n^2$, как и в случае безотражательных потенциалов. Следовательно, если можно определить коэффициент отражения для $u(x, 0)$, то число солитонов и их амплитуды могут быть определены даже при $R_L(k, 0) \neq 0$. В качестве примера рассмотрим начальный профиль импульса $u(x, 0) = v \operatorname{sech}^2 x$. В разд. 2.5 было показано, что коэффициент прохождения для этого потенциала имеет вид

$$T(k, 0) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}, \quad (4.4.15)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} - ik + \sqrt{v + \frac{1}{4}}, \\ b &= \frac{1}{2} - ik - \sqrt{v + \frac{1}{4}}, \\ c &= 1 - ik. \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

При $v = 15/4$ это выражение принимает вид

$$T(k, 0) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2} - ik\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2} - ik\right)}{\Gamma(-ik)\Gamma(1 - ik)}. \quad (4.4.17)$$

Множитель $\Gamma(-3/2 - ik)$ имеет полюсы при $-3/2 - ik = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Таким образом, полюсы лежат в точках $k = \kappa_n = (3/2)i, (1/2)i, -(1/2)i, \dots$. Два полюса в верхней полуплоскости дают солитоны. Так как амплитуды солитонов равны $-2\kappa_n^2$, в этом случае амплитуды равны $-2(1/2)^2 = -1/2$ и $-2(3/2)^2 = -9/2$, что согласуется с приведенным на рис. 4.2 точным численным решением.

4.5. СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ

В разд. 2.8 показано, что величина, обратная коэффициенту прохождения, $c_{12}(k)$, имеет асимптотическое разложение

$$c_{12}(k) = \sum_1^{\infty} \frac{c_n}{k^n}. \quad (4.5.1)$$

где

$$c_n = \frac{1}{(-2i)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx g_n(x). \quad (4.5.2)$$

Величины $g_n(x)$ являются функциями потенциала и его пространственных производных. Выражения для нескольких первых g_n приведены в (2.8.51). Так как u зависит от времени, можно было бы ожидать, что c_n (и поэтому c_{12}) также будут зависеть от времени. Однако для потенциалов, эволюция которых описывается уравнением Кортевега — де Фриза, c_{12} , согласно (4.3.13b), от времени не зависит. Следовательно, коэффициенты c_n в асимптотическом разложении c_{12} также не должны зависеть от времени, даже если потенциал $u(x, t)$ от времени зависит. Таким образом, коэффициенты c_n представляют собой бесконечное число интегралов движения, которые могут быть связаны с решениями уравнения Кортевега — де Фриза. Из (2.8.51) видно, то g_1 и g_3 являются полными пространственными производными, так что их интегралы от импульсных решений обращаются в нуль. Это оказывается верным для всех более высоких нечетных значений g_n [87]. Следовательно, интересны только g_0, g_2, g_4, \dots . Согласно (2.8.50) и (2.8.51), несколько первых сохраняющихся величин имеют вид

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx g_0 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, t), \\ c_3 &= -\frac{i}{8} \int_{-\infty}^{\infty} dx g_2 = \frac{i}{8} \int_{-\infty}^{\infty} dx u^2(x, t), \\ c_5 &= \frac{i}{2^5} \int_{-\infty}^{\infty} dx g_4 = \frac{i}{32} \int_{-\infty}^{\infty} dx [2u^3 - 6uu_{xx} - 5(u_x)^2], \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

где мы пренебрегли членами, содержащими полные производные, и при получении c_5 было выполнено интегрирование по частям.

Независимость c_n от времени можно также непосредственно вывести из уравнения Кортевега — де Фриза. Интегрирование этого уравнения по всему пространству дает

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} dx u = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} (3u^2 - u_{xx}) = 0, \quad (4.5.4)$$

что эквивалентно первому из соотношений (4.5.3). Умножая уравнение Кортевега — де Фриза на u и интегрируя затем по всем x , получим второе из соотношений (4.5.3) в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} dx u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} \left[2u^3 - uu_{xx} + \frac{1}{2} (u_x)^2 \right] = 0. \quad (4.5.5)$$

Аналогичная проверка может быть выполнена для сохраняющихся величин более высокого порядка, но для этого нужны вычисления

все возрастающей трудности. Перечень первых десяти сохраняющихся величин был приведен Миурой и др. [87].

Сохраняющиеся величины дают простую схему получения приближенных значений амплитуд солитонов (Березин и Карпман [14]). Недостаток метода состоит в том, что он требует знания окончательного числа ожидаемых импульсов. Кроме того, для быстро меняющихся по x начальных профилей импульсов метод неточен и может не дать с достаточной точностью амплитуду самого маленького солитона. Однако преимущество его в том, что он исходит непосредственно из формы начального профиля импульса и не требует определения связанных состояний, соответствующих этому профилю. В качестве примера рассмотрим начальный профиль импульса $u(x, 0) = -v \operatorname{sech}^2 x$. Для значений v , приводящих к распаду на два солитона, мы должны иметь

$$u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -2\kappa_1^2 \operatorname{sech}^2(\kappa_1 x - v_1 t + \Phi_1) - 2\kappa_2^2 \operatorname{sech}^2(\kappa_2 x - v_2 t + \Phi_2), \quad (4.5.6)$$

где $v_i = 4\kappa_i^3$. Если нам не интересны фазовые члены, Φ_i , для получения окончательной формы решения нужно определить только

амплитуды импульсов κ_i . Поскольку величины $F_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, t)$ и

$F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx u^2(x, t)$ постоянны во времени, можно вычислить их

при $t = 0$, используя приведенное выше значение $u(x, 0)$, а также при $t \rightarrow \infty$ с помощью (4.5.3). Можно затем приравнять результаты и получить пару алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \kappa_1 + \kappa_2 &= \frac{1}{2} v, \\ \kappa_1^3 + \kappa_2^3 &= \frac{1}{4} v^2, \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

где были использованы интегралы¹⁾ $\int_{-\infty}^{\infty} dx \operatorname{sech}^2 x = 2$ и $\int_{-\infty}^{\infty} dx \operatorname{sech}^4 x = 4/3$. Комбинируя уравнения (4.5.7), можно получить квадратное уравнение $\kappa_1^2 - \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2 = v/2$, которое имеет решения $\kappa_{1,2} = (1/4)(v \pm \sqrt{v(8-v)/3})$. Для рассмотренного в предыдущем разделе значения $v = 15/4$ получим $\kappa_1 = 1.51$ и $\kappa_2 = 0.363$. Эти значения следует сравнивать с точными значениями $\kappa_1 = 1.50$ и $\kappa_2 = 0.50$, полученными в конце предыдущего раздела. Точное ре-

¹⁾ Общий результат имеет вид $\int_{-\infty}^{\infty} dx \operatorname{sech}^n x = 2^{n-1} [\Gamma(n/2)]^2 / \Gamma(n)$.

шение, содержащее вклад от несолитонной части решения, конечно, также будет удовлетворять всем законам сохранения более высокого порядка.

Если появляется три импульса, их амплитуды можно вычислить с помощью трех первых законов сохранения. Снова используя на-

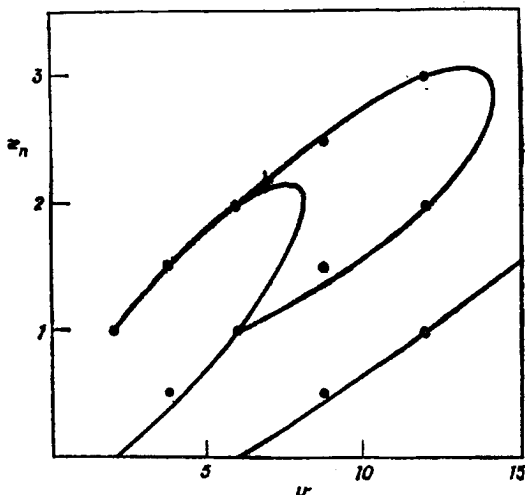


Рис. 4.5. Геометрическое место корней первых трех законов сохранения для начального профиля импульса $u(x, 0) = v \operatorname{sech}^2 x$.

чальный профиль импульса $u(x, 0) = v \operatorname{sech}^2 x$ и третью сохраняющуюся величину из (4.5.3), находим, что

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \frac{1}{2} v, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= \frac{1}{4} v^2, \\ x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 &= \frac{v^2 (2v - 1)}{12}. \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Решения этой группы уравнений эквивалентны решению одного кубического уравнения. Три уравнения (4.5.8) можно рассматривать как симметричные функции корней этого кубического уравнения, и здесь могут быть полезны результаты теории уравнений ([19], гл. 7). На рис. 4.5 показано геометрическое место корней (4.5.7) и (4.5.8). Точки являются точными результатами, полученными из (4.4.17). Результаты для $v = 2, 6$ и 12 соответствуют чисто солитонным решениям и, как видно, лежат на кривых. Приближенное согласие для $v = 3.75, v = 8.75$ является результатом пренебрежения несолитонной частью решения.

4.6. НАЧАЛЬНЫЙ ПРОФИЛЬ ИМПУЛЬСА В ВИДЕ $\delta'(x)$: АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

В упр. 5 гл. 2 была использована предельная процедура, чтобы показать, что для потенциала, пропорционального $\delta'(x)$, коэффициент отражения $R_L(k)$ равен единице. Прежде чем совершать этот предельный переход, используем соотношение между $R_R(k)$ и $R_L(k)$ (2.8.16) и затем, переходя к пределу, найдем, что другой коэффициент отражения $R_R(k)$ равен -1 . Это можно было бы считать простейшим коэффициентом отражения, который можно использовать в качестве начального профиля импульса. К сожалению, функция $\delta'(x)$ слишком сингулярна, чтобы ее можно было применять в таком качестве. Как отмечалось в разд. 3.1, нару-

шается требование $\int_{-\infty}^{\infty} dx(1+|x|)|u(x, 0)| < \infty$. Тем не менее

можно извлечь интересные результаты, касающиеся этого начального профиля. (Мы можем считать, что формализм обратной задачи применяется к профилю, который в пределе приближается к $\delta'(x)$, т. е. $\delta'(x) = -\lim_{a \rightarrow 0} [(x/\pi^{1/2}a^3) \exp(-x^2/a^2)]$.)

Так как $R_R(k, 0) = -1$, имеем

$$\Omega_R(x, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{i(kx + 8k^3t)}. \quad (4.6.1)$$

Этот интеграл может быть записан в виде интеграла, определяющего функцию Эйри $\text{Ai}(x)$, которая связана с функциями Бесселя порядка $1/3$ (см. [4]). Вводя новую переменную интегрирования $k = \alpha\theta$ и полагая затем $8\alpha^3t = 1/3$, находим, что

$$\Omega_R(x, t) = -\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i[3\alpha x + (1/3)\theta^3]} = -\alpha \text{Ai}(\alpha x). \quad (4.6.2)$$

Вследствие вышеупомянутой трудности, связанной со сходимостью, мы не будем пытаться решать уравнение Марченко с таким выражением для $\Omega_R(x, t)$. Вместо этого мы заметим, что поскольку $\alpha x = x(24t)^{-1/3}$, то пространственная и временная зависимость $\Omega_R(x, t)$, согласно (4.6.2), имеет вид $\Omega_R(x, t) = t^{-1/3}\omega(\xi)$, где $\xi = xt^{-1/3}$. Интересный результат состоит в том, что пространственно-временная зависимость при последующей эволюции начального профиля $u(x, 0) = \delta'(x)$ также может быть выражена как функция ξ . Это можно показать, полагая $A_L(x, y) = t^{-1/3}\mathcal{A}(\xi, \eta)$, где $\eta = yt^{-1/3}$. Мы находим, что уравнение Марченко принимает вид

$$\omega(\xi + \eta) + \mathcal{A}(\xi, \eta) + \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \omega(\xi' + \eta) \mathcal{A}(\xi, \xi') = 0. \quad (4.6.3)$$

Профиль импульса дается теперь соотношением

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} A_L(x, x; t) = 2t^{-1/3} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A}(\zeta, \zeta). \quad (4.6.4)$$

Так как $\partial/\partial x = t^{-1/3} d/d\zeta$, получим

$$u(x, t) = 2t^{-2/3} \mathcal{A}'(\zeta, \zeta) = t^{-2/3} f(\zeta). \quad (4.6.5)$$

Предполагая, что $u(x, t)$ имеет этот вид и замечая, что $\partial/\partial t = -(\zeta/3t)(d/d\zeta)$, так что $\partial u/\partial t = -(1/3)t^{-5/3}(2f + \zeta f')$, находим,

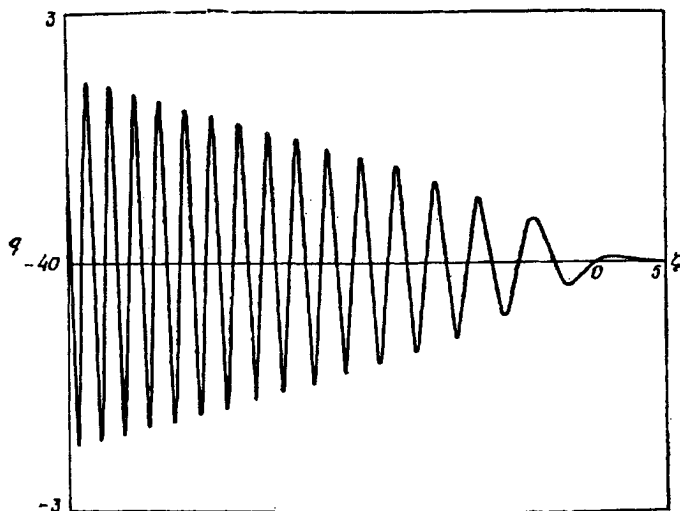


Рис. 4.6. Автомодельное решение уравнения Кортевега — де Фриза.

что уравнение Кортевега — де Фриза сводится к обыкновенному дифференциальному нелинейному уравнению для функции $f(\zeta)$. Числовые коэффициенты в этом уравнении несколько упрощаются, если положить $g(\zeta) = 6f(\zeta)$. Тогда уравнение для $g(\zeta)$ примет вид

$$3g''' - 3gg' - (2g + \zeta g') = 0. \quad (4.6.6)$$

Для значений g , достаточно малых, чтобы нелинейный член был пренебрежимо мал, можно положить $g = h'$ и дважды проинтегрировать (4.6.6), получив в результате уравнение $h'' - (1/3)\zeta h = 0$. Мы отбросили постоянные интегрирования, поскольку нас интересуют решения, обращающиеся в нуль до прихода импульса. Уравнению для h удовлетворяет функция Бесселя порядка $1/3$. Решение, обращающееся в нуль при $\zeta \rightarrow +\infty$, пропорционально $\zeta^{1/2} K_{1/3}[2(-\zeta/3)^{3/2}]$. Используя асимптотическую форму для функции Бесселя, видим, что $g \sim c\zeta^{1/4} e^{-2(\zeta/3)^{3/2}}$ при $\zeta \rightarrow +\infty$. На рис. 4.6

показано численное решение полного нелинейного уравнения (4.6.6), которое сводится к этой форме с малой амплитудой для $c = 0.15$. Как отмечалось выше, функция $\delta'(x)$ слишком сингулярна, чтобы быть приемлемым начальным условием для профиля импульса. Это подтверждается рисунком, так как колебательное решение продолжает расти при $\xi \rightarrow -\infty$. Дополнительную информацию об этом решении можно найти в работе Карпмана [66].

4.7. ДРУГОЙ ПОДХОД К ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

Решение уравнения Кортевега — де Фриза можно перефразировать и в терминах системы двух линейных уравнений, подобных тем, которые рассматривались в разд. 2.11. Прежде чем начать рассмотрение других эволюционных уравнений, которые естественнее анализировать в рамках метода Захарова — Шабата, мы кратко рассмотрим метод двух уравнений для уравнения Кортевега — де Фриза. Это делается путем преобразования линейных уравнений для уравнения Кортевега — де Фриза в эквивалентную систему Захарова — Шабата.

Чтобы ввести систему Захарова — Шабата, начнем с линейных уравнений, полученных в разд. 1.2. Согласно (1.2.2) и (1.2.10),

$$y_{xx} = (\lambda + u)y, \quad (4.7.1a)$$

$$y_t = -4y_{xxx} + 6uy_x + 3u_x y. \quad (4.7.1b)$$

Сейчас мы будем следовать стандартной процедуре замены дифференциального уравнения второго порядка парой уравнений первого порядка. Полагая

$$z = y_x, \quad (4.7.2a)$$

находим, что уравнение Шрёдингера эквивалентно следующему:

$$z_x = (\lambda + u)y. \quad (4.7.2b)$$

Кроме того, если использовать производную уравнения (4.7.1a) для исключения y_{xxx} из (4.7.1b), то можно записать выражение для y_t в (4.7.1b) в виде линейной комбинации z и y . Получим

$$y_t = -u_x y + (2u - 4\lambda)y_x. \quad (4.7.3a)$$

Наконец, записывая $z_t = (y_t)_x$ и используя затем (4.7.3a), можно построить выражение для z_t , являющееся линейной комбинацией y и z . После использования (4.7.1a) результат имеет вид

$$z_t = (2u^2 - u_{xx} - 2\lambda u - 4\lambda^2)y + u_x z. \quad (4.7.3b)$$

Если обозначить $y = v_2$, $z = v_1 + i\zeta v_2$ и $\lambda = \zeta^2$, то пару линейных уравнений (4.7.2) можно привести к виду, несколько похожему

на линейные уравнения, рассмотренные в разд. 2.11. Тогда мы получим

$$\begin{aligned}v_{1x} + i\zeta v_1 &= -uv_2, \\v_{2x} - i\zeta v_2 &= -v_1.\end{aligned}\tag{4.7.4}$$

Если применить то же преобразование к системе (4.7.3), получим уравнения вида

$$\begin{aligned}v_{1t} &= Av_1 + Bv_2, \\v_{2t} &= Cv_1 + Dv_2,\end{aligned}\tag{4.7.5}$$

где

$$\begin{aligned}A &= -4i\zeta^3 - 2i\zeta u + u_x, \\B &= -4\zeta^2 u - 2i\zeta u_x - 2u^2 + u_{xx}, \\C &= -4\zeta^2 - 2u, \\D &= -A.\end{aligned}\tag{4.7.6}$$

Теперь из этих линейных уравнений можно восстановить решение уравнения Кортевега — де Фриза. Детали этого подхода будут рассматриваться в гл. 5 в применении к другим эволюционным уравнениям.

В связи с анализом новых уравнений в гл. 5, важно отметить, что уравнения вида (4.7.5) являются исходным пунктом для введения временной зависимости для функций v_1 и v_2 .

Глава 5

НЕКОТОРЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С СИСТЕМОЙ ЗАХАРОВА — ШАБАТА

В гл. 4 мы видели, как линейную задачу рассеяния, связанную с уравнением Шрёдингера, можно использовать для решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, называемого уравнением Кортевега — де Фриза. Были решены аналогичным образом некоторые другие эволюционные уравнения, путем соотнесения их с парой линейных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{aligned}v_{1x} + i\zeta v_1 &= qv_2, \\ v_{2x} - i\zeta v_2 &= -q^* v_1.\end{aligned}$$

Эти линейные уравнения являются специальным случаем более общих уравнений (1.5.4). В настоящей главе мы рассмотрим, как эта задача Захарова — Шабата может быть использована для решения трех нелинейных эволюционных уравнений: модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза, уравнения sine-Gordon и кубического, или нелинейного, уравнения Шрёдингера. Ниже приведены стандартные формы каждого из этих уравнений:

$$\begin{aligned}u_t \pm 6u^2 u_x + u_{xxx} &= 0 && \text{модифицированное уравнение} \\ &&& \text{Кортевега — де Фриза } (q = u); \\ \sigma_{xt} &= \sin \sigma && \text{уравнение sine-Gordon } (q = -\sigma_x/2); \\ iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q &= 0 && \text{кубическое уравнение Шрёдингера.}\end{aligned}$$

Для первых двух из этих эволюционных уравнений функция q в вышеприведенной линейной системе действительна. Как мы увидим ниже, пара линейных уравнений первого порядка, связанных с двумя первыми эволюционными уравнениями, эквивалентна одному уравнению второго порядка типа уравнения Шрёдингера, в котором потенциал имеет одну из комплексных форм $q^2 \pm iq_x$.

Когда в гл. 1 была установлена связь между уравнениями Шрёдингера и Кортевега — де Фриза, было найдено, что нужно потребовать также, чтобы временная зависимость собственных функций была задана уравнением $y_t = By$, где B — дифференциальный оператор третьего порядка (1.2.10). Как мы увидим ниже, модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза возникает при применении той же процедуры, когда в уравнении Шрёдингера и в операторе B используется любой из комплексных потенциалов $u^2 \pm ix_x$.

Тот факт, что модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза связано с уравнением Шрёдингера, хотя и с комплексным потенциалом, обеспечивает совершенно непосредственный способ введения этого эволюционного уравнения и связанных с ним линейных уравнений. Однако окончательный вид линейных уравнений для модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза предлагает систематический метод получения других эволюционных уравнений. Потом этот систематический подход, подход Захарова — Шабата, будет использован для уравнения sine-Gordon и кубического уравнения Шрёдингера.

5.1. МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

Модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза, $u_t \pm \pm 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$, одно из трех уравнений, которые будут введены в этой главе, реже всего встречается в приложениях. Однако оно теснее всего связано с уравнением Кортевега — де Фриза и поэтому дает нам самый естественный переход от результатов гл. 4.

Как отмечалось ранее, в случае модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза мы будем иметь дело с системой уравнений Захарова — Шабата в виде

$$\begin{aligned} v_{1x} + i\zeta v_1 &= uv_2, \\ v_{2x} - i\zeta v_2 &= -uv_1, \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

где u действительно. Можно установить связь с уравнением Шрёдингера и с предыдущими результатами для уравнения Кортевега — де Фриза, введя новые переменные

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 + iv_2, \\ w_2 &= v_1 - iv_2. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Легко найти, что эти новые переменные удовлетворяют системе уравнений

$$w_{1x} + iw_1 = i\zeta w_2, \quad (5.1.3a)$$

$$w_{2x} - iw_2 = -i\zeta w_1, \quad (5.1.3b)$$

которая, как отмечалось в разд. 1.5, эквивалентна паре уравнений Шрёдингера с комплексными потенциалами. Из (5.1.3) находим, что

$$w_{1xx} + [\zeta^2 + (u^2 + iu_x)]w_1 = 0, \quad (5.1.3a)$$

$$w_{2xx} + [\zeta^2 + (u^2 - iu_x)]w_2 = 0. \quad (5.1.4b)$$

Рассмотрим комплексный потенциал $\mathcal{V} = -(u^2 + iu_x)$, входящий в уравнение для w_1 . Из предыдущего анализа известно, что если \mathcal{V} содержит параметр t , то при условии, что \mathcal{V} удовлетворяет какому-либо уравнению из некоторой последовательности уравнений в частных производных, ζ не будет зависеть от времени. Пер-

выми двумя из этих уравнений являются уравнение $\mathcal{Y}_t + c\mathcal{Y}_x = 0$ и уравнение Кортевега — де Фриза $\mathcal{Y}_t - 6\mathcal{Y}\mathcal{Y}_x + \mathcal{Y}_{xxx} = 0$. Теперь можно задаться вопросом, что означают эти уравнения для \mathcal{Y} , когда речь идет о функции u . Первое из двух дифференциальных уравнений в частных производных для \mathcal{Y} приводит к уравнению

$$2u(u_t + cu_x) + i(u_t + cu_x)_x = 0. \quad (5.1.5)$$

Простой способ с гарантией удовлетворить этому уравнению — выбрать $u_t + cu_x = 0$, т. е. так, чтобы u удовлетворяло тому же уравнению, что и \mathcal{Y} . Таким способом новое уравнение не получается. Однако подстановка $\mathcal{Y} = -(u_2 + iu_x)$ во второе уравнение для \mathcal{Y} , т. е. в уравнение Кортевега — де Фриза, дает

$$2u(u_t + 6u^2u_x + u_{xxx}) + i(u_t + 6u^2u_x + u_{xxx})_x = 0. \quad (5.1.6)$$

Это уравнение будет удовлетворено, если мы положим

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0, \quad (5.1.7)$$

что есть модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза. Следует отметить, что если $u(x, t)$ — решение этого уравнения, то $-u(x, t)$ также является решением. Аналогичное рассмотрение уравнения для w_2 снова приводит к модифицированному уравнению Кортевега — де Фриза в виде $u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$.

Таким образом, мы показали, что если u удовлетворяет модифицированному уравнению Кортевега — де Фриза вида (5.1.7), то $\mathcal{Y} = -(u^2 \pm iu_x)$ удовлетворяет уравнению Кортевега — де Фриза вида (4.1.1). Это соотношение между \mathcal{Y} и u называется преобразованием Миуры [85].

Линейные уравнения

Поскольку линейные уравнения для уравнения Кортевега — де Фриза уже определены, легко получить такие уравнения для модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза, используя только что отмеченную тесную связь между этими двумя уравнениями. Линейные уравнения, содержащие пространственные производные — это уравнения для v_1 и v_2 (5.1.1). Чтобы получить зависимость от времени, нужно вспомнить, что полученные для уравнения Кортевега — де Фриза результаты (4.7.2а) и (4.7.3а) позволяют записать

$$\begin{aligned} w_{1t} &= (4\xi^2 + 2\mathcal{Y})w_{1x} - \mathcal{Y}_x w_1, \\ w_{2t} &= (4\xi^2 + 2\mathcal{Y}^*)w_{2x} - \mathcal{Y}_x^* w_2. \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Сейчас мы образуем уравнения для v_1 и v_2 , складывая и вычитая эти уравнения для w_{1t} и w_{2t} . Из (5.1.2) имеем, что $v_1 = (w_1 + w_2)/2$ и $v_2 = -i(w_1 - w_2)/2$. Если заменить \mathcal{Y} на $-(u^2 + iu_x)$, уравне-

ния для суммы и разности w_{1t} и w_{2t} дают

$$\begin{aligned} v_{1t} &= 2i\zeta (u^2 - 2\zeta^2) v_1 + (4\zeta^2 u + 2i\zeta u_x - 2u^3 - u_{xx}) v_2, \\ v_{2t} &= (-4\zeta^2 u + 2i\zeta u_x + 2u^3 + u_{xx}) v_1 - 2i\zeta (u^2 - 2\zeta^2) v_2. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Уравнения (5.1.1) и (5.1.9) — это линейные уравнения, которые обычно используются при решении модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза методом Захарова — Шабата для обратной задачи рассеяния.

Решение методом обратной задачи рассеяния

Модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза решается с помощью той же процедуры, которая была использована для уравнения Кортевега — де Фриза в предыдущей главе. На больших расстояниях, в области, где $u \rightarrow 0$, зависимость от времени дается предельной формой уравнений. (5.1.9)

$$\begin{aligned} v_{1t} &= -4i\zeta^3 v_1, \\ v_{2t} &= 4i\zeta^3 v_2. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Пространственная зависимость выражается теперь через φ и ψ , т. е. через фундаментальные решения системы двух уравнений (5.1.1), которые были введены в разд. 2.11 (с заменой k на ζ).

Рассмотрим решение $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, пропорциональное φ при $x \rightarrow -\infty$.

Тогда при x , стремящемся к $-\infty$, $v(x, t) = f(t) \varphi(x) \rightarrow f(t) e^{-i\zeta x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Подстановка $v_1 = f(t) e^{-i\zeta x}$ в первое из уравнений (5.1.10) дает $f(t) = f(0) \exp(-4i\zeta^3 t)$. Из (2.11.19а) получаем вид φ при $x \rightarrow +\infty$. Имеем

$$v = f(t) \varphi \rightarrow f(0) e^{-4i\zeta^3 t} \left[c_{11}(\zeta, t) e^{i\zeta x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_{12}(\zeta, t) e^{-i\zeta x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. \quad (5.1.11)$$

Снова подставляя в (5.1.10) и приравнявая коэффициенты, получим, что $\dot{c}_{12} = 0$ и $\dot{c}_{11} = 8i\zeta^3$, так что

$$\begin{aligned} c_{12}(\zeta, t) &= c_{12}(\zeta, 0), \\ c_{11}(\zeta, t) &= c_{11}(\zeta, 0) e^{8i\zeta^3 t}. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Аналогичные вычисления с помощью решения v , пропорционального ψ , дают $c_{22}(\zeta, t) = c_{22}(\zeta, 0) e^{-8i\zeta^3 t}$. Этот результат следует также из равенства $c_{22}(\zeta) = c_{11}(-\zeta)$. Так как снова c_{12} является величиной, обратной коэффициенту прохождения, мы видим, что коэффициент прохождения снова не зависит от времени.

Для локализованных решений, связанных с нулями функции $c_{12}(\zeta, 0)$ в верхней полуплоскости в точках $\zeta = x_i$, можно, исполь-

взя (2.11.37), написать

$$m_{R1}(x_1, t) = -i \frac{c_{11}(x_1, t)}{c_{12}(x_1, 0)} = m_{R1}(x_1, 0) e^{i\kappa_1^2 t}, \quad (5.1.13)$$

$$m_{L1}(x_1, t) = -i \frac{c_{22}(x_1, t)}{c_{12}(x_1, 0)} = m_{L1}(x_1, 0) e^{-i\kappa_1^2 t}. \quad (5.1.14)$$

Мы подходим к решению модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза, строя сначала функцию

$$\Omega_1(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi} R_L(\zeta, 0) e^{-i\kappa_1^3 t - i\zeta z} + \sum_{l=1}^N m_{L1}(x_l, 0) e^{-i\kappa_l^3 t - i\kappa_l z}, \quad (5.1.15)$$

где $R_L(\zeta, 0) = -c_{22}(\zeta)/c_{21}(\zeta)$. Затем рассматриваем систему уравнений Марченко

$$\begin{aligned} A_1(x, y) - \int_{-\infty}^x dx' \Omega_L(x' + y) A_2(x, x') &= 0, \\ A_2(x, y) + \Omega_L(x + y) + \int_{-\infty}^x dx' \Omega_L(x' + y) A_1(x, x') &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

Согласно результатам разд. 3.6, решение модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза дается соотношением

$$u(x, t) = -2A_2(x, x, t). \quad (5.1.17)$$

Решение интегральных уравнений и определение эволюции импульса является простой задачей только в том случае, если коэффициент отражения $R_L(\zeta, 0)$ для начального профиля импульса равен нулю. Тогда результатом являются чисто многосолитонные решения модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза. Используя результаты разд. 3.7, мы тотчас же находим, что решение имеет вид

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \arctg \left[\frac{\text{Im det}(I - iM)}{\text{Re det}(I - iM)} \right], \quad (5.1.18)$$

где I — единичная матрица порядка N , а N в свою очередь — число нулей $c_{12}(\zeta, 0)$ в верхней полуплоскости; M — квадратная $N \times N$ -матрица с элементами

$$M_{\alpha\beta} = i \frac{m_{L\beta}(x_\beta, t)}{\kappa_\alpha + \kappa_\beta} e^{-i(\kappa_\alpha + \kappa_\beta) x}. \quad (5.1.19)$$

Как указывалось в разд. 2.11, нули функции c_{12} могут либо лежать на мнимой оси, либо располагаться парами симметрично относительно мнимой оси.

Для простейшего случая $N = 1$ матрица M сводится к скаляру $M = i(m_1/2\kappa_1) \exp(-2i\kappa_1 x)$. При $\kappa = i\kappa$ и временной зависимости,

даваемой уравнениями (5.1.12), имеем

$$M = \frac{m_1(0)}{2k} e^{2kx - 8k^3t}. \quad (5.1.20)$$

Как было показано в разд. 2.11, $m_1(0)$ действительно. Таким образом, выражение (5.1.18) сводится к следующему:

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg} \left[\frac{m_1(0)}{2k} e^{2(kx - 4k^2t)} \right]. \quad (5.1.21)$$

Как указывалось в (2.11.51), знак $m_1(0)$ может быть как положительным, так и отрицательным. Наконец, односолитонное решение модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза имеет вид

$$u(x, t) = \pm 2k \operatorname{sech}(2kx - 8k^3t + \delta), \quad (5.1.22)$$

где $\delta = \ln [|m_1(0)| / 2k]$. Для $m_1(0) < 0$ берется верхний знак, для $m_1(0) > 0$ — нижний.

Решение в виде бризера

Сейчас мы рассмотрим новый тип локализованного решения, которое можно получить из модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза. Оно связано с тем фактом, что нули функции $c_{12}(\xi)$ могут появляться парами, симметрично расположенными относительно мнимой оси в плоскости ξ . Профиль импульса имеет вид колебательного решения, модулированного огибающей, имеющей форму гиперболического секанса. Осцилляции и огибающая движутся с различными скоростями. Из-за ундуляций профиля при распространении этого импульса последний часто называют бризером. Чтобы получить аналитическое выражение этого решения, полагаем $x_1 = \alpha + i\beta$ и $x_2 = -\alpha + i\beta = -x_1^*$. Затем используя (5.1.19) для определения элементов соответствующей 2×2 -матрицы, получим

$$\operatorname{Re} [\det(I - iM)] = 1 + \frac{\alpha^2 |m_1|^2 e^{4\beta x}}{4\beta^3 (\alpha^2 + \beta^2)}. \quad (5.1.23)$$

$$i \operatorname{Im} [\det(I - iM)] = \frac{e^{2\beta x}}{2(\alpha^2 + \beta^2)} [(\alpha - i\beta) m_1 e^{-2i\alpha x} - \text{с. с.}]. \quad (5.1.24)$$

Кроме того,

$$m_1(x, t) = m_1(x_1, 0) e^{-8i x_1^3 t} = m_1(x_1, 0) e^{(\gamma - i\delta)t}, \quad (5.1.25)$$

где $\gamma = 8\beta(3\alpha^2 - \beta^2)$ и $\delta = 8\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)$. Затем после некоторых алгебраических преобразований находим, что

$$u = -2 \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg} \left[\frac{\beta \sin(2\alpha x + \delta t - \varphi)}{\alpha \operatorname{ch}(2\beta x + \gamma t + \psi)} \right]. \quad (5.1.26)$$

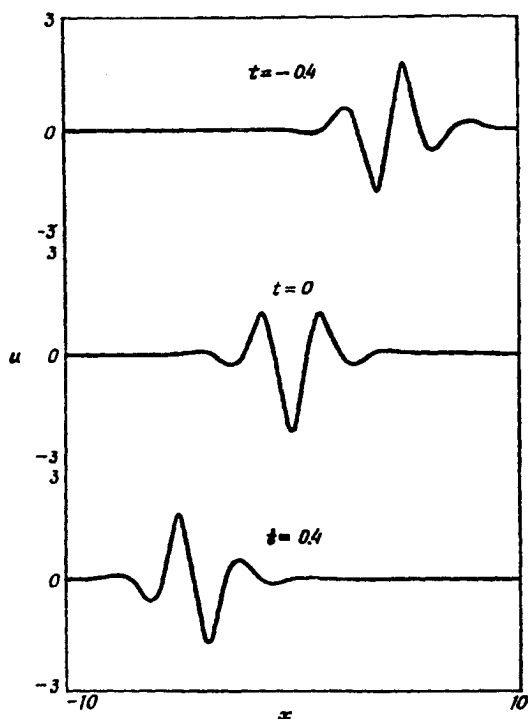


Рис. 5.1. Бризерное решение модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза.

где Φ и Ψ определены выражениями $m_1(0) = |m_1(0)|e^{i\Phi}$ и $\Psi = (\alpha/2\beta)|m_1(0)|(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}$. Дифференцированием можно привести (5.1.26) к виду

$$u(x, t) = -4\beta \operatorname{sech} \Psi \left[\frac{\cos \Phi - (\beta/\alpha) \sin \Phi \operatorname{th} \Psi}{1 + (\beta/\alpha)^2 \sin^2 \Phi \operatorname{sech}^2 \Psi} \right]. \quad (5.1.27)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv 2\alpha x + \delta t - \varphi + \theta, \\ \Psi &\equiv 2\beta x + \gamma t + \psi. \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

Можно видеть, что выражение для $u(x, t)$ имеет структуру, описанную выше. Из (5.1.28) находим, что фазовая скорость и скорость огибающей равны $v_{ph} = \delta/2\alpha$ и $v_e = \gamma/2\beta$ соответственно. В следующем разделе будет получено аналогичное решение, но с другими скоростями, для уравнения sine-Gordon. На рис. 5.1 показан график решения модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза в виде бризера.

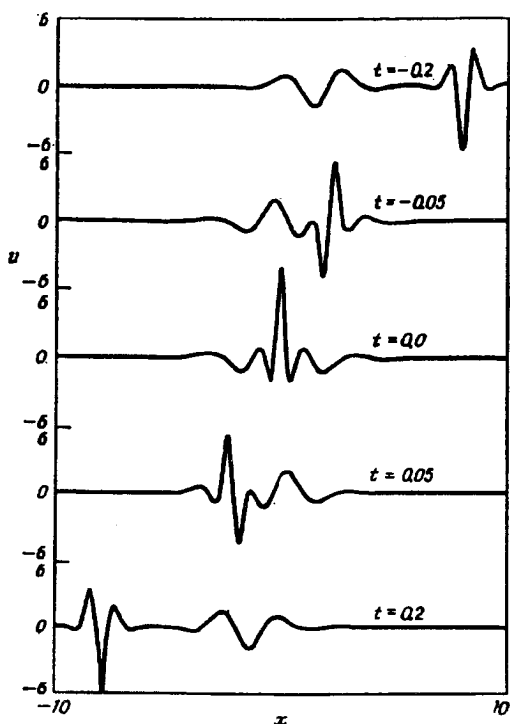


Рис. 5.2. Взаимодействие двух бризерных решений модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза.

Решение в виде бризера является локализованным объектом, также обладающим существенной особенностью солитона, т. е. оно взаимодействует упругим образом с другим бризером [или солитоном типа (5.1.22)]. На рис. 5.2 показано взаимодействие двух бризерных решений. Аналитическое выражение для этого решения может быть получено при рассмотрении решения (5.1.18) для $N = 4$ при $\kappa_2 = -\kappa_1^*$ и $\kappa_4 = -\kappa_3^*$. В действительности, однако, решение было получено методом, который будет описан в разд. 8.2.

Для $\beta \ll 1$ бризерное решение (5.1.27) является решением с малой амплитудой. Если, кроме того, предположить, что $\beta/\alpha \ll 1$, можно аппроксимировать это решение, записав

$$u \approx -4\beta \operatorname{sech} \Psi \cos \Phi = -2\beta e^{-i\Phi} \operatorname{sech} \Psi + \dots \quad (5.1.29)$$

Фазовый член состоит из медленно и быстро меняющихся членов и может быть записан в виде $\Phi = \Phi_s + \Phi_f$, где

$$\begin{aligned}\Phi_s &= -24\alpha\beta^2 t, \\ \Phi_f &= 2\alpha x + 8\alpha^3 t.\end{aligned}\quad (5.1.30)$$

Найдем уравнение, которому удовлетворяет член с малой амплитудой и медленно меняющейся фазой $F = -2\beta e^{24i\alpha\beta^2 t} \operatorname{sech} \Psi$. Записывая

$$u = F e^{-i\Phi_f} + \text{с. с.} \quad (5.1.31)$$

и подставляя в модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза, получим приближенное уравнение

$$F_t - 12\alpha^2 F_x - 6ia F_{xx} - 12ia |F|^2 F = 0. \quad (5.1.32)$$

При получении этого результата мы пренебрегли членами $|F|^2 F_x$ и F_{xxx} , которые, согласно (5.1.29), пропорциональны β^4 . В независимых переменных $x' = x + 12\alpha^2 t$ и $t' = 6\alpha t$ уравнение для F примет вид

$$iF_{t'} + F_{x'x'} + 2|F|^2 F = 0. \quad (5.1.33)$$

Его называют кубическим уравнением Шрёдингера¹⁾. Это третье из нелинейных эволюционных уравнений, которые рассматриваются в этой главе и будут исследованы в разд. 5.3.

В независимых переменных x' и t' приведенное выше решение имеет вид

$$F(x', t') = -2\beta e^{4i\beta^2 t'} \operatorname{sech} 2\beta x', \quad (5.1.34)$$

где в аргументе гиперболического секанса мы пренебрегли членом высшего порядка, пропорциональным β^3 .

Упражнение 1

Полагая $u = t^\alpha f(\zeta)$, где $\zeta = t^\beta x$, можно получить автомодельное решение модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза. Покажите, что при выборе $\alpha = \beta = -1/3$ функция $f(\zeta)$ удовлетворяет уравнению $f'' + 2f^3 - (1/3)\zeta f' = 0$. Решение этого уравнения может быть выражено с помощью второй трансцендентной функции Пенлеве ([59], с. 345). С помощью преобразования Миуры автомодельное решение уравнения Кортевега — де Фриза также может быть связано с этими функциями.

Другой подход к линейным уравнениям

Вид линейных уравнений для модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза, (5.1.1) и (5.1.9), подсказывает унифицированную и упорядоченную процедуру получения линейных уравне-

¹⁾ Название связано с тем, что в квантовой механике уравнение Шрёдингера для нестационарных задач имеет вид $i\hbar\psi_t + (\hbar^2/2m)\psi_{xx} - V\psi = 0$, а это тот же вид, который примет уравнение (5.1.33), если $V \sim |\psi|^2$.

ний, связанных с другими нелинейными эволюционными уравнениями [2]. Мы начнем с линейных уравнений (5.1.1) и предположим также, что, как и в случае уравнений (5.1.9), производные по времени от v_1 и v_2 могут быть выражены в общем виде

$$\begin{aligned} v_{1t} &= Av_1 + Bv_2, \\ v_{2t} &= Cv_1 + Dv_2. \end{aligned} \quad (5.1.35)$$

Теперь приравняем выражения для смешанных вторых производных $v_{1xt} = v_{1tx}$, $v_{2xt} = v_{2tx}$ и в полученных равенствах используем линейные уравнения (5.1.1) и (5.1.35), чтобы исключить производные от v_1 и v_2 по времени и координате. Как и при анализе уравнения Кортевега — де Фриза, наложим требование, чтобы спектральный параметр не зависел от времени, так что $\zeta_t = 0$. Так как v_1 и v_2 линейно независимы, можно в уравнениях, получающихся вследствие приравнивания $v_{1xt} = v_{1tx}$ и $v_{2xt} = v_{2tx}$, приравнять коэффициенты при v_1 и v_2 . Получим

$$A_x = q(B + C), \quad (5.1.36a)$$

$$B_x + 2i\zeta B = -2qA + q_t, \quad (5.1.36b)$$

$$C_x - 2i\zeta C = -2qA - q_t \quad (5.1.36c)$$

и $D_x = -A_x$. Таким образом, коэффициент D отличается от $-A$ на функцию времени, которой, как и при анализе уравнения Кортевега — де Фриза в разд. 1.2, можно пренебречь.

Теперь можно определить коэффициенты A , B и C , замечая, что, согласно (5.1.9), они являются полиномами от ζ . Полагая $A = \sum_0^3 a_n \zeta^n$, $B = \sum_0^3 b_n \zeta^n$ и $C = \sum_0^3 c_n \zeta^n$, подставляя в (5.1.36) и приравнявая степени ζ , мы получим набор простых дифференциальных уравнений, из которых можно определить коэффициенты a_n , b_n и c_n . Находим, что $a_3 = a_3(t)$, $b_3 = c_3 = 0$ и

$$\begin{aligned} a_2 &= a_2(t), & b_2 &= -c_2 = ia_3 q, \\ a_1 &= -\frac{1}{2} a_3 q^2, & b_1 &= -\frac{1}{2} a_3 q_x + ia_2 q, & c &= -\frac{1}{2} a_3 q_x - ia_2 q, \\ a_0 &= -\frac{1}{2} a_2 q^2, & b_0 &= c_0 = \frac{i}{4} a_3 (q_{xx} + 2q^3) - \frac{1}{2} a_2 q_x. \end{aligned} \quad (5.1.37)$$

Наконец, члены в двух последних уравнениях (5.1.36), не зависящие от ζ , дают $q_t = b_{0x} + 2a_0 q$, что является эволюционным уравнением. С помощью полученных выше выражений для a_0 и b_0 находим, что

$$q_t = -\frac{1}{4} ia_3 (6q^2 q_x + q_{xxx}) - a_2 \left(q^3 + \frac{1}{2} q_{xx} \right). \quad (5.1.38)$$

Полагая $a_2 = 0$ и $a_3 = 4i$, получим модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза в виде (5.1.7). Как мы и ожидали, коэффициенты A , B и C сводятся к коэффициентам, приведенным в (5.1.9).

5.2. УРАВНЕНИЕ SINE-GORDON

Метод получения линейных уравнений, использованный в конце предыдущего раздела, дает простой способ построения таких уравнений для других часто встречающихся нелинейных эволюционных уравнений. В данном разделе мы применяем этот метод к так называемому уравнению sine-Gordon¹⁾, которое может быть записано в виде

$$\sigma_{xt} = \sin \sigma. \quad (5.2.1)$$

Это эволюционное уравнение, которое получается, если коэффициенты A , B и C в (5.1.36) выбрать так, чтобы каждый из них содержал один-единственный член, пропорциональный ξ^{-1} . Мы, таким образом, полагаем

$$A = \frac{a}{\xi}, \quad B = \frac{b}{\xi}, \quad C = \frac{c}{\xi}. \quad (5.2.2)$$

Подставляя в уравнения (5.1.36) и собирая члены по степеням ξ , находим, что

$$a_x = q(b + c), \quad (5.2.3a)$$

$$2ib = q_t, \quad b_x = -2qa, \quad (5.2.3b)$$

$$2ic = q_t, \quad c_x = -2qa. \quad (5.2.3c)$$

Тогда $b = c$, и мы имеем

$$\begin{aligned} a_x &= 2qb, \\ b_x &= -2qa. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Умножая на a и b соответственно и складывая, можно получить проинтегрированную форму $a^2 + b^2 = f^2(t)$, которая допускает параметрическое представление $a = f(t) \cos \sigma$, $b = f(t) \sin \sigma$. Первое из уравнений (5.2.3b) тогда принимает вид $\sigma_{xt} = -4if(t) \sin \sigma$. Мы находим также, что $q = -\sigma_x/2$. Выбор $f(t) = i/4$ приводит к уравнению sine-Gordon вида (5.2.1). Согласно (5.1.35), линейные уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} v_{1t} &= \frac{i}{4\xi} [(\cos \sigma) v_1 + (\sin \sigma) v_2], \\ v_{2t} &= \frac{i}{4\xi} [(\sin \sigma) v_1 - (\cos \sigma) v_2]. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Конечно, пространственные производные от v_1 и v_2 по-прежнему даются системой (5.1.1), где $u = q = -\sigma_x/2$.

¹⁾ Название несколько шутливое, оно связано с видом, который принимает это уравнение в системе координат $\xi = x + t$, $\tau = x - t$, а именно $\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\tau\tau} = \sin \sigma$. Линейная аппроксимация последнего уравнения, $\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\tau\tau} - \sigma = 0$, известна в квантовой теории как уравнение Клейна — Гордона.

Некоторые простые решения

Прежде чем использовать линейные уравнения для решения уравнения sine-Gordon методом обратной задачи рассеяния, рассмотрим сначала некоторые простые решения этого уравнения, известные в течение многих лет. Они окажутся также простейшими из решений, которые можно получить методом обратной задачи.

У уравнения $\sigma_{xt} = \sin \sigma$ длинная история, начинающаяся в конце девятнадцатого столетия, когда было обнаружено, что это уравнение возникает в дифференциальной геометрии [34]. В то время были разработаны различные методы получения частных решений этого уравнения. Один из них, метод преобразований Бэклунда, будет описан в гл. 8. Другой подход к более простым решениям состоит в том, чтобы выразить их как функции независимых переменных $u = ax + t/a$ и $v = ax - t/a$ в виде

$$\sigma(u, v) = 4 \operatorname{arctg} [U(u)/V(v)]. \quad (5.2.6)$$

Будем предполагать, что $a > 0$. Поиск решения в виде функции, обратной тангенсу, представляется теперь совершенно естественным в виду результатов, полученных с помощью теории обратной задачи рассеяния, как, например, (3.7.16).

В системе координат u, v уравнение sine-Gordon имеет вид

$$\sigma_{uv} - \sigma_{vu} = \sin \sigma. \quad (5.2.7)$$

В форме (5.2.7) оно встречается в некоторых приложениях этого уравнения к вопросам нелинейного распространения волн, при этом u и v играют роль пространства и времени соответственно.

При использовании тождества $\sin 4\theta = 4 \operatorname{tg} \theta (1 - \operatorname{tg}^2 \theta) / (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^2$, где $\theta = \sigma/4$, мы находим, что предлагаемая форма решения (5.2.6) преобразует уравнение sine-Gordon в уравнение

$$(U^2 + V^2) \left(\frac{U''}{U} + \frac{V''}{V} \right) - 2(U')^2 - 2(V')^2 = V^2 - U^2, \quad (5.2.8)$$

где штрихи обозначают дифференцирование функций по их аргументам. Последующее дифференцирование этого результата по u и v позволяет разделить переменные. Находим, что

$$\frac{1}{UU'} \left(\frac{U''}{U} \right)' = - \frac{1}{VV'} \left(\frac{V''}{V} \right) = -4k^2, \quad (5.2.9)$$

где выбор формы записи постоянной разделения определяется из соображений удобства в будущем. Можно дважды проинтегрировать каждое из этих двух дифференциальных уравнений и получить $(U')^2 = -k^2 U^4 + \mu_1 U^2 + \nu_1$ и $(V')^2 = k^2 V^4 + \mu_2 V^2 + \nu_2$, где μ_i и ν_i — постоянные интегрирования. Подстановка этих уравнений в (5.2.8) приводит к требованию $\mu_1 - \mu_2 = 1$ и $\nu_1 + \nu_2 = 0$. Полагая

$\mu_1 = m^2$ и $\nu_1 = n^2$, мы получим окончательно

$$\begin{aligned}(U')^2 &= -k^2 U^4 + m^2 U^2 + n^2, \\ (V')^2 &= k^2 V^4 + (m^2 - 1)V^2 - n^2,\end{aligned}\quad (5.2.10)$$

В общем случае решения $U(u)$ и $V(v)$ будут выражаться через интегралы от корня квадратного из биквадратного выражения и, таким образом, будут содержать эллиптические функции. Исчерпывающий перечень этих решений был приведен Штойервальдом [104].

Задавая специальным образом входящие в (5.2.10) постоянные k , m и n , можно получить некоторые решения, выраженные в элементарных функциях. Эти решения встретятся снова, когда мы будем рассматривать многосолитонные решения с точки зрения обратной задачи рассеяния. Сейчас мы рассмотрим некоторые из этих специальных случаев.

1. $k = 0$, $m > 1$, $n = 0$. Система (5.2.10) дает $U = \gamma_1 e^{\pm mu}$ и $V = \gamma_2 e^{\pm \sqrt{m^2 - 1}v}$, где γ_1 и γ_2 — постоянные интегрирования. В этом примере решение уравнения sine-Gordon имеет форму «шельфа», и, согласно (5.2.6), дается формулой

$$\sigma = 4 \operatorname{arctg} \left[\gamma \exp \left(\pm \frac{u \pm \beta v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \right]. \quad (5.2.11)$$

где $\gamma = \gamma_1/\gamma_2$ и $\beta = \sqrt{m^2 - 1}/m$. Возможны все четыре комбинации знаков. Если мы выберем в качестве примера оба верхних знака, мы увидим, что σ является решением, которое монотонно растет от 0 до 2π , когда u меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Шельф движется со скоростью β в направлении отрицательных u . Это решение, так же как и решение с выбором знака, приводящим к выражению

$$\sigma = 4 \operatorname{arctg} \left[\gamma \exp \left(\frac{u - \beta v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \right],$$

является односолитонным решением уравнения sine-Gordon. Последняя формула описывает шельф, движущийся со скоростью β в направлении положительных u . Импульсообразные решения могут быть получены как производные от этих решений. Мы находим, что

$$\sigma_u = \pm 2m \operatorname{sech} [m(u \pm \beta v) + \ln \gamma],$$

$$\sigma_v = \pm 2\sqrt{m^2 - 1} \operatorname{sech} [m(u \pm \beta v) + \ln \gamma].$$

Часто именно эти выражения называются солитонными решениями уравнения sine-Gordon. Два других выбора знака, которые дают решения, изменяющиеся от 2π до 0, когда v пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$, иногда называют антисолитонами.

Рассмотрим кратко решение в координатах x и t , использованных в (5.2.1). Достаточно рассмотреть случай $m = 1$, т. е. $\beta = 0$.

Тогда решение имеет вид $\sigma = 4 \operatorname{arctg} \{ \gamma \exp [\pm (ax + t/a)] \}$ и является шельфом, движущимся со скоростью a^{-2} в направлении отрицательных x . Вновь импульсные решения можно получить из

σ_x или σ_t . Площадь импульса σ_x равна $\int_{-\infty}^{\infty} dx \sigma_x(x, t) = \sigma(\infty, t) - \sigma(-\infty, t) = 2\pi$. В некоторых приложениях уравнения sine-Gordon, которые будут обсуждаться в гл. 7, это решение (в котором координаты пространства и времени поменяются местами) будет называться 2π -импульсом.

Хотя только что полученные выражения для σ являются односолитонными решениями уравнения sine-Gordon, солитонная природа этих решений неочевидна, конечно, до тех пор, пока не исследовано взаимодействие двух таких импульсов. Это можно сделать, рассматривая следующий выбор постоянных.

2. $k = 0, m > 1, n \neq 0$. В результате интегрирования при решении (5.2.10) снова получаются элементарные функции. Находим, что $U(u) = \pm (n/m) \operatorname{sh}(mu + c_1)$ и $V(v) = (n/\sqrt{m^2 - 1}) \operatorname{ch}(\sqrt{m^2 - 1} v + c_2)$, где c_1 и c_2 являются постоянными интегрирования, которые могут быть использованы для установления начала системы координат u, v . Тогда из (5.2.6) имеем

$$\sigma = \pm 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{m^2 - 1}}{m} \frac{\operatorname{sh}(mu + c_1)}{\operatorname{ch}(\sqrt{m^2 - 1} v + c_2)} \right]. \quad (5.2.12)$$

Результат не зависит от n , так как в выражение для σ входит только отношение U/V . Рассмотрим случай верхнего знака в (5.2.12) и исследуем смысл этого решения, если u и v означают пространство и время соответственно. Мы полагаем также $c_1 = c_2 = 0$. Оказывается, что решение представляет собой столкновение двух солитонов. Находим, что в отдаленном прошлом, когда $v \rightarrow -\infty$ и $u \rightarrow -\infty$, $\sigma \rightarrow -\operatorname{arctg} [\beta e^{-m(u-\beta v)}]$, где, как и ранее, $\beta = \sqrt{m^2 - 1}/m$. При переходе u через значение βv решение растёт от -2π до 0. Оно, таким образом, представляет собой шельф, движущийся в направлении положительных u . При $u \rightarrow \infty$ и $v \rightarrow -\infty$ находим, что $\sigma \rightarrow 4 \operatorname{arctg} [\beta e^{m(u+\beta v)}]$, что представляет собой шельф, в котором σ растёт от 0 до 2π , когда u растёт, переходя через значение $-\beta v$. Этот шельф движется в направлении отрицательных u . Два шельфа сталкиваются при $v = 0$. Для $v \rightarrow +\infty$ получаем два уходящих возмущения: $\sigma \rightarrow -4 \operatorname{arctg} [\beta e^{-m(u+\beta v)}]$ при $u \rightarrow -\infty$ и $\sigma \rightarrow 4 \operatorname{arctg} [\beta e^{m(u-\beta v)}]$ при $u \rightarrow +\infty$. Так как σ меняется от -2π до $+2\pi$ при изменении u от $-\infty$ до $+\infty$, решение такого типа иногда называется 4π -импульсом.

Рассмотрим теперь решение в пространстве x, t . Изучим снова (5.2.12) с положительным знаком и положим, как и ранее, $c_1 = c_2 = 0$. При $x \rightarrow +\infty$ как u , так и v стремятся к $+\infty$, и σ стре-

мится к 2π . Аналогично, при $x \rightarrow -\infty$ σ стремится к -2π . Иногда удобно иметь решение, которое меняется от 0 до 4π при изменении u от $-\infty$ до $+\infty$. Такое решение легко построить, просто полагая $\sigma = \sigma + 2\pi$ и замечая, что $\bar{\sigma}$ по-прежнему удовлетворяет уравнению sine-Gordon и к тому же меняется от 0 до 4π . Если использовать тождество $\operatorname{arctg} \theta + \pi/2 = -\operatorname{arctg} (1/\theta)$, то выражение (5.2.12) даст

$$\bar{\sigma} = \pm 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{m^2 - 1} \sigma + c_2)}{\operatorname{sh}(m\mu + c_1)} \right]. \quad (5.2.13)$$

Легко сделать очевидной двухсолитонную природу этого результата. Аналитически этот аспект решения можно понять, полагая сначала $m = (a_1 + a_2)/2\sqrt{a_1 a_2}$ и $a = \sqrt{a_1 a_2}$. Тогда получим

$$\bar{\sigma} = -4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} (u_1 - u_2) + c_2 \right]}{\operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} (u_1 + u_2) + c_1 \right]} \right\}, \quad (5.2.14)$$

где $u_1 = a_1 x + t/a_1$ и $u_2 = a_2 x + t/a_2$. Снова рассматривая пространственную производную, находим, что

$$\bar{\sigma}_x = 2 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \frac{a_1 \operatorname{sech} u_1 + a_2 \operatorname{sech} u_2}{1 + 2 \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} (\operatorname{sech} u_1 \operatorname{sech} u_2 - \operatorname{th} u_1 \operatorname{th} u_2)}. \quad (5.2.15)$$

При $x \rightarrow \pm \infty$ импульсы хорошо разделены, и можно провести рассуждения, подобные тем, которые были применены при получении (1.3.21). Теперь знаменатель упрощается, и для $a_1 > a_2$ можно представить (5.2.15) в виде

$$\bar{\sigma}_x = 2a_1 \operatorname{sech}(u_1 \mp \delta) + 2a_2 \operatorname{sech}(u_2 \pm \delta), \quad (5.2.16)$$

где выбор знаков относится к $t \rightarrow \mp \infty$, а $\delta = \operatorname{arth} [2a_1 a_2 / (a_1^2 + a_2^2)]$. Решение имеет вид двух импульсов со сдвигом фазы (который является следствием их взаимодействия при $t = 0$) и качественно подобно двухсолитонному взаимодействию для уравнения Кортевега — де Фриза, показанному на рис. 1.2. Это оправдывает интерпретацию импульсов как солитонов.

3. $k \neq 0$, $n = 0$. Здесь интересны три подслучая, и все они могут быть выражены через элементарные функции.

3а. $m^2 > 1$. Результат аналогичен приведенному в (5.2.12). Мы находим, что

$$\sigma = -4 \operatorname{arctg} \left[\frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{m^2 - 1} \sigma + c_2)}{\operatorname{ch}(m\mu + c_1)} \right]. \quad (5.2.17)$$

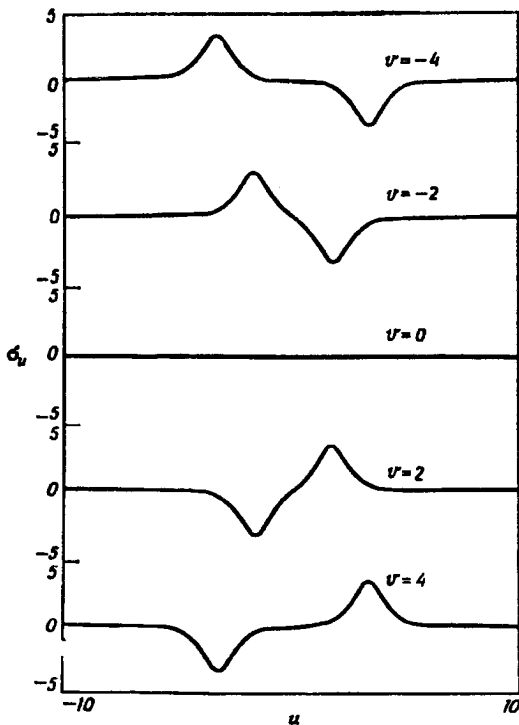


Рис. 5.3. Столкновение солитонного и антисолитонного решений уравнения sine-Gordon.

Анализ, подобный проведенному в случае 2, показывает, что решение представляет собой столкновение солитона и антисолитона. График σ_u показан на рис. 5.3. Площадь под всем импульсом равна нулю для всех значений v .

Упражнение 2

Покажите, что

$$\sigma_u = -\frac{A (\operatorname{sech} \varphi - \operatorname{sech} \psi)}{B - \operatorname{sech} \varphi \operatorname{sech} \psi - \operatorname{th} \varphi \operatorname{th} \psi},$$

где $\varphi = m(u - \beta v)$, $\psi = m(u + \beta v)$, $A = 4\beta m/(1 - \beta^2)$ и $B = (1 + \beta^2)/(1 - \beta^2)$.

3b. $m = 1$. Это предельный случай, когда относительная скорость двух импульсов, представленных на рис. 5.3, становится равной нулю. Из (5.2.17) сразу же находим, что аналитическое выражение имеет вид

$$\sigma = -4 \operatorname{arctg} [(v + c_2) \operatorname{sech}(u + c_1)]. \quad (5.2.18)$$

Зс. $m^2 < 1$. Это другой импульс с нулевой площадью и, наверное, самый интересный. Из (5.2.17) можно сразу же получить аналитическое выражение, полагая $\sqrt{m^2 - 1} = i\sqrt{1 - m^2}$. Находим, что

$$\sigma = -4 \operatorname{arctg} \left[\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \frac{\sin(\sqrt{1 - m^2} v + c_2)}{\operatorname{ch}(mu + c_1)} \right]. \quad (5.2.19)$$

Это так называемое бризерное решение уравнения sine-Gordon, и его нужно сравнивать с соответствующим решением модифициро-

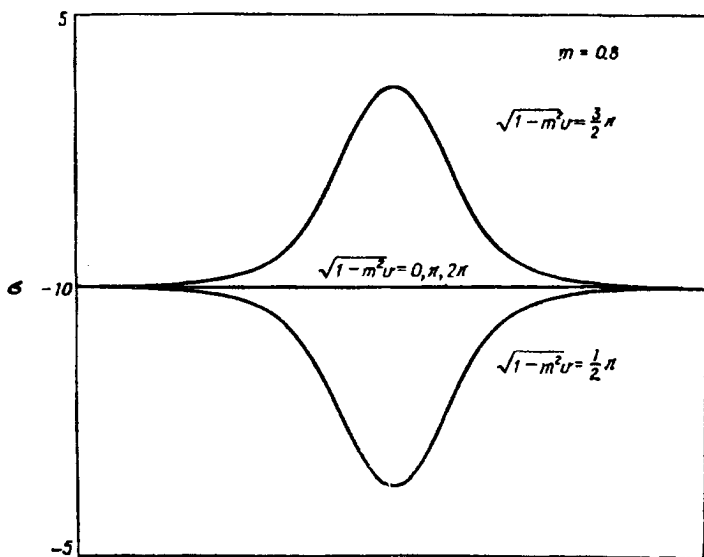


Рис. 5.4. Бризерное решение уравнения $\sigma_{uu} - \sigma_{vv} = \sin \sigma$.

ванного уравнения Кортевега — де Фриза, данным формулой (5.1.26). На рис. 5.4 приведен график бризерного решения уравнения sine-Gordon как функция u для $m = 0.8$. Как функция v это решение является периодическим.

Для $m \ll 1$ бризер является решением с *малой амплитудой*. Тогда его можно аппроксимировать, записав (5.2.19) в виде

$$\sigma = 2ie (\operatorname{sech} eu) e^{i(1-e^2/2)\sigma} + \dots, \quad (5.2.20)$$

где мы положили $m = e$ и оставили только первый член в степенном разложении функции, обратной тангенсу. Теперь решение имеет вид

$$\sigma(u, v) = F(u, v) e^{iv} + \dots, \quad (5.2.21)$$

где $F(u, v) = 2te(\operatorname{sech} eu)e^{-ev/2}$. Подставляя это выражение для σ в уравнение sine-Gordon вида $\sigma_{uu} - \sigma_{vv} = \sin \sigma \approx \sigma - \sigma^3/6$, находим, что F удовлетворяет кубическому уравнению Шрёдингера

$$2iF_v - F_{uu} - \frac{1}{3}|F|^2 F = 0. \quad (5.2.22)$$

Мы пренебрегли членом F_{vv} , поскольку по порядку величины он равен $O(\epsilon^4)$. Этот результат аналогичен результату, полученному для модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза (5.1.33).

Энергетические соображения

Поучительно подсчитать энергию, которая может быть связана с полученными здесь решениями. Это легко сделать, используя плотность гамильтониана для уравнения sine-Gordon. Тогда выражение для энергии может быть получено тем же способом, что и энергия, связанная с волнами на струне, определенная в разд. 2.1. Для уравнения sine-Gordon в виде (5.2.7) плотность лагранжиана может быть записана в виде $\mathcal{L} = [(\sigma_v)^2 - (\sigma_u)^2]/2 - (1 - \cos \sigma)$. Подстановка в уравнение Эйлера — Лагранжа (2.1.17), где x и t играют роль u и v соответственно, дает уравнение sine-Gordon (5.2.7). Плотность гамильтониана, равная $\mathcal{H} = \sigma_v(\partial \mathcal{L} / \partial \sigma_v) - \mathcal{L}$, принимает вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}[(\sigma_u)^2 + (\sigma_v)^2] + (1 - \cos \sigma). \quad (5.2.23)$$

Для односолитонного решения $\sigma = 4 \operatorname{arctg}\{\exp[m(u - \beta v)]\}$, где $m = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, находим, что $\mathcal{H} = 4m^2 \operatorname{sech}^2[m(u - \beta v)]$ и $E = \int_{-\infty}^{\infty} du \mathcal{H} = 8m$ при $m > 1$. Та же энергия получается для антисолитона $\sigma = 4 \operatorname{arctg}\{\exp[-m(u - \beta v)]\}$.

Для решения с нулевой площадью, или солитон-антисолитонного решения (5.2.17), находим, что

$$\mathcal{H} = \frac{8m^2}{k^2} \frac{\operatorname{sech}^2 mu (p + q \operatorname{th}^2 mu)}{(1 + r \operatorname{sech}^2 mu)^2}, \quad (5.2.24)$$

где $k^2 = m^2 - 1$, $p = k^2 + (1 + k^2) \operatorname{sh}^2 kv$, $q = m^2 \operatorname{sh}^2 kv$ и $r = (m/k)^2 \operatorname{sh}^2 kv$. Вычисляя интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} du \mathcal{H}$, получим $E = 16m$, $m > 1$. Этого и следовало ожидать, поскольку решение представляет собой упругое взаимодействие солитона и антисолитона, каждый из которых имеет энергию $8m$.

Для брыззерного решения (5.2.18) снова получим $E = 16m$, где теперь $m < 1$. Таким образом, энергия меньше, чем энергия двух

свободных солитонов (или антисолитонов), и это приводит к интерпретации бризера как связанного состояния, составленного из пары солитон — антисолитон.

Решение методом обратной задачи рассеяния

Возвращаясь к линейным уравнениям (5.1.1) и (5.2.5), мы можем перейти к решению уравнения sine-Gordon методом обратной задачи рассеяния. Так как зависимая переменная σ связана с величиной u в потенциале формулой $\sigma(x, t) = -2 \int_{-\infty}^x dx' u(x', t)$, видим, что само σ больше не является локализованной величиной. Интеграл от локализованного решения $u(x, t)$ приведет к $\sigma(x, t)$ в виде ступенчатой функции или шельфа, как указывалось при предыдущем анализе односолитонного решения. Таким образом, хотя σ стремится к нулю при $x \rightarrow -\infty$ и система (5.2.5) принимает вид

$$v_{1t} \rightarrow \frac{1}{4\zeta} v_1, \quad v_{2t} \rightarrow -\frac{i}{4\zeta} v_2 \quad (5.2.25)$$

но форма линейных уравнений (5.2.5) в пределе $x \rightarrow +\infty$ будет зависеть от значения σ при $x \rightarrow +\infty$. Единственными случаями, легкими для рассмотрения, являются те, в которых $\sigma \rightarrow 2\pi l$ при $x \rightarrow +\infty$.

Из системы (5.2.25) видно, что при $x \rightarrow -\infty$ функция может либо обращаться в нуль, либо стремиться к $e^{it/4\zeta}$. Аналогично, v_2 может либо обращаться в нуль, либо стремиться к $e^{-it/4\zeta}$. Рассмотрим теперь детальнее решение, пропорциональное фундаментальному решению ϕ , даваемому формулой (2.11.6). Тогда

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \rightarrow e^{it/4\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (5.2.26)$$

Согласно (2.11.19а), при $x \rightarrow \infty$ решение примет вид

$$v \rightarrow e^{it/4\zeta} \left[c_{11} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} + c_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} \right]. \quad (5.2.27)$$

Следовательно, в этом пределе $v_1 \sim c_{12}(\zeta, t) e^{i(t/4\zeta) - i\zeta x}$ и $v_2 \sim c_{11}(\zeta, t) \times \times e^{i(t/4\zeta) + i\zeta x}$. Временная зависимость c_{11} и c_{12} получается из вида линейных уравнений (5.2.5) в пределе $x \rightarrow +\infty$. Как указывалось выше, мы рассмотрим случай, когда $\sigma \rightarrow 2\pi l$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда

$$v_{1t} \rightarrow \frac{i}{4\zeta} v_1, \quad v_{2t} \rightarrow -\frac{i}{4\zeta} v_2 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (5.2.28)$$

Следуя процедуре, использованной для модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза и описываемой формулами (5.1.10),

получим

$$\begin{aligned} c_{11}(\zeta, t) &= c_{11}(\zeta, 0) e^{-i t/2 \zeta}, \\ c_{12}(\zeta, t) &= c_{12}(\zeta, 0). \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

Вспоминая, что $R_R(\zeta, t) = c_{11}(\zeta, t)/c_{12}(\zeta, t)$ и $m_{Rl}(k_l, t) = -i c_{11}(k_l, t)/c_{12}(k_l, t)$, находим, что

$$\begin{aligned} \Omega_R(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi} R_R(\zeta, 0) e^{-i(t/2\zeta) + i\zeta z} - \\ &\quad - \sum m_{Rl}(k_l, 0) e^{-i(t/2k_l) + i k_l z}. \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

Используя соотношения между $c_{ij}(\zeta, t)$ (2.11.23), получим

$$\begin{aligned} \Omega_L(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi} R_L(\zeta, 0) e^{i(t/2\zeta) - i\zeta z} - \\ &\quad - \sum m_{Ll}(k_l, 0) e^{i(t/2k_l) - i k_l z}. \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

Теперь решения уравнения sine-Gordon получаются с помощью процедуры, которая использовалась в случае модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза. Как и прежде, легко получить только чисто солитонные решения. Так как $u = -\frac{1}{2} \sigma_x$, из (5.1.18) видно, что многосолитонные решения будут иметь вид

$$\sigma = -4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{Im} \det(I - iM)}{\operatorname{Re} \det(I - iM)} \right]. \quad (5.2.32)$$

Снова элементы M даются формулами (5.1.19), но только с зависимостью от времени

$$M_{Ll}(k_l, t) = m_{Ll}(k_l, 0) e^{i t/2 k_l}. \quad (5.2.33)$$

Простейший случай одного полюса на мнимой оси в точке $k_l = i a_1/2$ дает $m_{Ll}(k_l, t) = m_{Ll}(k_l, 0) e^{t/a_1}$ и

$$M_{Ll} = \frac{m_{Ll}(k_l, 0)}{a_1} e^{a_1 x + t/a_1}. \quad (5.2.34)$$

Из (5.2.32) находим, что выражение для σ имеет вид

$$\sigma = 4 \operatorname{arctg} (e^{a_1 x + t/a_1 + \delta}), \quad (5.2.35)$$

где $\delta = \ln[m_{Ll}(k_l, 0)/a_1]$. Это то же решение, что и в случае одного солитона (5.2.11).

Двухсолитонное решение

Решение уравнения sine-Gordon, описывающее взаимодействие двух солитонов, получается при рассмотрении случая двух полюсов на мнимой оси. Ситуация очень похожа на ту, которая была

описана в разд. 4.4 для уравнения Кортевега — де Фриза. Полагая $k_1 = ia_1/2$ и $k_2 = ia_2/2$, находим, что $\det(I - iM)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\det(I - iM)] &= 1 - \frac{m_{L1} m_{L2}}{a_1 a_2} \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 e^{(a_1 + a_2)x}, \\ \operatorname{Im} [\det(I - iM)] &= - \left(\frac{m_{L1}}{a_2} e^{a_1 x} + \frac{m_{L2}}{a_2} e^{a_2 x} \right). \end{aligned} \quad (5.2.36)$$

Выражение для σ (5.2.32) можно представить в виде, согласующемся с (5.2.14). Получим

$$\sigma = -4 \operatorname{arctg} \left[\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2} (a_1 - a_2)}{\operatorname{sh} \frac{1}{2} (a_1 + a_2)} \right], \quad a_1 > a_2, \quad (5.2.37)$$

где

$$u_l = a_l x + i/a_l + \delta_l \quad \text{и} \quad \exp \delta_l = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \left[\frac{m_{Ll}(k, 0)}{a_l} \right].$$

Здесь рассмотрены специальные решения, которые развиваются в чисто многосолитонные решения. Простейший способ вычисления амплитуд других начальных профилей состоит в использовании законов сохранения, полученных из (2.11.57). Процедура аналогична той, которая была разработана в разд. 4.5 для уравнения Кортевега — де Фриза. Если начальный профиль импульса меняется гладко и нет импульсов нулевой площади (бризеров), то можно ожидать, что этот метод даст результаты с разумной точностью.

Автомодельное решение и л-импульс

Очевидная инвариантность уравнения sine-Gordon при преобразовании $x' = ax$, $t' = t/a$ означает существование автомодельной переменной $\eta = xt$ ([7], с. 133). Это можно увидеть непосредственно, используя соответствующие дифференциальные выражения $\partial/\partial x = td/d\eta$ и $\partial/\partial t = xd/d\eta$ в уравнении sine-Gordon (5.2.1). Тогда мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение [8]

$$\eta \sigma'' + \sigma' - \sin \sigma = 0, \quad (5.2.38)$$

где штрих означает дифференцирование по η . Легко показать, что новая зависящая переменная w , связанная с σ соотношением $w = \exp(i\sigma)$, удовлетворяет уравнению

$$w'' - \frac{(w')^2}{w} + \frac{2w' - w + 1}{2\eta} = 0, \quad (5.2.39)$$

которое является частным случаем уравнения, определяющего третью трансцендентную функцию Пенлеве ([59], с. 345; [31],

с. 185). Так как эти функции в сколько-нибудь удобном виде не существуют, предпочтительнее прибегнуть к численному интегрированию уравнения (5.2.38). Пример такого решения показан на рис. 5.5, где также приведен результат для $\sigma' = -2u/t$ и диаграмма фазовой плоскости решения. Показанный на рисунке пример удовлетворяет условиям $\sigma(0) = 0.1$, $\sigma'(0) = \sin \sigma(0)$, что дает решение, конечное при $\eta = 0$.

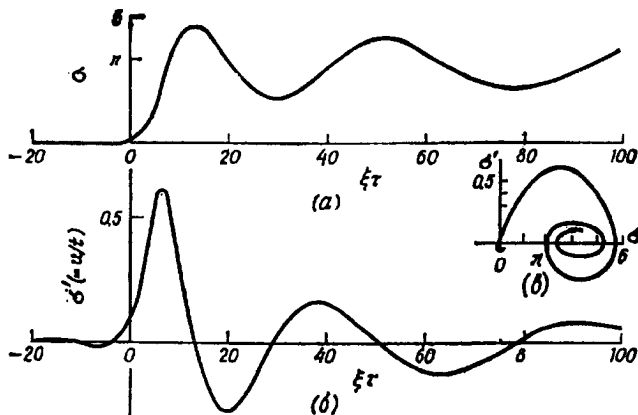


Рис. 5.5. Автомоделное решение уравнения sine-Gordon: а — численное решение уравнения (5.2.38); б — производная решения, изображенного на рис. а; в — фазовый портрет решения. (С разрешения Американского института физики.)

Так как σ растет от 0 до π при изменении π от $-\infty$ до $+\infty$, мы видим, что решение не относится к классу решений, рассмотренных выше с помощью обратной задачи рассеяния. Когда ранее вычислялась зависимость решения от времени, предполагалось, что σ стремится к величине, кратной 2π . Соответствующее вычисление для σ , стремящегося к π , дает $c_{11}(k, t) = c_{11}(k, 0)e^{it/2k}$ и $c_{12}(k, t) = c_{12}(k, 0)$. Коэффициенты отражения в этом случае имеют вид

$$R_R(k, t) = c_{11}(k, t)/c_{12}(k, 0) = R_R(k, 0)e^{it/2k},$$

$$R_L(k, t) = c_{11}(-k, t)/c_{12}(k, 0) = R_L(k, 0)e^{-it/2k}.$$

В качестве примера рассмотрим коэффициент отражения, связанный с профилем «обрезанного» импульса $u(x, 0) = \theta(x - x_1)\mu \operatorname{sech} \mu x$, данного в (2.11.61). При $\mu > 0$ и $x_1 > 0$ в верхней полуплоскости нет полюса, и мы получим

$$\Omega_L(2z, t) = \frac{1}{2} \mu \operatorname{sech} \mu x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{-2ik(z-x_1)-it/2k}}{k + i(\mu/2) \operatorname{th} \mu x_1}. \quad (5.2.40)$$

Вводя новую переменную интегрирования κ с помощью соотношения $k = 0\kappa$ и выбирая $4\theta^2 = t/(z - x_1)$, получим

$$\Omega_L(2z, t) = \frac{\mu}{2} \operatorname{sech} \mu x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi i \kappa + i\mu \sqrt{(x - x_1)/t} \operatorname{th} \mu x_1} \frac{e^{-i \sqrt{t(x - x_1)}(\kappa + 1/\kappa)}}{\kappa}. \quad (5.2.41)$$

Тогда в общем случае $\Omega_L(2z, t)$ является функцией как x , так и t , так же как и x_1 . Если мы теперь рассмотрим случай с $x_1 = 0$, так что площадь под кривой $u(x, 0)$ равна $\pi/2$, то $\Omega_L(2z, t)$ будет функцией только автомодельной переменной $\eta = xt$. Следовательно, можно ожидать, что автомодельное решение будет непосредственно связано с этим случаем. Этот пример будет снова рассмотрен в разд. 7.1.

5.3. КУБИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

В разд. 5.1 мы видели, что бризерное решение модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза обнаруживает солитоноподобные свойства при взаимодействии с другим бризерным решением. То же самое имеет место для бризерного решения уравнения sine-Gordon. Для бризерных решений с малой амплитудой мы видели также, что часть бризерного решения, отличающаяся малой амплитудой и медленно меняющейся фазой, удовлетворяет уравнению типа

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0, \quad (5.3.1)$$

которое называется кубическим уравнением Шрёдингера. Сейчас мы исследуем это уравнение и покажем, что даже для решений с большой амплитудой оно обладает свойствами, которых мы ожидаем от солитонных уравнений, за исключением того, что самое элементарное солитонное решение теперь является локализованным осцилляторным решением, аналогичным ранее рассмотренному бризерному решению.

Линейные уравнения

Зависимая переменная в кубическом уравнении Шрёдингера является комплексной величиной. Чтобы получить соответствующие линейные уравнения для решения методами обратной задачи рассеяния, мы начнем с системы

$$\begin{aligned} v_{1x} + i\zeta v_1 &= u v_2, \\ v_{2x} - i\zeta v_2 &= -u^* v_1 \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Производные по времени от функций v_1 и v_2 даются уравнениями (5.1.35) с соответствующими коэффициентами A, B, C и $D (= -A)$. Чтобы получить эти коэффициенты, мы, как и при выводе системы

(5.1.36), приравняем сначала смешанные вторые производные от v_1 и v_2 . В результате имеем

$$\begin{aligned} A_x &= u^* B + u C, \\ B_x + 2i\zeta B &= -2Au + u_t, \\ C_x - 2i\zeta C &= -2Au^* - u_t^*. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Так как кубическое уравнение Шрёдингера — это уравнение второго порядка по x , можно ожидать, что разложения в ряд по ζ для A , B и C будут содержать только члены до ζ^2 включительно.

Поэтому можно записать $A = \sum_0^2 A_n \zeta^n$, $B = \sum_0^2 B_n \zeta^n$ и $C = \sum_0^2 C_n \zeta^n$.

Подставляя эти выражения в (5.3.3) и приравнявая члены с одинаковыми степенями ζ , находим, что $B_2 = C_2 = 0$, $A_2 = a_2(t)$ и $B_1 = ia_2 u$, $C_1 = -ia_2 u^*$, $A_1 = a_1(t)$, а также, что $2iB_0 = -2a_1 u - ia_2 u_x$, $2iC_0 = 2a_1 u^* - ia_2 u_x^*$ и $A_0 = -(1/2)a_2 |u|^2$. Эволюционное уравнение для u получается из членов второго из уравнений (5.3.3), не содержащих ζ . Находим, что

$$u_t - ia_1 u_x + \frac{1}{2} a_2 (u_{xx} + 2|u|^2 u) = 0. \quad (5.3.4)$$

Полагая $a_1 = 0$ и $a_2 = -2i$, получаем кубическое уравнение Шрёдингера (5.3.1). Приведенные выше выражения для A , B и C дают линейные уравнения

$$\begin{aligned} v_{1t} &= i(|u|^2 - 2\zeta^2) v_1 + (iu_x + 2\zeta u) v_2, \\ v_{2t} &= (iu_x^* - 2\zeta u^*) v_1 - i(|u|^2 - 2\zeta^2) v_2 \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Решение методом обратной задачи рассеяния

Следуя описанной ранее процедуре анализа других солитонных уравнений, рассмотрим теперь решение (v_1, v_2) системы (5.3.2), пропорциональное одному из фундаментальных решений (ψ_1, ψ_2) или $(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2)$, которые были введены в разд. 2.11. Сконцентрируем внимание на последнем решении и запишем

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = f(t) \psi = f(t) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (5.3.6)$$

Согласно (2.11.7), имеем $v^2 \rightarrow f(t) e^{i\zeta x}$ при x , стремящемся к $+\infty$. Из первого из уравнений (5.3.5), предполагая, что u — локализованная функция, получим $f_t = 2i\zeta^2 f$ или $f(t) = f(0) e^{2i\zeta^2 t}$.

При x , стремящемся к $-\infty$, используя (3.9.8b), запишем

$$v = f(t) \psi \rightarrow f(0) e^{2i\zeta^2 t} \left[c_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} + c_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} \right]. \quad (5.3.7)$$

Таким образом, в этом пределе $v_1 \rightarrow f(0) c_{22}(\zeta, t) e^{-itx+2i\zeta t}$ и $v_2 \rightarrow f(0) c_{21}(\zeta, t) e^{itx+2i\zeta t}$. Подставляя в (5.3.5) и пренебрегая величиной u , получим

$$\begin{aligned} c_{21}(\zeta, t) &= c_{21}(\zeta, 0) \\ c_{22}(\zeta, t) &= c_{22}(\zeta, 0) e^{-4i\zeta t}. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Согласно (2.11.37b), зависимость нормировочной постоянной от времени имеет вид

$$m_{Li}(k_i, t) = -i \frac{c_{22}(k_i, t)}{c_{21}(k_i, t)} = m_{Li}(k_i, 0) e^{-4ik_i^2 t}. \quad (5.3.9)$$

Повторяя предыдущие вычисления для фундаментального решения ϕ или используя соотношения (3.9.10) между различными коэффициентами $c_{ij}(\zeta, t)$, получим также $c_{11}(\zeta, t) = c_{11}(\zeta, 0) e^{4i\zeta t}$, $c_{12}(\zeta, t) = c_{12}(\zeta, 0)$ и

$$m_{Ri}(k_i, t) = i \frac{c_{11}(k_i, t)}{c_{12}(k_i, t)} = m_{Ri}(k_i, 0) e^{4ik_i^2 t}. \quad (5.3.10)$$

Чтобы найти решения кубического уравнения Шрёдингера, используем сейчас результаты обратной задачи рассеяния для комплексного потенциала, полученные в разд. 3.9. Единственные решения, которые легко найти в явном виде, — это многосолитонные решения, связанные с безотражательными потенциалами. Даже для них вычисления связаны со значительными алгебраическими трудностями. Простейшим случаем, конечно, является односолитонное решение, так как матрица M (3.9.19) состоит только из одного элемента. Для единственного полюса в точке $k_1 = \alpha + i\beta$ ($\beta > 0$) находим, что

$$M = \frac{m_{R1}(k_1, 0)}{2\beta} e^{-2\beta x + 4i(\alpha + i\beta)t}. \quad (5.3.11)$$

Из (3.9.20) имеем

$$u(x, t) = \frac{2m_{R1}^*(k_1^*, 0)}{1 + |M|^2} e^{-2ik_1^* x - 4ik_1^* t}. \quad (5.3.12)$$

Полагая $m_{R1}(k_1, 0)/2\beta = e^{\delta + i\theta}$, можно это односолитонное решение переписать в виде

$$u(x, t) = 2\beta \operatorname{sech}(2\beta x + 8\alpha\beta t - \delta) e^{-2i\alpha x - 4i(\alpha^2 - \beta^2)t - i\theta}. \quad (5.3.13)$$

Для $\alpha = 0$ этот результат сводится к частному случаю, полученному для решения с малой амплитудой, (5.1.34). Следует отметить, что если $u(x, t)$ является решением кубического уравнения Шрёдингера, то и $-u(x, t)$ также является решением.

Упражнение 3

Используя метод, введенный в гл. 1 для уравнения Кортевега — де Фриза, можно также получить линейные уравнения для модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза и кубического уравнения Шрёдингера, если взять оператор L в виде 2×2 -матрицы.

Рассмотрите $Ly = \lambda y$, где λ постоянная, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ и $L = KD + U$, где K — постоянная диагональная матрица $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$, а $D = \partial/\partial x$. Положим далее $U = \begin{pmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{pmatrix}$ для кубического уравнения Шрёдингера и $U = \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & 0 \end{pmatrix}$ с действительным u для модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза. Предположите, что $y_t = Ay$, где A есть 2×2 -матрица, и покажите, что $\lambda_t = 0$, если $U_t + [L, A] = 0$. Покажите, что выбор $A = aID$, где a постоянная, а I — единичная 2×2 -матрица, приводит к линейному уравнению $U_t - aU_x = 0$.

А. Кубическое уравнение Шрёдингера $iu_t + u_{xx} + \kappa |u|^2 u = 0$

Покажите, что это уравнение следует из $A = aID^2 + B$. В частности:
(а) получите из требования $[K, B] - 2aU_x = 0$ матричное дифференциальное уравнение в частных производных $U_t + KB_x - aU_{xx} + [U, B] = 0$;
(б) определите элементы B и покажите, что получается кубическое уравнение Шрёдингера

$$-u_t + a \left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \right) u_{xx} - 2a \frac{(k_1 + k_2)}{k_1 k_2 (k_1 - k_2)} |u|^2 u = 0;$$

(с) упростите этот результат, выбирая $k_1 = i(1 + \rho)$, $k_2 = i(1 - \rho)$, $a = i\rho$, и получите кубическое уравнение Шрёдингера в приведенном выше виде с $\kappa = 2/(1 - \rho^2)$ и

$$L = i \begin{pmatrix} 1 + \rho & 0 \\ 0 & 1 - \rho \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = -i \left\{ -\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D^2 + \begin{bmatrix} \frac{|u|^2}{1 + \rho} & iu_x^* \\ -iu_x & -\frac{|u|^2}{1 - \rho} \end{bmatrix} \right\}.$$

Операторы L и $\tilde{A} = iA$ были впервые введены Захаровым и Шабатом в 1971 г. [119].

В. Модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза $u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$

(а) Возьмите $A = aID^3 + BD + C$ и покажите, что операторное уравнение сводится к матричному дифференциальному уравнению в частных производных $U_t - aU_{xxx} + KC_x - BU_x + [U, C] = 0$, если выбрать

$$[K, B] - 3aU_x = 0,$$

$$KB_x + [K, C] + [U, B] - 3aU_{xx} = 0.$$

(б) Выразите элементы B и C через функцию u и ее пространственные производные, а также через k_1 , k_2 и a . Заметьте, что результат упрощается, если выбрать $k_1 + k_2 = 0$. В частности, для $k_1 = -k_2 = 1$ получим, что $a = -4$ и

$$A = -4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D^3 - 6 \begin{pmatrix} u^2 & u_x \\ -u_x & u^2 \end{pmatrix} D - 3 \begin{pmatrix} 2uu_x & u_{xx} \\ -u_{xx} & 2uu_x \end{pmatrix}.$$

Аналогичные результаты были приведены Вадати [112] и Танахой [107].

Упражнение 4

Покажите, что исключая ζ из системы (5.3.5) с помощью (5.3.2), можно результат записать в виде $v_t = Av$, где $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ и $A = MD^2 + ND + C$, где в свою очередь $D = \partial/\partial x$ и

$$M = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = -2i \begin{pmatrix} 0 & u \\ u^* & 0 \end{pmatrix}, \quad C = i \begin{pmatrix} -|u|^2 & u_x \\ u_x^* & |u|^2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 5

Определите зависимость от времени функций ξ и θ , появляющихся в упр. 5 гл. 3, так, чтобы потенциал $u(x, t)$ удовлетворял кубическому уравнению Шрёдингера (5.3.1), а φ и ψ были соответствующими фундаментальными решениями. Покажите, что результат может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} u &= 2\beta e^{-i(\alpha z/\beta + \delta)} \operatorname{sech} z, \\ \varphi &= \frac{e^{-ikz}}{k - k_1^*} \begin{pmatrix} k - \alpha - i\beta \operatorname{th} z \\ -i\beta e^{i\theta} \operatorname{sech} z \end{pmatrix}, \\ \psi &= \frac{e^{ikz}}{k_1 - k_1^*} \begin{pmatrix} -i\beta e^{-i\theta} \operatorname{sech} z \\ k - \alpha + i\beta \operatorname{th} z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $k = \alpha + i\beta$, $z = 2\beta(x - \xi)$, $\xi = -4\alpha\beta t + \xi_0$, $\sigma = z/2\beta + \xi$, $\theta = \alpha z/\beta + \delta$ и $\delta = 2\alpha\xi + 4(\alpha^2 - \beta^2)t + \delta_0 = -4(\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha\xi_0 + \delta_0$. Эта форма решения окажется полезной в гл. 9.

Упражнение 6

Используя метод гл. 1, можно получить уравнение sine-Gordon и связанные с ним линейные уравнения, если взять комплексный потенциал в виде $\mathcal{Y} = -[(\sigma_x)^2 \pm 2i\sigma_{xx}]/4$ и записать оператор B в интегральной форме: $B = \int f(x, t) \int dx' g(x', t)$, где f и g подлежат определению.

(а) Покажите, что требование $\mathcal{Y}_t + [L, B] = 0$, которое должно быть выполнено, чтобы собственные значения не зависели от времени, приводит к уравнению $[-\mathcal{Y}_t + 2(fg)_x]w + (f_{xx} - \mathcal{Y}f) \int dx' (gw) - f \int dx' (g_{xx} - \mathcal{Y}g)w = 0$, где w удовлетворяет условию $(D^2 - \mathcal{Y})w = \lambda w$. В этом результате не будет интегральных операторов, если положить $f_{xx}/f = g_{xx}/g = \mathcal{Y} = \exp\left(\pm \frac{1}{2} i\sigma\right) \times \left[\exp\left(\mp \frac{1}{2} i\sigma\right)\right]_{xx}$.

(б) Покажите, что эволюционное уравнение имеет вид

$$-\frac{1}{2}\sigma_x\sigma_{xt} \pm \frac{i}{2}\sigma_{xxt} - 2ik(t)\sigma_x e^{\mp i\sigma} = 0.$$

где $k(t)$ появляется в результате интегрирования. Покажите, что при $k \equiv 1/4$ действительная часть этого уравнения дает уравнение sine-Gordon, а мнимая является производной действительной части.

(с) Покажите, что $w_t = e^{\mp i\sigma/2} \int dx' e^{\pm i\sigma/2} w$. Обозначьте выбор верхнего и нижнего знаков через w_1 и w_2 соответственно и покажите, что $v_1 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ и $v_2 = \frac{1}{2}i(w_1 - w_2)$; убедитесь, что v_1 и v_2 удовлетворяют линейным уравнениям (5.2.5).

5.4. ОБЩИЙ КЛАСС РАЗРЕШИМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Прежде чем завершить эту главу, мы покажем, как можно существенно расширить класс разрешимых нелинейных эволюционных уравнений. Полное обсуждение этого вопроса можно найти в научной литературе ([2], [21]).

Как мы уже отметили, все линейные уравнения, связанные с модифицированным уравнением Кортевега — де Фриза (5.1.9), уравнением sine-Gordon (5.2.5) и кубическим уравнением Шрёдингера (5.3.5), имеют вид

$$\begin{aligned}v_{1t} &= Av_1 + Bv_2, \\ v_{2t} &= Cv_1 - Av_2.\end{aligned}\tag{5.4.1}$$

Этот результат может быть использован в качестве отправной точки при определении достаточно широкого класса эволюционных уравнений, к которым может быть применен метод обратной задачи рассеяния. Сначала запишем уравнения для пространственных производных в более общем виде

$$\begin{aligned}v_{1x} + i\zeta v_1 &= qv_2, \\ v_{2x} - i\zeta v_2 &= rv_1.\end{aligned}\tag{5.4.2}$$

Соотношения $r = -q$ или $r = -q^*$ дают ранее рассмотренные линейные уравнения. Сейчас мы не делаем таких ограничений и выводим в конце концов пару *зацепленных* нелинейных эволюционных уравнений, которым удовлетворяют две зависимые переменные q и r . Предыдущие результаты можно получить, связав q и r вышеупомянутыми соотношениями.

Из требования $\zeta_t = 0$ и равенства смешанных вторых производных, т. е. $v_{1xt} = v_{1tx}$, $v_{2xt} = v_{2tx}$, находим, что поскольку v_1 и v_2 линейно независимы, то должны удовлетворяться следующие уравнения:

$$\begin{aligned}A_x &= -rB + qC, \\ B_x + 2i\zeta B &= -2qA + q_t, \\ C_x - 2i\zeta C &= 2rA + r_t.\end{aligned}\tag{5.4.3}$$

В рассмотренных до сих пор эволюционных уравнениях коэффициенты A , B и C имели вид разложений в ряды по положительным (или отрицательным) степеням ζ . Мы больше не будем налагать таких ограничений на вид этих коэффициентов.

При исследовании всех ранее рассмотренных эволюционных уравнений можно проследить, что их разрешимость связана с простой экспоненциальной зависимостью коэффициента отражения от времени в соответствующей задаче рассеяния. Показатель экспоненты фактически оказывается дисперсионным соотношением для линейного уравнения, получающегося, если опустить нелиней-

ный член в каждом из эволюционных уравнений. Конкретнее, линейаризованные варианты модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза, кубического уравнения Шрёдингера и уравнения sine-Gordon имеют соответственно вид $v_t + v_{xxx} = 0$, $iv_t + v_{xx} = 0$ и $v_{xt} = v$. Предположение, что $v = e^{i(kx - \omega(k)t)}$, дает дисперсионные соотношения $\omega = -k^3$, $\omega = k^2$ и $\omega = 1/k$ соответственно. Эти результаты нужно сравнивать с коэффициентами отражения для каждого из этих уравнений. Класс эволюционных уравнений, для которых коэффициент отражения имеет простую экспоненциальную зависимость от времени, фактически много шире, чем встречавшиеся до сих пор. Сейчас мы рассмотрим метод определения такого более широкого класса эволюционных уравнений [2].

В гл. 2 было показано, что уравнения, выражающие линейную зависимость различных фундаментальных решений, можно интерпретировать как решения различных задач рассеяния. Тогда коэффициенты отражения для этих задач рассеяния легко идентифицируются. Сейчас мы снова рассмотрим этот результат в несколько более широком контексте и увидим, какое нужно ввести ограничение, чтобы коэффициент отражения имел простую экспоненциальную зависимость от времени.

Рассмотрим решения системы (5.4.2), пропорциональные фундаментальным решениям φ_1 , φ_2 и $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$ которые вводятся соотношениями типа (2.11.15), т. е.

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} \quad \text{при } v \rightarrow -\infty, \quad (5.4.4)$$

$$\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \quad (5.4.5)$$

Соотношение между φ и $\bar{\varphi}$ типа (3.9.7) больше не получается, поскольку не задана связь между q и r . Нам понадобятся также решения ψ и $\bar{\psi}$, подобные тем, которые были даны в (2.11.17). Они имеют предельные формы

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad (5.4.6)$$

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} \quad \text{при } v \rightarrow +\infty. \quad (5.4.7)$$

Запишем соотношения между этими решениями:

$$\varphi = a\bar{\psi} + b\psi, \quad \bar{\varphi} = \bar{b}\bar{\psi} - \bar{a}\psi. \quad (5.4.8)$$

Эти соотношения можно сравнить с соотношениями (2.11.19) и (2.11.20), а также с соотношениями (3.9.8) и (3.9.9). Мы можем также записать

$$\psi = -a\bar{\varphi} + \bar{b}\varphi, \quad \bar{\psi} = b\bar{\varphi} + \bar{a}\varphi. \quad (5.4.9)$$

С помощью вронскиана, определенного как в (2.11.18), найдем, что $a = W(\varphi, \psi)$, $b = -W(\varphi, \bar{\psi})$, $\bar{a} = W(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$, $\bar{b} = W(\bar{\varphi}, \psi)$. (5.4.10)

Найдем также, что $W(\varphi, \bar{\varphi}) = -1$, и затем из (5.4.8) получим, что $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$.

Первое из соотношений (5.4.9) является решением, которое стремится к $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x}$ при x , стремящемся к $+\infty$, и стремится к $a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} + \bar{b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}$ при x , стремящемся к $-\infty$. Оно, таким образом, представляет собой рассеяние решения $a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x}$, входящего из $-\infty$. Тогда коэффициент отражения *единичной* амплитуды падающей волны равен \bar{b}/a . Именно временную зависимость этого коэффициента отражения мы хотим рассмотреть. В частности, мы рассмотрим, как можно сделать, чтобы он имел простую экспоненциальную зависимость от времени. Как и следовало ожидать при анализе задачи рассеяния, мы должны детально исследовать решения v_1 и v_2 , а также функции A , B и C в двух пределах $x \rightarrow \pm\infty$.

Исследование (5.4.1) в пределе $x \rightarrow -\infty$ показывает, что в этом пределе B и C должны обращаться в нуль, если $v = (v_1, v_2)^T$ пропорционально фундаментальным решениям φ или $\bar{\varphi}$. Из первого: из уравнений (5.4.3) находим, что в этом пределе A не зависит от x . Предположим также, что при $x \rightarrow -\infty$ A не зависит от t . В этой связи следует заметить, что встречающиеся в трех предыдущих примерах функции A не зависят от t в этом пределе. Поэтому первое из уравнений (5.4.3) можно записать как $v_{1t} = A_-(\zeta)v_1$, где

$$A_-(\zeta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} A(x, t, \zeta). \quad (5.4.11)$$

Тогда, выражая v через фундаментальное решение φ , получаем $v = \exp[A_-(\zeta)t]\varphi$. Аналогично, записывая

$$\bar{v}_{1t} = \bar{A}\bar{v}_1 + \bar{B}\bar{v}_2, \quad \bar{v}_{2t} = \bar{C}\bar{v}_1 - \bar{A}\bar{v}_2 \quad (5.4.12)$$

и принимая во внимание асимптотическую форму (5.4.5), мы находим, что $\bar{v} = \exp[-A_-(\zeta)t]\bar{\varphi}$. Линейные уравнения (5.4.1) и (5.4.12) можно записать в матричном виде, выразив их через φ и $\bar{\varphi}$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} A - A_- & B \\ C & -A - A_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (5.4.13a)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} A + A_- & B \\ C & -A + A_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix}. \quad (5.4.13b)$$

При x , стремящемся к $+\infty$, соотношения (5.4.8) показывают, что

$$\varphi \rightarrow \begin{pmatrix} ae^{-i\zeta x} \\ be^{i\zeta x} \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{b}e^{-i\zeta x} \\ -a e^{i\zeta x} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (5.4.14)$$

Рассматривая (5.4.13) в пределе при $x \rightarrow +\infty$, находим, что

$$\begin{aligned} a_t &= (A_+ - A_-)a + B_+b, \\ b_t &= C_+a - (A_+ + A_-)b, \\ \bar{a}_t &= -(A_+ - A_-)\bar{a} - C_+\bar{b}, \\ \bar{b}_t &= -B_+\bar{a} + (A_+ + A_-)\bar{b}, \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

где $A_+(\zeta, t) \equiv A(\infty, t, \zeta)$, $B_+ \equiv B(\infty, t, \zeta)e^{2i\zeta x}$ и $C_+ \equiv C(\infty, t, \zeta)e^{-2i\zeta x}$.

Обозначая коэффициент отражения $\rho \equiv \bar{b}/a$, находим, что из первого и четвертого соотношений (5.4.14) можно получить

$$\rho_t = 2A_-(\zeta)\rho - \frac{B_+}{a^2}. \quad (5.4.16)$$

Таким образом, если либо $B_+ = 0$, либо в более общем виде $B_+ = F(\zeta)\bar{b}a$, можно получить дифференциальное уравнение для ρ , которое приводит к чисто экспоненциальной зависимости от времени. Поэтому нужно проанализировать вид B_+ .

Выражение для B_+ можно получить непосредственно, решая (5.4.3) и затем переходя к пределу в этом решении при $x \rightarrow +\infty$. Однако рассмотрение этого решения показывает [2], что можно очень просто построить окончательное выражение для B_+ . Сначала мы приходим к заключению, что нам нужны только уравнения, характеризующие изменение во времени ψ_1 и ψ_2 . Эти уравнения получаются методом, аналогичным тому, который был использован при получении уравнений (5.4.13a), и имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_{1t} &= (A + A_+)\psi_1 + B\psi_2, \\ \psi_{2t} &= C\psi_1 - (A - A_+)\psi_2. \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

Дифференцируем первое из уравнений (5.4.2) по времени, используем первое из уравнений (5.4.17) и затем умножаем полученное уравнение на ψ_2 . Затем умножаем второе из уравнений (5.4.2) на $B\psi_2$ и складываем с только что полученным уравнением. После исключения A_x с помощью первого из уравнений (5.4.3) имеем

$$-2rB\psi_1\psi_2 + 2Aq\psi_2^2 + (B\psi_2^2)_x = q_t\psi_2^2. \quad (5.4.18)$$

Если применить аналогичную процедуру к производной по времени от второго из уравнений (5.4.2) и результат сложить с (5.4.18), получим

$$(-2\psi_1\psi_2A - \psi_2^2B + \psi_1^2C)_x = -q_t\psi_2^2 + r_t\psi_1^2. \quad (5.4.19)$$

Проинтегрируем сейчас это выражение от $-\infty$ до $+\infty$. Используя (5.4.4), (5.4.7) и (5.4.9), легко получим

$$B_+ = - \int_{-\infty}^{\infty} dx (-q_t \psi_2^2 + r_t \psi_1^2) + 2a\bar{b}A_-(\zeta). \quad (5.4.20)$$

Из (5.4.20) видно, что первое из упомянутых условий получения экспоненциальной зависимости ρ от времени, а именно $B_+ = 0$, означает, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx (-q_t \psi_2^2 + r_t \psi_1^2) &= 2a\bar{b}A_-(\zeta) = \\ &= -2A_- \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1 \psi_2) = \\ &= -2A_- \int_{-\infty}^{\infty} dx (q\psi_2^2 + r\psi_1^2). \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

Использованное здесь интегральное представление для $a\bar{b}$ возникает при получении (5.4.20). Теперь мы запишем (5.4.21) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx [(-q_r + 2A_- q) \psi_2^2 + (r_t + 2A_- q) \psi_1^2] = 0. \quad (5.4.22)$$

Конечная цель этих рассуждений — определение нелинейных эволюционных уравнений, связанных с коэффициентами отражения, экспоненциально зависящими от времени. Уравнение (5.4.22) содержит одну из возможностей, приводящую к таким уравнениям, а именно $B_+ = 0$. Сейчас мы рассмотрим, как из (5.4.22) можно получить эволюционные уравнения.

Мы должны, конечно, извлечь из (5.4.22) выражение, не зависящее от ζ , так как сами эволюционные уравнения не зависят от этого параметра. Это можно сделать, рассмотрев задачу на собственные значения для квадратов собственных функций ψ_1^2 и ψ_2^2

входящих в (5.4.22). Введем собственный вектор $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \psi_1^2 \\ \psi_2^2 \end{pmatrix}$ и построим такой оператор L , что $L\Psi = \zeta\Psi$. Чтобы использовать этот оператор, запишем сначала (5.4.22) в виде скалярного произведения

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx [r_t + 2A_-(\zeta) r_t - q_t + 2A_-(\zeta) q] \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (5.4.23)$$

Вводя вектор $u = \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}$ и матрицу $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, которая является спинной матрицей Паули ([96], разд. 33), можно записать (5.4.23) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \{ [u_i^T \sigma_3 + 2u^T A_-(\xi)] \cdot \Psi \} = 0, \quad (5.4.24)$$

где T означает транспонирование. Если бы $A_-(\xi)$ была равна просто ξ , мы бы могли сразу же заменить $\xi\Psi$ на $L\Psi$. Далее, поскольку $\xi^2\Psi = \xi L\Psi = L^2\Psi$ и в общем случае $\xi^n\Psi = L^n\Psi$, можно заменить $A_-(\xi)$ на $A_-(L)$, если $A_-(\xi)$ разложима в ряд по степеням ξ .

Прежде чем перейти к этому, определим оператор L . Сначала используем (5.4.2), чтобы записать

$$\zeta \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \frac{i}{2i} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} -v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} qv_1v_2 \\ -rv_1v_2 \end{pmatrix}. \quad (5.4.25)$$

Снова используя соотношение $-v_1v_2 = \int_x^\infty dy (v_1v_2)_y = \int_x^\infty dy (rv_1^2 + qv_2^2)$, можно записать

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} qv_1v_2 \\ -rv_1v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -q \int_x^\infty dy (rv_1^2 + qv_2^2) \\ r \int_x^\infty dy (rv_1^2 + qv_2^2) \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} q \int_x^\infty dyr & q \int_x^\infty dyq \\ -r \int_x^\infty dyr & -r \int_x^\infty dyq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

Из (5.4.25) видно, что оператор L имеет вид

$$L = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} - 2q \int_x^\infty dyr(y) & -2q \int_x^\infty dyq(y) \\ 2r \int_x^\infty dyr(y) & \frac{\partial}{\partial x} + 2q \int_{-\infty}^x dyr \end{pmatrix}. \quad (5.4.27)$$

Сейчас мы вернемся к использованию этого оператора при определении эволюционных уравнений. Рассмотрим для простоты случай $A_-(\xi) = \xi$. Тогда в (5.4.24) можно записать

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx u^T A_-(\xi) \cdot \Psi &= \int_{-\infty}^{\infty} dx u^T \cdot L\Psi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \{r(L_{11}\Psi_1 + L_{12}\Psi_2) + q(L_{21}\Psi_1 + L_{22}\Psi_2)\}, \end{aligned} \quad (5.4.28)$$

где L_{ij} — элементы оператора L в (5.4.27); они означают интегралы от Ψ_i , как указано в (5.4.26). Чтобы все подынтегральное выражение в (5.4.24) было пропорционально Ψ , мы используем теперь интегрирование по частям, чтобы перенести операторы в L_{ij} от Ψ_i к r и q . (Фактически мы просто меняем порядок интегрирования.) В качестве примера рассмотрим

$$\begin{aligned} 2i \int_{-\infty}^{\infty} dx q L_{21} \Psi_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx q(x) 2r(x) \int_x^{\infty} dy r(y) \Psi_1(y) = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \Psi_1(y) r(y) \int_{-\infty}^x dx q(x) r(x) = \\ &= 2i \int_{-\infty}^{\infty} dy \Psi_1(y) \tilde{L}_{12} q(y). \end{aligned} \quad (5.4.29)$$

Операторы L_{12} больше на Ψ_1 не действуют, и подынтегральное выражение пропорционально самому Ψ . Окончательный вид (5.4.24) с $A_-(\xi) = \xi$ может быть теперь записан следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^T \cdot (\sigma_3 u_t + 2\tilde{L}u) = 0. \quad (5.4.30)$$

Это уравнение будет удовлетворено, если положить $\sigma_3 u_t + 2\tilde{L}u = 0$. Для более общего выражения $A_-(\xi)$, которое может быть разложено в степенной ряд по ξ , получим окончательный результат

$$\sigma_3 u_t + 2A_-(\tilde{L})u = 0. \quad (5.4.31)$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены другие компоненты L , и мы находим, что оператор \tilde{L} имеет вид

$$\tilde{L} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - 2r \int_{-\infty}^x dy q & 2r \int_{-\infty}^x dy r \\ -2q \int_{-\infty}^x dy q & -\frac{\partial}{\partial x} + 2q \int_{-\infty}^x dy r \end{pmatrix}. \quad (5.4.32)$$

В качестве простого примера рассмотрим линейную форму $A_-(\xi) = i\xi$. Тогда уравнение (5.4.31) дает

$$\begin{aligned} r_t + 2i(\tilde{L}_{11}r + \tilde{L}_{12}q) &= 0, \\ -q_t + 2i(\tilde{L}_{21}r + \tilde{L}_{22}q) &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.33)$$

Из определения L_{ij} (5.4.32) находим, что $2i(L_{11}r + L_{12}q) = r_x$ и $2i(L_{21}r + L_{22}q) = -q_x$. Следовательно, система (5.4.33) упрощается и получаются линейные уравнения $r_t + r_x = 0$ и $q_t + q_x = 0$.

Для квадратичного случая $A(\xi) = -2i\xi^2$ снова могут быть сделаны упрощения, как в предыдущем примере, и мы находим, что

$$\begin{aligned} r_t - 2(\tilde{L}_{11}r_x - \tilde{L}_{12}q_x) &= 0, \\ q_t + 2(\tilde{L}_{21}r_x - \tilde{L}_{22}q_x) &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.34)$$

Полагая $r = -q^*$, получим кубическое уравнение Шрёдингера в виде (5.3.1).

Другой выбор B_+ для получения экспоненциальной зависимости ρ_t от времени, а именно $B_+ = F(\xi)b_a$, приводит к результатам, аналогичным тем, которые были получены выше, за исключением того, что $2A_-(\xi)$ заменяется на $2A_-(\xi) - F(\xi)$. Если записать $2A_- - F = 2\Omega_2(\xi)/\Omega_2(\xi)$, то эволюционные уравнения примут вид

$$\Omega_2(\tilde{L})\sigma_3 u_t + 2\Omega_1(\tilde{L})u = 0. \quad (5.4.35)$$

В качестве примера рассмотрим $\Omega_1 = i$ и $\Omega_2 = 4\xi$; тогда (5.4.35) принимает вид $2L\sigma_3 u_t + iu = 0$. Для $r = -q$ оба уравнения записываются в виде

$$q_{tx} + 2q \int_{-\infty}^x dy (q^2)_t - \frac{1}{2}q = 0. \quad (5.4.36)$$

Это уравнение можно преобразовать в уравнение sine-Gordon. Чтобы убедиться в этом, сначала разделим на q и продифференцируем, чтобы получить

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_{tx}}{q} \right) + 4qq_t = 0. \quad (5.4.37)$$

Если положить $q_t = f$, это уравнение можно записать в виде

$$f_{xx} - \left(\frac{qx}{q} \right) f_x + 4q^2 f = 0, \quad (5.4.38)$$

решение которого [65] есть $f = c_1 \cos \sigma + c_2 \sin \sigma$, где $\sigma = 2 \int_{-\infty}^x dy q$.

Так как при $x \rightarrow -\infty$ это решение должно обращаться в нуль, мы

требуем, чтобы $c_1 = 0$. Кроме того, подстановка в (5.4.36) показывает, что $c_2 = 1/2$. Так как $f = q_t$ и $q = \sigma_x/2$, мы окончательно получаем уравнение sine-Gordon $\sigma_{xt} = \sin \sigma$.

Упражнение 7

Покажите, что предположение $A = \sum_{n=0}^3 a_n \zeta^n$ с аналогичными разложениями B и C приводит к эволюционным уравнениям

$$q_t + a_2(t) \left(\frac{1}{2} q_{xx} - r q^2 \right) + \frac{1}{4} i a_3(t) (q_{xxx} - 6 r q q_x) = 0,$$

$$r_t - a_2(t) \left(\frac{1}{2} r_{xx} - r^2 q \right) + \frac{1}{4} i a_3(t) (r_{xxx} - 6 r q r_x) = 0.$$

Для $r = -q$, $a_2 = 0$ и $a_3 = -4i$ получите модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза и для $r = -1$ с теми же значениями a_2 и a_3 получите уравнение Кортевега — де Фриза. Покажите также, что при $r = -1$ функция v_2 удовлетворяет уравнению $v_{2xx} + (\zeta^2 + q)v_2 = 0$.

Упражнение 8

Используйте метод, описанный при выводе (5.4.19), чтобы получить три уравнения

$$\begin{aligned} (-2\psi_1\psi_2A - \psi_2^2B + \psi_1^2C)_x &= -q_t\psi_2^2 + r_t\psi_1^2, \\ (-2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2A - \bar{\psi}_2^2B + \bar{\psi}_1^2C)_x &= -q_t\bar{\psi}_2^2 + r_t\bar{\psi}_1^2, \\ [-(\bar{\psi}_1\psi_2 + \psi_1\bar{\psi}_2)A - \psi_2\bar{\psi}_2B + \psi_1\bar{\psi}_1C]_x &= -q_t\psi_2\bar{\psi}_1 + r_t\psi_1\bar{\psi}_1. \end{aligned}$$

Теперь можно проинтегрировать эти уравнения от $-\infty$ до x и решить относительно A , B и C . Покажите, что определитель линейной системы равен единице.

Глава 6

ПРИЛОЖЕНИЯ I

Во многих областях физики солитонные уравнения часто возникают как аппроксимации известных и более точных уравнений. Действительно, этого следует ожидать, поскольку дисперсия и нелинейности, входящие в различные солитонные уравнения, могут считаться первыми членами в разложениях более полных выражений для дисперсии и нелинейности. Как мы уже видели в разд. 1.4, использованные для получения солитонного уравнения методы теории возмущений могут приводить к довольно длинным и утомительным вычислениям. В этой главе содержатся дополнительные примеры, взятые из гидродинамики и физики плазмы, а также классическая модель теории дислокаций в твердом теле. Особое значение придается получению солитонных уравнений из стандартных уравнений, используемых в этих областях физики. Читатель, минимально знакомый с этими вопросами, может не обращаться к дополнительным источникам. В главу не включены примеры солитонов, встречающихся в физике низких температур, квантовой теории поля и других областях, которые требуют более специальных знаний.

6.1. ВОЛНЫ НА МЕЛКОЙ ВОДЕ И УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

Рассмотрим движение плоских волн на поверхности жидкости. Предполагается, что максимальная амплитуда возмущения a мала по сравнению с глубиной h , а длина возмущения l велика по сравнению с h . В последующем изложении метода возмущений малость двух параметров $\varepsilon = a/h$ и $\delta = h/l$ играет фундаментальную роль.

Движение жидкости описывается вектором скорости $\mathbf{V}(x, y, t) = iu(x, y, t) + jv(x, y, t)$, где i и j — единичные векторы горизонтального и вертикального направлений соответственно. Движение жидкости предполагается безвихревым, так что $\nabla \times \mathbf{V} = 0$. Предполагается также, что плотность жидкости ρ постоянна, так что уравнение неразрывности $\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$ сводится к уравнению $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$. Тогда мы можем положить, что $\mathbf{V} = \nabla \phi$ и $\nabla^2 \phi = 0$.

Предполагается, что снизу жидкость ограничена твердым горизонтальным дном, так что $\phi_y(x, 0) = 0$. Верхней границей является свободная поверхность $y = h + \eta(x, t)$, как показано на рис. 6.1. Впредь все вычисляемые на этой поверхности члены будут обозна-

чены индексом 1. На свободной поверхности граничные условия нелинейны, и именно в этом вся сложность задачи. Для свободной поверхности $y = y_1 = h + \eta(x, t)$ можно записать

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (6.1.1)$$

Так как $dy_1/dt = v_1 = \partial \Phi_1 / \partial y$ и $dx/dt = u_1 = \partial \Phi_1 / \partial x$, получаем первое граничное условие в одной из следующих форм:

$$v_1 = \eta_t + \eta_x u_1, \quad (6.1.2a)$$

$$\Phi_{1y} = \eta_t + \eta_x \Phi_{1x}. \quad (6.1.2b)$$

Второе граничное условие получается из соотношения импульсов

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - g, \quad (6.1.3)$$

где ρ_0 — постоянная плотность жидкости, p — давление в произвольной точке жидкости и g — ускорение силы тяжести. Так как

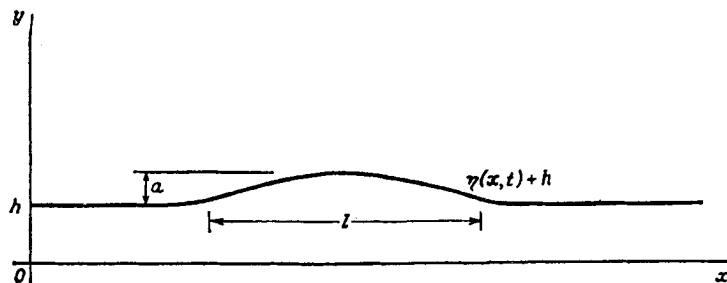


Рис. 6.1. Переменные, применяемые при анализе волн на мелкой воде, приводящем к уравнению Кортевега — де Фриза.

$(1/2)\nabla(V^2) = V \times (\nabla \times V) + (V \cdot \nabla) V$ и в рассматриваемом случае $\nabla \times V = 0$, то уравнение (6.1.3) можно записать через дивергенцию выражения $\Phi_t + (1/2)(\nabla \Phi)^2 + p/\rho_0 - gy$. Интегрируя и включая произвольную функцию времени в Φ , получим

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + \frac{p}{\rho_0} + gy = 0. \quad (6.1.4)$$

Вычисляя это выражение на верхней поверхности в предположении, что $p_1 = 0$, и затем дифференцируя по x , получим второе граничное условие в виде

$$u_{1t} + u_1 u_{1x} + v_1 v_{1x} + g \eta_x = 0. \quad (6.1.5)$$

Таким образом, движение поверхности описывается решением уравнения Лапласа, удовлетворяющим нелинейным граничным условиям (6.1.2) и (6.1.5).

Так как нас интересуют только малые значения y (т. е. $h \ll l$), попытаемся получить адекватное решение уравнения Лапласа, используя несколько первых членов в разложении

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \varphi_n(x, t). \quad (6.1.6)$$

Подставляя это разложение в уравнение Лапласа и разделяя члены по степеням y , получим рекуррентное соотношение $\varphi_{nxx} + (n+2)(n+1)\varphi_{n+2} = 0$. Граничное условие $\varphi_y(x, 0) = 0$ дает $\varphi_1 = 0$. Таким образом, все нечетные степени обращаются в нуль, и мы получаем

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{2} y^2 \varphi_{0xx} + \frac{1}{24} y^4 \varphi_{0xxxx} + \dots \quad (6.1.7)$$

Тогда компоненты скорости на свободной поверхности запишутся в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_{x1} = f - \frac{1}{2} y_1^2 f_{xx} + \dots, \\ v_1 &= \varphi_{y1} = -y_1 f_x + \frac{1}{6} y_1^3 f_{xxx} + \dots, \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

где $f(x, t) = \partial \varphi_0(x, t) / \partial x$.

Прежде чем приступить к выводу уравнения Кортевега — де Фриза, поучительно рассмотреть линейное волновое уравнение, которое получится, если в граничных условиях (6.1.2) и (6.1.5) пренебречь членами с произведениями. Кроме понимания роли, которую играют два малых параметра $\varepsilon = a/h$ и $\delta = h/l$, это позволит определить дисперсионное соотношение задачи.

Если линеаризовать граничные условия (6.1.2) и (6.1.5), полагая $y_1 = h$ и опуская квадратичные члены, мы получим

$$v_1 = \eta_t, \quad (6.1.9a)$$

$$u_{1t} = -g\eta_x. \quad (6.1.9b)$$

Первоначально используем только первые члены в (6.1.8), чтобы выразить u_1 и v_1 через f . Тогда

$$hf_x = -\eta_t, \quad (6.1.10a)$$

$$f_t = -g\eta_x. \quad (6.1.10b)$$

Исключая f , находим, что η удовлетворяет линейному волновому уравнению $\eta_{tt} - c_0^2 \eta_{xx} = 0$, где $c_0^2 = gh$. Следовательно, в этом простейшем приближении поверхность может быть носителем недиспергирующих синусоидальных смещений $\eta = a \exp i(kx - \omega t)$, где $\omega = c_0 k$. Возвращаясь к (6.1.9b), находим, что

$$u_1 = -g \int dt \eta_x = \left(\frac{g}{c_0} \right) \eta = \varepsilon c_0 \exp [i(kx - \omega t)]. \quad (6.1.11)$$

Таким образом, мы ожидаем, что поверхностные скорости волн с характеристической амплитудой a имеют порядок ϵc_0 . Аналогично из (6.1.9а) находим, что $v_1 = -i\omega\eta = -ic_0\eta/\lambda$. Мы видим, что для возмущений, у которых доминантные длины волн λ имеют величину l , величина вертикальной скорости v_1 имеет порядок $v_1 \approx \approx c_0(a/h)(h/l) \approx c_0\epsilon\delta$. Эта информация об относительных величинах u_1 и v_1 полезна для определения процедуры метода возмущений, предназначенной для рассмотрения нелинейных членов.

Прежде чем вернуться к нелинейной задаче, заметим, что сохранение вторых членов в (6.1.8) дает линейные уравнения

$$\begin{aligned} -hf_x + \frac{1}{6}h^3f_{xxx} &= \eta_t, \\ f_t - \frac{1}{2}h^2f_{xxt} + g\eta_x &= 0, \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

из которых можно получить линейное уравнение

$$f_{tt} - c_0^2 f_{xx} + \frac{1}{6}c_0^2 h^2 f_{xxx} - \frac{1}{2}h^2 f_{xxt} = 0. \quad (6.1.13)$$

Теперь предположение $f \approx \exp i(kx - \omega t)$ приводит к дисперсионному соотношению $\omega \approx c_0 k [1 - (kh)^2/6]$, которое содержит кубический по k член, подобный тому, который был получен в (1.4.10) для жидкости, ограниченной системой упругих колец.

Чтобы перейти к нелинейным уравнениям, введем сначала безразмерные независимые переменные, полагая $x = lx'$ и $t = (l/c_0)t'$. Аналогично, запишем зависимые переменные в виде $\eta = a\eta'$, $u_1 = \epsilon c_0 u'_1$, $v_1 = \epsilon \delta c_0 v'_1$; согласно первому из соотношений (6.1.8), $f = \epsilon c_0 f'$. Положим также $y_1 = h(1 + \epsilon\eta')$. С точностью до первого исчезающего порядка по ϵ и δ безразмерные скорости записываются в виде

$$\begin{aligned} u'_1 &= f' - \frac{1}{2}\delta^2 \frac{\partial^2 f'}{\partial x'^2}, \\ v'_1 &= -(1 + \epsilon\eta') \frac{\partial f'}{\partial x'} + \frac{1}{6}\delta^2 \frac{\partial^3 f'}{\partial x'^3}. \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Первое и второе граничные условия (6.1.2а) и (6.1.5) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{\partial f'}{\partial x'} + \epsilon \eta' \frac{\partial f'}{\partial x'} + \epsilon f' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} - \frac{1}{6}\delta^2 \frac{\partial^3 f'}{\partial x'^3} &= 0, \\ \frac{\partial f'}{\partial t'} + \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \epsilon f' \frac{\partial f'}{\partial x'} - \frac{1}{2}\delta^2 \frac{\partial^3 f'}{\partial x'^2 \partial t'} &= 0. \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

Теперь эти уравнения легко решаются методом возмущений, описанным Уиземом [117]. Заметим, что если пренебречь ϵ и δ , то можно записать $f' = \eta'$, где $f_x + \eta_x = 0$. Введем в (6.1.15) разложение в ряд по малым параметрам

$$f' = \eta' + \epsilon f^{(1)} + \delta^2 f^{(2)} \quad (6.1.16)$$

и сохраним члены до первого порядка по ε и δ^2 . Тогда, если одно уравнение (6.1.15) вычесть из другого и учесть, что с рассматриваемой точностью $f^{(1)}_x = -f^{(1)}_{x'}$ и $f^{(2)}_x = -f^{(2)}_{x'}$, мы получим

$$\varepsilon \left(2 \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x'} + \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} \right) + \delta^2 \left(2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x'} - \frac{2}{3} \frac{\partial^3 \eta'}{\partial x'^3} \right) = 0. \quad (6.1.17)$$

Так как параметры ε и δ независимы, коэффициенты при ε и δ^2 должны по отдельности обращаться в нуль. Тогда мы имеем $f^{(1)} = -(1/4)(\eta')^2$ и $f^{(2)} = (1/3)\partial^2 \eta' / \partial x'^2$. Теперь, когда f выражена через η' , находим, что первое из уравнений (6.1.15) дает

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \frac{3}{2} \varepsilon \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \frac{1}{6} \delta^2 \frac{\partial^3 \eta'}{\partial x'^3} = 0. \quad (6.1.18)$$

Преобразованием $\xi = x' - t'$, $\tau = t'$ можно исключить член $\partial \eta' / \partial x'$. Получившееся уравнение имеет вид уравнения Кортевега — де Фриза. Если умножить его на $9\varepsilon/\delta^4$ и затем величину $3\varepsilon\eta'/\delta^2$ положить равной w , то получится уравнение $w_{\tau\tau} + 6ww_{\xi} + w_{\xi\xi\xi} = 0$, где $\tau' = \delta^2 \tau / 6$. Выразив односолитонное решение (1.4.18) в размерных переменных, находим, что

$$\eta = \eta_0 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - Vt}{L} \right), \quad (6.1.19)$$

где

$$\eta_0 = \frac{ch^3}{3l^2}, \quad (6.1.20a)$$

$$L = \left(\frac{4h^3}{3h_0} \right)^{1/2}. \quad (6.1.20b)$$

$$V = c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h_0}{h} \right), \quad c_0^2 = gh. \quad (6.1.20c)$$

Постоянная c в (6.1.20a) — это произвольная постоянная, входящая в (1.4.18). В размерных переменных уравнение (6.1.18) принимает вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \frac{c_0}{h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} c_0 h^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (6.1.21)$$

Несколько более систематический вывод уравнения Кортевега — де Фриза можно получить, следуя процедуре, которая будет введена в разд. 6.5 ([106], приложение).

Были проделаны эксперименты по поверхностным волнам, подтверждающие солитонную теорию уравнения Кортевега — де Фриза (см., например, [49]). В качестве простого примера применения изложенных выше результатов к экспериментальным волнам на воде заметим, что n -солитонное решение, соответствующее (6.1.19), имеет вид $\eta(x, 0) = (1/2)n(n+1)\eta_0 \operatorname{sech}^2(x/L)$, где L дается формулой (6.1.20b). Это можно переписать как $\eta(x, 0) = A \operatorname{sech}^2(x/L)$, где $L^2 A = (2/3)n(n+1)h^3$. Видно, что как только

начальный размер волны задан через L и A , ожидаемое число солитонов определится глубиной h . Если $n = 1$ для $h = h_1$, то при уменьшении глубины до $h_2 = rh_1$ число солитонов станет равным $n_2 = (-1 + \sqrt{1 + 8/r^3})/2$, что следует просто из решения уравнения $2h_1^3 = n_2(n_2 + 1)h_2^3$ [109].

6.2. ВОЛНЫ НА МЕЛКОЙ ВОДЕ И КУБИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

Между кубическим уравнением Шрёдингера и уравнением Кортевега — де Фриза есть связь, которая выявляется, когда мы ищем решение последнего уравнения в форме медленно модулированного цуга волн. Кубическое уравнение Шрёдингера может быть также получено непосредственно из фундаментальных уравнений для волн на воде [50], [30]¹⁾ без ограничения теории мелкой воды, которое заключено в уравнении Кортевега — де Фриза; были проведены обширные экспериментальные и численные исследования этого случая [75]. Однако это более общее приложение рассматриваться здесь не будет.

Чтобы понять, как при описании поверхностных волн может появиться кубическое уравнение Шрёдингера, вспомним сначала, что, как было показано, простейшее *линейное* описание поверхностных волн дается волновым уравнением без дисперсии $(gh)\eta_{xx} - \eta_{tt} = 0$. Было найдено, что более точное линейное уравнение (6.1.13) учитывает дисперсию. Для волн, распространяющихся в одном направлении, все эти линейные результаты получаются из уравнения Кортевега — де Фриза (6.1.21), если пренебречь нелинейным членом $\eta\partial\eta/\partial x$. Простейшие *нелинейные* поправки получаются при рассмотрении решений полного уравнения Кортевега — де Фриза (6.1.21), обладающих малой амплитудой. Показано, что это приводит к дисперсионному соотношению, зависящему от амплитуды. Неудивительно, что здесь могло бы появиться кубическое уравнение Шрёдингера, поскольку это уравнение совершенно естественным образом вводит дисперсионное соотношение, зависящее от амплитуды. Например, уравнение $if_t + a_1|f|^2 + a_2f_{xx} = 0$ обладает решениями вида $f = A \exp[i(kx - \omega t)]$ при условии, что выполняется зависящее от амплитуды дисперсионное соотношение $\omega = a_2k^2 - a_1|A|^2$.

Чтобы подкрепить эти рассуждения количественными оценками, заметим, что кубическое уравнение Шрёдингера возникает тогда, когда мы ищем решение уравнения Кортевега — де Фриза в виде рядов Фурье

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{in} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \eta^{(n, l)}(x, t) e^{il(kx - \omega t)}. \quad (6.2.1)$$

¹⁾ Впервые кубическое уравнение Шрёдингера для волн на поверхности жидкости было найдено в работе: Захаров В. Е. — ПМТФ № 2 (1968), с. 86—91. — *Прим. перев.*

Предполагается, что параметр разложения ε много меньше единицы, а коэффициенты $\eta^{(n,l)}$ медленно меняются на длине волны $\sim k^{-1}$, а также в течение одного цикла $\sim \omega^{-1}$. Мы будем следовать анализу работы [101] и покажем, что $\eta^{(1,1)}$ удовлетворяет кубическому уравнению Шрёдингера. Для того чтобы $\eta(x, t)$ было действительным, должно выполняться соотношение $\eta^{(1,-1)} = \eta^{(1,1)*}$. Будет найдено, что для получения этого результата нам нужно сохранить только члены с $n \leq 3$ и $l \leq 2$.

Мы предполагаем, что $\eta^{(1,1)}$ представляет собой возмущение, намного более протяженное, чем длина волны, и движущееся с некоторой скоростью V . Это можно сделать, полагая, что $\eta^{(1,1)}$ является функцией переменной $\xi = \varepsilon(x - Vt)$. Кроме того, допуская зависимость от времени более высокого порядка, $\tau = \varepsilon^2 t$, можно ввести в этот профиль медленные временные изменения. Таким образом, мы имеем

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \bar{\eta}^{(n)}(\xi, \tau, x, t), \quad (6.2.2)$$

где

$$\bar{\eta}^{(n)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \eta^{(n,l)}(\xi, \tau) e^{-il(kx - \omega t)}. \quad (6.2.3)$$

Теперь пространственные и временные производные в уравнении Кортевега — де Фриза должны быть заменены следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon V \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}; \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

здесь производные по x и t относятся к фазе, а производные по ξ и τ — к амплитуде.

Подстановка разложения (6.2.2) в уравнение Кортевега — де Фриза (6.1.19) и приравнивание членов при первых трех степенях ε дает

$$\bar{\eta}_t^{(1)} + c_0 \bar{\eta}_x^{(1)} + \gamma \bar{\eta}_{xxx}^{(1)} = 0, \quad (6.2.5a)$$

$$\bar{\eta}_t^{(2)} + c_0 \bar{\eta}_x^{(2)} + \gamma \bar{\eta}_{xxx}^{(2)} + (c_0 - V) \bar{\eta}_\xi^{(1)} + \beta \bar{\eta}_x^{(1)} + 3\gamma \bar{\eta}_{x\xi}^{(1)} = 0, \quad (6.2.5b)$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_t^{(3)} + c_0 \bar{\eta}_x^{(3)} + \gamma \bar{\eta}_{xxx}^{(3)} + (c_0 - V) \bar{\eta}_\xi^{(2)} + 3\gamma \bar{\eta}_{x\xi}^{(2)} + \beta [(\bar{\eta}^{(1)} \bar{\eta}^{(2)})_x + \\ + \bar{\eta}^{(1)} \bar{\eta}_x^{(1)}] + \bar{\eta}_\tau^{(1)} + 3\gamma \bar{\eta}_{\xi\xi}^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (6.2.5c)$$

где $\beta = 3c_0/2h$ и $\gamma = c_0 h^2/6$.

Соберем члены с одинаковыми степенями l . Для членов первого порядка по ε находим, что

$$-il(\omega - kc_0 + \gamma l^2 k^2) \eta^{(1,l)} = 0, \quad (6.2.6)$$

Случай $l = 0$ не дает никакой информации. Для $l = \pm 1$ получаем дисперсионное соотношение линейной теории, а именно

$$\omega = kc_0 - \gamma k^3. \quad (6.2.7)$$

Для $|l| > 1$ находим из (6.2.6), что при ω , определенном соотношением (6.2.7), $\eta^{(1, l)} = 0$.

Для произвольного l уравнение второго порядка (6.2.5b) дает

$$-i l \eta^{(2, l)} (\omega - kc_0 + \gamma k^3 l) + \eta_{\xi}^{(l, l)} (c_0 - V - 3k^2 l^2 \gamma) +$$

$$+ i k \beta \sum_p p \eta^{(1, l-p)} \eta^{(1, p)} = 0. \quad (6.2.8)$$

Так как $\eta^{(1, l)} = 0$ для $|l| > 1$, при суммировании останется только несколько членов.

Для $l = 0$ находим, что

$$(V - c_0) \eta_{\xi}^{(1, 0)} = 0. \quad (6.2.9)$$

Если $V \neq c_0$, то $\eta^{(1, 0)}$ не зависит от ξ . Так как в задачах распространения член $\eta^{(1, 0)}(\tau)$ не представляет интереса, мы полагаем $\eta^{(1, 2)} = 0$.

Для $l = 1$ находим, что

$$\eta_{\xi}^{(1, 1)} (V - c_0 + 3\gamma k^2) = 0, \quad (6.2.10)$$

или

$$V = c_0 - 3\gamma k^2. \quad (6.2.11)$$

При $l = 2$ получаем

$$\eta^{(2, 2)} = (3/2) [\eta^{(1, 1)}]^2 / (k^2 h^3). \quad (6.2.12)$$

В третьем порядке мы имеем

$$i l \eta^{(3, l)} (-\omega + kc_0 - \gamma k^3 l^2) + \eta_{\xi}^{(2, l)} (-V + c_0 - 3\gamma k^2 l^2) +$$

$$+ \eta_{\tau} + \beta \left[i k l \sum_p \eta^{(1, l-p)} \eta^{(2, p)} + \sum_p \eta^{(1, l-p)} \eta_{\xi}^{(1, p)} \right] +$$

$$+ 3i \gamma k l \eta_{\xi}^{(1, l)} = 0. \quad (6.2.13)$$

Для $l = 0$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [(c_0 - V) \eta^{(2, 0)} + \beta |\eta^{(1, 1)}|^2] = 0; \quad (6.2.14)$$

это можно проинтегрировать и получить

$$(c_0 - V) [\eta^{(2, 0)}(\xi, \tau) - \eta^{(2, 0)}(-\infty, \tau)] + \beta [|\eta^{(1, 1)}|^2 - F(\tau)] = 0, \quad (6.2.15)$$

где $F(\tau) = |\eta^{(1, 1)}(-\infty, \tau)|^2$. Предполагая, что $\eta^{(2, 0)}(-\infty, \tau) = 0$ и используя (6.2.11), находим, что

$$\eta^{(2, 0)} = -\frac{3}{k^2 h^3} [|\eta^{(1, 1)}|^2 - F]. \quad (6.2.16)$$

Для $l = 1$ получим уравнение

$$\eta_{\tau}^{(1,1)} + ik\beta[\eta^{(1,1)}\eta^{(2,0)} + \eta^{(1,-1)}\eta^{(2,2)}] + 3ik\gamma\eta_{\xi\xi}^{(1,1)} = 0, \quad (6.2.17)$$

которое принимает вид

$$\eta_{\tau}^{(1,1)} - \left(\frac{9c_0}{4k\hbar^2}\right)[|\eta^{(1,1)}|^2 - 2F]\eta^{(1,1)} + 3ik\gamma\eta_{\xi\xi}^{(1,1)} = 0. \quad (6.2.18)$$

Для $F = 0$, что соответствует случаю локализованных решений, это кубическое уравнение Шрёдингера. Многочисленные экспериментальные подтверждения многосолитонного взаимодействия поверхностных волн (на глубокой воде) в согласии с кубическим уравнением Шрёдингера были получены в работе [75].

Хотя речь шла главным образом о солитонных решениях, заслуживает краткого рассмотрения и стационарная форма волны, так как она легко дает вышеупомянутое дисперсионное соотношение, зависящее от амплитуды. Рассмотрим решение (6.2.18) в виде $\eta^{(1,1)} = A \exp[i(K\xi - \Omega\tau)]$, такое что $F = |A|^2$. Предполагаемая форма $\eta^{(1,1)}$ является решением уравнения (6.2.18) при условии, что удовлетворяется дисперсионное соотношение

$$\Omega = -3\gamma k K^2 + \frac{9c_0 |A|^2}{4k\hbar^2}. \quad (6.2.19)$$

Возвращаясь к (6.2.1), видим, что с точностью до первого порядка по ϵ смещение можно записать в виде

$$\eta = 2\epsilon A \cos(kx - \tilde{\omega}t), \quad (6.2.20)$$

где

$$\begin{aligned} k &= k + \epsilon K, \\ \tilde{\omega} &= \omega + \epsilon KV + \epsilon^2 \Omega. \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

Видно, что теперь удобно положить $A = 1/2$. Используя (6.2.7) и (6.2.11), находим, что имеет место соотношение

$$\frac{\tilde{\omega}}{c_0 k} = 1 - \frac{1}{6}(\hbar k)^2 + \frac{9}{16} \frac{\epsilon^2}{(\hbar k)^2}, \quad (6.2.22)$$

которое содержит амплитудную поправку первого порядка к дисперсионному соотношению для волн на воде [117].

6.3. ИОННО-ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ И УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

Рассмотрим ионно-звуковые волны, т. е. флуктуации плотности ионов в двухкомпонентной плазме. В простой физической интерпретации, ионы являются носителями низкочастотных флуктуаций плотности и скорости вблизи ионной плазменной частоты, а электроны, следуя за движением ионов, сохраняют приближенную нейтральность локального заряда. Высокочастотными флуктуациями вблизи электронной плазменной частоты мы пренебрегаем. Основные уравнения имеют следующий вид [103]:

сохранение плотности ионов:

$$\frac{\partial \bar{n}_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{n}_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad (6.3.1)$$

где \bar{n}_i и \mathbf{v}_i суть числовая плотность и средняя скорость ионов соответственно;

сохранение количества движения ионов и электронов:

$$\bar{n}_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = Ze \bar{n}_i \bar{\mathbf{E}} - \nabla p_i, \quad (6.3.2)$$

$$\bar{n}_e m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e \bar{n}_e \bar{\mathbf{E}} - \nabla p_e,$$

где m_e и m_i суть массы электронов и ионов соответственно, $-e$ — заряд электрона, Ze — заряд иона.

Предполагается, что электронное давление удовлетворяет уравнению состояния $p_e = n_e k T_e$. Мы будем рассматривать случай низкой ионной температуры ($T_i \ll T_e$) и положим $T_i = 0$. Таким образом, подразумевается, что соответствующее уравнение состояния ионов имеет вид $p_i = 0$. Электрическое поле $\bar{\mathbf{E}}$, устанавливающееся вследствие неполной нейтральности локального заряда, удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = 4\pi e (Z \bar{n}_i - \bar{n}_e). \quad (6.3.3)$$

Ток в плазме определяется соотношением

$$\mathbf{j} = e (Z \bar{n}_i \mathbf{v}_i - \bar{n}_e \mathbf{v}_e). \quad (6.3.4)$$

Мы будем рассматривать только случай отсутствия токов в плазме, следовательно, $\mathbf{j} = 0$. Производная по времени от (6.3.4) с использованием (6.3.2) дает

$$\bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{e \bar{n}_e} \nabla p_e = 0, \quad (6.3.5)$$

где мы пренебрегаем членом $(m_e/m_i) Z^2 \bar{n}_i / \bar{n}_e$, много меньшим единицы ($m_e/m_i \approx 10^{-3}$).

Введем теперь безразмерные переменные $x' = x/L$, $t' = \omega_0 t$, $E = k T_e E / e L$, $n = \bar{n}_i / n_0$, $n_e = \bar{n}_e / Z n_0$ и $u = v / \omega_0 L$, где $L = (k T_e / 4 \pi Z e^2 n_0)^{1/2}$ — дебаевский радиус электронного экранирования и $\omega_0 = (4 \pi n_0 Z^2 e^2 / m_i)^{1/2}$ — ионная плазменная частота [103]. Для случая пространственного изменения только в направлении x система (6.3.1) — (6.3.3) сводится к следующей:

$$\frac{\partial n}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} (n u) = 0, \quad (6.3.6a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x'} = E, \quad (6.3.6b)$$

$$E + \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x'} = 0, \quad (6.3.6c)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x'} = n - n_e. \quad (6.3.6d)$$

Прежде чем приступить к анализу возмущений системы (6.3.6), заметим сначала, что в пределе полной нейтральности заряда (т. е. $n = n_e$), уравнения (6.3.6b) и (6.3.6c) дают

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x'} = 0. \quad (6.3.7)$$

Теперь именно это уравнение и уравнение (6.3.6a) полностью описывают движение ионов. Решения этой пары уравнений, как известно, характеризуются возрастанием крутизны фронта импульса и в конечном итоге образованием ударной волны ([110], разд. 6.1). Кроме того, из (6.3.7) и линеаризованной формы (6.3.6a) мы находим, что моды Фурье для плотности и скорости в виде

$$n = 1 + \delta n e^{i(k'x' - \omega't')}, \quad u = \delta u e^{i(k'x' - \omega't')} \quad (6.3.8)$$

могут существовать только в том случае, когда $\omega' = k'$. Таким образом, отношение ω'/k' , являющееся фазовой скоростью волн в (6.3.8), в линейном пределе не зависит от частоты. Следовательно, в этом пределе волны являются недиспергирующими.

Сейчас мы вернемся к полной системе четырех уравнений (6.3.6). Как показано ниже, линейный вариант этих уравнений приводит теперь к распространению волн с дисперсией. Кроме того, вместо образования ударной волны может появиться симметричный стационарный профиль плотности (односолитонное решение уравнения Кортевега — де Фриза). Мы снова, следовательно, находим, что образование солитонов можно рассматривать как результат баланса между укручением импульса благодаря нелинейным эффектам и его распылением вследствие дисперсии.

Если моды Фурье (6.3.8), а также выражения

$$n_e = 1 + \delta n_e e^{i(k'x' - \omega't')}, \quad E = \delta E e^{i(k'x' - \omega't')} \quad (6.3.9)$$

подставить в линеаризованный вариант уравнений (6.3.6), получится дисперсионное соотношение

$$V^2 = (\omega'/k')^2 = 1 - \omega'^2. \quad (6.3.01)$$

Для $\omega' \ll 1$ можно пользоваться приближенным соотношением $k' = \omega' + \omega'^3/2$. Тогда фазовый член в каждой из экспонент примет вид $i[\omega'(x' - t') + \omega'^3 x'/2]$. Как и в разд. 1.4, удобно ввести новые независимые переменные, включающие этот эффект дисперсии. Более детально этот вопрос будет рассматриваться в разд. 6.5. Полагая $\xi = \omega'(x' - t')$ и $\eta = \omega'^3 x'$, находим, что система

(6.3.6a) — (6.3.6d) принимает вид

$$-\frac{\partial n}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} (nu) + \omega' \frac{\partial}{\partial \eta} (nu) = 0, \quad (6.3.11a)$$

$$-\omega' \frac{\partial u}{\partial \xi} + \omega' u \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \omega'^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] = E, \quad (6.3.11b)$$

$$\omega' \frac{\partial n_e}{\partial \xi} + \omega'^3 \frac{\partial n_e}{\partial \eta} = -n_e E, \quad (6.3.11c)$$

$$\omega' \frac{\partial E}{\partial \xi} + \omega'^3 \frac{\partial E}{\partial \eta} = n - n_e. \quad (6.3.11d)$$

Введем теперь разложения теории возмущений

$$\begin{aligned} n_e &= 1 + \omega'^2 n_e^{(1)} + \omega'^4 n_e^{(2)} + \dots, \\ n &= 1 + \omega'^2 n^{(1)} + \omega'^4 n^{(2)} + \dots, \\ u &= \omega'^2 u^{(1)} + \omega'^4 u^{(2)} + \dots, \\ E &= \omega'^3 E^{(1)} + \omega'^5 E^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

То, что главные члены в разложения E и u должны иметь данную зависимость от ω' , очевидно из уравнений (6.3.11c) и (6.3.11b) соответственно. Теперь определим два вклада самого низкого порядка в (6.3.11). Уравнения самого низкого порядка имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} &= 0, \quad -\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} = E^{(1)}, \\ \frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial \xi} &= -E^{(1)}, \quad n^{(1)} - n_e^{(1)} = 0; \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

из них следует, что $n_i^{(1)} = n_e^{(1)} = u_i^{(1)}$. Так как ниже будут рассматриваться только стационарные решения, произвольной функцией от η мы пренебрегаем. В следующем порядке находим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial n^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} [u^{(2)} + u^{(1)} n^{(1)}] + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta} &= 0, \\ -\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} + u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} &= E^{(2)}, \\ \frac{\partial n^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial \eta} &= -n_e^{(1)} E^{(1)} - E^{(2)}, \\ \frac{\partial E^{(1)}}{\partial \xi} &= n^{(2)} - n_e^{(2)}. \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

Из этих уравнений легко получить уравнение для $u^{(1)}$. Мы приходим к уравнению Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta} + u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0. \quad (6.3.15)$$

Вспоминая, что $u^{(1)} = n^{(1)}$ и возвращаясь к размерным переменным, получим стационарное решение

$$\bar{n}_t - n_0 = \omega'^2 n_0 n^{(1)} = \delta n \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - vt}{D}\right), \quad (6.3.16)$$

где $\delta n = (3/2)c\omega'^2 n_0$ и $V = \omega_0 L / (1 - \delta n / 3n_0) \approx \omega_0 L (1 + \delta n / 3n_0)$. Имеем также $(L/D)^2 = (\delta n / 6n_0) (1 - \delta n / 3n_0)^2 \approx \delta n / 6n_0$. Из этих соотношений снова получаем стандартные результаты теории солитонов — ширина солитона ($\approx D$) уменьшается с ростом δn , а скорость солитона V растет с ростом δn . Было получено экспериментальное подтверждение этих результатов, а также распада импульса, подобного тому, который изображен на рис. 1.2 [58].

6.4. КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОДНОМЕРНОЙ ТЕОРИИ ДИСЛОКАЦИЙ — УРАВНЕНИЕ SINE-GORDON

Некоторые из явлений, наблюдаемых в слое атомов твердого тела, описываются классической моделью, состоящей из цепочки частиц, соединенных друг с другом пружинами. Влияние соседних слоев атомов (субстрата) моделируется периодическим потенциалом. Простейшей равновесной ситуацией является та, в которой в каждой впадине потенциала находится одна частица. Однако баланс потенциальной энергии между энергией пружин и энергией периодически меняющегося потенциала может приводить к другим равновесным конфигурациям. В частности, каждая последующая частица цепочки может находиться все дальше от соответствующей впадины потенциала. На некотором расстоянии цепочка может быть растянута (или сжата) так, что число частиц может быть на одну меньше (или больше) числа впадин. Такая конфигурация называется отрицательной (положительной) дислокацией.

Чтобы полностью описать динамику цепочки в рамках классической модели, рассмотрим ряд частиц массы m , соединенных друг с другом линейными пружинами, причем постоянные пружин k одинаковы. Частицы скользят по синусоидально гофрированной поверхности, так что периодический потенциал обеспечивается силой тяжести. Сводка результатов по статике и динамике такой механической системы была дана в серии статей Франка и ван дер Мёрве ([40], [41]); мы будем здесь следовать их подходу. Обсуждение связи модели с макроскопическими свойствами твердого тела можно найти в работах [60] и [100].

Геометрия системы показана на рис. 6.2. Ниже перечисляются различные величины, входящие в определяющие уравнения:

a = период субтрата,

b = промежуток между частицами цепочки при недеформированном состоянии соединяющих пружин,

X_n = положение n -й частицы,

\bar{x}_n = положение n -й впадины = $a(n + 3/4)$,

$x_n = X_n - \bar{x}_n$ = смещение n -й частицы относительно n -й впадины, V_g = потенциальная энергия частиц в поле тяжести = $mgh \times$

$$\times \sum \left(1 + \sin \frac{2\pi X_n}{a}\right) = mgh \sum \left(1 - \cos \frac{2\pi x_n}{a}\right),$$

V_k = потенциальная энергия деформации пружины = $= \frac{1}{2} k \sum [X_n + 1 - (X_n + b)]^2 = \frac{1}{2} k \sum (X_n + 1 - X_n - a + b)^2$.

В определениях V_g и V_k сумма берется по всем частицам цепочки.

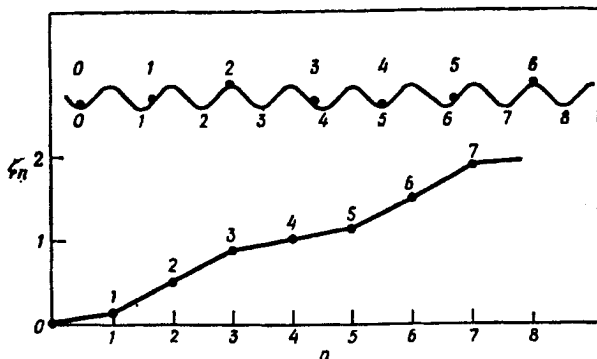


Рис. 6.2. Дислокация на цепочке масс, расположенных в синусоидальных впадинах.

Вводя обозначения $\zeta_n = x_n/a$, $P_0 = a/(b - a)$, $W = 2mgh$ и $l_0^2 = ka^2/2W$, находим, что полная потенциальная энергия $V = V_k + V_g$ может быть записана в виде

$$V = W l_0^2 \sum (\zeta_{n+1} - \zeta_n - P_0^{-1})^2 + \frac{1}{2} W \sum (1 - \cos 2\pi \zeta_n). \quad (6.4.1)$$

Различные возможные равновесные конфигурации масс получаются при решении системы уравнений, возникающих, если $\partial V / \partial \zeta_p$ принять равным нулю. Замечая, что каждое ζ_n встречается в (6.4.1) в двух соседних членах первой суммы, получим

$$\frac{\partial V}{\partial \zeta_p} = -2 l_0^2 W (\zeta_{p+1} - 2\zeta_p + \zeta_{p-1}) + \pi W \sin 2\pi \zeta_p = 0. \quad (6.4.2)$$

Поэтому допустимые равновесные конфигурации являются решениями уравнений

$$\zeta_{p+1} - 2\zeta_p + \zeta_{p-1} = \frac{\pi}{2l_0^2} \sin 2\pi \zeta_p. \quad (6.4.3)$$

Почувствительно детально рассмотреть простое решение этих уравнений. Если выбрать по два соседних значения для ζ_p и l_0 , из (6.4.3) легко получаются другие смещения. В качестве примера

положим $\zeta_0 = 0$ и выберем ζ_1 и l_0 так, что $\zeta_2 = 1/2$. Полагая в (6.4.3) $\rho = 1$, находим, что

$$\frac{1}{l_0^2} = \frac{1 - 4\zeta_1}{\pi \sin \pi \zeta_1}, \quad \zeta_1 < 1/4. \quad (6.4.4)$$

Если теперь положить $\zeta_1 = 1/8$, то (6.4.3) даст $\zeta_3 = 7/8$, $\zeta_4 = 1$, $\zeta_5 = 9/8$, $\zeta_6 = 3/2$, $\zeta_7 = 15/8$ и т. д. На рис. 6.2 приведен график этих результатов, а также диаграмма, показывающая расположение масс относительно впадин потенциала. На расстоянии $5a$ есть несовпадение — число масс на единицу меньше числа впадин.

При медленном изменении ζ от одного положения к другому можно заменить дискретные значения ζ_n непрерывно меняющимся параметром $\zeta(n)$ и ввести разложение

$$\zeta_{n+1} - \zeta_n = \frac{d\zeta}{dn} + \frac{1}{2!} \frac{d^2\zeta}{dn^2} + \dots$$

Можно это разложение оборвать после второй производной, так как этот член дает первый исчезающий член при подстановке разностного выражения в (6.4.3). Получим

$$\frac{d^2\zeta}{dn^2} = \frac{\pi}{2l_0^2} \sin 2\pi\zeta. \quad (6.4.5)$$

При интегрировании этого выражения полезно понять смысл $d\zeta/dn$. Так как

$$\frac{d\zeta}{dn} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{a} = \frac{X_{n+1} - X_n - a}{a} = \frac{X_{n+1} - X_n}{a} - 1, \quad (6.4.6)$$

мы видим, что $d\zeta/dn$ является величиной, на которую измеренное в единицах a расстояние между соседними частицами превышает единицу. Если положить $d\zeta/dn = \varepsilon$ при $\zeta = 0$, т. е. где соседние массы находятся во впадинах потенциала субстрата, первый интеграл уравнения (6.4.5) примет вид

$$\left(\frac{d\zeta}{dn}\right)^2 = \varepsilon + \frac{1 - \cos 2\pi\zeta}{2l_0^2}. \quad (6.4.7)$$

Чтобы рассмотреть простой пример, предположим, что $\varepsilon = 0$, так что вдали от дислокации частицы находятся во впадинах. Тогда

$$\frac{d\zeta}{dn} = \pm \frac{\sin \pi\zeta}{l_0}. \quad (6.4.8)$$

Растяжение цепочки (уменьшение плотности) соответствует положительному знаку, и только этот случай мы будем рассматривать. Интегрируя и полагая произвольно $\zeta = 1/2$ при $n = 0$, получим $\pi n/l_0 = \ln(\operatorname{tg} \pi\zeta/2)$, или

$$\zeta = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(e^{\pi n/l_0}). \quad (6.4.9)$$

Поэтому в области размером l_0 смещение растёт от 0 до 1. Таким образом, в этой области число частиц на единицу меньше числа впадин в потенциале субстрата. Мы видим, что l_0 является мерой протяжённости дислокации в единицах a .

Из (6.4.1) легко получить потенциальную энергию, связанную с дислокацией, заменяя сумму по дискретным значениям ξ_n интегралом по $\xi(n)$ и используя (6.4.9). Тогда в предположении бесконечной протяжённости цепочки можно записать

$$\begin{aligned} V &= l_0^2 \mathbb{W} \int_{-\infty}^{\infty} dn \left(\frac{d\xi}{dn} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathbb{W} \int_{-\infty}^{\infty} dn (1 - \cos 2\pi\xi) = \\ &= 2\mathbb{W} \int_{-\infty}^{\infty} dn \sin^2 \pi\xi = \frac{4l_0 \mathbb{W}}{\pi}. \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

Теперь обратимся к рассмотрению движения частиц цепочки. Кинетическая энергия цепочки равна

$$T = \frac{1}{2} m \sum (\dot{x}_n)^2 = \frac{1}{2} m a^2 \sum (\dot{\xi}_n)^2. \quad (6.4.11)$$

Тогда лагранжиан $L = T - V$ даёт уравнение движения p -й массы в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_p} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_p} = 0. \quad (6.4.12)$$

Используя для потенциальной энергии выражение (6.4.1), найдём, что

$$m a^2 \ddot{\xi}_p + 2l_0^2 \mathbb{W} (-\xi_{p+1} + 2\xi_p - \xi_{p-1}) + \pi \mathbb{W} \sin 2\pi\xi_p = 0. \quad (6.4.13)$$

В непрерывном пределе, введённом выше, это уравнение принимает вид

$$\frac{a^2}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial n^2} + \frac{\pi}{2l_0^2} \sin 2\pi\xi = 0, \quad (6.4.14)$$

где $c^2 = k a^2 / m$. Если ввести теперь новую зависимую переменную $\sigma = 2\pi\xi$, а также независимые переменные $u = \pi n / l_0$ и $v = \pi c t / l_0 a$, получится уравнение

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial v^2} = \sin \sigma, \quad (6.4.15)$$

т. е. рассмотренное в разд. 5.2 уравнение sine-Gordon. Теперь мы видим, что односолитонное решение

$$\sigma = 4 \arctg e^{m(u - \beta v)}, \quad m = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad (6.4.16)$$

приведённое в (5.2.11), описывает равномерное перемещение дислокации, даваемой формулой (6.4.9).

Полная энергия E , связанная с движущимся по цепочке возмущением, равна $E = T + V$. В непрерывном пределе это выражение принимает вид

$$E = \frac{I_0^2 W^2 a}{c^4} \int dn \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + I_0^2 W \int dn \left(\frac{\partial \xi}{\partial n} \right)^2 + \frac{1}{2} W \int dn (1 - \cos 2\pi \xi) = \\ = \frac{I_0 W}{2\pi} \int du \mathcal{H}(u, v), \quad (6.4.17)$$

где

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [(\sigma_u)^2 + (\sigma_v)^2] + (1 - \cos \sigma). \quad (6.4.18)$$

Мы уже видели в разд. 5.2, что $\int du \mathcal{H} = 8m = 8(1 - \beta^2)^{-1/2}$, если σ дается односолитонным решением (6.4.16). Следовательно, связанная с движением одного солитона энергия равна $E_s = E_0(1 - \beta^2)^{-1/2}$, где E_0 — энергия покоя V , данная в выражении (6.4.10). Результаты многосолитонного решения, о которых шла речь в разд. 5.2, могут быть целиком перенесены на этот случай.

6.5. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ РАЗЛОЖЕНИЯ

Мы встретились с рядом примеров, в которых эволюционное уравнение было получено после замены переменных вида

$$\xi = \varepsilon^2(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^6 t, \quad (6.5.1)$$

где $\varepsilon \ll 1$ и для постоянных α и β выбраны некоторые значения. Сейчас мы рассмотрим простой пример, который должен помочь выяснить связь между постоянными α и β и получающимся эволюционным уравнением. Будем следовать методу, изложенному в работе Су и Гарднера [106].

В качестве простого примера, который в соответствующих пределах может приводить к одному из двух нелинейных эволюционных уравнений, рассмотрим вычисления разд. 6.3, связанные с ионно-звуковыми волнами, учтя при этом вязкость. Если в описание движения ионов включить (объемную) вязкость, член давления в первом из уравнений (6.3.2) заменится на $p - (4/3)\mu dv_i/dx$ (Уизем [117]). Снова предполагаем малость ионной температуры, так что $p_i = 0$. Вводя безразмерные переменные, использованные в разд. 6.3, найдем что уравнение сохранения количества движения ионов принимает вид

$$n \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = nE + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.5.2)$$

где $\delta = 4\mu/(3m_i n_0 \omega_0 L^2)$. Чтобы понять смысл параметра δ , можно записать $m_i n_0$ как массовую плотность ρ_i и заменить $\omega_0 L$ характе-

ристической скоростью U_0 ; тогда имеем

$$\delta = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho V_0 L}. \quad (6.5.3)$$

В динамике жидкости величина, обратная этому отношению, называется числом Рейнольдса [12].

Чтобы переписать четыре уравнения (6.3.6) в общем виде, рассмотренном Су и Гарднером, введем сначала потенциальную функцию $E = -\varphi_x$. Полагая $\varphi = 0$ в равновесном состоянии, где $n = 1$, можно проинтегрировать (6.3.6с) и получить $n_e = e^\varphi$. Теперь запишем (6.3.6d) в виде

$$F(n, \varphi, \varphi_{xx}) \equiv n - e^\varphi - \varphi_{xx} = 0. \quad (6.5.4)$$

Соотношения (6.3.6а) и (6.5.2), выражающие сохранение массы и количества движения, можно объединить в уравнение

$$(nu)_t + (nu^2 + P)_x = 0, \quad (6.5.5)$$

где

$$P \equiv e^\varphi - \frac{1}{2}(\varphi_x)^2 - \delta u_x. \quad (6.5.6)$$

Подлежащие анализу четыре уравнения — это уравнения (6.3.6а) и (6.5.5) вместе с (6.5.4) и (6.5.6).

Введем теперь разложения теории возмущений

$$\begin{aligned} n &= 1 + \epsilon n^{(1)} + \epsilon^2 n^{(2)} + \dots, \\ u &= \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + \dots, \\ \varphi &= \epsilon \varphi^{(1)} + \epsilon^2 \varphi^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (6.5.7)$$

и рассмотрим сначала только линеаризованные уравнения. Тогда сохранение массы и количества движения выражается соответственно уравнениями

$$n_t^{(1)} + u_x^{(1)} = 0, \quad u_t^{(1)} + \varphi_x^{(1)} = 0. \quad (6.5.8)$$

Хотя данное в (6.3.6) точное линеаризованное соотношение между $n^{(1)}$ и $\varphi^{(1)}$ имеет вид $n^{(1)} = \varphi^{(1)} - \varphi_{xx}^{(1)}$, мы рассмотрим метод возмущения, в котором нелинейность, диссипация и дисперсия (два последних эффекта выражаются членами с производными вроде $\varphi_{xx}^{(1)}$) рассматриваются как возмущения. Таким образом, мы предполагаем наличие линейного соотношения между $n^{(1)}$ и $\varphi^{(1)}$, т. е. просто $n^{(1)} = \varphi^{(1)}$. Мы увидим далее, что после введения преобразования координат (6.5.1) член $\varphi_{xx}^{(1)}$ действительно войдет как поправка более высокого порядка. Теперь мы найдем, что $n^{(1)}$ удовлетворяет линейному волновому уравнению $n_{xx}^{(1)} - n_{tt}^{(1)} = 0$ и аналогично $u^{(1)}$ и $\varphi^{(1)}$.

Сосредоточим внимание на решениях для $n^{(1)}$ типа бегущих волн и положим

$$n^{(1)} = n^{(1)}(x - ct). \quad (6.5.9)$$

Теперь рассмотрим метод возмущений для учета модификации решения, вызванной наличием нелинейностей, диссипации и дисперсии. Предположим, что решение медленно меняется в системе координат, движущейся со скоростью волны c (которая в этом примере равна единице), и что $n^{(1)}$ является функцией переменных ξ и τ , введенных в (6.5.1). Тогда производные связаны соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow e^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow e^{\beta} \frac{\partial}{\partial \tau} - e^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (6.5.10)$$

и уравнения сохранения массы и количества движения преобразуются соответственно в уравнения

$$e^{\beta-\alpha} n_{\tau} - n_{\xi} + (nu)_{\xi} = 0, \quad (6.5.11a)$$

$$e^{\beta-\alpha} (nu)_{\tau} - (nu)_{\xi} + (nu^2 + P)_{\xi} = 0. \quad (6.5.11b)$$

Таким образом, разложение по возмущениям будет вестись по целочисленным степеням e , если положить $\beta - \alpha = 1$. Теперь можно выписать четыре уравнения, подлежащие исследованию:

$$\begin{aligned} en_{\tau} - n_{\xi} + nu_{\xi} + un_{\xi} &= 0, \\ enu_{\tau} - nu_{\xi} + nuu_{\xi} + P_{\xi} &= 0, \\ P &= e^{\gamma} - \frac{1}{2} e^{2\alpha} (\varphi_{\xi})^2 - \delta e^{\alpha} u_{\xi}, \\ F &= n - e^{\gamma} + e^{2\alpha} \varphi_{\xi\xi} = 0. \end{aligned} \quad (6.5.12)$$

Уравнения первого порядка имеют вид

$$\begin{aligned} -n_{\xi}^{(1)} + u_{\xi}^{(1)} &= 0, \\ -u_{\xi}^{(1)} + P_{\xi}^{(1)} &= 0, \\ P^{(1)} &= \varphi^{(1)}, \quad n^{(1)} - \varphi^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (6.5.13)$$

После интегрирования первых двух соотношений имеем $n^{(1)} = u^{(1)} = \varphi^{(1)} = p^{(1)}$. Произвольная функция от t тут отброшена, так как нас интересуют только те импульсные решения, которые при $\xi \rightarrow \pm\infty$ обращаются в нуль. Если в уравнениях для величин второго порядка использовать равенства для величин первого порядка, мы получим

$$\begin{aligned} n_{\tau}^{(1)} - n_{\xi}^{(2)} + 2n^{(1)}n_{\xi}^{(1)} + u_{\xi}^{(2)} &= 0, \\ n_{\tau}^{(1)} - u_{\xi}^{(2)} + P_{\xi}^{(2)} &= 0, \\ P^{(2)} &= \varphi^{(2)} + \frac{1}{2} (n^{(1)})^2 - \delta e^{\alpha-1} n_{\xi}^{(1)}, \\ F^{(2)} &= n^{(2)} - \varphi^{(2)} - \frac{1}{2} (n^{(1)})^2 + e^{2\alpha-1} n_{\xi\xi}^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (6.5.14)$$

Теперь из этих уравнений легко получить одно уравнение, содержащее только $n^{(1)}$. Оно имеет вид

$$n_{\xi}^{(1)} + n^{(1)} n_{\xi}^{(1)} - \frac{1}{2} \delta e^{\alpha-1} n_{\xi\xi}^{(1)} + \frac{1}{2} e^{2\alpha-1} n_{\xi\xi\xi}^{(1)} = 0. \quad (6.5.15)$$

Поэтому при учете вязкости, т. е. при $\delta \neq 0$, вклад самого низкого порядка получается для $\alpha = 1$. Тогда член с третьей производной имеет более высокий порядок, и мы им пренебрегаем. В этом случае плотность удовлетворяет уравнению

$$n_{\xi}^{(1)} + n^{(1)} n_{\xi}^{(1)} - \frac{1}{2} \delta n_{\xi\xi}^{(1)} = 0, \quad (6.5.16)$$

называемому уравнением Бюргерса (Уизем [117]). Хотя у него нет солитонных решений, это нелинейное эволюционное уравнение обладает интересной историей, и оно будет снова кратко рассмотрено в гл. 8.

С другой стороны, если пренебречь эффектами вязкости, т. е. считать, что $\delta = 0$, то поправка самого низкого порядка в (6.5.15) получается в случае $\alpha = 1/2$. Тогда

$$n_{\xi}^{(1)} + n^{(1)} n_{\xi}^{(1)} + \frac{1}{2} n_{\xi\xi\xi}^{(1)} = 0, \quad (6.5.17)$$

а это есть уравнение Кортевега — де Фриза. В обоих случаях мы видим, что если пренебречь нелинейностью и диссипацией или дисперсией, то восстанавливается невозмущенное решение, так как тогда мы получим $n_{\xi}^{(1)} = 0$, так что $n^{(1)} = n^{(1)}(\xi)$, как в (6.5.9).

Более общий матричный вариант использованного здесь метода можно найти в работах [108] и [78].

ПРИЛОЖЕНИЯ II

В гл. 6 мы рассмотрели некоторые физические ситуации, для описания которых пригодны наиболее известные солитонные уравнения. Эти уравнения могли быть затем решены с помощью методов, описанных в предыдущих главах. Однако линейные уравнения, необходимые для решения указанными методами, приходилось вводить несколько искусственно, без какого-либо обоснования, поскольку их связь с физическими соображениями, приводящими к различным нелинейным эволюционным уравнениям, была неочевидной. Сейчас мы рассмотрим два примера, в которых физические или геометрические соображения дают не только солитонные уравнения, но и соответствующие им линейные уравнения.

В первом примере речь идет о движении вдоль вихревой нити спиральной петли в форме нити. Нить можно уподобить неплоской кривой в пространстве и, таким образом, описать уравнениями Серре — Френс, т. е. системой линейных дифференциальных уравнений, на которых базируется теория неплоских кривых ([34], [105]). В свою очередь уравнения Серре — Френе могут быть переписаны в том же виде, что и уравнения Захарова — Шабата для метода обратной задачи рассеяния. В этом примере эволюционное уравнение оказывается кубическим уравнением Шрёдингера. Обсуждается кратко и связь некоторых других солитонных уравнений со спиральными кривыми.

Второй пример касается распространения светового импульса в атомной среде. Показывается, что уравнение Шрёдингера для идеализированных атомов среды снова приводит к линейным уравнениям метода Захарова — Шабата для обратной задачи рассеяния. В пределе, если пренебречь движением атомов, это уравнение сводится к уравнению *sine-Gordon*. Однако если сохранить движение атомов, мы получим пример распространения солитонов, которое в некоторых отношениях оказывается более общим, чем то, с которым мы обычно сталкивались.

Солитон на вихревой нити

Рассмотрим движение трехмерной изолированной вихревой нити. Если нить не идеально прямая, то на ней сказывается движение жидкости, вызванное ее собственной завихренностью, и она движется, таким образом, в некотором смысле самосогласованно. Мы начнем с краткого обсуждения приближений, используемых

при задании общих гидродинамических уравнений для рассмотрения этой задачи. Мы будем следовать методу Бэтчелора ([12], с. 509).

7.1. САМОИНДУЦИРОВАННЫЙ ВИХРЬ

Вектор завихренности ω определяется соотношением $\omega = \nabla \times u$, где u — вектор, задающий поле скоростей жидкости. Как указывалось в разд. 6.1, для несжимаемой жидкости уравнение сохранения массы сводится к $\nabla \cdot u = 0$. Таким образом, уравнения, определяющие u , имеют тот же вид, что и уравнения, определяющие вектор магнитного поля B в магнитостатике, и могут быть решены теми же методами. Если с помощью определения $u = \nabla \times A$ ввести векторный потенциал, то при условии $\nabla \cdot A = 0$ (ниже будет показано, что имеет место именно этот случай) получим

$$\omega = \nabla \times \nabla \times A = -\nabla^2 A. \quad (7.1.1)$$

В бесконечном объеме жидкости, где поверхностные интегралы не дают вклада, решение этого уравнения имеет вид ([62], с. 141)

$$A = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\omega(r')}{|r-r'|}, \quad (7.1.2)$$

и поэтому

$$u = \nabla \times A = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{(r-r') \times \omega(r')}{|r-r'|^3}. \quad (7.1.3)$$

Чтобы убедиться в том, что отсюда следует $\nabla \cdot A = 0$, заметим сначала, что $\nabla \cdot \omega = 0$, так как $\omega = \nabla \times u$ и дивергенция ротора тождественно равна нулю. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \omega \cdot \nabla \left(\frac{1}{|r-r'|} \right) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \omega \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|r-r'|} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \nabla' \cdot \left(\frac{\omega}{|r-r'|} \right) = -\frac{1}{4\pi} \int d^2S' \cdot \frac{\omega}{|r-r'|} = 0, \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

поскольку нет поверхностных интегралов.

Если предположить, что завихренность ограничена трубкой с площадью поперечного сечения dA и величина ее поперек трубки постоянна, то уравнение (7.1.3) принимает вид

$$u = -\frac{1}{4\pi} \int dA \frac{\delta l (r-r') \times \omega}{|r-r'|^3} = -\frac{1}{4\pi} \int dA |\omega| \int \frac{(r-r') \times \delta l}{|r-r'|^3}. \quad (7.1.5)$$

где δl — приращение длины в направлении нити.

Циркуляция вихря определяется формулой

$$\Gamma = \oint_c v \cdot ds = \oint_S \nabla \times v \cdot n dS = \oint_S |\omega| dA, \quad (7.1.6)$$

где ds — приращение длины вдоль кривой, окружающей вихревую трубку, S — площадь трубки внутри контура c . Таким образом,

Затем находим, что

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \delta \mathbf{l} = \left[x_3 \mathbf{n} + \kappa l x_3 \mathbf{t} - \left(x_2 + \frac{1}{2} \kappa l^2 \right) \mathbf{b} \right] dl. \quad (7.1.11)$$

Вблизи нити можно пренебречь величинами x_2 и x_3 и получить

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \delta \mathbf{l} \approx -\frac{1}{2} \kappa l^2 \mathbf{b} dl. \quad (7.1.12)$$

Можно также записать

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \simeq r^2 + l^2, \quad (7.1.13)$$

где $r^2 = x_2^2 + x_3^2$. Мы пренебрегли членом κx_2 , малым по сравнению с единицей, и предположили, что $\kappa l \ll 1$. Теперь (7.1.7) записывается в виде

$$\mathbf{u} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{-(1/2) \kappa l^2 \mathbf{b} dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\Gamma}{4\pi} \kappa \mathbf{b} \int_0^L \frac{l^2 dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}}. \quad (7.1.14)$$

Как отмечалось ранее, этот результат логарифмически расходится при $r = 0$. Мы получаем логарифмическую расходимость и в верхнем пределе L . Для $L/r \gg 1$ находим, что скорость вблизи вихря равна

$$\mathbf{u} \simeq \frac{\Gamma}{4\pi} \kappa \mathbf{b} \left(\ln \frac{2L}{r} - 1 \right). \quad (7.1.15)$$

Таким образом, скорость в вихре направлена по бинормали \mathbf{b} и пропорциональна кривизне нити. отождествляем теперь эту скорость со скоростью вихревой нити. Если s — длина, измеренная вдоль нити, а $\mathbf{X}(s, t)$ — радиус-вектор точки нити, то

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}. \quad (7.1.16)$$

Вводя новую временную координату

$$t' = t \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\ln \frac{2L}{\sigma} - 1 \right),$$

имеем $\partial \mathbf{X} / \partial t' = \kappa \mathbf{b}$. Впредь время будем измерять этим способом, но опускаая штрихи. Таким образом, уравнение движения нити имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \kappa \mathbf{b}. \quad (7.1.17)$$

Сейчас мы выведем уравнение, определяющее форму нити при таком уравнении движения.

7.2. ДВИЖЕНИЕ НИТИ

Смещение радиуса-вектора вдоль нити дает единичный вектор, касательный к кривой; таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \mathbf{t}. \quad (7.2.1)$$

Как показано в элементарных изложениях теории кривых ([34], с. 16; [105], с. 29; [52], с. 278), касательный вектор и векторы \mathbf{b} и \mathbf{n} ($\mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{t}$) удовлетворяют уравнениям Серре — Френе

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_s &= \kappa \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}_s &= \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}, \\ \mathbf{b}_s &= -\tau \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

где κ — кривизна, τ — кручение кривой, а индекс s означает дифференцирование по длине кривой. Если κ и τ заданы в каждой точке кривой, то ее форма (с точностью до положения в пространстве) определяется единственным образом.

Мы сейчас будем следовать изложению работы [51] и покажем, что комплексная величина $\Psi(s, t) = \kappa(s, t) \exp \left[i \int_0^s ds' \tau(s', t) \right]$, сохраняющая как κ , так и τ (и, таким образом, полностью определяющая форму нити), удовлетворяет уравнению

$$i\psi_t + \psi_{ss} + \frac{1}{2} |\psi|^2 + A(t) \psi = 0, \quad (7.2.3)$$

которое может быть преобразовано с помощью подстановки $\Psi = \psi \exp \left[-i/2 \int_0^t dt' A(t') \right]$ в кубическое уравнение Шрёдингера (5.3.1).

Нас особенно интересует именно связь уравнений Серре — Френе (7.2.2) с кубическим уравнением Шрёдингера, поскольку известно, что уравнения Серре — Френе эквивалентны уравнению Риккати ([34], с. 25). Мы уже видели в разд. 2.12, как можно преобразовать уравнение Риккати и получить линейные уравнения того типа, которые использовались при решении нелинейных эволюционных уравнений методами обратной задачи рассеяния. Поэтому в данной задаче эти уравнения появятся естественным образом.

Чтобы увидеть, откуда берется комплексная величина, удовлетворяющая уравнению Шрёдингера, запишем сначала два последних уравнения Серре — Френе (7.2.2) в комплексной форме

$$(\mathbf{n} + i\mathbf{b})_s + i\tau(\mathbf{n} + i\mathbf{b}) = -\kappa \mathbf{t}. \quad (7.2.4)$$

Вводя

$$\mathbf{N} \equiv (\mathbf{n} + i\mathbf{b}) \exp\left(i \int_0^s ds' \tau\right), \quad (7.2.5)$$

$$\psi = \kappa \exp\left(i \int_0^s ds' \tau\right), \quad (7.2.6)$$

получим

$$\mathbf{N}_s = -\psi \mathbf{t} \quad (7.2.7)$$

вместо (7.2.4), а первое из уравнений (7.2.2) можно записать в виде

$$\mathbf{t}_s = \frac{1}{2}(\psi^* \mathbf{N} + \psi \mathbf{N}^*). \quad (7.2.8)$$

Звездочка означает комплексно-сопряженную величину.

Получим теперь уравнения производных по времени от \mathbf{N} и \mathbf{t} . Из определения \mathbf{t} имеем

$$\mathbf{t}_t = (\mathbf{X}_s)_t = \mathbf{X}_{ts} = (\kappa \mathbf{b})_s = \kappa_s \mathbf{b} - \kappa \tau \mathbf{n}. \quad (7.2.9)$$

Так как

$$\begin{aligned} \kappa_s \mathbf{b} - \kappa \tau \mathbf{n} &= \operatorname{Re}[\kappa_s (\mathbf{b} + i\mathbf{n}) + i\kappa \tau (\mathbf{b} + i\mathbf{n})] = \\ &= \operatorname{Re}[i(\kappa_s + i\kappa \tau)(\mathbf{n} - i\mathbf{b})] = \\ &= \operatorname{Re}(i\psi_s \mathbf{N}^*) = \frac{i}{2}(\psi_s \mathbf{N}^* - \psi_s^* \mathbf{N}), \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

то производная касательного вектора по времени равна

$$\mathbf{t}_t = \frac{i}{2}(\psi_s \mathbf{N}^* - \psi_s^* \mathbf{N}). \quad (7.2.11)$$

В общем случае производная по времени от \mathbf{N} представляет собой линейную комбинацию \mathbf{N} , \mathbf{N}^* и \mathbf{t} . Поэтому можно записать

$$\mathbf{N}_t = \alpha \mathbf{N} + \beta \mathbf{N}^* + \gamma \mathbf{t}, \quad (7.2.12)$$

где α , β и γ должны быть найдены. Из определения \mathbf{N} и ортогональности векторов \mathbf{t} , \mathbf{n} и \mathbf{b} легко находим, что

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^* = 2. \quad (7.2.13)$$

Подсчитывая произведения (7.2.12) на \mathbf{N} , \mathbf{N}^* и \mathbf{t} , получим

$$2\beta = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}_t = \frac{1}{2}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N})_t = 0, \quad (6.2.14)$$

а также

$$2\alpha = \mathbf{N}^* \cdot \mathbf{N}_t. \quad (7.2.15)$$

Таким образом, получаем

$$2(\alpha + \alpha^*) = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^*)_t = 0 \quad (7.2.16)$$

и, следовательно, находим, что α — чисто мнимая величина. Положим $\alpha = iR$, где R действительно. Наконец, так как $(\mathbf{N} \cdot \mathbf{t})_t = 0$, то

$$\gamma = \mathbf{t} \cdot \mathbf{N}_t = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{t}_t = -\frac{i}{2} \mathbf{N} \cdot (\psi_s \mathbf{N}^* - \psi_s^* \mathbf{N}), \quad (7.2.17)$$

или $\gamma = -i\psi_s$. Итак, мы окончательно получаем

$$\mathbf{N}_t = iR\mathbf{N} - i\psi_s \mathbf{t}. \quad (7.2.18)$$

Производная по времени от (7.2.7) и по s от (7.2.18) дают

$$\mathbf{N}_{st} = \frac{i}{2} \psi \psi_s^* \mathbf{N} - \frac{i}{2} \psi \psi_s \mathbf{N}^* - \psi_t \mathbf{t}, \quad (7.2.19)$$

$$\mathbf{N}_{ts} = \mathbf{N} \left(iR_s - \frac{i}{2} \psi_s \psi^* \right) - \frac{i}{2} \psi \psi_s \mathbf{N}^* - it(R\psi + \psi_{ss}). \quad (7.2.20)$$

Приравнивая компоненты этих двух выражений, находим, что $R_s = (1/2)(\psi^* \psi_s + \psi \psi_s^*)$, или

$$R = \frac{1}{2} [|\psi|^2 + A(t)], \quad (7.2.21)$$

где $A(t)$ появляется в результате интегрирования и

$$\psi_t - i\psi_{ss} - iR\psi = 0. \quad (7.2.22)$$

Комбинируя эти результаты, получим уравнение

$$i\psi_t + \psi_{ss} + \frac{1}{2} [|\psi|^2 + A(t)]\psi = 0, \quad (7.2.23)$$

которое можно привести к кубическому уравнению Шрёдингера (5.3.1) с помощью преобразования

$$u = \frac{1}{2} \psi \exp \left[-\frac{i}{2} \int_0^t dt' A(t') \right]. \quad (7.2.24)$$

Односолитонное решение этого уравнения было дано в (5.3.13). Рассмотрим физический смысл этого решения в данном контексте. Сравнение этого решения с (7.2.6) и (7.2.24) показывает, что

$$\begin{aligned} \kappa &= 4\beta \operatorname{sech} [2\beta(s + 4\alpha t)], \\ \tau &= -2\alpha, \\ A(t) &= 8(\alpha^2 - \beta^2)t. \end{aligned} \quad (7.2.25)$$

Таким образом, решение представляет собой спиральную кривую с постоянным кручением -2α и кривизной κ , уменьшающейся от максимального значения 4β в точке $s = -4\alpha t$ до 0 при $s \rightarrow \pm\infty$. Эта единичная петля спирального движения перемещается вдоль

вихревой линии со скоростью $-4\alpha = 2\tau$. Итак, порядок длины возмущения $(2\beta)^{-1} = 2/\chi_{\max}$. На рис. 7.2 показан пример с $\alpha =$

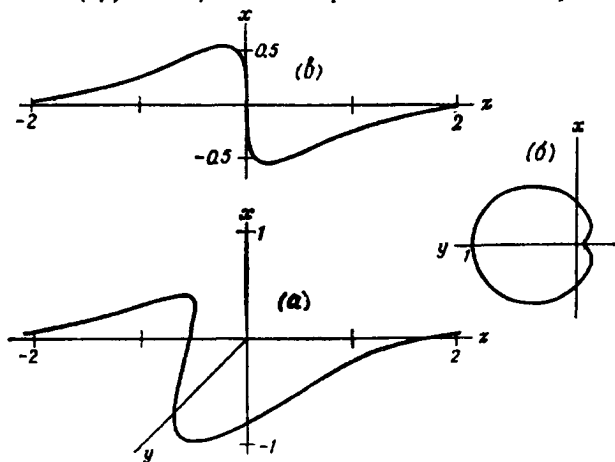


Рис. 7.2. (а) Форма вихревой нити, соответствующая односолитонному решению кубического уравнения Шрёдингера, $\tau = 1$, $\chi = 2\text{sech } s$. (б) Проекция кривой на плоскость (xz) . (в) Проекция кривой на плоскость (xy) . (С разрешения Американского физического института.)

$= -1/2$ и $\beta = 1/2$. Дополнительные рисунки приведены в работе [51].

7.3. ФОРМА ОДНОСОЛИТОННОЙ НИТИ

Форму кривой можно считать полностью определенной, если мы знаем координаты радиуса-вектора $\mathbf{x}(s, t)$ относительно некоторой системы координат. В принципе определение этих координат при заданных кривизне и кручении как функциях длины дуги s (и времени t в данной задаче) относится к стандартным вычислениям элементарной дифференциальной геометрии, хотя и требует решения уравнения Риккати. Мы здесь только опишем в общих чертах этот метод. Более полное обсуждение этого вопроса можно найти в [105] и [34].

Отнесем кривую к прямоугольной системе координат, ориентированной так, чтобы невозмущенные части нити совпадали с осью z . Три единичных вектора могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= i t_1 + j t_2 + k t_3, \\ \mathbf{n} &= i n_1 + j n_2 + k n_3, \\ \mathbf{b} &= i b_1 + j b_2 + k b_3. \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

Так как $\mathbf{X}_s = \mathbf{t}$, имеем

$$x = \int^s t_1 ds, \quad y = \int^s t_2 ds, \quad z = \int^s t_3 ds. \quad (7.3.2)$$

Начало координат выбирается произвольно. Компоненты касательного вектора определяются из решения уравнений Серре — Френе (7.2.2) при условиях $t_1 \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \pm\infty$. Эти векторные дифференциальные уравнения эквивалентны трем системам скалярных уравнений

$$\begin{aligned} t_{1s} &= \kappa n_i, \\ n_{1s} &= \tau b_i - \kappa t_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ b_{1s} &= -\tau n_i. \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Каждая из этих систем имеет первый интеграл $t_i^2 + n_i^2 + b_i^2 = 1$. Результаты сведения уравнений Серре — Френе к уравнению Риккати были суммированы Эйзенхартом ([34], с. 25). Сведение основано на том, что эти первые интегралы могут быть записаны в виде произведения $(t + in)(t - in) = (1 - b)(1 + b)$. (Индекс i в последующих преобразованиях излишен и будет опускаться, пока не будут получены окончательные результаты.) Если ввести функции φ и χ с помощью определений

$$\varphi = \frac{t + in}{1 - b} = \frac{1 + b}{t - in}, \quad (7.3.4a)$$

$$-\frac{1}{\chi} = \varphi^* = \frac{t - in}{1 - b} = \frac{1 + b}{t + in}, \quad (7.3.4b)$$

то можно просто выразить t , n и b через φ и χ . Находим

$$t = \frac{1 - \varphi\chi}{\varphi - \chi}, \quad n = i \frac{1 + \varphi\chi}{\varphi - \chi}, \quad b = \frac{\varphi + \chi}{\varphi - \chi}. \quad (7.3.5)$$

Определим теперь дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции φ и χ . Они эквивалентны уравнениям Серре — Френе (7.3.3). Дифференцирование уравнений (7.3.4a) и использование уравнений Серре — Френе дает

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \frac{t_s + in_s}{1 - b} + \frac{t + in}{(1 - b)^2} b_s = \frac{\kappa n - i\kappa t + i\tau b}{1 - b} - \frac{\tau n}{1 - b} \varphi = \\ &= -i\kappa\varphi + \frac{\tau(ib - \varphi n)}{1 - b}. \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

Из (7.3.4a) получим также

$$n\varphi = \frac{1}{2} i [1 + b - \varphi^2(1 - b)]. \quad (7.3.7)$$

Исключая n из последнего равенства (7.3.6), находим, что b также исключается, и мы приходим к уравнению Риккати

$$\varphi_s + i\kappa\varphi + \frac{1}{2} i\tau(1 - \varphi^2) = 0. \quad (7.3.8)$$

Находим, что χ удовлетворяет тому же самому уравнению.

Сводка простых свойств уравнения Риккати была дана в разд. 2.12. В частности, общее решение всегда может быть представлено в виде

$$\Psi_i = \frac{c_i P + Q}{c_i R + S}, \quad (7.3.9)$$

где теперь восстановлен индекс i . Каждое c_i является постоянной интегрирования, и функции P , Q , R и S (одни и те же для всех компонент) суть функции s (и t). Выразить компоненты касательного вектора t_i через P , Q , R и S — дело довольно долгое; детально эта процедура объяснена в книге [105]. Конечно, в окончательном результате есть неоднозначность, допускающая различные ориентации координатной системы. Как показано в работах по дифференциальной геометрии, одна из возможностей ориентации приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{P^2 - R^2 - (Q^2 - S^2)}{2T}, \\ t_2 &= \frac{i[P^2 - R^2 + (Q^2 - S^2)]}{2T}, \\ t_3 &= \frac{RS - PQ}{T}, \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

где

$$T = PS - QR. \quad (7.3.11)$$

Чтобы для односолитонной кривой получить функции P , Q , R и S , мы должны найти общее решение уравнения Риккати (7.3.8) при $\kappa = 4\beta \operatorname{sech}[2\beta(s + 4\alpha t)]$ и $\tau = -2\alpha$. Подстановки $\xi = 2\beta(s + 4\alpha t)$ и $v = -\alpha/\beta$ сводят уравнение (7.3.8) к уравнению, рассмотренному в упр. 26 гл. 2. Там же приведены функции P , Q , R и S , входящие в общее решение.

Если по этим результатам, используя (7.3.10), составить компоненты касательного вектора, мы получим, что интегралы (7.3.2) принимают вид

$$\begin{aligned} x &= \int_0^s t_1 ds = -2h \int_0^s d\xi \frac{\partial}{\partial \xi} (\operatorname{sech} \xi \sin v\xi) = \\ &= -2h \operatorname{sech} s \sin vs, \\ y - 2h &= \int_0^s t_2 ds = 2h \int_0^s d\xi \frac{\partial}{\partial \xi} (\operatorname{sech} \xi \cos v\xi) = \\ &= 2h (\operatorname{sech} s \cos vs - 1), \\ z &= \int_0^s t_3 ds = s - h \operatorname{th} s, \end{aligned} \quad (7.3.12)$$

где $h = [\beta(v^2 + 1)]^{-1}$. Это параметрическое представление было использовано при построении кривых на рис. 7.2.

7.4. ДРУГИЕ СОЛИТОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Предыдущий пример привел к кубическому уравнению Шрёдингера благодаря конкретному выражению скорости изменения радиуса-вектора, а именно $X_t = \kappa b$. Это конкретное движение привело в свою очередь к соотношению $t_t = \kappa b - \kappa t p$ (7.2.9). Если не выбирать скорость X_t специальным образом, а просто взять общее выражение вида

$$t_t = \lambda^* N + \lambda N^* + \mu t, \quad (7.4.1)$$

то повторение вычислений, приводящих к (7.2.18), показывает, что мы должны потребовать $\mu = 0$ и $\lambda = -\gamma/2$, где γ — коэффициент при t в (7.2.12). По-прежнему справедливы и другие ранее полученные результаты, а именно $\beta = 0$ и $\alpha = iR$. Если снова приравнять две смешанные вторые производные от N , мы найдем, что

$$\psi_t + \gamma_s - iR\psi = 0, \quad (7.4.2a)$$

$$R_s = \frac{1}{2} i (\gamma \psi^* - \gamma^* \psi). \quad (7.4.2b)$$

В примере, который привел к кубическому уравнению Шрёдингера, мы получили $\gamma = -i\psi_s$. Это соотношение дало интегрируемое выражение для R_s . Предполагая другие интегрируемые формы для γ , можно с движением неплоских кривых связать другие эволюционные уравнения. Рассмотрим уравнение, которое следует из выбора

$$\gamma = f\psi + ik\psi_s + a\psi_{ss}, \quad (7.4.3)$$

где f — действительная функция, а k и a — действительные постоянные. Это более общее выражение для R_s снова легко интегрируется, и мы получаем

$$R = -\frac{1}{2} k |\psi|^2 + \frac{1}{2} ia (\psi^* \psi_s - \psi \psi_s^*) + \Gamma(t). \quad (7.4.4)$$

Тогда эволюционное уравнение (7.4.2a) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_t + (f\psi)_s + ik\psi_{ss} + a\psi_{sss} + \frac{1}{2} ik |\psi|^2 \psi + \\ + \frac{1}{2} a |\psi|^2 \psi_s - \frac{1}{2} a \psi^2 \psi_s^* - i\Gamma\psi = 0. \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

Теперь сосредоточим внимание на эволюционных уравнениях, содержащих только ψ , $|\psi|$ и производные от ψ ; поэтому мы должны исключить из (7.4.5) член $\psi^2 \psi_s^*$. Это легко сделать, полагая $f = f(\psi, \psi^*)$ и требуя, чтобы $\psi \partial f / \partial \psi^* = (1/2) a \psi^2$. Тогда, поскольку f действительно, интегрирование этого соотношения дает

$$f = \frac{1}{2} a |\psi|^2 + c, \quad (7.4.6)$$

где c — действительная постоянная. Теперь уравнение для ψ принимает вид

$$i_t + \frac{3}{2} a |\psi|^2 \psi_s + c \psi_s + ik \psi_{ss} + a \psi_{sss} + \frac{1}{2} ik |\psi|^2 \psi - i \Gamma \psi = 0. \quad (7.4.7)$$

Это эволюционное уравнение и связанные с ним линейные уравнения приводятся в соответствие со стандартным видом заменой $u = (1/2) \psi e^{-i\eta x}$. Получившееся уравнение для u содержит члены с u и u_s . Коэффициенты при этих членах суть $i(c\eta - k\eta^2 - a\eta^3 - \Gamma)$ и $(c - 2k\eta - 3a\eta^2)$ соответственно. Таким образом, эволюционное уравнение упрощается, если мы выберем c и Γ таким образом, чтобы этих членов не было. Для этого нужно, чтобы

$$c = 2k\eta + 3a\eta^2, \quad (7.4.8)$$

$$\Gamma = k\eta^2 + 2a\eta^3. \quad (7.4.9)$$

Тогда эволюционное уравнение имеет вид

$$u_t + 3A|u|^2 u_s + iB|u|^2 u + iCu_{ss} + Du_{sss} = 0, \quad (7.4.10)$$

где $A = 2a$, $B = 2(3a\eta + k)$, $C = k + 3a\eta$ и $D = a$. Видно, что коэффициенты удовлетворяют соотношению $AC = BD$. Эволюционное уравнение (7.4.10) с этим ограничением на коэффициенты называется уравнением Хироты [53]. При $A = D = 0$ (т. е. при $a = 0$) оно сводится к кубическому уравнению Шрёдингера, а при $k + 3a\eta = 0$ (т. е. при $B = C = 0$) — к модифицированному уравнению Кортевега — де Фриза.

Линейные уравнения, связанные с уравнением Хироты, можно получить, следуя процедуре, использованной в разд. 7.3. Сначала линейные векторные уравнения преобразуются в уравнение Риккати, как при получении (7.3.8), а затем это уравнение Риккати преобразуется к стандартным линейным уравнениям Захарова — Шабата для обратной задачи рассеяния, как в разд. 2.12. Линейные векторные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} N_t &= -\psi t, \\ t_t &= \frac{1}{2} (\psi^* N + \psi N^*) \end{aligned} \quad (7.4.11)$$

и

$$\begin{aligned} N_t &= iRN + \gamma t, \\ t_t &= -\frac{1}{2} (\gamma^* N + \gamma N^*). \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

Каждая из трех компонент (7.4.11) и (7.4.12) обладает первым интегралом вида $|N|^2 + t^2 = 1$, где теперь N — одна из трех компонент N , и аналогично для t . Если положить $N = u + iv$ и записать первый интеграл в виде $(u + iv)(u - iv) = (1 + t)(1 - t)$, то

найдем, что функции

$$\varphi = \frac{u + iv}{1 - i} \quad (7.4.13)$$

и

$$-\frac{1}{\chi} = \frac{u - iv}{1 - i} = \varphi^* \quad (7.4.14)$$

удовлетворяют уравнениям Риккати

$$\begin{aligned} \varphi_s - \frac{1}{2} \varphi^* \varphi^2 - \frac{1}{2} \varphi &= 0, \\ \varphi_t - iR\varphi + \frac{1}{2} \varphi^* \varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (7.4.15)$$

Процедура здесь та же, которая использовалась при получении уравнения Риккати (7.3.8).

Если положить $\varphi = \omega_1/\omega_2$ и следовать процедуре, примененной в разд. 2.12, мы получим линейные уравнения

$$\begin{aligned} \omega_{1s} &= \frac{1}{2} \psi \omega_2, \\ \omega_{2s} &= -\frac{1}{2} \psi^* \omega_1 \end{aligned} \quad (7.4.16)$$

и

$$\begin{aligned} \omega_{1t} &= \frac{1}{2} iR\omega_1 - \frac{1}{2} \gamma \omega_2, \\ \omega_{2t} &= \frac{1}{2} \gamma^* \omega_1 - \frac{1}{2} iR\omega_2. \end{aligned} \quad (7.4.17)$$

Использованные при получении (7.4.10) подстановки $\psi = 2ue^{i\eta s}$, а также $v_1 = \omega_1 e^{-i\eta s/2}$ и $v_2 = \omega_2 e^{i\eta s/2}$ дают линейные уравнения стандартного вида. В частности, при $\eta = 2\xi$ находим, что

$$\begin{aligned} v_{1s} + i\xi v_1 &= u v_2, \\ v_{2s} - i\xi v_2 &= -u^* v_1 \end{aligned} \quad (7.4.18)$$

и

$$\begin{aligned} v_{1t} &= \frac{1}{2} iRv_1 - \frac{1}{2} \tilde{\gamma} v_2, \\ v_{2t} &= \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^* v_1 - \frac{1}{2} iRv_2, \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \gamma e^{-2i\xi s} = 4(a|u|^2 + k\xi + 4a\xi^2) + 2(k + 4a\xi)u_s + 2au_{ss}, \\ R &= -2(k + 4a\xi)|u|^2 + 2ia(u^*u_s - uu_s^*) + 4k\xi + 16a\xi^3. \end{aligned} \quad (7.4.20)$$

При $a = 0$ и $k = -1$ вновь получаем уравнение Шрёдингера (5.3.1) и связанные с ним линейные уравнения (5.3.5), а для действительного u и $a = 1$, $k = -6\xi$ — модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза (5.1.7) и соответствующие линейные уравнения (5.1.9).

С помощью описанного здесь в общих чертах метода можно также получить уравнение sine-Gordon. При рассмотрении кривых постоянной кривизны κ_0 получим, что $\psi = \kappa_0 \exp(i\sigma)$, где $\sigma(s, t) = \int_0^s \tau(s', t) ds'$. Если вместо (7.4.3) использовать также $\gamma = \text{const} = \gamma_0$, то (7.4.2b) дает $R_s = \gamma_0 \kappa_0 \sin \sigma$. Кроме того, (7.4.2a) сводится к $R = \sigma_t$ и поэтому удовлетворяет уравнению sine-Gordon в виде $\sigma_{st} = \gamma_0 \kappa_0 \sin \sigma$.

Поучительно также рассмотреть этот пример, не используя комплексных обозначений. Так как триада единичных векторов \mathbf{n} , \mathbf{b} и \mathbf{t} движется как твердое тело, то зависимость этих векторов от времени может быть записана в виде [45]

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_t &= \Omega \times \mathbf{t}, \\ \mathbf{b}_t &= \Omega \times \mathbf{b}, \\ \mathbf{n}_t &= \Omega \times \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (7.4.21)$$

где $\Omega = \omega_1 \mathbf{t} + \omega_2 \mathbf{b} + \omega_3 \mathbf{n}$. Возможна также соответствующая векторная форма уравнений Серре — Френе. Мы можем записать $\mathbf{t}_s = \mathbf{d} \times \mathbf{t}$ и так далее, где \mathbf{d} — вектор Дарбу, $\mathbf{d} = \tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}$.

Приравнявая смешанные производные $\mathbf{t}_{st} = \mathbf{t}_{ts}$, $\mathbf{b}_{st} = \mathbf{b}_{ts}$ и $\mathbf{n}_{st} = \mathbf{n}_{ts}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa}{\partial t} - \frac{\partial \omega_2}{\partial s} &= \tau \omega_3, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial \omega_1}{\partial s} &= -\kappa \omega_3, \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial s} &= \tau \omega_2 - \kappa \omega_1. \end{aligned} \quad (7.4.22)$$

Если рассматривать кривые постоянной кривизны, а также принять $\omega_1 = 0$, мы найдем, что можно проинтегрировать первое и третье из уравнений (7.4.22) и получить $\omega_2 = \cos \sigma$, $\omega_3 = \sin \sigma$ и $\tau = \sigma_s$. Теперь второе из уравнений (7.4.22) принимает вид

$$\sigma_{st} = -\kappa_0 \sin \sigma. \quad (7.4.23)$$

Дальнейшее развитие этих геометрических соображений было выполнено Лакшмананом [76] и Рейтером [95].

Распространение когерентного оптического импульса

Богатым источником задач о распространении нелинейных волн служит взаимодействие интенсивного светового излучения с различными видами вещества. Чтобы выделить многочисленные типы явлений, могущих иметь место, были предложены различные модели атомной среды. В частности, если частота световой волны почти точно равна частоте перехода между двумя заселенными

энергетическими уровнями атомов вещества, то между светом и веществом может происходить сильное резонансное взаимодействие.

При теоретическом описании этого резонанса часто можно пренебречь всеми другими энергетическими уровнями атомов и рассматривать взаимодействие света с так называемым двухуровневым атомом. Квантовая теория двухуровневого атома относительно проста, а рассмотрение световой волны в рамках классической электродинамики дает дополнительное упрощение. Такое допущение оправдывается изучением почти всех проявлений взаимодействия интенсивных световых пучков с атомами. В рамках этих

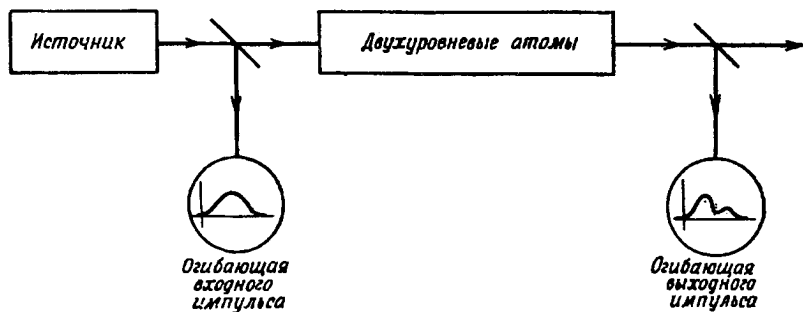


Рис. 7.3. Схема эксперимента по распространению оптических импульсов.

упрощений можно полностью рассмотреть резонансное взаимодействие интенсивного света с веществом. Как мы увидим, определяющие уравнения этой теоретической модели приводят к еще одной ситуации, в которой могут появиться солитоны.

Интенсивное исследование сильного резонанса привело к наблюдению солитонного поведения как в экспериментах, так и при численном решении определяющих уравнений (Мак-Колл и Хан [82]). Дополнительные результаты были получены в работах [92] и [44]. Эффект называется самоиндуцированной прозрачностью.

На рис. 7.3 показана блок-схема типичной экспериментальной установки. Световой импульс заранее заданной формы входит в область, содержащую двухуровневые атомы. Мы предположим, что средой является газ, хотя некоторые эксперименты были проведены на твердых телах. Зададимся вопросом, какова форма этого импульса после прохождения через среду при появлении его на другом конце. Мы увидим, что огибающая световой волны может вести себя как солитон.

Теоретическая модель этого процесса особенно интересна, поскольку она дает не только нелинейные эволюционные уравнения, обладающие солитонными свойствами, но и линейные уравнения,

решения которых получаются методами обратной задачи рассеяния. Таким образом, нам не нужно вводить независимо линейные уравнения, хотя это можно сделать, что привело бы к линейным уравнениям, несколько более общим, чем те, которые вводились из физических соображений.

Конечно, все теоретические модели имеют свои ограничения, и в данном случае одним из недостатков модели является отсутствие вырожденных уровней. Хотя было найдено, что численные решения уравнений, получающихся при включении в них вырожденных уровней, обнаруживают интересные солитоноподобные явления [32], эти уравнения еще не были решены никакими аналитическими методами. Все же они будут бегло рассмотрены в разд. 7.13.

7.5. ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Векторы электромагнитного поля, характеризующие световую волну, описываются уравнениями Максвелла, которые мы запишем в виде (см., например, [62])

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (7.5.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (7.5.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (7.5.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (7.5.1d)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, \mathbf{P} — поляризация среды.

Так как речь пойдет о распространении в пространственно однородной, электрически нейтральной среде, можно положить $\rho = \mathbf{j} = 0$. Единственным источником световой волны в среде является тогда член поляризации \mathbf{P} . Поляризация возникает вследствие отклонений формы атомов от идеальной сферической симметрии, в то время как само отклонение является следствием электромагнитного поля световой волны в среде. Именно это взаимодействие световой волны со средой вводит в задачу нелинейность. Световая волна удовлетворяет волновому уравнению, которое можно получить, беря ротор от (7.5.1a) и используя (7.5.1b). Получаем

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (7.5.2)$$

Если использовать описанную выше зависимость \mathbf{P} от \mathbf{E} , от это уравнение оказывается нелинейным.

Теперь сосредоточим внимание на распространении фронтов плоских волн и на плоскополяризованной волне. При этом упрощении достигнуто разумное соответствие между теорией и экспериментом, и в настоящий момент удовлетворительно может быть

рассмотрено лишь одномерное распространение солитонов. Так как продолжительность светового импульса варьирует от наносекунд (10^{-9} с) до пикосекунд (10^{-12} с), а продолжительность светового цикла составляет по порядку величины 10^{-15} с, то даже самые короткие импульсы содержат много световых циклов. Поэтому разумно записать величину поля $E(x, t)$ в виде быстро осциллирующей бегущей волны с более медленно меняющейся огибающей. Можно также допустить медленное изменение фазы несущей волны и записать

$$E(x, t) = \mathcal{E}(x, t) \cos[kx - \omega t + \varphi(x, t)]. \quad (7.5.3)$$

Медленные изменения \mathcal{E} и φ на масштабах длины и времени означают, что

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \ll k\mathcal{E}, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \ll \omega\mathcal{E}, \quad (7.5.4)$$

и аналогично для φ . Оказывается, что приближенные уравнения, определяющие \mathcal{E} и φ , проще, чем волновое уравнение (7.5.2). Рассмотрим сначала реакцию среды на такое электрическое поле.

7.6. ДВУХУРОВНЕВЫЙ АТОМ

Как упоминалось ранее, речь пойдет об идеализированной среде, состоящей из атомов, у которых есть только два энергетических уровня. Предполагается, что разность энергий между верхним уровнем a и нижним b приблизительно равна частоте падающего света $\omega_0 = 2\pi\nu_0$. Таким образом, предполагается выполненным условие резонанса $E_a - E_b \equiv \hbar\omega_{ab} \approx \hbar\omega_0$, где \hbar — постоянная Планка, деленная на 2π . Тогда можно записать волновую функцию атома в виде зависящей от времени линейной комбинации нормированных волновых функций для двух уровней, т. е.

$$\psi(r, t) = a(t)\psi_a(r) + b(t)\psi_b(r), \quad (7.6.1)$$

где $\int |\psi_a|^2 d\tau = 1$, $a = a$, $b = b$. Нормировка ψ означает, что

$$\int \psi^* \psi d\tau = \int |\psi|^2 d\tau = \int (|a\psi_a|^2 + |b\psi_b|^2) d\tau = |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (7.6.2)$$

Разность заселенностей для n_0 таких атомов в единичном объеме равна

$$n = n_0 \left(\int (|a\psi_a|^2 - |b\psi_b|^2) d\tau = n_0 (|a|^2 - |b|^2) \right). \quad (7.6.3)$$

Волновая функция удовлетворяет нестационарному уравнению Шрёдингера

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (7.6.4)$$

где предполагается, что гамильтониан H содержит член $-(\hbar^2/2m)\nabla^2$, описывающий внешнюю трансляцию атома, член H_0 , являющийся гамильтонианом свободного атома, и член $H_I = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$, появляющийся вследствие взаимодействия атома с падающей световой волной. Здесь \mathbf{d} — дипольный момент оператора для атома, $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$, где e — заряд электрона и \mathbf{r} — внутренняя атомная координата. Предположим, что \mathbf{d} параллелен \mathbf{E} , так что $H_I = -dE$. Тогда поляризация атома

$$p = \int \psi^*(d) \psi d\tau. \quad (7.6.5)$$

Если предположить, что у атома нет постоянного дипольного момента, так что $\int d\tau \psi_a^* r \psi_a = 0$, $a = a$, b , то (7.6.5) сводится к следующему соотношению:

$$p = p_0(a^*b + b^*a), \quad (7.6.6)$$

где

$$p_0 = -e \int d\tau \psi_a^* r \psi_b = -e \int d\tau \psi_b^* r \psi_a.$$

Уравнение Шрёдингера может быть преобразовано к паре уравнений для амплитуд $a(t)$ и $b(t)$ при использовании свойства ортогональности, обычно проявляемого волновыми функциями, т. е. $\int \psi_a^* \psi_b d\tau = \delta_{ab}$. Умножая (7.6.4) на ψ_a , интегрируя по всему пространству и затем повторяя ту же процедуру для ψ_b , получим

$$a_t + i\omega_a a = -iVb, \quad (7.6.7a)$$

$$b_t + i\omega_b b = -iVa, \quad (7.6.7b)$$

где $\omega_a = E_a/\hbar$, $\omega_b = E_b/\hbar$ и $V = -p_0 E(x, t)/\hbar$. Поле $E(x, t)$ — это поле в месте нахождения атома. Так как атомные скорости много меньше скорости света, это различие пренебрежимо мало, за исключением быстро меняющихся фазовых членов. Этот вопрос во всей его полноте здесь обсуждаться не будет, поскольку это заняло бы слишком много места; см. [82], [57]. Для атома, движущегося со скоростью v , мы вводим галилееву координату x_g и лабораторную координату x_l , связанные соотношением $x_l = x_g + vt$. Тогда поле в атоме дается формулой

$$E(x_l, t) = \mathcal{E}(x_g, t) \cos[k(x_g + vt) - \omega t + \varphi(x, t)]. \quad (7.6.8)$$

Различие между координатами пренебрежимо мало для медленно меняющихся амплитуды \mathcal{E} и фазы φ , но для быстро меняющейся части фазы оно вводит доплеровское смещение $\Delta\omega = kv$. Если мы положим в (7.6.7)

$$\begin{aligned} a &= i v_1 \exp[-i\omega_a(t - x_g/c) + it\Delta\omega/2], \\ b &= v_2 \exp[-i\omega_b(t - x_g/c) - it\Delta\omega/2] \end{aligned} \quad (7.6.9)$$

и предположим, что интенсивность полей, генерируемых на второй гармонике $2\omega_0$, достаточно мала, так что ими можно пренебречь, мы получим

$$\begin{aligned} v_{1t} + \frac{1}{2} i \Delta \omega v_1 &= \frac{p_0 \mathcal{E}}{2\hbar} e^{i\varphi} v_2, \\ v_{2t} - \frac{1}{2} i \Delta \omega v_2 &= -\frac{p_0 \mathcal{E}}{2\hbar} e^{-i\varphi} v_1. \end{aligned} \quad (7.6.10)$$

Таким образом, находим, что v_1 и v_2 удовлетворяют уравнениям того типа, который был использован в методе Захарова — Шабата для обратной задачи, с той только разницей, что переменные пространства и времени поменялись местами.

Условие нормировки (7.6.2) принимает вид $|v_1|^2 + |v_2|^2 = 1$, и нормированная разность плотности заселенности $\mathcal{N} = n/n_0$ равна

$$\mathcal{N} = |v_1|^2 - |v_2|^2. \quad (7.6.11)$$

Согласно (7.6.6), поляризация атома с доплеровским смещением $\Delta\omega$ принимает вид

$$p = p_0 \{ -i v_1^* v_2 e^{i\omega(t-x/c) - i\Delta\omega t} + \dots \}.$$

Записывая $\Phi = kx - \omega t + \varphi$, находим, что

$$p = p_0 (\mathcal{V} \cos \Phi + \mathcal{P} \sin \Phi), \quad (7.6.12)$$

где функции \mathcal{V} и \mathcal{P} (огигающие поляризации) даются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\Delta\omega, x, t) &= i(v_1 v_2^* e^{-i\varphi} - v_1^* v_2 e^{i\varphi}), \\ \mathcal{P}(\Delta\omega, x, t) &= -(v_1 v_2^* e^{-i\varphi} + v_1^* v_2 e^{i\varphi}). \end{aligned} \quad (7.6.13)$$

Видно, что у поляризации, индуцированной в атоме световой волной, есть компонента с амплитудой $p_0 \mathcal{V}$, находящаяся в фазе с электрическим полем световой волны, и компонента с амплитудой $p_0 \mathcal{P}$, фаза которой смещена на 90° относительно фазы световой волны. Компоненты поляризации \mathcal{V} и \mathcal{P} сравнимы по продолжительности с медленно меняющейся огигающей электрического поля $\mathcal{E}(x, t)$.

7.7. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Так как атомы распределены по скоростям, есть соответствующее распределение по смещениям частот $\Delta\omega$. Если n_0 — число атомов в единице объема и распределение по смещениям частот (скоростям) задается функцией $g(\Delta\omega)$, то полная поляризация на единицу объема есть

$$\begin{aligned} P(x, t) &= n_0 \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) g(\Delta\omega) p(\Delta\omega, x, t) \equiv \\ &\equiv n_0 \langle p(\Delta\omega, x, t) \rangle. \end{aligned} \quad (7.7.1)$$

Ломаные скобки $\langle \rangle$ используются для обозначения величины, усредненной по распределению $g(\Delta\omega)$. Функция $g(\Delta\omega)$ часто предполагается гауссовой; пример ее будет рассмотрен в (7.11.9). Член, соответствующий источнику в волновом уравнении (7.5.2), является второй производной этого выражения для поляризации. Пренебрегая медленной зависимостью от времени в функциях огибающих \mathcal{E} и \mathcal{P} , имеем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \approx -\omega_0^2 P = -n_0 \omega_0^2 \int d(\Delta\omega) g(\Delta\omega) (\mathcal{E} \cos \Phi + \mathcal{P} \sin \Phi). \quad (7.7.2)$$

Если подставить поле $E(x, t)$ в виде (7.5.3) в уравнение (7.5.2) и пренебречь вторыми производными медленно меняющихся величин \mathcal{E} и Φ , а также произведениями вида $\mathcal{E}_1 \Phi_1$, мы получим, что коэффициенты при членах $\cos \Phi$ и $\sin \Phi$ соответственно удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = 2\pi n_0 \omega_0 p_0 \langle \mathcal{P}(\Delta\omega, x, t) \rangle, \quad (7.7.3a)$$

$$\mathcal{E} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + c \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 2\pi n_0 \omega_0 p_0 \langle \mathcal{E}(\Delta\omega, x, t) \rangle. \quad (7.7.3b)$$

Эти уравнения можно записать в комплексной форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) (\mathcal{E} e^{i\Phi}) = 2\pi n_0 \omega_0 p_0 \langle \mathcal{P} + i\mathcal{E} \rangle e^{i\Phi}. \quad (7.7.4)$$

Уравнения (7.7.3) или (7.7.4) нужно решать совместно с уравнениями для v_1 и v_2 (7.6.10). С использованием определений (7.6.13) эти последние уравнения дают \mathcal{E} и \mathcal{P} . Более удобной для некоторых целей процедурой является непосредственное получение уравнений для временной зависимости функций \mathcal{P} и \mathcal{E} . Дифференцируя (7.6.13) и (7.6.11), получим уравнения

$$\mathcal{P}_t = \frac{p_0 \mathcal{E}}{\hbar} \mathcal{N} + (\Delta\omega + \Phi_t) \mathcal{E}, \quad (7.7.5a)$$

$$\mathcal{N}_t = -\frac{p_0 \mathcal{E}}{\hbar} \mathcal{E}, \quad (7.7.5b)$$

$$\mathcal{E}_t = -(\Delta\omega + \Phi_t) \mathcal{P}, \quad (7.7.5c)$$

которые часто называют уравнениями Блоха [16]¹⁾. Следует отметить подобие уравнений Блоха и уравнений Серре — Френе.

Интересен частный случай уравнений (7.7.3) и (7.7.5). Если $g(\Delta\omega)$ — четная, а $\mathcal{E}(\Delta\omega, x, t)$ — нечетная функции $\Delta\omega$, то источник

¹⁾ При получении (7.7.5) мы пренебрегли эффектами столкновений, приводящих к затуханию в членах поляризации и заселенности. Если включить столкновения, левые части уравнений (7.7.5) заменяются на $\mathcal{P}_t + \mathcal{P}/T_2$, $\mathcal{N}_t + (\mathcal{N} - 1)T_1$ и $\mathcal{E}_t + \mathcal{E}/T_2$ соответственно, где T_1 — время столкновения для столкновительной релаксации и T_2 (обычно $T_2 \ll T_1$) — время столкновения для сбивающих фазу столкновений [6].

φ в (7.7.3b) равен нулю. Таким образом, можно рассматривать задачи распространения, где нет изменений фазы. Простейший пример этого случая получится при пренебрежении движением атомов, когда определяющие уравнения могут быть сведены к уравнению sine-Gordon. Сейчас мы рассмотрим этот случай.

7.8. НЕПОДВИЖНЫЕ АТОМЫ — ПРЕДЕЛ SINE-GORDON

Исключаем трансляционное движение атомов, вводя δ -функцию Дирака и записывая $g(\Delta\omega) = \delta(\Delta\omega)$. Из (7.7.5с) видно, что если положить $\mathcal{G}(0, x, 0)$ равной нулю, она останется нулем. Вводя новую зависимую переменную

$$\tilde{\mathcal{G}} = p_0 \mathcal{G} / \hbar \quad (7.8.1)$$

с размерностью частоты, находим, что определяющие уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial t} + c \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial x} = \Omega^2 \mathcal{P}(0, x, t), \quad (7.8.2a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \tilde{\mathcal{G}} \mathcal{N}, \quad (7.8.2b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = -\tilde{\mathcal{G}} \mathcal{P}, \quad (7.8.2c)$$

где

$$\Omega^2 = \frac{2\pi n_0 \omega_0 p_0^2}{\hbar} \quad (7.8.3)$$

и функции \mathcal{N} и \mathcal{P} вычисляются при нулевом сдвиге частоты. Два последних уравнения в (7.8.2) имеют первый интеграл $\mathcal{N}^2 + \mathcal{P}^2 = 1$, так что можно записать

$$\mathcal{P} = \pm \sin \sigma, \quad \mathcal{N} = \pm \cos \sigma, \quad (7.8.4)$$

а также

$$\tilde{\mathcal{G}} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (7.8.5)$$

Записывая $\sigma(x, t) = \int_{-\infty}^t dt' \tilde{\mathcal{G}}(x, t')$, так что $\sigma(x, -\infty)$ обращается в нуль, мы видим, что $\mathcal{N}(0, x, -\infty) = \pm 1$. Этот предел относится к состоянию системы до прихода импульса. Верхний знак соответствует $\mathcal{N} = (n_a - n_b)/n_0 = +1$, что относится к случаю изначальной инверсной заселенности энергетических уровней. Тогда на проходящую через среду световую волну среда действует как усилитель. Нижний знак берется, когда атомы среды находятся на нижнем уровне. Как мы увидим ниже, только в этом последнем случае возможно распространение устойчивого солитона.

Вводя преобразование координат

$$\xi = \Omega x/c, \quad \tau = \Omega(t - x/c), \quad (7.8.6)$$

означающее, что

$$\frac{\partial}{\partial t} = \Omega \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\Omega}{c} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \quad (7.8.7)$$

находим, что первое из уравнений (7.8.2) принимает вид уравнения sine-Gordon

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi^2 \partial \tau} = \pm \sin \sigma, \quad (7.8.8)$$

где нижний знак относится к усилителю, а верхний — к аттенуатору, если $\sigma(x, -\infty) = 0$. Как мы увидим ниже, полученные в гл. 5 многосолитонные решения уравнения sine-Gordon в данном контексте имеют простой физический смысл.

Рассмотрим сначала устойчивость односолитонного решения $\sigma = 4 \operatorname{arctg}[\exp(a\tau \pm \xi/a)]$, где верхний (нижний) знак берется при верхнем (нижнем) знаке в уравнении sine-Gordon (7.8.8). Выраженное через безразмерную переменную электрического поля

$$u = \mathcal{E}/\Omega \quad (7.8.9)$$

это последнее уравнение может быть записано в виде

$$\partial u / \partial \xi = \pm \sin \sigma. \quad (7.8.10)$$

Вблизи заднего фронта импульса (т. е. при $t \rightarrow +\infty$) σ принимает вид $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau u(\xi, \tau)$, что можно рассматривать как площадь под профилем импульса. Для односолитонного решения этот интеграл равен 2π . Поэтому односолитонное решение часто называют 2π -импульсом. Если площадь под импульсом несколько больше 2π , так что $\sigma = 2\pi + \epsilon$, то

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \pm \sin(2\pi + \epsilon) = \pm \epsilon. \quad (7.8.11)$$

Для верхнего знака, соответствующего усилителю, $\partial u / \partial \xi > 0$, что приводит к дальнейшему увеличению площади, в то время как для аттенуатора (нижний знак) $\partial u / \partial \xi < 0$ и σ уменьшается до 2π . Аналогично, при $\sigma = 2\pi - \epsilon$ площадь растёт до 2π для аттенуатора и уходит от 2π для усилителя. Следовательно, площадь 2π -импульса устойчива только в аттенуаторе, так что только в этом случае можно ожидать появления солитона. Дальнейшее понимание устойчивости площади можно получить, рассматривая движущиеся атомы, что будет сделано в следующем разделе.

Наличие солитонных явлений при взаимодействии когерентной световой волны с двухуровневыми атомами понять легко. Если первоначально атомы находятся в нижнем атомном состоянии, передний фронт светового импульса приводит к инверсии заселенности и, таким образом, ослабляется, в то время как задний фронт возвращает атомы в первоначальное состояние с помощью стимулированного излучения. Этот процесс может реализоваться только в том случае, если обе инверсии происходят до того, как атом сможет испытать столкновение, приводящее к потере фазовой когерентности атомных волновых функций и падающей световой волны. Импульс должен также быть достаточно интенсивным для инверсии заселенности, иначе он просто ослабляется таким образом, как можно было бы ожидать для распространения слабого сигнала в аттенуаторе. Если условия процесса выполнены, то оканчивается, что (как показано в конце разд. 7.10) устанавливается стационарный профиль импульса и что огибающая этого импульса распространяется затем без затухания со скоростью, на несколько порядков меньшей фазовой скорости света в среде.

Профиль стационарного электрического поля, действующего на эту инверсию, является профилем односолитонного решения уравнения *sine-Gordon* для аттенуатора, а именно $\sigma = 4 \arctg[\exp(a\tau - \xi/a)]$. Профиль поля имеет вид

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{p_0}{\hbar} \mathcal{E} = \Omega \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = \frac{2}{\tau_p} \operatorname{sech} \left[\frac{t - x/v}{\tau_p} \right], \quad (7.8.12)$$

где $\tau_p = (a\Omega)^{-1}$ и

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{a^2} \right). \quad (7.8.13)$$

Если площадь импульса много больше 2π , инверсия заселенности может происходить повторно. Каждая область импульса, встречающаяся со средой, находящейся в основном состоянии, будет ослабляться, а каждая область импульса, взаимодействующая с инверсно заселенной средой, будет усиливаться. Можно ожидать, что по мере того, как этот процесс попеременного усиления и затухания будет продолжаться, импульс расщепится. Распад на два солитона приводит к профилям поля, подобным профилям на рис. 1.2. Аналитическое выражение для этого решения получается из двухсолитонного решения (5.2.37).

В данной задаче играют роль и осцилляторные решения типа тех, которые представлены на рис. 5.2. Импульсы с отрицательными значениями \mathcal{E} допустимы, так как отрицательные значения \mathcal{E} можно интерпретировать как изменение на π фазы несущей волны импульса. Эта интерпретация согласуется с уравнением (7.7.3b), которое показывает, что если \mathcal{E} стремится к нулю, то можно ожидать, что фаза меняется достаточно быстро. Полная площадь под осцилляторными импульсами, подобными тем, что

даются формулой (5.2.19), равна $\int \mathcal{E} dt = (p_0/\hbar) [\sigma(x, \infty) + \sigma(x, -\infty)]$, и они могут, таким образом, считаться импульсами с нулевой площадью.

Наконец, упомянем усилитель. Как указывалось выше, в этом случае солитон неустойчив. Некоторые важные черты усиления когерентных оптических импульсов описываются решениями совершенно иного типа. Соответствующим решением является автомодельное решение, описанное в разд. 5.2. Профиль импульса показан на рис. 5.5, б. Из рис. 5.5, а и б, видно, что $\sigma(\infty) - \sigma(-\infty) = \pi$, и решение часто называется π -импульсом. Это решение будет снова рассмотрено в разд. 7.11.

7.9. ДВИЖУЩИЕСЯ АТОМЫ И ТЕОРЕМА ПЛОЩАДЕЙ

Результаты разд. 7.8 демонстрируют существенные нелинейности распространения когерентного оптического импульса в их простейшей форме. Так как определяющее уравнение является уравнением sine-Gordon, то задача может быть подробно проанализирована с помощью известных (описанных в разд. 5.2) решений этого уравнения. Можно также ввести соответствующие линейные уравнения, как это было сделано в разд. 5.2, и перейти к анализу обратной задачи рассеяния.

Распространение теории на случай движущихся атомов и переменной фазы обеспечивает дальнейшее уточнение, приводящее к более удовлетворительному согласию между теорией и экспериментом. Кроме того, с появлением в уравнениях (7.6.9) и (7.7.5) параметра расстройки $\Delta\omega$, уравнения, описывающие физику задачи, сами уже имеют вид, который можно проанализировать методом обратной задачи. Это ситуация, аналогичная описанной в разд. 7.4 для спиральных кривых. В этой связи следует отметить подобие между уравнениями Блоха (7.7.5) и скалярной компонентой уравнений Серре — Френе (7.3.3).

В этом разделе мы учтем параметр расстройки $\Delta\omega$, но по-прежнему будем пренебрегать медленными изменениями фазы $\phi(x, t)$. Этот последний член будет рассмотрен в следующем разделе при введении более общего метода обратной задачи рассеяния.

Прежде чем изучать профили импульсов, получим очень простое соотношение, показывающее, как распространение импульса в аттенуаторах и в усилителях влияет на полную площадь под импульсом, определенную выражением

$$\theta(x) = \frac{p_0}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{E}(x, t). \quad (7.9.1)$$

Результат, называемый теоремой площадей, дает общее представление о многих чертах этого процесса [82].

Теорема площадей может быть получена из (7.7.3а). Интегрируя по времени, получим

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{2\pi n_0 \omega_0 \rho_0^2}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) g(\Delta\omega) \mathcal{P}(\Delta\omega, x, t). \quad (7.9.2)$$

Перепишем подынтегральное выражение, заметив сначала, что из (7.7.5а) и (7.7.5с) можно получить

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{i\Delta\omega t} (\mathcal{P} + i\mathcal{P}) = e^{i\Delta\omega t} \mathcal{N}(\Delta\omega, x, t) \tilde{\mathcal{E}}(x, t). \quad (7.9.3)$$

Мы опять положили равным нулю член $\phi(x, t)$, поскольку, как указывалось ранее, мы пренебрегаем изменениями фазы. Интегрирование (7.9.3) и разделение действительной и мнимой частей дает

$$\mathcal{P}(\Delta\omega, x, t) = \int_{-\infty}^t dt' \tilde{\mathcal{E}}(x, t') \mathcal{N}(\Delta\omega, x, t) \cos \Delta\omega(t - t'). \quad (7.9.4)$$

Если подставить это выражение для \mathcal{P} в (7.9.2) и поменять порядок интегрирования по t и t' , что потребует указанного изменения пределов, мы получим

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} = \frac{2\pi n_0 \omega_0 \rho_0^2}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} dt' u(x, t') \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) g(\Delta\omega) \tilde{\mathcal{E}}(x, t') \times \\ \times \mathcal{N}(\Delta\omega, x, t') \int_{t'}^{\infty} dt \cos \Delta\omega(t - t'). \end{aligned} \quad (7.9.5)$$

Подставляя в последний интеграл $\tau = t - t'$ и вспоминая, что $\pi\delta(\Delta\omega) = \int_0^{\infty} d\tau \cos \Delta\omega\tau$, находим

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{2\pi^2 n_0 \omega_0 \rho_0^2 g(0)}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \tilde{\mathcal{E}}'(x, t') \mathcal{N}(0, x, t'), \quad (7.9.6)$$

т. е. изменение площади происходит только за счет резонансных атомов. Выражения для $\mathcal{N}(0, x, t)$ и $u(x, t)$ были получены в разд. 7.8, где было найдено, что $\tilde{\mathcal{E}} = \partial\sigma/\partial t$, а также $\mathcal{N}(0, x, t) = \pm \cos \sigma$. С этими представлениями интеграл (7.9.6) может быть вычислен, и мы имеем

$$\frac{d\theta}{dx} = \pm \frac{1}{2} \alpha \cos \theta, \quad \begin{array}{l} + \text{ усилитель,} \\ - \text{ аттенуатор,} \end{array} \quad (7.9.7)$$

где

$$\alpha = \frac{4\pi^2 n_0 \omega_0 \rho_0^2 g(0)}{\hbar c}. \quad (7.9.8)$$

Физический смысл постоянной α следует непосредственно из линеаризованного варианта уравнений (7.9.7), в котором $\sin \theta$ заменяется на θ . Тогда видно, что площадь растет или уменьшается на характерной длине α^{-1} . В пределе, когда $g(\Delta\omega)$ превращается в δ -функцию, так что восстанавливается предел sine-Gordon, мы находим, что $g(0)$ становится бесконечной, а характеристическая длина стремится к нулю.

Решение уравнения (7.9.7), удовлетворяющее условию $\theta = \theta_0$ при $x = x_0$, имеет вид

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \exp \left[\pm \left(\frac{\alpha}{2} \right) (x - x_0) \right] \quad (7.9.9)$$

и схематически изображено на рис. 7.4.

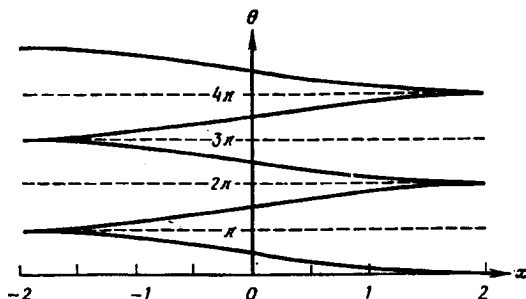


Рис. 7.4. Теорема площадей — график решения вида (7.9.9). (С разрешения Американского физического института.)

Так как уравнение (7.9.7) содержит два знака, это фактически два различных дифференциальных уравнения. Два решения этих уравнений можно увидеть на рис. 7.4: если читать диаграмму справа налево, то получится решение для знака плюс (усилитель), если слева направо — для знака минус (аттенуатор). Следовательно, в усилителе бесконечно малая площадь будет возрастать до π , а в аттенуаторе любая площадь меньше π будет убывать до нуля. Этот второй результат допускает не только хорошо известное затухание распространяющегося в аттенуаторе импульса, но также и эволюцию его в ненулевой импульс с нулевой площадью, т. е. импульс, для которого полная площадь под огибающей равна нулю, но площадь под энергией импульса ($\sim \mathcal{E}^2$) не равна нулю. Это возможно, когда площади под положительными участками огибающей импульса равны площадям под отрицательными участками. Как указывалось выше, участки с положительной и отрицательной огибающей — это просто области, в которых у несущей волны относительная разность фаз равна 180° . В аттенуаторе площади начальных импульсов в интервале от π до 3π будут эволюционировать в стационарный 2π -импульс самонидуцированной

прозрачности. На рисунке показано также, что в усилителе 2π -импульс неустойчив и будет эволюционировать либо в π -, либо в 3π -импульс.

Рис. 7.4 относится только к полной площади импульса и не дает никакой информации ни о возможном распаде импульса на два или более импульсов той же полной площади, ни о том, будет ли непрерывно усиливающийся π -импульс сохранять площадь π посредством сужения импульса или же посредством развития отрицательных участков огибающей.

7.10. РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Уравнения (7.6.9) для двухуровневого атома можно решить методом обратной задачи для системы Захарова — Шабата. Этот метод в несколько более общей постановке будет кратко изложен в разд. 7.12. Здесь мы используем метод обратной задачи для уравнения Шрёдингера с комплексным потенциалом.

Используя преобразование, упомянутое в гл. I, введем сначала новые зависимые переменные y и z с помощью соотношений

$$y = v_1 + v_2, \quad iz = v_1 - iv_2 \quad (7.10.1)$$

и безразмерную переменную времени $\tau = \Omega(t - x/c)$, где Ω задано формулой (7.8.3). Согласно (7.6.10), новые переменные y и z удовлетворяют уравнениям

$$y_\tau + \frac{1}{2} i u y = \eta z, \quad z_\tau - \frac{1}{2} i u z = -\eta y, \quad (7.10.2)$$

где

$$\eta = \frac{\Delta\omega}{2\Omega} \quad (7.10.3)$$

и $u = \mathcal{E}/\Omega$, как в (7.8.9). Следуя процедуре разд. I.5, находим, что уравнения второго порядка имеют вид

$$y_{\tau\tau} + (\eta^2 - \mathcal{V})y = 0, \quad z_{\tau\tau} + (\eta^2 - \mathcal{V}^*)z = 0, \quad (7.10.4)$$

где \mathcal{V} — комплексный потенциал

$$\mathcal{V} = -\frac{1}{4}(u^2 + 2iu_\tau). \quad (7.10.5)$$

Нам нужно также определить граничные условия для функций y и z . Для *аттенуатора* потребуем, чтобы $a \rightarrow 0$ и $|b| \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow -\infty$ (т. е. до прихода импульса). Согласно (7.6.9) и (7.6.10), это в свою очередь означает, что $v_1 \rightarrow 0$ и $v_2 \rightarrow e^{i\eta\tau}$. Таким образом, y и z изменяются как $e^{i\eta\tau}$ при $t \rightarrow \infty$, поэтому из определения фундаментальных решений для уравнения Шрёдингера (2.8.4) и (2.10.7) видно, что y и z пропорциональны $f_2(-\eta, \xi, \tau)$.

Пренебрегая зависящим от пространственной координаты фазовым множителем, который не входит в вычисления, мы можем положить

$$y(\eta, \xi, \tau) = \alpha f_2(-\eta, \xi, \tau), \quad (7.10.6)$$

где α — постоянная. Так как начальное условие при $\tau \rightarrow -\infty$ и определяющие уравнения (7.10.4) удовлетворяют соотношению $z^*(\eta, \xi, \tau) = y(-\eta, \xi, \tau)$, можно положить $z^*(\eta, \xi, \tau) = \alpha f_2(\eta, \xi, \tau)$. Выражая v_1 и v_2 через y и z , находим, что (7.6.10) и (7.6.12) эквивалентны соотношению

$$\mathcal{N} - i\mathcal{P} = yz^* = -f_2(-\eta, \xi, \tau)f_2(\eta, \xi, \tau), \quad (7.10.7)$$

если положить $\alpha = e^{i\pi/4}$. При $\tau \rightarrow -\infty$ это выражение сводится к $\mathcal{N} \rightarrow -1$.

Для усилителя потребуем, чтобы $|a| \rightarrow 1$ и $b \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Отсюда находим $y \sim e^{-i\eta\tau}$, $z \sim e^{-i\eta\tau}$; это показывает, что y и z пропорциональны $f_2(\eta, \xi, \tau)$, и снова приводит к соотношению $z^*(\eta, \xi, \tau) = y(-\eta, \xi, \tau)$. Возвращаясь к случаю аттенуатора, замечаем, что при $\tau \rightarrow +\infty$, т. е. после прохождения импульса, можно использовать соотношение

$$f_2(-\eta, \xi, \tau) = c_{11}(-\eta, \xi)f_1(-\eta, \xi, \tau) + c_{12}(-\eta, \xi)f_1(\eta, \xi, \tau). \quad (7.10.8)$$

Чтобы получить стандартные выражения теории рассеяния (с $x \rightarrow -\tau$), делим на c_{12} и имеем

$$T(-\eta, \xi)f_2(-\eta, \xi, \tau) = R_R(-\eta, \xi)f_1(-\eta, \xi, \tau) + f_1(\eta, \xi, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} R_R e^{-i\eta\tau} + e^{i\eta\tau}. \quad (7.10.9)$$

Если мы хотим рассмотреть процесс распространения без потерь (т. е. солитоны), то решение после прохождения импульса снова должно стремиться к $a \rightarrow 0$, $|b| \rightarrow 1$. Как указывалось выше, это означает, что $y \sim e^{+i\eta\tau}$ и, следовательно, в (7.10.9) нужно положить $R_R(-\eta, \xi) = 0$. Согласно (2.816), это означает, что $R_L = 0$.

Таким образом, видно, что физические соображения для данной задачи дают естественную мотивировку связи обращения в нуль коэффициентов отражения с распространением без потерь (солитонным). Для несолитонного распространения $R_R(-\eta, \xi)$ не обращается в нуль, и нужно определять пространственные изменения коэффициента отражения. Этот вопрос будет рассмотрен после того, как мы дадим сводку уравнений, нужных для решения обратной задачи рассеяния.

В разд. 3.1 было показано, что потенциал можно получить из выражения

$$\mathcal{V}(\xi, \tau) = 2 \frac{\partial}{\partial \tau} A_L(\tau, \tau; \xi), \quad (7.10.10)$$

которое является записью уравнения (3.1.4) в обозначениях данной задачи. Функция $A_L(\tau, t; \xi)$ удовлетворяет уравнению (3.2.8) в виде

$$A_L(\tau, t; \xi) + \Omega_L(\tau + t; \xi) + \int_{-\infty}^{\tau} dt' A_L(\tau, t'; \xi) \Omega_L(t' + t; \xi) = 0. \quad (7.10.11)$$

Используя (7.10.5) и отделяя действительную и мнимую части, имеем

$$u^2(\xi, \tau) = -8 \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \tau} A_L(\tau, \tau; \xi), \quad (7.10.12a)$$

$$u(\xi, \tau) = -4 \operatorname{Im} A_L(\tau, \tau; \xi). \quad (7.10.12b)$$

Пространственная зависимость коэффициента отражения получается из рассмотрения определяющего уравнения в областях, где импульс мал. В линейной области, когда импульс только что начал приходить в некоторую точку ξ , можно предположить, что $\mathcal{N}(\eta, \xi, \tau) = +1$ для усилителя и -1 — для аттенуатора. Тогда уравнения Блоха (7.7.5) в безразмерном виде с $\varphi = 0$ сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\tau(\eta, \xi, \tau) &= \pm u(\xi, \tau) + 2\eta \mathcal{Q}(\eta, \xi, \tau), \\ \mathcal{Q}_\tau(\eta, \xi, \tau) &= -2\eta \mathcal{P}(\eta, \xi, \tau). \end{aligned} \quad (7.10.13)$$

Мы можем также пренебречь интегралом в уравнении Марченко (7.10.11), поскольку он является нелинейным членом и поэтому мал при малом \mathcal{Q} . Тогда при $\tau \rightarrow -\infty$ получим

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau) &= -4 \operatorname{Im} A_L(\tau, \tau; \xi) = -4i \Omega_L(2\tau; \xi) = \\ &= -4i [r_L(2\tau, \xi) - \sum m_n e^{-2ik_1 \tau}], \end{aligned} \quad (7.10.14)$$

где

$$r_L(2\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{2\pi} R_L(\eta, \xi) e^{2i\eta\tau} \quad (7.10.15)$$

и $m_n = ic_{22}/c_{12}$.

Так как $u(\xi, \tau)$ действительно, из (7.10.14) видно, что r_L для рассмотренного в этой задаче комплексного потенциала \mathcal{V} должно быть чисто мнимым, а величины m_n должны быть либо чисто мнимыми, либо встречаться парами, симметрично располагаясь относительно мнимой оси.

Теперь можно решить уравнения (7.10.13) относительно \mathcal{P} и \mathcal{Q} , выразив их через u . Для учета вклада в непрерывный спектр под-

ставим в (7.10.13) представление бегущей волны в виде

$$\mathcal{P}(\eta, \xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{d\zeta}{2\pi} \bar{\mathcal{P}}(\zeta, \eta) e^{i k(\zeta) \xi - i \zeta \tau}, \quad (7.10.16a)$$

$$\mathcal{Q}(\eta, \xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi} \bar{\mathcal{Q}}(\zeta, \eta) e^{i k(\zeta) \xi - i \zeta \tau}, \quad (7.10.16b)$$

$$u(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi} \bar{u}(\zeta) e^{i k(\zeta) \xi - i \zeta \tau} \quad (7.10.16c)$$

и найдем, что

$$\bar{\mathcal{P}}(\zeta, \eta) = \pm \frac{i \zeta \bar{u}(\zeta)}{\zeta^2 - 4\eta^2}.$$

Подставляя в волновое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \langle \mathcal{P} \rangle, \quad (7.10.17)$$

являющееся безразмерным вариантом (7.7.3a), мы получаем дисперсионное соотношение

$$k(\zeta) = \pm \zeta \left\langle \frac{1}{\zeta^2 - 4\eta^2} \right\rangle. \quad (7.10.18)$$

При вычислении интеграла в операции усреднения можно избежать сингулярностей, замечая, что конечные времена релаксации в (7.10.13) потребовали бы замены ζ на $\zeta + i\epsilon$. Теперь можно использовать (7.10.16c) и (7.10.14), чтобы записать $\bar{u}(-2\zeta) e^{i k(-2\zeta)} = -2i R_L(\zeta, \xi)$. Следовательно, пространственная зависимость коэффициента отражения дается соотношением

$$R_L(\zeta, \xi) = R_L(\zeta, 0) e^{i k(-2\zeta) \xi}, \quad (7.10.19)$$

где $k(-2\zeta)$ получается из (7.10.18).

Аналогичное рассмотрение вкладов связанных состояний в случае аттенуатора дает

$$m_n(\zeta_n, \xi) = m_n(\zeta_n, 0) \exp\left(-\frac{1}{2} i \zeta_n \xi \left\langle \frac{1}{\zeta^2 - \eta^2} \right\rangle\right). \quad (7.10.20)$$

Рассмотрим теперь приложение этих результатов к некоторым простым задачам распространения когерентных импульсов.

Чисто многосолитонные решения могут быть получены с использованием выражений для A_L (3.3.15). В обозначениях данного раздела

$$u = 4 \frac{\partial}{\partial \tau} \{\operatorname{Im} [\ln(\det V)]\} = 4 \frac{\partial}{\partial \tau} \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{Im}(\det V)}{\operatorname{Re}(\det V)} \right], \quad (7.10.21)$$

где V — $N \times N$ -матрица $V = I + M$, приведенная в (3.3.7).

Для односолитонного решения с полюсом при $\xi = ia/2$, где a действительно, находим

$$V = 1 + \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' m_1(\xi) e^{a\tau'}. \quad (7.10.22)$$

Полагая $m_1(\xi) = ic(\xi)$, где $c(\xi)$ действительно, и используя (7.10.20), получим

$$V = 1 + i \frac{c(0)}{a} \exp \left[a \left(\tau - \xi \left\langle \frac{1}{a^2 + 4\eta^2} \right\rangle \right) \right]. \quad (7.10.23)$$

Тогда огибающая поля имеет вид

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{p_0}{\hbar} \mathcal{E} = \Omega \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = \frac{2}{\tau_p} \operatorname{sech} \left[\frac{1}{\tau_p} \left(t - \frac{x}{v} \right) \right], \quad (7.10.24)$$

где $\tau_p = (a\Omega)^{-1}$ и скорость импульса v дается соотношением

$$\frac{c}{v} = 1 + \left\langle \frac{1}{a^2 + 4\eta^2} \right\rangle. \quad (7.10.25)$$

Если для усреднения использовать $g(\Delta\omega) = \delta(\Delta\omega)$, то первое выражение для скорости (7.10.25) сводится к выражению для скорости, полученному в пределе sine-Gordon, (7.8.13). Тот же рецепт может быть использован для включения неоднородного уширения в различные многосолитонные решения уравнения sine-Gordon.

Полученная скорость v (7.10.25) может быть на два или три порядка ниже фазовой скорости c световой волны в среде. Приведем численные значения, характерные для экспериментальных результатов [44]: $\omega_0 \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$, $n_0 \sim 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $p_0 \sim 6 \times 10^{-16} \text{ ед. СГС}$, $\tau_p = 7 \times 10^{-9}$. Тогда $\Omega^2 \sim 2 \times 10^{20} \text{ с}^{-2}$. Таким образом, $(\Omega\tau_p)^2 \sim 3000$, т. е. скорость огибающей уменьшается на три порядка, так как функция, усредненная по частотному распределению, приводит к множителю порядка единицы.

Мы видели, что свойства солитонов могут объяснить ряд важных характеристик распространения когерентного оптического импульса в аттенуаторе. Полное решение уравнения Марченко, возможное в чисто многосолитонном случае, а также затухание несолитонного вклада в решение, приводит к весьма удовлетворительному описанию нелинейного распространения в аттенуаторе. Кроме того, импульс, площадь которого ниже некоторого определенного порога π -импульса, просто ослабляется, как сигнал малой амплитуды. В этом случае нелинейные эффекты становятся совсем несущественными. Кроме того, в теории совершенно естественно возникает понятие импульса нулевой площади, и этот импульс наблюдался экспериментально [47].

Как и в разд. 4.4 (случай уравнения Кортевега — де Фриза), после определения полюсов, связанных с коэффициентом отражения начального профиля импульса, можно получить конечные амплитуды импульсов. Пары полюсов, симметрично расположен-

ных относительно мнимой оси, определяют структуру возникающих бризерных решений.

7.11. РАСПРОСТРАНЕНИЕ В УСИЛИТЕЛЕ

Поскольку, как мы видели в разд. 7.8, солитон не является устойчивой модой распространяющегося светового импульса в случае инверсной заселенности, можно ожидать, что распространение импульса в усилителе полностью отлично от распространения в аттенуаторе. В этом случае, как можно ожидать, анализ также более труден, так как несолитонная часть решения теперь не ослабляется, а усиливается, и поэтому ее нельзя отбрасывать. Импульс, первоначально малый, будет усиливаться до тех пор, пока нелинейные эффекты не станут доминирующими.

Однако есть случай, проанализировать который очень просто. В разд. 5.2 мы видели, что автомодельное решение уравнения *sine-Gordon* дает профиль импульса, обладающего свойствами, которые мы требуем от π -импульса в усилителе. Показанные на рис. 5.5 результаты могут быть непосредственно применены к случаю усиления импульса в пределе отсутствия неоднородного уширения (т. е. при $g(\Delta\omega) = \delta(\Delta\omega)$). Нам нужно просто интерпретировать рис. 5.5 как график зависимости $\Omega^{-1}\mathcal{E}/\xi$ от ξt . Из этих результатов можно вывести законы пересчета для распространения импульса в усилителе без потерь. Так как абсцисса огибающей импульса равна ξt , то продолжительность импульса сокращается линейно с ростом расстояния, пройденного импульсом. При этом, поскольку $\Omega^{-1}\mathcal{E} = \delta\phi$, амплитуда огибающей импульса линейно растет с расстоянием.

В разд. 3.4 мы видели, что «обрезанный» потенциал с коэффициентом отражения, выраженным через рациональную функцию, может быть проанализирован почти так же легко, как и чисто многосолитонное решение. Уравнение Марченко может быть решено методом, аналогичным использованному для безотражательных потенциалов при чисто солитонном распространении. Следовательно, при анализе распространения импульсов в усилителе «обрезанные» профили начальных импульсов кажутся предпочтительнее. Однако вследствие аналитических трудностей, связанных с зависящим от времени фазовым членом в коэффициенте отражения, *распространение* даже этих начальных профилей импульсов приходится рассматривать приближенно. Сейчас мы рассмотрим пример, показывающий, как с помощью этих «обрезанных» потенциалов можно исследовать некоторые свойства, которых следует ожидать от распространения импульсов в усилителе. Однако при выполнении этого анализа нужны сильные аппроксимации, и пример рассматривается только для того, чтобы показать, как с помощью таких приближенных процедур можно получить разумные результаты.

Одним из самых легких для рассмотрения является профиль начального импульса

$$\mathcal{E}(0, \tau) = 2u(\tau - \tau_0) \operatorname{sech} \tau, \quad (7.11.1)$$

где $u(\tau - \tau_0)$ — единичная ступенчатая функция. При изменении τ от $-\infty$ до $+\infty$ площадь под импульсом уменьшается от 2π до нуля. Согласно (7.10.5), соответствующий комплексный потенциал имеет вид

$$\mathcal{V}(0, \tau) = -\frac{1}{2} u(\tau - \tau_0) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \tau + i \frac{\pi}{4} \right) - i\delta(\tau - \tau_0) \operatorname{sech} \tau_0. \quad (7.11.2)$$

Рассмотрим решение уравнения Шрёдингера (7.10.4) с этим комплексным потенциалом. Фундаментальным решением, сводящимся к $e^{-i\eta\tau}$ при $\tau \rightarrow -\infty$ и, таким образом, описывающим, согласно результатам разд. 7.10, инверсную заселенность перед приходом импульса, является решение $f_2(\eta, \tau; 0)$. Большой интерес представляют коэффициенты $c_{ij}(\eta, 0)$, связывающие различные фундаментальные решения. Так как потенциал \mathcal{V} является «обрезанным», а также содержит δ -функцию, эти коэффициенты могут быть сразу же получены при использовании результатов упр. 23 гл. 2. При $\tau > \tau_0$ потенциал сводится к $-(1/2)\operatorname{sech}^2 \theta$, где $\theta = \tau/2 + i\pi/4$. Тогда фундаментальные решения даются в упр. 16 гл. 2. В частности,

$$f_1(\eta, \tau; 0) = \frac{e^{i\eta\tau} (2i\eta + \operatorname{th} \theta)}{2i\eta - 1}. \quad (7.11.3)$$

Это фундаментальное решение для «необрезанного» потенциала. Используя результаты упр. 23 гл. 2, имеем

$$\tilde{c}_{12}(\eta, 0) = e^{-i\eta\tau_0} \frac{f_1(\eta, \tau_0; 0) + (i\eta - a) f_1(\eta, \tau_0; 0)}{2i\eta}, \quad (7.11.4)$$

где теперь $a = -i \operatorname{sech} \tau_0$. Полагая $\theta_0 = \tau_0/2 + i\pi/4$ и замечая, что $2a \operatorname{th} \theta_0 = \operatorname{sech}^2 \theta_0$, находим, что

$$\tilde{c}_{12}(\eta, 0) = \frac{2i\eta - \operatorname{th} \tau_0}{2i\eta - 1}. \quad (7.11.5)$$

Аналогично получим

$$\tilde{c}_{11}(\eta, 0) = -\tilde{c}_{22}(-\eta, 0) = \frac{ae^{-2i\eta\tau_0}}{2i\eta - 1}. \quad (7.11.6)$$

При выводе этого результата мы использовали соотношение $a + \operatorname{th} \theta_0 = \operatorname{th} \tau_0$. Тогда коэффициент отражения $R_L(\eta, 0) = \tilde{c}_{22}(\eta, 0)/\tilde{c}_{12}(\eta, 0)$ имеет вид

$$R_L(\eta, 0) = -\frac{1}{2} \frac{e^{2i\eta\tau_0} \operatorname{sech} \tau_0}{\eta + (i/2) \operatorname{th} \tau_0}. \quad (7.11.7)$$

Используя для преобразования Фурье формулу (2.8.32) и для пространственной зависимости формулу (7.10.19), находим, что на произвольном расстоянии ξ в среде

$$r_L(\xi, 0) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{2\pi} \frac{e^{-i\eta(\tau-2\tau_0) + ik(-2\eta)\xi}}{\eta + (i/2) \operatorname{th} \tau_0}. \quad (7.11.8)$$

Для $\tau_0 > 0$ начальный импульс меньше π -импульса и полюс в подынтегральном выражении лежит в нижней полуплоскости. Для $\tau_0 < 0$ следует включить вклад от полюса, который теперь лежит в верхней полуплоскости. Этот более сложный случай здесь рассматриваться не будет. Наличие полюсов в верхней полуплоскости приведет к появлению многопиковых усиленных импульсов, наблюдавшихся при численном решении этой задачи ([55], рис. 4).

Частотное распределение неоднородного уширения часто предполагается гауссовым. Тогда в безразмерном виде

$$\bar{g}(\eta) = \frac{\Omega T_2^*}{\sqrt{\pi}} e^{-(\Omega T_2^* \eta)^2}, \quad (7.11.9)$$

где T_2^* называется временем неоднородной релаксации, а $\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \bar{g}(\eta) = 1$. Время T_2^* является мерой затухания профиля импульса вследствие эффектов дисперсии (ширина полосы) и описывает обратимое явление ([48]; [1]).

Теперь постоянная распространения в (7.10.14) принимает вид

$$k(\zeta) = -\frac{\zeta (\Omega T_2^*)^2}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz w(z)}{z^2 - \left(\frac{1}{2} \Omega T_2^* + i\epsilon\right)^2}, \quad (7.11.10)$$

где для того, чтобы убрать сингулярности с действительной оси, было введено бесконечно малое затухание. Функция $w(z)$ является комплексной функцией ошибок [4]

$$w(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt e^{t^2} \right), \quad \operatorname{Im} z > 0. \quad (7.11.11)$$

Так как мнимая часть $w(z)$ является нечетной функцией z , ее можно добавить к подынтегральному выражению (7.10.14) и получить интеграл (7.11.10). Функция $w(z)$ имеет следующие предельные формы:

$$\begin{aligned} w(z) &= 1 + \frac{2iz}{\sqrt{\pi}} + \dots, & |z| \ll 1, \\ w(z) &= \frac{i}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2z^3} + \dots \right), & |z| \gg 1. \end{aligned} \quad (7.11.12)$$

Следовательно, на полуокружности бесконечного радиуса, лежащей в верхней полуплоскости, функция $w(z)$ стремится к нулю как z^{-1} и интеграл (7.11.10) можно вычислить с помощью теории вычетов. Так как $w(z)$ аналитична в верхней полуплоскости, получим

$$k(\xi) = -\frac{1}{2} i \sqrt{\pi} \Omega T_2^2 w\left(\frac{1}{2} \xi \Omega T_2^2\right). \quad (7.11.13)$$

В пределе $\Omega T_2^2 \gg 1$ гауссово распределение (7.11.9) превращается в δ -функцию, и задача сводится к уравнению sine-Gordon, как показано в разд. 7.8. Здесь мы рассмотрим только противоположный предел очень большого неоднородного уширения $\Omega T_2^2 \ll 1$. Этому случаю соответствует первое из выражений (7.11.12) для функции $w(z)$. Оказывается, что, несмотря на то, что функция $k(\xi)$ в (7.11.8) интегрируется по всем ξ , использование для $w(z)$ только аппроксимации, предназначенной для малых аргументов, приводит к ожидаемым результатам. Полагая $w(z) = 1$, мы находим, что $k(-2\xi) = -(1/2) i \sqrt{\pi} \Omega T_2^2 = -i\pi\bar{g}(0)$ и

$$r_L(\xi, \tau) = e^{\gamma\xi} r_L(0, \tau), \quad (7.11.14)$$

где $\gamma = 2\pi\bar{g}(0) = 4\pi\Omega g(0)$. В безразмерной форме зависящий от пространственной координаты множитель в (7.11.14) равен $e^{\alpha x/2}$, где α — коэффициент линейного усиления, даваемый формулой (7.9.8).

Теперь очень просто вычислить интеграл (7.11.8) и получить

$$r_L(\xi, \tau) = \frac{1}{2} i e^{\gamma\xi} u(\tau - 2\tau_0) \operatorname{sech} \tau_0 \exp\left[-\frac{1}{2}(\tau - 2\tau_0) \operatorname{th} \tau_0\right]. \quad (7.11.15)$$

Так как зависимость от ξ только параметрическая, то, не принимая ее во внимание, мы находим, что теперь уравнение Марченко (7.10.11) принимает вид

$$A_L(v, z) + \frac{1}{2} i \beta e^{-(1/2)(v+z) \operatorname{th} \tau} + \frac{1}{2} i \beta \int_{-z}^u ds A_L(v, s) e^{-(1/2)(s+z) \operatorname{th} \tau} = 0, \quad (7.11.16)$$

где

$$v = \tau - \tau_0, \quad z = t - \tau_0, \quad s = y - \tau_0, \quad (7.11.17)$$

$$\beta = e^{\gamma\xi} \operatorname{sech} \tau_0. \quad (7.11.18)$$

Нижний предел в (7.11.16), равный $-z$, а не $-\infty$, является результатом «обрезания» профиля импульса. Так как пространственную зависимость коэффициента прохождения нелегко получить используемым здесь методом (хотя это можно сделать с помощью более общего метода, который будет описан в следующем разделе), мы не можем перейти, как в разд. 3.4, к построению r_R и затем получить решение интегрального уравнения (3.2.7), в котором интеграл берется в пределах от z до $+\infty$.

Очевидно, что уравнение (7.11.16) упрощается, если с самого начала выбрать $A_L(v, z)$ в виде произведения

$$A_L(v, z) = F(v, z) e^{-(1/2) z \operatorname{th} \tau_0}. \quad (7.11.19)$$

Дифференцируя по z соответствующее уравнение для $F(v, z)$, получим

$$\frac{\partial F(v, z)}{\partial z} + \frac{1}{2} i \beta F(v, -z) e^{z \operatorname{th} \tau_0} = 0. \quad (7.11.20)$$

Последующее дифференцирование этого уравнения и исключение $\partial F(v, -z)/\partial z$ с помощью уравнения, которое получается из (7.11.20) при замене z на $-z$, дает

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \operatorname{th} \tau_0 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{4} \beta^2 \right) F(v, z) = 0. \quad (7.11.21)$$

Это уравнение имеет решения вида $e^{\mu z}$, где

$$\mu = \frac{1}{2} (\operatorname{th} \tau_0 \pm \delta), \quad (7.11.22)$$

$$\delta = (\operatorname{th}^2 \tau_0 + \beta^2)^{1/2}. \quad (7.11.23)$$

Из (7.11.18) видно, что как β , так и δ зависят от ξ . Таким образом, согласно (7.11.19) и (7.11.22), для решения уравнения Марченко (7.11.16) $A_L(v, z)$ удобно выбрать в виде

$$A_L(v, z) = a(v) e^{\delta z/2} + b(v) e^{-\delta z/2}. \quad (7.11.24)$$

Подстановка этого выражения для A_L в уравнение Марченко дает

$$a(v) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^{\delta v/2}}{\delta - \operatorname{th} \tau_0} - i \frac{e^{-\delta v/2}}{\beta} \right)^{-1}, \quad (7.11.25a)$$

$$b(v) = -\frac{2i\beta}{\delta - \operatorname{th} \tau_0} a(v). \quad (7.11.25b)$$

Так как, согласно (7.10.12b), $u = -4 \operatorname{Im} A_L(\tau, \tau; \xi)$, находим, что (7.11.24) дает выражение для профиля электрического поля в виде

$$u(\xi, \tau) = \frac{4\delta}{\beta (\delta - \operatorname{th} \tau_0)} \left[\frac{e^{-\delta \tau}}{(\delta - \operatorname{th} \tau_0)^2} + \frac{e^{-\delta \tau}}{\beta^2} \right]^{-1}. \quad (7.11.26)$$

Характерные графики этого выражения приводятся на рис. 7.5. Полная площадь импульса равна ¹⁾

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= \int_0^\infty dv u(v, \xi) = \\ &= 2\pi - 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{\delta - \operatorname{th} \tau_0} \right). \end{aligned} \quad (7.11.27)$$

¹⁾ При вычислении площади мы использовали соотношение

$$\int dx (be^{ax} + ce^{-ax})^{-1} = \frac{1}{a\sqrt{bc}} \operatorname{arctg}(e^{ax} \sqrt{b/c}).$$

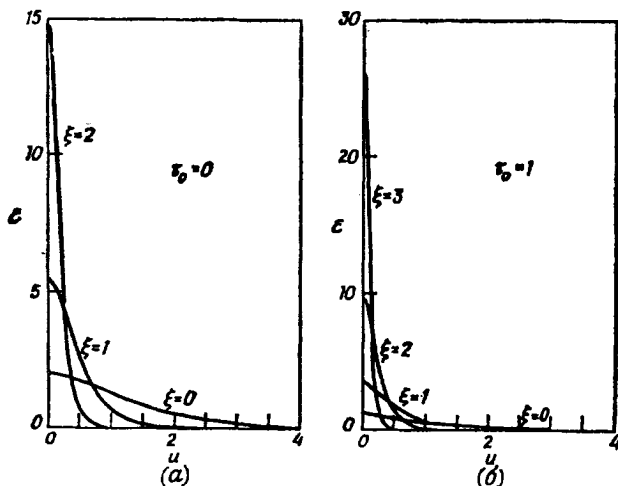


Рис. 7.5. Усиление исходного профиля импульса вида (7.11.1) при разных значениях τ_0 : (а) $\tau_0 = 0$, π -импульс; (б) $\tau_0 = 1$, начальная площадь приблизительно равна 0.45. Аналитические выражения для этих кривых даются формулами (7.11.26). Безразмерный линейный прирост γ равен единице в обоих случаях. (С разрешения Американского физического института.)

Этот результат можно переписать в виде $\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \theta \right) = e^{\alpha \xi} \operatorname{cosech} \tau_0$, что в силу теоремы площадей (7.9.9) эквивалентно выражению

$$\operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} \theta(\xi) \right] = e^{\alpha(\xi - \xi_0)} \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} \theta(\xi_0) \right]. \quad (7.11.28)$$

При ξ , стремящемся к бесконечности, $\theta(\xi)$ стремится к π для $0 < \tau_0 < \infty$. Кроме того, при τ_0 , стремящемся к 0, $\theta(\xi)$ стремится к π для всех ξ .

7.12. МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Распространение когерентного оптического импульса дает поучительный пример использования метода обратной задачи для системы Захарова — Шабата. Этот метод более удобен, когда мы удерживаем в (7.5.3) фазовый член, поскольку выражение для комплексного потенциала, необходимое при использовании однокомпонентного метода, становится тогда очень громоздким. Легко показать, что при наличии фазового члена уравнения Блоха (7.7.5) можно записать в безразмерном виде

$$\lambda_\tau + 2i\eta\lambda = \bar{u}\mathcal{N}, \quad (7.12.1a)$$

$$\lambda_\tau^* - 2i\eta\lambda^* = \bar{u}^*\mathcal{N}^*, \quad (7.12.1b)$$

$$\mathcal{N}_\tau = -\frac{1}{2}(\bar{u}^*\lambda + \bar{u}\lambda^*), \quad (7.12.1c)$$

где, как и раньше, $\eta = \Delta\omega/2\Omega$ и

$$\lambda = (\mathcal{P} + i\mathcal{Q}) e^{i\varphi}, \quad (7.12.2a)$$

$$u = u e^{i\varphi} = \left(\frac{p_0 \mathcal{E}}{\hbar \Omega} \right) e^{i\varphi}. \quad (7.12.2b)$$

Кроме того, уравнения Максвелла, которые ранее сводились к уравнению (7.10.17), теперь принимают вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = \langle \lambda \rangle. \quad (7.12.3)$$

Как мы видели в гл. 5, обычное использование метода обратной задачи для системы Захарова — Шабата включает в себя рассмотрение задачи на собственные значения для системы из двух уравнений. При данном применении этого метода удобно поменять ролями координаты пространства и времени по сравнению с тем, как они использовались ранее. Таким образом, мы вводим две функции v_1 и v_2 , удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} v_{1\tau} + i\zeta v_1 &= \frac{1}{2} \bar{u} v_2, \\ v_{2\tau} - i\zeta v_2 &= -\frac{1}{2} \bar{u}^* v_1, \end{aligned} \quad (7.12.4)$$

где \bar{u} — профиль комплексного поля, приведенный в (7.12.2b). Теперь именно пространственные производные $v_{1\xi}$ и $v_{2\xi}$ могут быть выражены через линейные комбинации v_1 и v_2 , как это было сделано для производной по времени в разд. 5.4. Теперь нужно показать, что приравнявая вторые смешанные производные $v_{1\xi\tau} = v_{1\tau\xi}$ и $v_{2\xi\tau} = v_{2\tau\xi}$, а также требуя, чтобы удовлетворялись уравнения Максвелла — Блоха, мы приходим к уравнению $\zeta_\xi = 0$, т. е. к независимости собственного значения от пространственной координаты. Следует отметить, что хотя линейные уравнения (7.12.4) имеют тот же вид, что и уравнения (7.6.10), что является основой для применения в разд. 7.6 метода обратной задачи, интерпретация уравнений (7.12.4) совершенно иная. Служащее параметром в (7.12.4) собственное значение ξ отличается от $\eta = \Delta\omega/2\Omega$ в (7.6.10). Хотя из физических соображений должно быть ясно, что η не зависит от ξ , эту независимость нужно продемонстрировать для введенного здесь параметра ξ . Преимущество используемого в этом разделе метода состоит в том, что его по-прежнему можно использовать для решения уравнения sine-Gordon, появляющегося в пределе $g(\Delta\omega) = \delta(\Delta\omega)$ при $\Delta\omega \rightarrow 0$. В этом пределе нельзя пользоваться предыдущим методом (так как $\eta \rightarrow 0$), хотя полученные в разд. 7.6 различные многосолитонные решения сводятся к соответствующим решениям уравнения sine-Gordon в пределе $g(\Delta\omega) \rightarrow \delta(\Delta\omega)$.

Из уравнений Блоха линейные уравнения для $v_{1\xi}$ и $v_{2\xi}$ с подходящими коэффициентами A , B и C можно получить непосредствен-

но. Сначала к обеим частям уравнения (7.12.1а) прибавим член $2i\zeta\lambda$ и запишем это уравнение в виде $\lambda_\tau + 2i\zeta\lambda = 2i(\zeta - \eta)\lambda + \bar{u}\mathcal{N}$. Теперь разделим это уравнение на $4i(\eta - \zeta - i\varepsilon)$ и усредним полученное уравнение по неоднородному уширению. Малый мнимый член в знаменателе позволяет избежать подынтегральных выражений с сингулярными знаменателями. (Однако окончательный результат не зависит от этого уширения, и можно использовать также интеграл в смысле главного значения.) В конце концов мы получим

$$B_\tau + 2i\zeta B = \frac{1}{2}\bar{u}_\tau - \bar{u}A, \quad (7.12.5)$$

где

$$A = -\frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta g(\eta) \mathcal{N}(\eta, \xi, \tau)}{\eta - \zeta - i\varepsilon}, \quad (7.12.6a)$$

$$B = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta g(\eta) \lambda(\eta, \xi, \tau)}{\eta - \zeta - i\varepsilon}. \quad (7.12.6b)$$

При выводе (7.12.5) использовано волновое уравнение (7.12.3). Результат (7.12.5) нужно сравнивать с (5.1.36b). Применение той же процедуры к двум последним уравнениям (7.12.1) приводит к уравнениям

$$C_\tau - 2i\zeta C = -\frac{1}{2}u_\tau^* - \bar{u}^*A, \quad (7.12.7a)$$

$$A_\tau = \frac{1}{2}(\bar{u}^*B + uC), \quad (7.12.7b)$$

где

$$C = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta g(\eta) \lambda^*(\eta, \xi, \tau)}{\eta - \zeta - i\varepsilon}. \quad (7.12.8)$$

Соотношения между A , B и C , выраженные формулами (7.12.5) и (7.12.7), имеют тот же вид, что и (5.1.36).

Перейдем к выводу уравнений, выражающих $v_{1\xi}$ и $v_{2\xi}$ как линейные комбинации v_1 и v_2 . Умножая уравнения (7.12.7b) и (7.12.5) на v_1 и v_2 соответственно и складывая, получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(v_1 A + v_2 B) + i\zeta(v_1 A + v_2 B) = \frac{1}{2}\bar{u}_\tau + \frac{1}{2}\bar{u}(v_1 C - v_2 A). \quad (7.12.9)$$

С использованием обозначений

$$\psi_{1\xi} \equiv Av_1 + Bv_2, \quad (7.12.10a)$$

$$\psi_{2\xi} \equiv Cv_1 - Av_2 \quad (7.12.10b)$$

уравнение (7.12.9) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi_{1\xi} - v_{1\xi}) + i\zeta(\psi_{1\xi} - v_{1\xi}) = \frac{1}{2}\bar{u}(\psi_{2\xi} - v_{2\xi}), \quad (7.12.11)$$

где член $\bar{u}_\xi v_2/2$ был исключен с помощью первого из уравнений (7.12.4). Аналогичная комбинация (7.12.7a) и (7.12.7b) приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi_{2\xi} - v_{2\xi}) - i\zeta(\psi_{2\xi} - v_{2\xi}) = -\frac{1}{2}\bar{u}^*(\psi_{1\xi} - v_{1\xi}). \quad (7.12.12)$$

Так как (7.12.11) и (7.12.12) имеют тот же вид, что и (7.12.4), решение должно быть пропорционально v_1 и v_2 . Мы можем записать

$$\begin{aligned} \psi_{1\xi} - v_{1\xi} &= \mu(\xi, \zeta) v_1, \\ \psi_{2\xi} - v_{2\xi} &= \mu(\xi, \zeta) v_2, \end{aligned} \quad (7.12.13)$$

где функция μ подлежит определению. Используя (7.12.10), находим, что

$$\begin{aligned} v_{1\xi} &= (A - \mu) v_1 + B v_2, \\ v_{2\xi} &= C v_1 - (A + \mu) v_2. \end{aligned} \quad (7.12.14)$$

Функцию $\mu(\xi, \zeta)$ можно определить выбором асимптотического вида функций v_1 и v_2 . Если связать v_2 с нижним атомным уровнем (состояние b), как в (7.6.9), то в случае аттенуатора нужно решение, в котором $v_1 \rightarrow 0$, $|v_2| \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Такое решение — это решение $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\zeta\tau}$, данное формулой (2.11.6). Так как тогда при $\tau \rightarrow -\infty$ функции v_1 и v_2 обращаются в нуль, (7.12.4) дает

$$\mu(\xi, \zeta) = -A(\zeta, \xi, -\infty) = \frac{i}{4} \left\langle \frac{\mathcal{N}(\eta, \xi, -\infty)}{\eta - \xi - i\epsilon} \right\rangle, \quad (7.12.15)$$

где было использовано введенное в (7.7.1) обозначение усреднения. Мы будем рассматривать только пространственно однородный случай, поэтому положим $\mathcal{N}(\eta, \xi, -\infty) = -1$.

Приравнявая теперь смешанные вторые производные функций v_1 и v_2 , находим, что $\xi_\xi = 0$. Конечно, мы могли бы получить предыдущие результаты более обычным путем, исходя из (7.12.4) и (7.12.14) и показывая, что требования $v_{1\xi\tau} = v_{1\tau\xi}$ и $v_{2\xi\tau} = v_{2\tau\xi}$ означают, что $\xi_\xi = 0$, при условии, что удовлетворяются уравнения Максвелла — Блоха и коэффициенты A , B и C удовлетворяют уравнениям (7.12.5) и (7.12.7), если эти функции заданы в виде (7.12.6) и (7.12.8) и ([43], [3]).

Если $\zeta = \eta$, то функции v_1 и v_2 сводятся к тем, которые были использованы в (7.6.9). Чтобы получить соответствующие начальные условия для поглощающей среды, определим

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_2^* \\ -\Phi_1^* \end{pmatrix}. \quad (7.12.16)$$

где $\tilde{\varphi}$ определено в (3.9.7). Тогда находим, что условие нормировки принимает вид

$$(|v_1|^2 + |v_2|^2)_{\zeta=-\eta} = (\tilde{\varphi}_1 \varphi_2 - \tilde{\varphi}_2 \varphi_1)_{\zeta=-\eta} = 1. \quad (7.12.17)$$

Итак, инверсию заселенности и поляризацию можно записать в виде

$$\mathcal{N} = -(|v_1|^2 - |v_2|^2)_{\zeta=-\eta} = (\tilde{\varphi}_1 \varphi_2 + \varphi_1 \tilde{\varphi}_2)_{\zeta=-\eta}, \quad (7.12.18a)$$

$$\lambda = -2(v_1 v_2^*)_{\zeta=-\eta} = 2(\varphi_1 \tilde{\varphi}_1)_{\zeta=-\eta}. \quad (7.12.18b)$$

Как и в разд. 7.10, мы получаем профиль поля из того уравнения Марченко, которое включает в себя интегрирование по предшествующей эволюции решения от $-\infty$ до τ . Приспосабливая результаты, полученные в разд. 3.9, к обозначениям данного раздела, мы имеем для $\tau > t$

$$\begin{aligned} A_1^*(\tau, t; \xi) + \int_{-\infty}^{\tau} dt' A_2(\tau, t'; \xi) \Omega_L(t' + t; \xi) &= 0, \\ -A_2^*(\tau, t; \xi) + \Omega_L(\tau + t; \xi) + \\ + \int_{-\infty}^{\tau} dt' A_1(\tau, t'; \xi) \Omega_L(\tau' + t; \xi) &= 0, \end{aligned} \quad (7.12.19)$$

где

$$\Omega_L(z; \xi) = r_L(z, \xi) - i \sum_l \frac{c_{22}(k_l, \xi)}{c_{12}(k_l, \xi)} e^{-ik_l z}. \quad (7.12.20)$$

Эти результаты следуют из преобразования Фурье от (3.9.8b). Используя (3.9.10), имеем $R_L(k, \xi) = -c_{22}(k, \xi)/c_{21}(k, \xi) = c_{11}^*(k, \xi)/c_{12}(k, \xi)$ и

$$r_L(z, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \frac{c_{11}(k, \xi)}{c_{12}(k, \xi)}. \quad (7.12.21)$$

Из (3.9.3) огибающая комплексного поля дается соотношением $q = u(\xi, \tau)/2 = -2A_2(\tau, \tau; \xi)$.

Теперь рассмотрим зависимость коэффициента отражения $r_L(z, \xi)$ от пространственной координаты. Вместо того чтобы снова применить метод, использованный в разд. 7.10, мы будем следовать процедуре работ [2] и [3] и рассмотрим линейные уравнения (7.12.14) в пределе $\tau \rightarrow +\infty$. Как указывалось выше, мы используем фундаментальное решение $\tilde{\varphi}$. Таким образом, мы полагаем

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2^* \\ -\varphi_1^* \end{pmatrix}. \quad (7.12.22)$$

Из (3.9.9а) получаем соотношение

$$\bar{\varphi} = c_{11}^* \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} - c_{12}^* \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

предельная форма которого имеет вид

$$\bar{\varphi} \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} c_{11}^* e^{-i\zeta\tau} \\ -c_{12}^* e^{i\zeta\tau} \end{pmatrix}. \quad (7.12.23)$$

Это означает также, что

$$\varphi \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} c_{12} e^{-i\zeta\tau} \\ c_{11} e^{i\zeta\tau} \end{pmatrix}. \quad (7.12.24)$$

Теперь линейные уравнения (7.12.14) имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{1\zeta} &= (A + A_-) \bar{\varphi}_1 + B \bar{\varphi}_2, \\ \varphi_{2\zeta} &= C \bar{\varphi}_1 - (A - A_+) \bar{\varphi}_2, \end{aligned} \quad (7.12.25)$$

где A_- дается выражением (7.12.15). В пределе $\tau \rightarrow +\infty$ это дает

$$\begin{aligned} c_{11\zeta} &= (A_+ + A_-) c_{11} - c_{12} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (B e^{2i\zeta\tau}), \\ c_{12\zeta} &= -c_{11} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (C e^{-2i\zeta\tau}) - (A_+ - A_-) c_{12}. \end{aligned} \quad (7.12.26)$$

Используя предельные формы

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\xi, \eta, +\infty) &= |c_{11}|^2 - |c_{12}|^2, \\ \lambda(\xi, \eta, +\infty) &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (2c_{12} c_{11}^* e^{-2i\eta\tau}), \end{aligned} \quad (7.12.27)$$

которые, так же как и условие нормировки $|c_{11}|^2 + |c_{12}|^2 = 1$, следуют из (7.12.18), мы находим, что (7.12.6а) и (7.12.15) дают

$$\begin{aligned} A_+ + A_- &= -\frac{1}{2} i \left\langle \frac{|c_{12}(\eta)|^2}{\eta - \zeta - i\epsilon} \right\rangle, \\ A_+ - A_- &= -\frac{1}{2} i \left\langle \frac{|c_{11}(\eta)|^2}{\eta - \zeta - i\epsilon} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.12.28)$$

Используя соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta - \zeta - i\epsilon} &= \frac{P}{\eta - \zeta} + i\pi\delta(\eta - \zeta), \\ \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{e^{i\zeta\tau} - 1}{\Omega} &= i\pi\delta(\Omega) - \frac{P}{\Omega}. \end{aligned} \quad (7.12.29)$$

для главного значения мы получаем также

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (B e^{2i\zeta\tau}) &= \frac{1}{2} i \int_{-\infty}^{\infty} d\eta g(\eta) \frac{c_{12}(\eta) c_{11}^*(\eta) e^{2i(\zeta-\eta)\tau}}{\eta - \zeta - i\varepsilon} = \\
 &= -\frac{\pi}{2} g(\zeta) c_{12}(\zeta) c_{11}^*(\zeta) + \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} P \int_{-\infty}^{\infty} d\eta g(\eta) c_{12} c_{11} \left[\frac{e^{2i(\zeta-\eta)\tau} - 1}{\eta - \zeta} \right] = \\
 &= -\frac{\pi}{2} g(\zeta) c_{12}(\zeta) c_{11}^*(\zeta) + \frac{1}{2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta g(\eta)}{\eta - \zeta} + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta g(\eta) c_{12} c_{11} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{2i(\zeta-\eta)\tau} - 1}{\eta - \zeta} \right] = 0. \quad (7.12.30)
 \end{aligned}$$

и

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} (C e^{-2i\zeta\tau}) = -\pi g(\zeta) c_{11}(\zeta) c_{12}^*(\zeta). \quad (7.12.31)$$

Тогда линейные уравнения (7.12.26) сводятся к дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}
 \dot{c}_{12} &= \frac{1}{2} i c_{12} \left\langle \frac{|c_{12}(\eta)|^2}{\eta - \zeta - i\varepsilon} \right\rangle, \\
 \dot{c}_{11} &= \frac{1}{2} i c_{11} \left\langle \frac{|c_{12}(\eta)|^2}{\eta - \zeta - i\varepsilon} \right\rangle,
 \end{aligned} \quad (7.12.32)$$

решения которых имеют вид

$$\begin{aligned}
 c_{11}(\eta, \xi) &= c_{11}(\eta, 0) \exp \left(\frac{1}{2} i \xi \left\langle \frac{|c_{12}|^2}{\eta - \zeta - i\varepsilon} \right\rangle \right), \\
 c_{12}(\eta, \xi) &= c_{12}(\eta, 0) \exp \left(\frac{1}{2} i \xi \left\langle \frac{|c_{11}|^2}{\eta - \zeta - i\varepsilon} \right\rangle \right).
 \end{aligned} \quad (7.12.33)$$

Тогда коэффициент отражения может быть выражен в виде

$$r_L(\eta, \xi) = \frac{c_{11}^*(\eta, \xi)}{c_{12}^*(\eta, \xi)} = r_L(\eta, 0) \exp \left(\frac{1}{2} i \xi \left\langle \frac{1}{\eta - \zeta - i\varepsilon} \right\rangle \right). \quad (7.12.34)$$

Этот результат следует сравнить с (7.10.19) и (7.10.20).

Упражнение 1

Покажите, что пренебрегая в (7.2.6) и (7.12.8) членом $i\varepsilon$ и рассматривая интегралы в смысле главного значения, можно получить выражение для коэффициента отражения $r_L(\eta, \xi)$ в виде (7.12.34).

Упражнение 2

Конечные значения верхнего и нижнего уровней заселенности даются выражениями $n_a(\eta, \xi, +\infty) = |c_{11}(\eta, \xi, +\infty)|^2$ и $n_b(\eta, \xi, +\infty) = |c_{12}(\eta, \xi, +\infty)|^2$

Покажите, что

$$n_a(\eta, \xi, +\infty) = n_a(\eta, 0, +\infty) [n_b(\eta, 0, +\infty) e^{\pi \xi g(\eta)} + n_a(\eta, 0, +\infty)]^{-1},$$

$$n_b(\eta, \xi, +\infty) = n_b(\eta, 0, +\infty) [n_a(\eta, 0, +\infty) e^{-\pi \xi g(\eta)} + n_b(\eta, 0, +\infty)]^{-1}.$$

Покажите также, что разность конечных значений заселенностей $\mathcal{N}(\eta, \xi, +\infty) = n_a(\eta, \xi, +\infty) - n_b(\eta, \xi, +\infty)$ имеет вид

$$1 + \mathcal{N}(\eta, \xi, +\infty) = 2 \frac{1 + \mathcal{N}_0 e^{-\pi \xi g(\eta)}}{1 - \mathcal{N}_0 + (1 + \mathcal{N}_0) e^{-\pi \xi g(\eta)}},$$

где $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(\eta, 0, +\infty)$ [3].

Наконец, зависимость каждого члена суммы (7.12.20) от пространственной координаты дается выражением

$$\frac{c_{22}(k_l, \xi)}{c_{12}(k_l, \xi)} = \frac{c_{22}(k_l, 0)}{c_{12}(k_l, 0)} \exp\left(\frac{1}{2} i \xi \left\langle \frac{1}{\eta - k_l - i\varepsilon} \right\rangle\right). \quad (7.12.35)$$

Теперь уравнения, определяющие эту задачу, сформулированы полностью, и для получения мультисолитонных решений можно снова прибегнуть к ранее использованным методам. Как всегда, выйти за пределы многосолитонных решений — трудная задача. С результатами, основанными на первоначально прямоугольном профиле импульса, можно ознакомиться в работе [70].

Упражнение 3

Покажите, что односолитонное решение уравнения (7.12.9) дает

$$\bar{u} = 4\beta e^{-i(\mu\xi + 2\alpha\tau + \theta)} \operatorname{sech}(\nu\xi - 2\beta\tau + \gamma),$$

где $k_l = \alpha + i\beta$, $\kappa_l = \frac{1}{2} \langle 1/(\eta - k_l - i\varepsilon) \rangle = \mu + i\nu$ и $ic_{22}(0)/c_{12}(0) = e^{-\nu + i\theta}$.

Сохраняющиеся величины

В разд. 4.5 мы видели, что используя несколько первых сохраняющихся величин уравнения Кортевега — де Фриза, можно легко и точно вычислить амплитуды солитонов, получающихся из гладко меняющихся профилей начальных импульсов. До тех пор пока в окончательном результате не появляются решения типа бризера, используя заданные формулами (2.11.57) и (3.9.28) величины g_n для задач на собственные значения для двух уравнений, можно аналогичную процедуру применять к другим солитонным уравнениям. Появление сохраняющихся величин связано с зависимостью от времени коэффициента c_{12} , являющегося величиной, обратной коэффициенту прохождения в соответствующей задаче рассеяния. В данном примере (где координаты пространства и времени поменялись местами) коэффициент c_{12} зависит от пространственной координаты (7.12.33). Мы увидим, что эта зависимость связана с энергией, которую теряет импульс при прохождении через среду.

Даже если коэффициент c_{12} больше не постоянен, то, несколько обобщая на этот случай используемый ранее метод, можно по-прежнему получить информацию о конечных значениях амплитуд солитонов из величин g_n .

Приспосабливая (3.9.26) к обозначениям данного примера, имеем

$$(2i)^n C_n(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g_n(\xi, \tau). \quad (7.12.36)$$

Используя (3.9.27), получим

$$2iC_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau |q|^2 = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau |\bar{u}|^2. \quad (7.12.37)$$

Дифференцируя по ξ и используя уравнения Максвелла — Блоха (7.12.3) и (7.12.1с), получаем

$$\begin{aligned} 2i \frac{\partial C_1}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \langle \mathcal{N}(\eta, \xi, \tau) \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} \langle \mathcal{N}(\eta, \xi, +\infty) + 1 \rangle, \end{aligned} \quad (7.12.38)$$

где, поскольку мы рассматриваем поглощающую среду, мы приняли $\mathcal{N}(\eta, \xi, -\infty) = -1$ и под $\mathcal{N}(\eta, \xi, +\infty)$ понимаем значение инверсии заселенности в точке ξ после того, как импульс проходит через эту точку. В конце концов профиль импульса превращается в последовательность солитонов, которые для больших значений ξ дают $\mathcal{N}(\eta, \xi, +\infty)$ значение, равное -1 . Это видно из точного значения $1 + \mathcal{N}(\eta, \xi, +\infty)$, приведенного в упр. 2. Если теперь проинтегрировать (7.12.38) по ξ и использовать (7.12.36) для $n = 1$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau g_1(\infty, \tau) - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g_1(0, \tau) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\xi \langle 1 + \mathcal{N}(\eta, \xi, +\infty) \rangle. \quad (7.12.39)$$

Согласно результату упр. 2,

$$\int_0^{\infty} d\xi \langle 1 + \mathcal{N} \rangle = -\frac{2}{\pi g(\eta)} \ln \left[\frac{1 - \mathcal{N}_0 + (1 + \mathcal{N}_0) e^{-\pi \xi g}}{2} \right]. \quad (7.12.40)$$

где $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(\eta, 0, +\infty)$. Пока не решена задача, этот последний член, т. е. инверсия заселенности на поверхности раздела, где импульс входит в среду, не известен. Однако если предположить, что импульс оказывает воздействие только на атомы, расстроенные на величину, обратную ширине начального импульса, и что эта ин-

версия заселенности выражается функцией Гаусса, то можно записать

$$\mathcal{N}_0 = -1 + 2\varepsilon \left(\frac{\tau_0}{\sqrt{\pi}} \right) e^{-(\eta\tau_0)^2}, \quad (7.12.41)$$

где τ_0 является мерой полуширины импульса и ε — параметр, который будет определен впоследствии. Если мы предположим далее, что $\varepsilon \ll 1$, то для больших ξ мы имеем из (7.12.40)

$$\int_0^\infty d\xi (1 + \mathcal{N}) = \frac{2\varepsilon\tau_0}{\pi^{3/2}g(\eta)} e^{-(\eta\tau_0)^2}, \quad (7.12.42)$$

и (7.12.39) принимает вид

$$\int_{-\infty}^\infty d\tau g_1(\infty, \tau) - \int_{-\infty}^\infty d\tau g_1(0, \tau) = -\frac{\varepsilon}{\pi}. \quad (7.12.43)$$

Можно также проделать аналогичные вычисления с g_2 и g_4 . Для упрощения этих рассуждений исследуем случай, когда фаза не меняется по всему профилю поля. Из (3.9.28) при $q = \bar{u}/2 = u/2$, где u действительно, находим, что

$$\begin{aligned} g_3 &= \frac{1}{16} [u^4 - 4(u_\tau)^2], \\ g_5 &= \frac{1}{32} [u^6 + 8(u_{\tau\tau})^2 - 20u^2(u_\tau)^2]. \end{aligned} \quad (7.12.44)$$

Используя уравнения Максвелла — Блоха, можно показать, что

$$\begin{aligned} (2i)^3 \frac{\partial}{\partial \xi} C_3(\xi) &= \frac{1}{16} \int_{-\infty}^\infty d\tau \frac{\partial}{\partial \tau} [32\eta^2 \mathcal{N} - 4u^2 \mathcal{N}] = \\ &= 2\eta^2 [1 + \mathcal{N}(\eta, \xi, +\infty)], \end{aligned} \quad (7.12.45)$$

где был использован тот факт, что в конце концов решение u претерпевает последовательность локализованных импульсов, так что u обращается в нуль при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Кроме того, аналогичные, но более утомительные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} (2i)^5 \frac{\partial C_5}{\partial \xi} &= \frac{1}{32} \int_{-\infty}^\infty d\tau [64\eta \mathcal{N} + 6u^4 \mathcal{N} - 8(u_\tau)^2 \mathcal{N} - \\ &\quad - 32\eta^2 u^2 \mathcal{N} + 16u^2 u_{\tau\tau} + 64\eta^2 u^2 \mathcal{N} + 16\eta u^3 \mathcal{C}] = \\ &= 2\eta^4 [1 + \mathcal{N}(\eta, \xi, +\infty)]. \end{aligned} \quad (7.12.46)$$

Таким образом, мы получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau g_3(\infty, \tau) - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g_3(0, \tau) = \frac{4e}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \eta^2 e^{-\eta^2 \tau_0^2} = \frac{4e}{\sqrt{\pi} \tau_0^3}, \quad (7.12.47)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau g_5(\infty, \tau) - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g_5(0, \tau) = \frac{2e}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \eta^4 e^{-\eta^2 \tau_0^2} = \frac{3e}{2\sqrt{\pi} \tau_0^5}. \quad (7.12.48)$$

Если предположить, что профиль начального импульса имеет вид

$$u(0, \tau) = \frac{\theta_0}{\pi \tau_0} \operatorname{sech}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) \quad (7.12.49)$$

и что конечный импульс состоит из нескольких 2π -импульсов, то можно записать

$$u(\xi, \tau) \xrightarrow{\xi \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N (2a_n) \operatorname{sech}\left[a_n \left(\tau - \tau_i - \frac{\xi}{v_i}\right)\right], \quad (7.12.50)$$

где N — число 2π -импульсов. Здесь v_i — скорость импульса и τ_i — фазовый член i -го импульса. Находим, что (7.12.43), (7.12.47) и (7.12.48) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N x_n &= \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{r}\right), \\ \sum_{n=1}^N x_n^3 &= \frac{r-2}{r} + \frac{12\gamma}{r^3}, \\ \sum_{n=1}^N x_n^5 &= \frac{8(r^4 - 5r^2 + 7)}{3r^5} - \frac{480\gamma}{r^5}, \end{aligned} \quad (7.12.51)$$

где

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2a_n}{u(0, \tau)_{\max}} = \frac{2a_n \pi \tau_0}{\theta_0}, \\ \gamma &= \frac{2e\tau_0}{\pi}, \\ r &= \frac{\theta_0}{\pi}. \end{aligned} \quad (7.12.52)$$

Для $3\pi < \theta_0 < 5\pi$, согласно теореме площадей, следует ожидать появления двух импульсов, и в (7.12.51) используются два первых уравнения при $N=2$. Как только получено γ , можно определить амплитуды двухсолитонного решения. Чтобы вычислить γ и тем самым введенный в (7.12.41) параметр ε , мы заметим, что для $\theta_0 = 3\pi$ один из корней двух уравнений должен быть равен

нулю. Этот результат будет гарантирован, если выбрать γ так, чтобы $x_2 = 0$ при $\theta = 3\pi$. Численное решение показывает [97], что для этого нужно, чтобы $\gamma = 0.673$. Так как γ связано с заселенностью, остающейся инверсной на поверхности раздела, где импульс входит в среду, можно было бы ожидать, что оно зависит от интенсивности падающего импульса. Однако эта зависимость оказывается очень слабой. Чтобы убедиться в этом, мы используем одно и то же значение γ в решении всех трех уравнений (7.12,51)

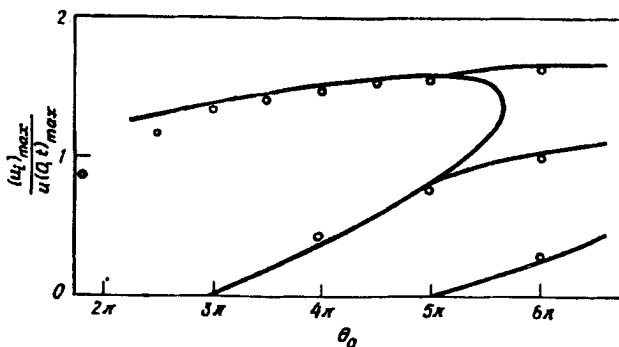


Рис. 7.6. Амплитуды импульсов, полученные из законов сохранения при учете переноса энергии в среду. Кругами показаны результаты численных решений, проведенных М. О. Скалпи и Ф. А. Хопфом.

при $5\pi < \theta_0 < 7\pi$ и отметим то значение θ_0 , при котором самый малый из трех корней обращается в нуль. Найдено, что это значение θ_0 равно $\theta_0 = 5.05\pi$, а это очень близко к значению 5π , которое требуется по теореме площадей.

На рис. 7.6 показаны получившееся геометрическое место корней и точки, являющиеся результатом численного решения уравнений Максвелла — Блоха. Так как $\gamma = 0.673$, значение $v_{\theta_0}/\sqrt{\pi}$, которое нужно использовать при получении (7.12.42), равно приблизительно 0.6. Хотя можно считать, что это значение слишком велико для оправдания сделанной при получении (7.12.42) аппроксимации, однако согласие с численными результатами, приведенными на рис. 7.6, дает более значительный критерий справедливости этой процедуры.

7.13. ВЫРОЖДЕНИЕ УРОВНЕЙ

Самоиндуцированная прозрачность (т. е. распространение оптических солитонов) требует существования профиля импульса $\mathcal{E}(x, t)$ и матричного элемента ρ_0 , таких, что

$$\frac{\rho_0}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{E}(x, t) = 2n\pi. \quad (7.13.1)$$

К сожалению, у большинства атомных систем наблюдается вырождение уровней. Этот термин используется для описания ситуации, в которой есть более чем одна волновая функция для одного из уровней a или b (или для каждого из них). Матричный элемент $\int d^3r \psi_a^* r \psi_b$, имевший в предшествующем рассмотрении в разд. 7.6 единственное значение p_0 , может теперь иметь ряд различных значений, зависящих от различных волновых функций, связанных с уровнями a и b . Если есть различные матричные элементы, связывающие резонансные уровни, то в общем случае не будет такого профиля импульса, который мог бы удовлетворять условию (7.13.1) для всех различных матричных элементов. Таким образом, в общем случае нельзя ожидать самоиндуцированной прозрачности. Есть два способа попытаться обойти это затруднение. Первый состоит в том, чтобы потребовать $\int \mathcal{E} dt = 0$. Для невырожденного случая в пределе sine-Gordon легко получить аналитические выражения для профилей поля, удовлетворяющих такому ограничению. Это брызгсные решения. В вырожденном случае они удовлетворяют условию (7.13.1) для $n = 0$ при любом значении матричного элемента. Пока что в случае вырождения уровней не получены аналитические решения уравнений с импульсами нулевой площади. Однако численные и экспериментальные рассмотрения показали возможность такого подхода ([56]; [47]).

Сейчас мы рассмотрим второй способ преодоления затруднений, связанных с вырождением уровней. Хотя экспериментально ситуация очень ограничительна, она приводит к интересному обобщению уравнения sine-Gordon. Имея в виду простой пример, рассмотрим вырожденную двухуровневую систему, подобную той, которая показана на рис. 7.7. Более конкретно, предположим, что волновые функции имеют вид

$$\psi_{am}(r, \theta, \phi) = u_a(r) P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad -l \leq m \leq l, \quad (7.13.2)$$

где $P_l^m(\cos \theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра; аналогичное выражение записывается для состояния b , l' , m' . Предполагается, что к резонансу с падающей волной приводит только некоторое значение l , так что при задании волновой функции этим квантовым числом мы будем пренебрегать. Можно было бы включить в рассмотрение и спинные собственные функции, но их влияние легко учесть, и поэтому сейчас они рассматриваться не будут.

Если систему координат, в которой измеряются углы θ и ϕ , взять таким образом, чтобы ось z была направлена по поляризации падающего (плоскополяризованного) электрического поля, то вычисление матричных элементов оказывается очень простым. Мы должны рассмотреть интегралы вида

$$p_{ab} = \int \psi_a^* (-er \cdot E) \psi_b r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (7.13.3)$$

Так как $r \cdot E = rE \cos \theta$, интегрирование по φ требует, чтобы $m' = m$, а интегрирование по θ — чтобы $l' = l \pm 1$. Этот последний результат следует из рекуррентных соотношений и свойств полиномов Лежандра [4]. (Если включить спиновое квантовое число s , результат равен $j = l + s$ с $j' = j \pm 1$ или 0.) Теперь полная волновая функция системы имеет вид

$$\psi = \sum_m (a_m \psi_{am} + b_m \psi_{bm}), \quad (7.13.4)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{am} &= u_a(r) P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \\ \psi_{bm} &= u_b(r) P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \end{aligned} \quad (7.13.5)$$

Предполагается, что только одна из возможностей $l' = l \pm 1$ приводит к резонансу с падающей световой волной. Подставляя пол-

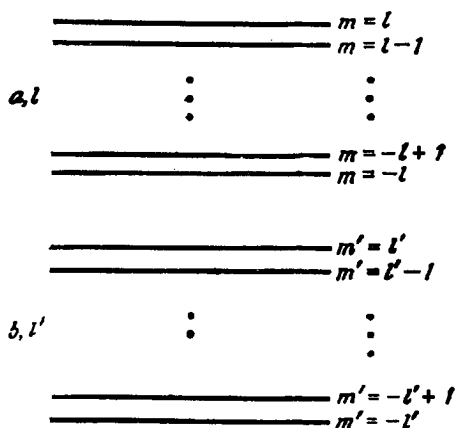


Рис. 7.7. Пример расположения энергетических уровней для вырожденной двух-уровневой среды.

ную волновую функцию (7.13.4) в уравнение Шрёдингера $i\hbar \psi_t = (H_0 + V)\psi$ и поступая как в разд. 7.6, получаем уравнения

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{a}_m &= E_a a_m + b_m p_m E, \\ i\hbar \dot{b}_m &= E_b b_m + a_m p_m E, \end{aligned} \quad (7.13.6)$$

где

$$p_m = \int d^3r' \psi_{am}^* (-er \cos \theta) \psi_{bm}. \quad (7.13.7)$$

Следовательно, связаны только одни и те же значения m , и мы находим ряд одновременно происходящих существенно независимых переходов.

Полная поляризация снова дается выражением

$$P = \int d^3r \psi_a^* (-e\tau) \psi_b. \quad (7.13.8)$$

Для волновой функции (7.13.4) это выражение принимает вид

$$P = \sum p_m (\dot{a}_m \dot{b}_m + \dot{b}_m \dot{a}_m), \quad (7.13.9)$$

что является очевидным обобщением (7.6.6). Для каждого из подуровней будет пара уравнений того же вида, что были получены в невырожденном случае (7.8.2). Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial t} &= \frac{p_m}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{N}_m, \\ \frac{\partial \mathcal{N}_m}{\partial t} &= -\frac{p_m}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_m \end{aligned} \quad (7.13.10)$$

для каждого значения m . Если предположить, что все вырожденные уровни равновероятны и что для данного l есть $2l+1$ уровней, вытекающих из свойств присоединенных полиномов Лежандра, то первый интеграл системы (7.13.10) будет иметь вид

$$\mathcal{P}_m^2 + \mathcal{N}_m^2 = \frac{1}{2l+1}. \quad (7.13.11)$$

Записывая

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m &= -\frac{1}{\sqrt{2l+1}} \sin \sigma_m, \\ \mathcal{N}_m &= -\frac{1}{\sqrt{2l+1}} \cos \sigma_m, \end{aligned} \quad (7.13.12)$$

получим

$$\frac{p_m}{\hbar} \mathcal{E} = \frac{\partial \sigma_m}{\partial t}. \quad (7.13.13)$$

Вместо (7.7.3а) мы теперь имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} &= 2\pi n_0 \omega_0 \sum_{-l}^l p_m \mathcal{P}_m = \\ &= -\frac{2\pi n_0 \omega_0}{\sqrt{2l+1}} \sum_{-l}^l p_m \sin \left[\frac{p}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \mathcal{E}(x, t') \right]. \end{aligned} \quad (7.13.14)$$

Удобно принять, что $p_m = \kappa_m p$, где p — наибольшее из значений p_m . Тогда

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = -\frac{2\pi n_0 \omega_0 p}{\sqrt{2l+1}} \sum_{-l}^l \kappa_m \sin(\kappa_m \sigma), \quad (7.13.15)$$

где

$$\sigma(x, t) = \frac{p}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \mathcal{E}(x, t'). \quad (7.13.16)$$

Если включить в рассмотрение спин, то суммирование по m проводится от $-j$ до $+j$. Наконец, полагая $t' = t - x/c$ и вспоминая определение Ω^2 (7.8.3), имеем

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t'} = - \frac{\Omega^2}{c \sqrt{2I+1}} \sum_{-j}^j \kappa_m \sin(\kappa_m \sigma). \quad (7.13.17)$$

Для $\Delta j = j - j' = \pm 1, 0$ известно, что κ_m имеют следующие значения ([26], с. 63):

$$\kappa_m = \begin{cases} \frac{(j^2 - m^2)^{1/2}}{j}, & \Delta j = -1, \\ \frac{m}{j}, & \Delta j = 0, \\ \frac{[(j+1)^2 - m^2]^{1/2}}{j}, & \Delta j = 1. \end{cases} \quad (7.13.18)$$

Для наших целей интересен случай $\Delta j = 0$ (называемый Q -переходами), для которого различные κ_m кратны наименьшему значе-

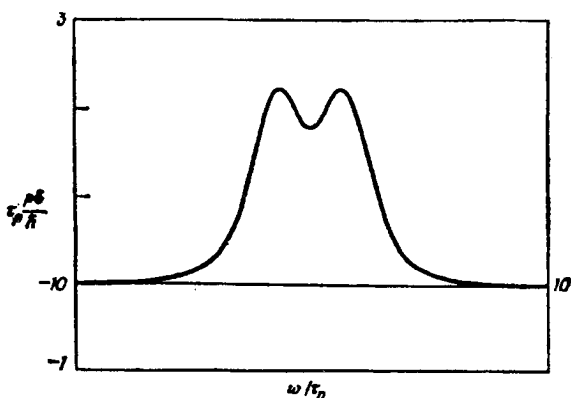


Рис. 7.8. Стационарный профиль импульса (7.13.21) для $Q(2)$ -перехода.

нию. Тогда возможен профиль оптического поля, который обращает одно вырожденное состояние один раз, другое — дважды и т. д., и мы тем самым получаем самоиндуцированную прозрачность при наличии такого типа вырождения уровней.

Простейшим является случай $j = 2$, $Q(2)$ -переход. Тогда $\kappa_{-2} = -2$, $\kappa_{-1} = -1$, $\kappa_0 = 0$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2$ и уравнение (7.13.17) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t'} = - \frac{2\Omega^2}{c \sqrt{5}} \left(\sin \sigma + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \sigma \right). \quad (7.13.19)$$

Легко найти, что стационарное решение $\sigma = \sigma(t - x/v)$ имеет вид ([99], с. 566)

$$\sigma\left(t - \frac{x}{v}\right) = -4 \operatorname{arctg} \left[\sqrt{5} \operatorname{cosech} \left(\frac{t - x/v}{\tau_p} \right) \right], \quad (7.13.20)$$

где $cv = 1 + (\sqrt{5}/2) \Omega^2 \tau_p^2$. Соответствующая огибающая электрического поля равна

$$\begin{aligned} \frac{p}{\hbar} \mathcal{E} &= \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{4\sqrt{5}}{\tau_p} \frac{\operatorname{sech}(w/\tau_p)}{1 + 4 \operatorname{sech}^2(w/\tau_p)} = \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{\tau_p} \operatorname{sech} a \left[\operatorname{sech} \left(\frac{w}{\tau_p} + a \right) + \operatorname{sech} \left(\frac{w}{\tau_p} - a \right) \right], \quad (7.13.21) \end{aligned}$$

где $\operatorname{ch} 2a = 9$. Этот результат графически изображен на рис. 7.8. Большие значения j приводят к стационарным решениям с большим числом пиков в профиле импульса [94]. Численное решение задачи взаимодействия двух таких импульсов (Буллаф и Кодри [18]) показывает, что амплитуды пиков могут флуктуировать. Точные аналитические выражения, описывающие эти взаимодействия, еще не получены. Последние авторы все же надеются получить солитоны с внутренними степенями свободы.

Глава 8

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА

В гл. 2 мы видели, что решение уравнения Шрёдингера для потенциала $V(x) = -v \operatorname{sech}^2 x$ можно выразить через элементарные функции, если $v = n(n+1)$, где n — положительное целое число. Эти специальные значения n соответствуют безотражательным потенциалам и дают также начальные профили импульсов, развивающихся в чисто многосолитонные решения уравнения Кортевега — де Фриза. Начиная с $n = 0$, так что $V(x) = 0$, можно построить эти специальные потенциалы и решения соответствующих уравнений Шрёдингера с помощью простого метода, разработанного в гл. 2.

Представляется естественным вопрос, существует ли простая теория преобразований, связывающих эти решения в более поздние моменты времени их эволюции. Мы сейчас изложим такую теорию преобразований не только для уравнения Кортевега — де Фриза, но и для некоторых других наиболее известных солитонных уравнений. Для уравнения sine-Gordon, которое давно возникло в дифференциальной геометрии ([34], с. 284), уравнения соответствующих преобразований были получены А. В. Бэклундом, и преобразования того типа, с которыми мы будем встречаться, стали известны как преобразования Бэклунда. Обзор литературы в этой области, относящийся к более раннему периоду, был дан в статье Гурса [46] и воспроизведен Миурой ([86], с. 77). Надежда на то, что другие солитонные уравнения также будут иметь преобразования Бэклунда, была реализована только недавно, после того как Уолквист и Эстабрук [116] получили преобразование Бэклунда для уравнения Кортевега — де Фриза.

Один из наиболее интересных результатов этой теории преобразований состоит в том, что она приводит к простой формуле суперпозиции — теореме перестановочности, посредством которой из односолитонных решений можно простыми алгебраическими приемами построить многосолитонные решения.

8.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

В разд. 2.6 мы рассмотрели соотношение между потенциалами в двух уравнениях Шрёдингера, которые были связаны таким образом, что решение одного уравнения являлось линейной комбинацией решения другого уравнения и первой производной этого решения. Возникшие в результате потенциалы были начальными

условиями для чисто многосолитонных решений. Распространим теперь эти соображения на случай потенциалов, зависящих от параметра, причем потребуем, чтобы собственное значение от этого параметра не зависело [115]. Из наших предыдущих рассуждений мы знаем, что связь между двумя такими потенциалами означает соответствующую связь между двумя решениями уравнения Кортевега — де Фриза. Мы найдем, что эта связь является связью специального вида; она известна как преобразование Бэклунда.

Рассмотрим два уравнения Штурма — Лиувилля

$$y_{xx} = [\lambda + \varphi(x, t)] y, \quad (8.1.1)$$

$$w_{xx} = [\lambda + \psi(x, t)] w, \quad (8.1.2)$$

где w и y связаны соотношением

$$w = A(x, t, \lambda) y + y_x. \quad (8.1.3)$$

Если $\lambda_t = 0$, функции φ и ψ могут, конечно, быть двумя решениями уравнения Кортевега — де Фриза. Так как в этих уравнениях t является просто параметром, мы можем следовать в точности той же процедуре, которая была использована в разд. 2.6. Замечая, что теперь интегрирование вводит произвольную функцию времени, мы находим, что $A(x, t, \lambda)$ должно удовлетворять уравнениям

$$2A_x + \varphi - \psi = 0, \quad (8.1.4)$$

$$A^2 - A_x - \varphi = \tilde{\lambda}(t), \quad (8.1.5)$$

которые соответствуют уравнениям (2.6.5) и (2.6.6). Если снова ввести линеаризующее преобразование $A = -\tilde{y}_x/\tilde{y}$, мы найдем, что \tilde{y} удовлетворяет уравнению (8.1.1), где λ заменено на $\tilde{\lambda}(t)$. Так как мы налагаем ограничение, состоящее в том, что собственное значение не должно зависеть от времени, мы видим, что $\tilde{\lambda}(t)$ должно быть постоянным.

Если теперь ввести потенциальные функции с помощью определений $\varphi = z'_x$ и $\psi = z_x$, то (8.1.4) можно записать в виде

$$A = \frac{1}{2}(z - z'). \quad (8.1.6)$$

В конечном счете нас интересуют пространственные производные z и z' , дающие φ и ψ . Следовательно, можно в уравнении (8.1.6) отбросить произвольную функцию времени. Вводя обозначение $p = z_x$, находим, что уравнение (8.1.5) может быть записано в виде

$$p + p' = m + \frac{1}{2}(z - z')^2, \quad (8.1.7)$$

где $m = -2\tilde{\lambda}$ и, конечно, $p = \psi$, $p' = \varphi$. Таким образом, мы получаем нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

(уравнение Риккати), связывающее две функции, которые тесно связаны с решениями уравнения Кортевега — де Фриза. Если предположить, что ψ удовлетворяет уравнению Кортевега — де Фриза вида $\psi_t - 6\psi\psi_x + \psi_{xxx} = 0$, то z удовлетворяет уравнению

$$z_t - 3(z_x)^2 + z_{xxx} = 0; \quad (8.1.8)$$

аналогично для z' .

Уравнение (8.1.7) дает связь между пространственными производными z и z' . Чтобы получить выражение, связывающее их производные по времени, можно сначала продифференцировать (8.1.7) по времени, а затем проинтегрировать по x :

$$z_t + z'_t = \int dx (z - z')(z_t - z'_t). \quad (8.1.9)$$

Используя (8.1.8) и вводя обозначения $u = z + z'$, $v = z - z'$, можно записать

$$z_t + z'_t = \int dx \left[\frac{3}{2} (v^2)_x u_x - v v_{xxx} \right]. \quad (8.1.10)$$

С помощью (8.1.7) и интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} z_t + z'_t &= \frac{3}{2} (u_x)^2 - v v_{xx} + \frac{1}{2} (v_x)^2 = \\ &= 2[p^2 + p p' + (p')^2] - (z - z')(z_{xx} - z'_{xx}). \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

Окончательный результат (8.1.11) вместе с (8.1.7) составляет преобразование Бэклунда для уравнения Кортевега — де Фриза. Если известно решение z' уравнения третьего порядка (8.1.8), то другое решение z можно получить, решая уравнения преобразования Бэклунда, т. е. уравнение первого порядка (8.1.7) и уравнение второго порядка (8.1.11).

В качестве простого примера использования теории этого преобразования можно начать с подстановки тривиального решения

$$z_x = m + \frac{1}{2} z^2, \quad (8.1.12a)$$

$$z_t = 2p^2 - z z_{xx} = 2m z_x, \quad (8.1.12b)$$

где при получении последнего выражения в (8.1.12b) мы использовали связь $z_{xx} = z p$ из (8.1.12a). После интегрирования (8.1.12a) и определения произвольной функции времени по (8.1.12b), имеем $z' = 0$ в (8.1.7). Находим, что z удовлетворяет уравнениям

$$z = -2\kappa \operatorname{th}(\kappa x - 4\kappa^3 t), \quad |z| < 2\kappa, \quad (8.1.13a)$$

$$z^* = -2\kappa \operatorname{cth}(\kappa x - 4\kappa^3 t), \quad |z^*| > 2\kappa, \quad (8.1.13b)$$

где $m = -2\kappa^2$. Видно, что функция $\phi = z_x$ является единичным солитоном уравнения Кортевега — де Фриза. Решение z^* в качестве односолитонного не интересно, поскольку при $k_x = 4\kappa^3 t$ оно расходится, но позже оно окажется полезным.

Полученное решение (8.1.13a) могло бы теперь играть роль решения z' в (8.1.7), а для z могло бы быть получено другое решение. Эта процедура повлекла бы за собой интегрирование более сложного дифференциального уравнения, чем уравнение (8.1.12a). К счастью, более сложные решения можно построить намного проще. Их можно получить с помощью простой формулы суперпозиции, вообще не требующей дополнительного интегрирования. Чтобы получить такую формулу, которая известна для уравнения sine-Gordon как теорема перестановочности ([34], с. 286), мы рассмотрим сначала два решения z_1 и z_2 , получающиеся из (8.1.7), если исходить из решения z_0 с двумя различными значениями m . Тогда мы имеем

$$p_1 + p_0 = m_1 + \frac{1}{2}(z_1 - z_0)^2, \quad (8.1.14a)$$

$$p_2 + p_0 = m_2 + \frac{1}{2}(z_2 - z_0)^2. \quad (8.1.14b)$$

Если снова использовать уравнение (8.1.7), но с p_1 вместо p' и m_2 вместо m и обозначить новое решение через z_{21} , получим

$$p_{12} + p_1 = m_2 + \frac{1}{2}(z_{12} - z_1)^2. \quad (8.1.15a)$$

Аналогично можно использовать p_2 вместо p' и m_1 вместо m , чтобы получить решение, которое мы обозначим через z_{12} . Тогда имеем

$$p_{21} + p_2 = m_1 + \frac{1}{2}(z_{21} - z_2)^2. \quad (8.1.15b)$$

Как мы увидим ниже, можно положить $z_{12} = z_{21}$. Таким образом, если вычесть (8.1.14b) из (8.1.14a), а также (8.1.15b) из (8.1.15a), мы получим два различных выражения для $p_1 - p_2$. Приравнявая два выражения для этой разности и полагая $z_{12} = z_{21} = z_3$, мы придем к чисто алгебраическому соотношению

$$z_3 - z_0 = \frac{2(m_2 - m_1)}{z_1 - z_2}. \quad (8.1.16)$$

Если мы начнем с решения $z_0 = 0$, этот результат сразу же приводит к двухсолитонной формуле для уравнения Кортевега — де Фриза. Более конкретно, предположим, что $x_1 > x_2$, и затем используем вместо z_1 величину z^* из (8.1.13b), а вместо z_2 используем (8.1.13a). Такой выбор решений исключает появление нуля в знаменателе формулы суперпозиции (8.1.16). В частности, выбор постоянных $m_1 = -8$ и $m_2 = -2$ дает

$$z_3 = -6[2 \operatorname{cth}(2x - 32t) + \operatorname{th}(x - 4t)]^{-1}. \quad (8.1.17)$$

Пространственная производная этого решения является двухсолитонной формулой (1.3.25). Этот метод будет также использован в разд. 8.2 для порождения многосолитонных решений уравнения sine-Gordon.

Справедливость теоремы перестановочности

Любое доказательство теоремы перестановочности основано на равенстве $z_{12} = z_{21}$. Это равенство легко устанавливается, если интерпретировать решения y и w как представительные решения задач рассеяния. Если мы можем показать равенство некоторых данных рассеяния, то на основе теории обратной задачи рассеяния можно подтвердить, что в этом случае равны и сами рассеивающие потенциалы [38].

Предположим, что $y(x)$, решение уравнения (8.1.1), пронормировано так, как в (2.2.1), т. е.

$$\begin{aligned} y_{<} &= e^{ikx} + R_0(k)e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty, \\ y_{>} &= T_0(k)e^{ikx}, & x \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (8.1.18)$$

где $k^2 = -\lambda$.

Для локализованных потенциалов при $|x| \rightarrow \infty$ уравнение (8.1.5) принимает вид $A^2 - A_x = \tilde{\lambda}$. Записывая $\tilde{\lambda} = k_1^2$, имеем решение для A в виде $A = -k_1 \operatorname{th}[k_1 x + C(t)]$. Таким образом,

$$\begin{aligned} A_{<} &= k_1, & x \rightarrow -\infty, \\ A_{>} &= -k_1, & x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (8.1.19)$$

Можно получить аналогичным образом пронормированное решение для w , соответствующего решению уравнения (8.1.2), записывая $w = K(Ay + y_x)$, где K должно быть выбрано так, чтобы снова получить падающую волну единичной амплитуды. Из (8.1.3) имеем соотношение

$$w_{<} = K[(k_1 - ik)e^{ikx} + (k_1 + ik)R_0e^{-ikx}], \quad x \rightarrow -\infty, \quad (8.1.20)$$

которое показывает, что для получения падающей волны единичной амплитуды нужно выбрать K в виде $K = (k_1 + ik)^{-1}$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$w_{>} = -\frac{k_1 - ik}{k_1 + ik} T_0(k)e^{ikx} = T_1(k)e^{ikx}. \quad (8.1.21)$$

Очевидно, что последующее преобразование решения w в новое решение с $\tilde{k} = k_2$ даст коэффициент прохождения

$$T_{12} = \frac{k_2 - ik}{k_2 + ik} \left(\frac{k_1 - ik}{k_1 + ik} \right) T_0. \quad (8.1.22)$$

Так как алгебраические множители коммутируют, тот же результат получится бы, если бы при получении T_{21} члены k_1 и k_2 были взяты в обратном порядке. Нули двух коэффициентов прохождения также расположены в одних и тех же точках плоскости k (с теми же вычетами), и, следовательно, можно сделать вывод, что рассеивающие потенциалы z_{12x} и z_{21x} , которые можно построить по этим данным рассеяния, также равны.

8.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Преобразования Бэклунда для нелинейных эволюционных уравнений, связанных с линейной системой

$$\begin{aligned} v_{1x} + i\zeta v_1 &= qv_2, \\ v_{2x} - i\zeta v_2 &= -qv_1, \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

где q — действительная величина, можно получить путем простого обобщения на случай двух уравнений той процедуры, которая была использована для уравнения Кортевега — де Фриза в предыдущем разделе. Можно было бы также определить преобразования Бэклунда для одного уравнения с комплексным потенциалом [115]. Введем дополнительную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} w_{1x} + i\zeta w_1 &= \varphi w_2, \\ w_{2x} - i\zeta w_2 &= -\varphi w_1 \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

и допустим, что w и v связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \mathcal{A} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (8.2.3)$$

где \mathcal{A} есть 2×2 -матрица с элементами a_{ij} . Используя (8.2.1), можно соотношение (8.2.3) переписать в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= Av_1 + Bv_2, \\ w_2 &= Cv_1 + Dv_2, \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

где $A = a_{11} - i\zeta$, $B = a_{12} + q$, $C = a_{21} - q$ и $D = a_{22} + i\zeta$. В случае $a_{21} = -a_{12}$, так что $C = -B$, подстановка (8.2.4) в (8.2.2) дает

$$\begin{aligned} A_x &= (q - \varphi)B, \\ B_x &= -2i\zeta B - qA + \varphi D, \\ C_x &= 2i\zeta B + qA - \varphi D, \\ D_x &= (q - \varphi)B. \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

Эти уравнения имеют первые интегралы $AD + B^2 = f^2(t)$ и $A - D = 2g(t)$, означающие, что $B^2 = f^2 + g^2 - (A - g)^2$. Следовательно, соотношение $(A + D)_x = 2B(q - \varphi)$ можно переписать в виде

$$\frac{A_x}{\sqrt{h^2 - (A - g)^2}} = q - \varphi. \quad (8.2.6)$$

Полагая $q = z_x$, $\varphi = z'_x$ и интегрируя, получаем $A = g + h \cos(z - z')$, $B = h \sin(z - z')$ и $D = -g + h \cos(z - z')$. Постоянная интегрирования выбрана так, чтобы B обращалось в нуль при обращении в нуль z и z' . Полагаем для простоты $g = h = 1/2$, и из второго и третьего уравнений (8.2.5) получаем

$$(z + z')_x = -2i\zeta \sin(z - z'). \quad (8.2.7)$$

Это уравнение первого порядка, связывающее z и z' , является одним из уравнений преобразований Бэклунда. Другое уравнение преобразований Бэклунда, связывающее временные эволюции z и z' , зависит от рассматриваемого эволюционного уравнения. Это соответствует той роли, которую играют в методе Захарова — Шабата две пары линейных уравнений. При изложении метода обратной задачи мы нашли, что система (5.4.2) для пространственной зависимости одна и та же для всех уравнений, в то время как система (5.4.1) для зависимости от времени содержит коэффициенты A , B и C , зависящие от рассматриваемого эволюционного уравнения.

Прежде чем перейти к конкретному случаю, отметим, что выписывая систему четырех уравнений, подобных уравнениям (8.1.14) и (8.1.15), мы получим, что из (8.2.7) следует теорема перестановочности. После применения тригонометрических формул получаем

$$\operatorname{tg} \left(\frac{z_3 - z_0}{z} \right) = \pm \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{z_2 - z_1}{2} \right), \quad (8.2.8)$$

где $a_i = -2i\zeta_i$. В этом результате есть выбор знаков, так как линейные уравнения (8.2.1) связаны с эволюционными уравнениями, для которых функция $-z$ является решением, если им является функция z . При выборе в (8.2.8) нижнего знака получается стандартный вид теоремы перестановочности для уравнения sine-Gordon. Решение $q_3 = z_{3x}$, которое может быть получено из теоремы перестановочности (8.2.8), применяется к решениям всех эволюционных уравнений, которым соответствуют линейные уравнения (8.2.1). Как указывалось выше, различия между разными солитонными уравнениями определяются уравнением преобразования, связывающим производные по времени.

Пример — уравнение sine-Gordon

В разд. 5.2 мы видели, что уравнение sine-Gordon $\sigma_{xt} = \sin \sigma$ связано с системой Захарова — Шабата, если в системе (8.2.1) положить $q = -\sigma_x/2$. В наших теперешних обозначениях, где $q = z_x$, это означает, что $z = -\sigma/2$ и $z' = -\sigma'/2$. Теперь мы можем записать уравнение для преобразования Бэклунда (8.2.7) в виде

$$\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma'_x) = -2i\zeta \sin \left(\frac{\sigma - \sigma'}{2} \right). \quad (8.2.9)$$

Дифференцируя это соотношение по времени и замечая, что σ и σ' удовлетворяют уравнению sine-Gordon, получим

$$\sin \sigma + \sin \sigma' = -2i\zeta (\sigma - \sigma')_t \cos \left(\frac{\sigma - \sigma'}{2} \right). \quad (8.2.10)$$

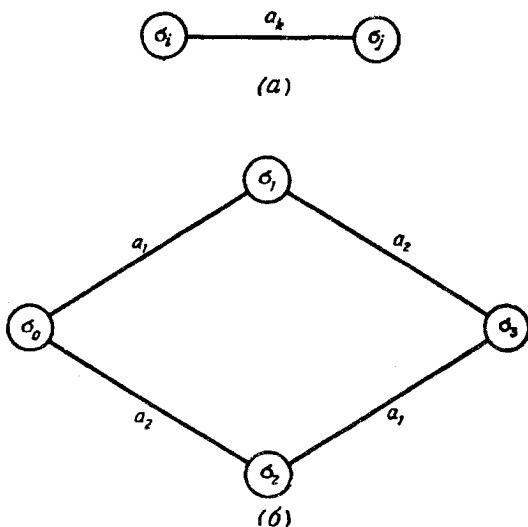


Рис. 8.1. Диаграммное представление преобразований Бэклунда: (а) одиночное преобразование по формулам (8.2.11); (б) последовательность преобразований для теоремы перестановочности (8.2.8).

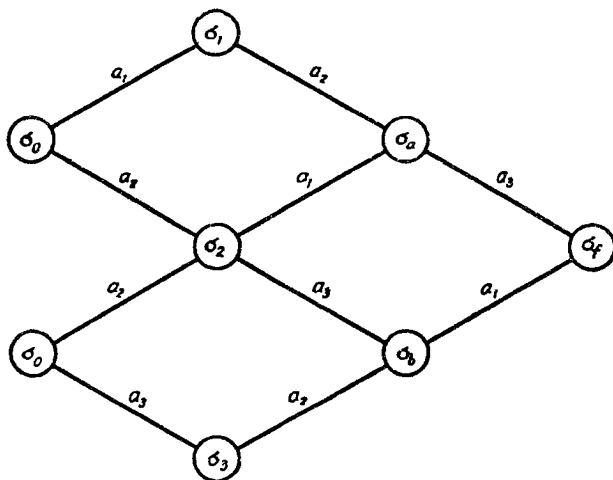


Рис. 8.2. Диаграммное представление последовательности преобразований Бэклунда, приводящей к трехсолитонному взаимодействию.

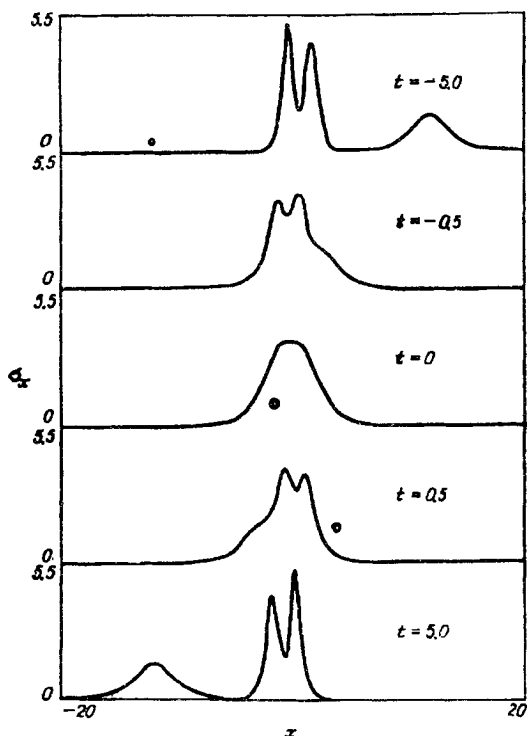


Рис. 8.3. Трехсолитонное взаимодействие для уравнения sine-Gordon.

Пользуясь тождеством $\sin \sigma + \sin \sigma' = 2 \sin \left(\frac{\sigma + \sigma'}{2} \right) \cos \left(\frac{\sigma - \sigma'}{2} \right)$ и полагая $2i\xi = -a$, получим другое уравнение преобразования Бэклунда:

$$\frac{1}{2} (\sigma_t - \sigma'_t) = \frac{1}{a} \sin \left(\frac{\sigma + \sigma'}{2} \right). \quad (8.2.11a)$$

Теперь этот результат вместе с (8.2.9), которое теперь имеет вид

$$\frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma'_x) = a \sin \left(\frac{\sigma - \sigma'}{2} \right), \quad (8.2.11b)$$

дает преобразование Бэклунда для уравнения sine-Gordon. Именно эти уравнения были получены Бэклундом при рассмотрении задачи дифференциальной геометрии ([34], с. 284).

Использование уравнений преобразования (8.2.11), а также теоремы перестановочности (8.2.8) для получения тех решений, которые теперь называются многосолитонными решениями урав-

уравнению. Нам нужно только начать с решения $z = 0$ и построить односолитонные решения, имеющие тот же вид, что и решение (5.1.22). Диаграмма взаимодействия двух бризерных решений показана на рис. 8.4. Заметим, что постоянные в верхней половине рисунка выбраны так, что они комплексно сопряжены постоянным, помещенным в зеркально симметричных точках нижней половины рисунка. Этот метод был использован при получении двух бризерных решений, показанных на рис. 5.2. Пользуясь этим методом, мы продвигаемся шагами и избегаем вычисления больших определителей.

8.3. БОЛЕЕ ОБЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА

Рассмотренные в двух предыдущих разделах преобразования, при которых исходная функция z' и преобразованная функция z удовлетворяют *одному и тому же* дифференциальному уравнению в частных производных, являются специальным классом преобразований Бэклунда. В общем случае функции z и z' могут удовлетворять различным уравнениям. Кроме того, необязательно, чтобы была какая-либо связь с уравнением Штурма — Лиувилля. В этом разделе мы кратко рассмотрим разработанный Клэрэном [23] метод построения как ранее рассмотренных преобразований Бэклунда, так и преобразований более общего вида, когда функции z и z' удовлетворяют различным дифференциальным уравнениям в частных производных.

Рассмотрим преобразования Бэклунда, связывающие дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных вида $Rr + Ss + Tt + V = 0$, где $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$, и R , S , T и V — функции x , y и z , а также p и q , где $p = z_x$, $q = z_y$. Такого типа уравнения часто называют уравнениями Монжа — Ампера. Преобразования Бэклунда, связывающие два таких уравнения второго порядка, задаются парой дифференциальных уравнений первого порядка

$$p = f(z, z', p', q'), \quad q = \Phi(z, z', p', q'). \quad (8.3.1)$$

Классификация различных типов получающихся преобразований требует детального рассмотрения. Это было сделано Клэрэном (1903) [23] и подытожено в работе [46]. Краткий обзор содержится в книге Форсайта [39]. В некоторых случаях это более простое преобразование, называемое контактным. В других случаях оно называется преобразованием Бэклунда. Форсайт показал также ([39], с. 441), что произвольно выбранное уравнение Монжа — Ампера нельзя связать с преобразованием Бэклунда. (Нужно иметь возможность удовлетворить четырем уравнениям с тремя неизвестными.)

Для определения f и Φ заметим сначала, что условие интегрируемости (т. е. равенство смешанных вторых производных)

требует, чтобы функции (8.3.1) удовлетворяли соотношению

$$\Omega \equiv \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (8.3.2)$$

Замечая, что каждая из четырех переменных z , z' , p' и q' зависит от x и y , и обозначая штрихами частные производные, имеем

$$p_y = f_z q + f_z q' + f_{p'} s' + f_{q'} t'. \quad (8.3.3)$$

Аналогичное выражение справедливо для q_x . Используя (8.3.1) для исключения p и q и группируя члены, находим, что

$$\Omega = -\Phi_{p'} r' + (f_{p'} - \Phi_{q'}) s' + f_{q'} t' - \Phi_z p' + f_z q' + f_z \Phi - \Phi_z f = 0. \quad (8.3.4)$$

Считая функцию z известной, мы видим, что пока по крайней мере один из коэффициентов $f_{q'}$, $\Phi_{p'}$ или $f_{p'} - \Phi_{q'}$ не равен нулю, уравнение (8.3.4) является дифференциальным уравнением в частных производных для функции z' .

Пример — уравнение Лиувилля

В качестве примера построения методом Клерэна преобразования Бэклунда, связывающего два различных уравнения, получим преобразование между нелинейным уравнением Лиувилля $s' = e^{z'}$ и линейным уравнением $s = 0$. Последнее уравнение является волновым уравнением в характеристических координатах. Общее решение волнового уравнения, выраженное через две произвольные функции, конечно, известно. Мы увидим, что используя преобразование Бэклунда, можно получить общее решение уравнения Лиувилля.

Так как уравнение Лиувилля содержит s' , но не r' или t' , из условия совместности (8.3.4) мы ожидаем, что $\Phi_{p'} = f_{q'} = 0$ и $f_{p'} - \Phi_{q'} \neq 0$. Итак, мы начнем с уравнений преобразования вида

$$p = f(z, z', p'), \quad (8.3.5a)$$

$$q = \Phi(z, z', q'). \quad (8.3.5b)$$

Производная по y от (8.3.5a) дает

$$s = f_z q + f_z q' + f_{p'} s'. \quad (8.3.6)$$

Используя (8.3.5b) и то, что $s = 0$ и $s' = e^{z'}$, имеем

$$0 = f_z \Phi + f_z q' + f_{p'} e^{z'}. \quad (8.3.7)$$

Две производные по q' дают

$$f_z \Phi_{q' q'} = 0. \quad (8.3.8)$$

Это означает (поскольку f_z зависит главным образом от z), что Φ является линейной функцией q' . Аналогичным образом можно

показать, что f является линейной функцией p' , и можно записать

$$\begin{aligned} p &= a(z, z')p' + m(z, z'), \\ q &= \alpha(z, z')q' + \mu(z, z'). \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

Как указывалось выше, мы должны наложить ограничение $f_p = -\varphi_{q'} = a - \alpha \neq 0$. Можно избежать относительно скучного анализа и легко получить простое преобразование, полагая $a = 1$, $\alpha = -1$. Тогда уравнения преобразования суть

$$p = p' + m(z, z'), \quad (8.3.10a)$$

$$q = -q' + \mu(z, z'), \quad (8.3.10b)$$

а условие совместности (8.3.4) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Omega(z, z'; p', q') &= \\ &= 2e^{z'} - p\mu_{z'} + q'm_{z'} + m_z(-q' + \mu) - \mu_z(p' + m), \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

где был использован факт, что z' удовлетворяет уравнению Лнувилля. Теперь неизвестные функции m и μ определяются из рассмотрения различных производных от Ω . В частности,

$$\Omega_{p'} = -(\mu_{z'} + \mu_z) = 0, \quad (8.3.12)$$

$$\Omega_{q'} = m_{z'} - m_z = 0.$$

С этими соотношениями выражение для Ω сводится к следующему:

$$\Omega = \mu m_z - m\mu_z + 2e^{z'} = 0. \quad (8.3.13)$$

Кроме того, уравнения (8.3.12) являются дифференциальными уравнениями в частных производных, имеющими решения

$$\begin{aligned} m(z, z') &= m(z + z'), \\ \mu(z, z') &= \mu(z - z'). \end{aligned} \quad (8.3.14)$$

Из (8.3.13) мы можем получить

$$\Omega_z = \mu m_{zz} - m\mu_{zz} = 0. \quad (8.3.15)$$

Если ввести новые независимые переменные

$$u = z + z', \quad v = z - z', \quad (8.3.16)$$

то уравнение (8.3.15) можно записать в виде

$$\frac{1}{m} \frac{d^2 m}{du^2} = \frac{1}{\mu} \frac{d^2 \mu}{dv^2} = -k^2, \quad (8.3.17)$$

где переменные разделены и $k^2 > 0$ является постоянной разделения. (Выбор знака соответствует действительным показателям экспонент в уравнении Лнувилля.) Таким образом, выражения для m и μ имеют вид

$$\begin{aligned} m(u) &= be^{ku} + ce^{-ku}, \\ \mu(v) &= \beta e^{kv} + \gamma e^{-kv}. \end{aligned} \quad (8.3.18)$$

Теперь, используя (8.3.7), можно определить постоянные интегрирования b , c , β и γ . Находим

$$k(\beta b e^{2kz} - \beta c e^{-2kz'} + b \gamma e^{-2kz'} - \gamma c e^{2kz}) + e^z = 0. \quad (8.3.19)$$

Этому уравнению можно удовлетворить, выбирая либо $k = 1/2$, $\beta = c = 0$ и $\gamma = -2/\beta$, либо $k = -1/2$, $b = \gamma = 0$ и $\beta = -2/c$. При первом выборе постоянных мы получим преобразование в виде

$$\begin{aligned} p &= p' + b e^{(1/2)(z+z')}, \\ q &= -q' - \frac{2}{b} e^{-(1/2)(z-z')}. \end{aligned} \quad (8.3.20)$$

Последний выбор постоянных дает то же самое однопараметрическое преобразование Бэклунда.

Уравнения преобразования (8.3.20) могут быть использованы для получения общего решения уравнения Лиувилля. С этой целью заметим сначала, что общее решение волнового уравнения $s = 0$ можно записать в виде $z = X(x) + Y(y)$. Полагая $\xi = e^{-x'/2}$, линеаризуем уравнения преобразования и получим

$$\begin{aligned} \xi_x + \frac{1}{2} X' \xi &= \frac{1}{2} b e^{(X+Y)/2}, \\ \xi_y - \frac{1}{2} Y' \xi &= \frac{1}{b} e^{-(X+Y)/2}. \end{aligned} \quad (8.3.21)$$

Общее решение этих линейных уравнений легко определяется. Если положить $e^X = (2/b)\theta'(x)$ и $e^{-Y} = b\chi'(y)$, то находим, что общее решение уравнения Лиувилля имеет вид

$$e^{z'} = 2 \frac{\theta'(x) \chi'(y)}{[\theta(x) + \chi(y)]^2}. \quad (8.3.22)$$

В этом примере, где с помощью преобразования Бэклунда уравнение Лиувилля преобразуется в простое линейное уравнение, получено общее решение нелинейного уравнения. Для преобразования нелинейного уравнения в самого себя, как в случае солитонных уравнений, метод дает только частные решения.

Известны некоторые другие преобразования различных дифференциальных уравнений в частных производных, и можно показать, что они являются примерами преобразований Бэклунда. Нелинейное уравнение Бюргерса $z_t + z'z_x + z''_{xx} = 0$ связано с линейным уравнением диффузии $z_t + z_{xx} = 0$ посредством преобразования ([39], [54], [25])

$$z' = 2 \frac{\partial}{\partial x} (\ln z). \quad (8.3.23)$$

В обозначениях данного раздела это соотношение эквивалентно

$$p = \frac{1}{2} z z'. \quad (8.3.24)$$

Как намечено в упр. 1, использованный выше метод можно применить для получения дополнительного уравнения

$$q = -\frac{1}{2}(z\rho' + \rho z'). \quad (8.3.25)$$

Уравнения (8.3.24) и (8.3.25) составляют преобразование Бэклунда, связывающее уравнение Бюргерса с уравнением диффузии.

В гл. 5 мы видели, что уравнение Кортевега — де Фриза и модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза связаны преобразованием Миуры. Чтобы получить преобразование Бэклунда, можно присоединить к преобразованию Миуры дополнительное уравнение. Эта процедура излагается в упр. 5.

Упражнение 1

Используйте метод Клерэна для определения вида соотношения $q = \Phi(\rho', z, z')$, которое нужно присоединить к преобразованию $\rho = \frac{1}{2}zz'$, чтобы получить преобразование Бэклунда, связывающее уравнение Бюргерса с уравнением диффузии. Покажите, что результат может быть представлен в виде (8.3.25).

Упражнение 2

Преобразование Бэклунда для модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза состоит из уравнения (8.2.7) и уравнения для производной по времени, которое можно получить так же, как было получено уравнение (8.1.11) для уравнения Кортевега — де Фриза. Покажите, что результат имеет вид [113]

$$(z + z')_t = -a \{ (z_{xx} - z'_{xx}) \cos v + [(z_x)^2 + (z'_x)^2] \sin v \},$$

где $a = -2i\zeta_0$ и $v = z - z'$. Покажите, что при $z' = 0$ $z = 2 \arctg \exp(ax - a^2t)$.

Упражнение 3

Используйте метод Клерэна для получения преобразования Бэклунда (8.2.11), отображающего уравнение sine-Gordon $s = \sin z$ в себя. Для простоты положите, что преобразование имеет вид (8.3.10).

Упражнение 4

Покажите, что подстановка $\Gamma = \tanh[(z + z')/4]$ превращает соотношение $\rho + \rho' = 2a \sinh[(z - z')/2]$ в уравнение Риккати

$$\Gamma_x + a\Gamma - \frac{1}{2}\rho(1 + \Gamma^2) = 0.$$

При дальнейшем преобразовании $\Gamma = w_1/w_2$ это уравнение можно заменить линейными уравнениями

$$w_{1x} + \frac{1}{2}aw_1 = \frac{1}{2}\rho w_2,$$

$$w_{2x} - \frac{1}{2}aw_2 = -\frac{1}{2}\rho w_1.$$

Аналогичные соотношения между преобразованиями Бэклунда и линейными уравнениями обратной задачи рассеяния можно получить для других эволюционных уравнений [86].

Упражнение 5

Запишите уравнение Кортевега — де Фриза и модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза в виде $z_t' + 6z'z_x' + z_{xxx}' = 0$ и $z_t - 6z^2z_x + z_{xxx} = 0$ соответственно и рассмотрите преобразование Бэклунда между этими двумя уравнениями в виде $z_x = f(z, z')$ и $z_t = \varphi(z, z', z_x', z_{xx}')$. Используйте метод Клерэна для получения преобразования Бэклунда

$$z_x = z' + (z)^2,$$

$$z_t = z_{xx} - 2(zz_x' + z'z_x).$$

Первое из этих соотношений является формой преобразования Миуры.

Глава 9

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Физические ситуации, при описании которых появляются стандартные солитонные уравнения, очень идеализированные. Включение эффектов, имеющих место в более реалистических экспериментальных ситуациях, особенно различных форм диссипации, приводит к уравнениям, отличающимся от стандартных солитонных уравнений. Если добавочные члены в уравнениях в некотором смысле малы, можно ожидать, что по крайней мере для некоторого начального интервала времени их влияние на различные ранее рассмотренные солитонные явления может быть малым. В этой главе мы изложим теорию возмущений, которая применима к уравнениям, слегка отличающимся от уравнения Кортевега — де Фриза и кубического уравнения Шрёдингера. Изложение основано на недавних результатах Карпмана и Маслова [69], где методы возмущений были применены и к некоторым другим солитонным уравнениям. В этой связи можно обратиться также к статье Каупа и Ньюэлла [71] и более поздней статье Карпмана [67].

УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

9.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим возмущенное уравнение Кортевега — де Фриза в виде

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u), \quad (9.1.1)$$

где $\varepsilon \ll 1$ и $R(u)$ — некоторая заданная функция решения. Типичными примерами служат функция $\varepsilon R(u) = \gamma u$, дающая простое описание диссипативного процесса, и функция $\varepsilon R(u) = -\gamma \partial^2 u / \partial x^2$, вводящая диффузионные эффекты, связанные с уравнением Бюргерса (см. разд. 6.5 и 8.3).

Из наших предыдущих рассуждений в гл. 1 и 4 мы знаем, что выражение $-6uu_x + u_{xxx}$ можно записать как коммутатор операторов $L = D^2 - u$ и $B = -4D^3 + 6uD + 3u_x$, где $D = \partial/\partial x$. Из предыдущего анализа следует также, что (9.1.1) можно записать в виде

$$u_t - [L, B] = \varepsilon R(u). \quad (9.1.2)$$

Оператор L по-прежнему удовлетворяет уравнению Штурма — Лиувилля

$$Ly = \lambda y \quad (9.1.3)$$

с тем отличием, что собственное значение λ больше не является независимым от времени. Кроме того, выражение Bu больше не равно y_i . Фактически в последующем анализе возмущений разность $\Phi \equiv y_i - Bu$ будет играть фундаментальную роль. Мы найдем, что определение Φ приводит к выражениям, описывающим временную зависимость λ , а также коэффициентов прохождения и отражения, обусловленную влиянием возмущения $\epsilon R(u)$. Дифференцируя по времени (9.1.3), можно получить уравнение для Φ . Вспоминая, что $L_i \equiv -u_i$ и используя (9.1.2) для исключения u_i , получим

$$(L - \lambda)\Phi = \epsilon R(u)y + \lambda_i y. \quad (9.1.4)$$

Мы рассмотрим это уравнение как для решений со связанными состояниями, так и для решений рассеяния. В случае связанных состояний нас главным образом интересует временная зависимость $\lambda(t)$. Однако решения рассеяния включают в себя отражение и прохождение волны с заданным волновым числом, падающей на потенциал $u(x, t)$. Падающая и рассеянная волны имеют одно и то же волновое число, следовательно, λ не зависит от времени t . Таким образом, для решений рассеяния $\lambda_i = 0$. Конечно, коэффициенты отражения и рассеяния зависят от t .

Уравнение (9.1.4) может рассматриваться как неоднородное дифференциальное уравнение для Φ . Решение для Φ можно построить из решений однородного уравнения $(L - \lambda)\Phi = 0$ с помощью стандартного метода вариации параметров. Введем фундаментальные решения $f_1(x, k; t)$ и $f_2(x, k; t)$, которые являются решениями однородной другой части уравнения (9.1.4), когда u является решением уравнения (9.1.1). Асимптотические свойства f_1 и f_2 те же, что и в (2.8.2). Так как u неизвестно, фундаментальные решения также неизвестны, но они будут получены приближенно, когда будет изложен метод возмущений.

Рассмотрим детально решение (9.1.4) для функции Φ , связанное с фундаментальным решением f_2 . Записывая $y = h(t)f_2$ и вспоминая, что при обращении u в нуль выражение для B сводится к $-4D^3$, находим, что

$$\Phi = y_i - Bu \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} (h_i + 4ik^3 h)e^{-ikx}. \quad (9.1.5)$$

Полагая снова $h(t) = h(0)e^{4ik^3 t}$, мы видим, что Φ обращается в нуль при $x \rightarrow -\infty$. Тогда если возмущение обращается в нуль, решение y сводится к решению для невозмущенного случая.

С другой стороны, при $x \rightarrow +\infty$ соотношение между f_2 и f_1 (2.8.7a) приводит к следующему:

$$\Phi \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} h(t)[c_{12}e^{-ikx} + (c_{11} - 8ik^3 c_{11})e^{ikx}]. \quad (9.1.6)$$

Перейдем к установлению связи между временной зависимостью c_{11} и c_{12} и возмущением $eR(u)$. Это можно сделать, рассмотрев решение Φ для промежуточных значений x .

Для произвольных значений x решение (9.1.4) можно записать в виде линейной комбинации f_1 и f_2

$$\Phi = \alpha(x, k, t) f_1(x, k; t) + \beta(x, k, t) f_2(x, k; t). \quad (9.1.7)$$

Стандартное применение к (9.1.4) метода вариации параметров дает

$$\alpha = \frac{h(t)}{2ikc_{12}} \int_{-\infty}^x dx' G(u) [f_2(x', k; t)]^2, \quad (9.1.8a)$$

$$\beta = -\frac{h(t)}{2ikc_{12}} \int_{-\infty}^x dx' G(u) f(x', k; t) f_2(x', k; t), \quad (9.1.8b)$$

где $2ikc_{12} = W[f_1; f_2]$ и

$$G(u) = \begin{cases} eR(u) + \lambda_t & \text{для связанных состояний,} \\ eR(u) & \text{для решений рассеяния.} \end{cases} \quad (9.1.9)$$

Видно, что решение для Φ обращается в нуль как при $x \rightarrow -\infty$, так и при $e \rightarrow 0$. При $x \rightarrow +\infty$ соотношения (9.1.7) и (9.1.8) дают

$$\Phi \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{h(t)}{2ikc_{12}} \left[e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(u) f_2(f_2 - c_{11}f_1) - c_{12}e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(u) f_1f_2 \right]. \quad (9.1.10)$$

Приравнявая коэффициенты при $e^{\pm ikx}$ в (9.2.6) и (9.1.10), можно получить уравнения, дающие зависимость c_{11} и c_{12} от времени. Результат имеет вид

$$c_{11t} - 8ik^3c_{11} = -\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(u) f_2(x', k; t) f_1(x', -k; t), \quad (9.1.11a)$$

$$c_{12t} = \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(u) f_2(x', k; t) f_1(x', k; t). \quad (9.1.11b)$$

В случае решений рассеяния, где $G(u) = eR(u)$, нас интересует коэффициент отражения, являющийся отношением c_{11}/c_{12} . Из (9.1.11) находим, что

$$\left(\frac{c_{11}}{c_{12}} \right)_t - 8ik^3 \left(\frac{c_{11}}{c_{12}} \right) = -\frac{ie}{2k^2c_{12}^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' R(u) f_2^2. \quad (9.1.12)$$

На решения со связанными состояниями, где $G(u) = \varepsilon R(u) + \lambda_t$, мы должны еще наложить ограничение $c_{12}(x) = 0$, так что $f_2(x, ix) = c_{11}(ix)f_1(x, ix)$. Второе из уравнений (9.1.11) при $\lambda = x^2$ и $k = ix$ теперь дает

$$\kappa_t = -\frac{\varepsilon}{2x} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx' R(u) f_2^2(x', ix; t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx' f_2^2(x', ix; t)}. \quad (9.1.13)$$

В первом из уравнений (9.1.11) функция $f_1(x, -k; t)$ сингулярна в точках полюсов, соответствующих связанным состояниям. [Это видно из решения с одним полюсом, приведенного в упр. 15 гл. 2 и (9.2.2a).] Однако при использовании $f_1(x, -k) = [f_2(x, k) - c_{11}f_1(x, k)]/c_{12}$ и раскрытии получившейся неопределенности при $k \rightarrow ix$, мы получим

$$c_{11t} - 8x^3 c_{11} = -\frac{\varepsilon}{2xc_{12}(ix)} \int_{-\infty}^{\infty} dx' R(u) f_2(ix) \times \\ \times \frac{d}{dk} [f_2(k) - c_{11}(ix)f_1(k)]_{k=ix}, \quad (9.1.14)$$

где точка означает производную по k . Член, содержащий $\dot{c}_{11}(ix)$, не входит в эту формулу, поскольку он умножается на интеграл в (9.1.14a), который обращается в нуль, так как для связанных состояний $c_{12t} = 0$. Кроме того, отсутствует член, пропорциональный λ_t , так как он пропорционален $\int_{-\infty}^{\infty} dx (f_2 f_1 - f_1 f_2)$. Этот последний интеграл, как отмечалось в упр. 17 гл. 2, пропорционален вронскиану $W(f_1; f_2)|_{x=-\infty}^{x=+\infty}$, который для связанных состояний обращается в нуль.

Получившиеся выражения (9.1.12)–(9.1.14) служат основой анализа возмущений. Из их структуры ясно, что можно начать построение возмущенных разложений по степеням ε , используя под интегралами невозмущенные выражения для f_1 и f_2 . Сейчас мы проделаем эту процедуру для односолитонного решения.

9.2. ВОЗМУЩЕНИЕ ОДНОСОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ

Фундаментальные решения, связанные с невозмущенным единичным солитоном, являются решениями уравнения

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + [k^2 - u_s(x)] f = 0 \quad (9.2.1)$$

с $u_s(z) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 z$ и $z = \kappa(x - \xi)$. Теперь зависимость параметров солитона κ и ξ от времени определяется возмущением $\varepsilon R(u)$. Из упр. 4 гл. 3 имеем

$$f_1(x, k; t) = \frac{e^{i k x} (k + i \kappa \operatorname{th} z)}{k + i \kappa}, \quad (9.2.2a)$$

$$f_2(x, k; t) = \frac{e^{-i k x} (k - i \kappa \operatorname{th} z)}{k + i \kappa}. \quad (9.2.2b)$$

Кроме того, так как в общем случае возмущенное решение не будет безотражательным, мы ожидаем, что возмущение приведет к возбуждению непрерывного спектра волн.

Возмущение параметров связанного состояния

Для полюса при $k = i\kappa$ имеем

$$f_1(i\kappa) = \frac{1}{2} e^{-\kappa \xi} \operatorname{sech} z, \quad (9.2.3a)$$

$$f_2(i\kappa) = \frac{1}{2} e^{\kappa \xi} \operatorname{sech} z \quad (9.2.3b)$$

и, таким образом,

$$c_{11}(i\kappa) = \frac{f_2(i\kappa)}{f_1(i\kappa)} = e^{2\kappa \xi}. \quad (9.2.4)$$

Возмущение собственного значения получается из (9.1.13), которых принимает вид

$$\kappa_t = -\frac{\varepsilon}{4\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} dz R(u_s) \operatorname{sech}^2 z. \quad (9.2.5)$$

Зависимость фазового члена от времени $\xi(t)$ получается из зависимости от времени $c_{11}(i\kappa)$ и соотношения (9.2.4). Используем сначала (9.2.2) и получим

$$\frac{d}{dk} [f_2(k) - c_{11}(i\kappa) f_1(k)]_{k=i\kappa} = -\frac{i}{\kappa} e^{\kappa \xi} \operatorname{sech} z \left(\kappa x + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2z \right). \quad (9.2.6)$$

Тогда (9.1.14) вместе с соотношением $c_{11t} = (2\kappa_t + 2\kappa \xi_t) e^{2\kappa \xi}$, которое следует из (9.2.4), дает

$$\xi_t = 4\kappa^2 - \frac{\varepsilon}{4\kappa^3} \int_{-\infty}^{\infty} dz R(u_s) \operatorname{sech}^2 z \left(z + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2z \right). \quad (9.2.7)$$

Мы положили также, что $c_{12}(i\kappa) = (2i\kappa)^{-1}$, так как $c_{12}(k) = (k - i\kappa)/(k + i\kappa)$.

В качестве примера использования этих результатов рассмотрим влияние затухания на односолитонное решение. Положим для

этого $\epsilon R(u_s) = -\gamma u_s = 2\gamma \kappa^2 \operatorname{sech}^2 z$. Соотношение $\int_{-\infty}^{\infty} dz \operatorname{sech}^4 z = 4/3$ приводит (9.2.5) к виду $\kappa_t = -2\gamma \kappa/3$ или

$$\kappa(t) = \kappa_0 e^{-2\gamma t/3}. \quad (9.2.8)$$

Так как κ пропорционально как амплитуде, так и обратной ширине солитона, мы определили скорость, с которой солитон расплывается и затухает с ростом времени.

Так как подынтегральное выражение в (9.2.7) — нечетная функция, мы имеем $\xi_t = 4\kappa^2$. Интегрирование дает

$$\xi(t) = \frac{3}{\gamma} [\kappa_0^2 - \kappa^2(t)] + \xi_0, \quad (9.2.9)$$

где $\kappa(t)$ дается выражением (9.2.8). Отметим, что при $\gamma \rightarrow 0$ мы восстанавливаем результат для невозмущенного солитона, $\xi = 4\kappa_0^2 + \xi_0$.

Возмущения в непрерывном спектре

Мы можем ожидать, что решение уравнения Кортевега—де Фриза, являющееся возмущением односолитонного решения, будет иметь вид

$$u(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 z + \delta u, \quad (9.2.10)$$

где зависимость κ и ξ от времени была получена выше, а член δu появляется вследствие возбуждения непрерывного спектра. Для получения δu можно вернуться к уравнению Марченко (3.2.7)

$$\Omega_R(x+y; t) = A_R(x, y; t) + \int_x^\infty dx' \Omega_R(x' + y, t) A_R(x, x'; t) = 0, \quad (9.2.11)$$

где для единичного солитона

$$\Omega_R(z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{c_{11}(k, t)}{c_{12}(k, t)} e^{ikz} - i \frac{c_{11}(ix, t)}{c_{12}(ix, t)} e^{-\kappa t}. \quad (9.2.12)$$

Теперь мы положим $\Omega_R = \Omega_S + \delta\Omega$, где Ω_S и $\delta\Omega$ обозначают второй и первый члены в выражении (9.2.12) соответственно. Если мы запишем также $A_R(x, y) = A_S(x, y) + \delta A(x, y)$ и в интеграле в уравнении Марченко пренебрежем произведением более высокого порядка $\delta A \delta\Omega$, мы найдем

$$\delta A(x, y; t) + \int_x^\infty dx' \Omega_S(x' + y; t) \delta A(x, x'; t) = \Psi(x, y; t), \quad (9.2.13)$$

где

$$\Psi(x, y; t) = -\delta\Omega(x+y; t) - \int_x^\infty dx' A_S(x, x'; t) \delta\Omega(x', y; t). \quad (9.2.14)$$

Из упр. 4 гл. 3 имеем

$$\Omega_S(z) = 2\kappa e^{\kappa(2\xi - z)}, \quad (9.2.15a)$$

$$A_S(x, y) = -\frac{2\kappa e^{\kappa(2\xi - x - y)}}{1 + e^{2\kappa(\xi - x)}}. \quad (9.2.15b)$$

Решаем уравнение (9.2.13) относительно $\delta A(x, x)$ и используем соотношение

$$\delta u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} \delta A(x, x; t). \quad (9.2.16)$$

Чтобы получить $\delta A(x, x; t)$, умножим сначала (9.2.13) на $e^{-\kappa y}$ и проинтегрируем от x до ∞ . Это дает

$$\int_x^\infty dy e^{-\kappa y} \delta A(x, y; t) = \frac{\int_x^\infty dy e^{-\kappa y} \Psi(x, y; t)}{1 + e^{2\kappa(\xi - x)}}. \quad (9.2.17)$$

Затем, используя определение $A_S(x, y)$, имеем

$$\delta A(x, y; t) = e^{\kappa x} A_S(x, y) \int_x^\infty dy' e^{-\kappa y'} \Psi(x, y'; t) + \Psi(x, y; t). \quad (9.2.18)$$

Член $\Psi(x, y; t)$ можно выразить через c_{11}/c_{12} . Используя в (9.2.10) выражение (9.2.15b) и определение

$$\delta \Omega(x, t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} e^{i\kappa x} \frac{c_{11}(k, t)}{c_{12}(k, t)}, \quad (9.2.19)$$

находим, что

$$\Psi(x, y; t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{c_{11}}{c_{12}} e^{i\kappa(x+y)} \left[i - \frac{A_S(x+y)}{k + i\kappa} \right]. \quad (9.2.20)$$

Тогда $\delta A(x, x; t)$, согласно (9.2.18), записывается в виде

$$\delta A(x, x; t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{c_{11}}{c_{12}} e^{2i\kappa x} \left[i - \frac{A_S(x, x)}{k + i\kappa} \right]^2. \quad (9.2.21)$$

Замечая, что

$$i - \frac{A_S(x, x)}{k + i\kappa} = i \left(\frac{k + i\kappa \operatorname{th} z}{k + i\kappa} \right), \quad (9.2.22)$$

можно использовать (9.2.16) и (9.2.21) и получить окончательный результат

$$\delta u = 2\kappa \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{c_{11}}{c_{12}} e^{2i\kappa \xi + 2iz\kappa/x} \left(\frac{k + i\kappa \operatorname{th} z}{k + i\kappa} \right)^2. \quad (9.2.23)$$

Решая (9.1.12), нужно определить отношение $\rho = c_{11}/c_{12}$ с точностью до первого порядка по ε . В правой части этого уравнения мы используем выражение нулевого порядка ${}^1)c_{12} = (k - i\kappa)/(k + i\kappa)$ и вместо f_2 его представление (9.2.2b). Находим, что

$$\rho_t - 8ik^3\rho = \frac{i\kappa}{k(k - i\kappa)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz R(u) e^{-2ikz/\kappa} (k - i\kappa \operatorname{th} z)^2. \quad (9.2.24)$$

Для рассмотренного выше примера, а именно $\varepsilon R = -\gamma u$, имеем

$$\rho_t - 8ik^3\rho = -\frac{i\gamma k^3 e^{-2ik\xi(t)}}{k(k - i\kappa)^2} I\left(\frac{k}{\kappa}\right), \quad (9.2.25)$$

где $\kappa(t)$ и $\xi(t)$ даются формулами (9.2.8) и (9.2.9) соответственно, а

$$I(p) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-2ipz} \operatorname{sech}^2 z (p - i \operatorname{th} z)^2. \quad (9.2.26)$$

Этот интеграл может быть записан в виде суммы трех интегралов, $I = p^2 I_1 - 2p I_2 - I_3$, где

$$I_1 = 2 \int_0^{\infty} dz \cos 2pz \operatorname{sech}^2 z = 2\pi p \operatorname{cosech} \pi p, \quad (9.2.27)$$

$$I_2 = 2 \int_0^{\infty} dz \sin 2pz \operatorname{sech}^2 z \operatorname{th} z = p I_1,$$

$$I_3 = 2 \int_0^{\infty} dz \cos 2pz \operatorname{sech}^2 z \operatorname{th}^2 z = \frac{1}{3}(1 - 2p^2) I_1.$$

Интегрируя по частям, легко устанавливаем связь между этими интегралами. Находим, что

$$I(p) = -\frac{2\pi}{3} p(1 + p^2) \operatorname{cosech} \pi p. \quad (9.2.28)$$

Интегрирование уравнения для ρ (9.2.24) с зависимостями κ и ξ от времени, даваемыми соотношениями (9.2.8) и (9.2.9), было бы очень сложно. Вместо этого мы предположим, что ${}^2)\gamma t \ll 1$, и запишем $\kappa = \kappa_0$ и $\xi = 4\kappa_0^2 t + \xi_0$. Тогда $\rho(t)$ сразу же определяется, и для начального условия $\rho(0) = 0$ мы находим, что

$$\rho(t) = \frac{c_{11}(t)}{c_{12}(t)} = \frac{\pi\gamma e^{-2ik\xi_0}}{12k(k^2 + \kappa_0^2) \operatorname{sh}(\pi k/\kappa_0)} \left[e^{8ik^3 t} - e^{-8ik\kappa_0^2 t} \right]. \quad (9.2.29)$$

¹⁾ Недавно было показано, что нужно включить поправочный член [67]. Однако эта поправка не влияет на качественные результаты, которые будут здесь получены.

²⁾ Для детального рассмотрения различных временных масштабов этой задачи см. работу Карпмана [67].

Следует отметить сначала, что это приближенное выражение для $\rho(t)$ нарушает общий результат $c_{11}(0, t)/c_{12}(0, t) \rightarrow -1$, полученный в упр. 15 гл. 2. Однако мы найдем, что производная по z в (9.2.23) служит для того, чтобы ввести в подынтегральное выражение (9.2.23) дополнительный множитель k и таким образом сделать подынтегральное выражение достаточно нечувствительным к малым значениям k , чтобы предыдущее выражение $\rho(t)$ давало удовлетворительное описание δu . Для более подробного обсуждения этого вопроса читатель может обратиться к результатам Карпмана и Маслова [69].

Чтобы получить приближенный вид δu , мы заметим сначала, что вне окрестности солитона, где вклад за счет возмущения наиболее интересен, можно пренебречь в thz медленной зависимостью от z . Далее заметим, что подынтегральное выражение в (9.2.23) быстро осциллирует для больших k . Таким образом, мы полагаем, что доминирующий вклад в подынтегральное выражение будет давать область вблизи $k=0$. Если аппроксимировать амплитуду подынтегрального выражения (9.2.23) в области вблизи $k=0$ и, как упоминалось выше, при дифференцировании по z пренебречь медленной зависимостью от z в thz , то находим, что

$$\delta u = \frac{v}{3k_0} F(x, t), \quad (9.2.30)$$

где

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh}{2\pi i} \frac{e^{2ik(x-\xi_0)}}{k} (e^{8ik^3t} - e^{-8ik_0^2t}) \quad (9.2.31)$$

и множитель th^2z был принят равным единице. Легко понять смысл функции $F(x, t)$, рассматривая сначала производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{i\zeta(x-\xi_0)} (e^{i\zeta^3t} - e^{-4i\kappa_0^2\zeta t}) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\zeta \cos[\zeta(x-\xi_0) + \zeta^3t] - \delta(x-\xi_0 - 4\kappa_0^2t) = \\ &= \frac{1}{(3t)^{1/3}} \text{Ai} \left[\frac{x-\xi_0}{(3t)^{1/3}} \right] - \delta(x-\xi_0 - 4\kappa_0^2t), \end{aligned} \quad (9.2.32)$$

где $\text{Ai}(x)$ — функция Эйри [4]. Из первого выражения (9.2.32) мы видим, что при $t \rightarrow 0$ выражение, содержащее функцию Эйри, превращается в δ -функцию. Если предположить, что возмущение приведенное в формуле (9.2.30), обращается в нуль при $x \rightarrow -\infty$, т.е. далеко позади импульса, то

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^{(x-\xi_0)/(3t)^{1/3}} d\eta \text{Ai}(\eta) - \theta(x-\xi_0 - 4\kappa_0^2t), \quad (9.2.33)$$

где $\theta(x)$ — обычная ступенчатая функция. Есть таблицы интегралов от функции Эйри [4]. При $x < 0$ функция $\int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \text{Ai}(\eta')$ осциллирует около нуля и при $x = 0$ амплитуда достигает $2/3$. При $x > 0$ она монотонно растет до единицы. Следовательно, функция $F(x, t)$ имеет вид, показанный на рис. 9.1. Таким образом, видно, что член возмущения в уравнении (9.1.1), равный γu , создает плато позади солитона. Этот эффект наблюдался при численных решениях [93].

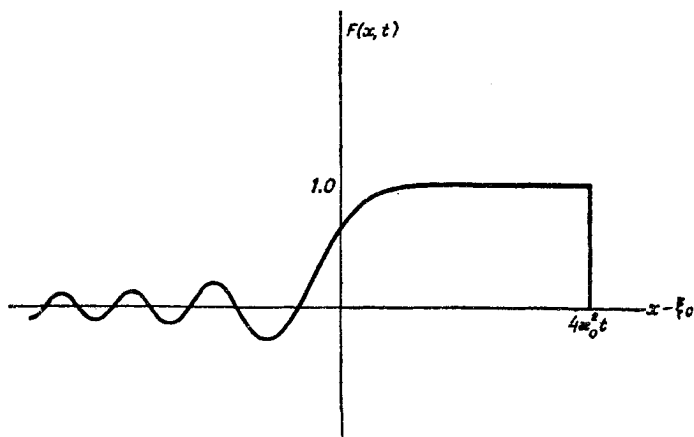


Рис. 9.1. Шельф позади солитона в решении возмущенного уравнения Кортевега — де Фриза $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = \gamma u$.

Только что полученные результаты позволяют понять, какое влияние оказывает возмущение на параметры связанного состояния (солитон) и на непрерывный спектр (плато за солитоном). Указание об относительной величине каждого из этих вкладов в полное решение можно получить, переписывая сначала эволюционное уравнение в виде

$$u_t + (-3u^2 + u_{xx})_x = -\gamma u. \quad (9.2.34)$$

Таким образом, площадь локализованного решения должна удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, t) = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, t). \quad (9.2.35)$$

Для односолитонного решения мы нашли, что

$$u(x, t) = -2\kappa^2 \text{sech}^2 z + \frac{\gamma}{3\kappa_0} F(x, t). \quad (9.2.36)$$

Замечая, что, согласно рис. 9.1, площадь под функцией $F(x, t)$ приближенно равна $4\kappa_0^2 t$, мы находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx u = -4\kappa(t) + \frac{4}{3} \gamma \kappa_0 t \quad (9.2.37)$$

Таким образом, с точностью до первого порядка по γ правая часть уравнения (9.2.34) равна $4\gamma \kappa_0$, в то время как левая часть сводится к выражению

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-4\kappa e^{-2\gamma t/3} + \frac{4}{3} \gamma \kappa_0 t \right) = \frac{8}{3} \gamma \kappa_0 + \frac{4}{3} \gamma \kappa_0 = 4\gamma \kappa_0. \quad (9.2.38)$$

Таким образом, вклад плато за солитоном в скорость изменения площади под возмущением во времени составляет одну треть общей скорости. Дальнейшее обсуждение этих результатов можно найти в научной литературе, цитируемой в начале этой главы.

Упрощенная процедура

Мы нашли, что возмущение за счет демпфирования очень просто влияет на форму солитонного решения уравнения Кортевега—де Фриза. Можно ожидать, что такой простой результат можно было бы получить и более непосредственным образом. Сейчас мы покажем, как можно использовать энергию, а также другие сохраняющиеся величины для невозмущенного уравнения Кортевега—де Фриза, анализируя затухание солитонного решения при наличии демпфирования.

Для начала заметим, что сохраняющаяся величина g_4 , приведенная в формулах (2.8.51), пропорциональна энергии, содержащейся в решении уравнения Кортевега—де Фриза. Чтобы показать это, используем описанную в разд. 2.1 процедуру и введем плотность лагранжиана, из которой можно вывести невозмущенное уравнение Кортевега—де Фриза. С этим лагранжианом связана плотность гамильтониана, являющаяся плотностью энергии.

Если принять, что $u = \varphi_x$, то плотность лагранжиана для уравнения Кортевега—де Фриза (4.1.1) равна

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \varphi_x \varphi_t + (\varphi_x)^3 + \frac{1}{2} (\varphi_{xx})^2. \quad (9.2.39)$$

Так как появляется вторая производная, уравнение движения следует из

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{xx}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \quad (9.2.40)$$

С вышеприведенным лагранжианом это дает

$$\varphi_{xt} - 6\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_{xxxx} = 0, \quad (9.2.41)$$

а это, если снова ввести $u = \varphi_x$, есть уравнение Кортевега — де Фриза (4.1.1) без затухания.

Плотность гамильтониана равна

$$\mathcal{H} = \varphi_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t} - \mathcal{L} = -(\varphi_x)^3 - \frac{1}{2}(\varphi_{xx})^2. \quad (9.2.42)$$

Тогда энергия решения равна

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{H} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(u^3 + \frac{1}{2} u_x^2 \right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx g_4. \quad (9.2.43)$$

Связывая этот результат с g_4 , мы проинтегрировали по частям и пренебрегли полными производными.

Для невозмущенного уравнения Кортевега — де Фриза $\mathcal{E}_t = 0$. Сейчас мы *определим* энергию уравнения Кортевега — де Фриза с затуханием тем же выражением (9.2.43) и определим, как она меняется с течением времени. Используемая процедура полностью аналогична той, которая применялась для описания демпфирования механического осциллятора при наличии сопротивления.

Для односолитонного решения мы используем $u = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 z$. Замечая, что $\kappa dx = dz$, находим

$$\mathcal{E} = -8\kappa^5 \int_{-\infty}^{\infty} dz (\operatorname{sech}^4 z - 2 \operatorname{sech}^6 z) = \frac{32}{5} \kappa^5, \quad (9.2.44)$$

так что $\mathcal{E}_t = 32\kappa^4 \kappa_t$.

С другой стороны, из (9.2.43) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t &= - \int dx (3\varphi_x^2 \varphi_{xt} + \varphi_{xx} \varphi_{xxt}) = \\ &= - \int dx \varphi_{xt} (3\varphi_x^2 - \varphi_{xxx}) = \\ &= \int dx \varphi_t (6\varphi_x \varphi_{xx} - \varphi_{xxx}) = \\ &= \gamma \int dx \varphi_x \varphi_t, \end{aligned} \quad (9.2.45)$$

Так как этот результат уже пропорционален γ , мы для вычисления интеграла используем невозмущенные решения и получим $\mathcal{E}_t = -(64/3)\gamma\kappa^5$. Приравнявая два выражения \mathcal{E}_t , мы имеем ранее полученный результат $\kappa_t = -2\gamma\kappa/3$, который приводит к выражению для κ , даваемому формулой (9.2.8).

Еще легче получить этот результат, используя сохраняющуюся величину g_2 . Дальнейшее рассмотрение этого подхода в связи с возмущенным уравнением sine-Gordon можно найти у Мак-Лафлина и Скотта [83].

Упражнение 1

Полагая $R(u) = \gamma u_{xx}$, можно рассмотреть возмущение в виде диффузионного члена. Покажите, что теперь параметр, определяющий ширину солитона, удовлетворяет уравнению $\kappa_t = -(8/15)\gamma \kappa^3$. Получите этот результат, используя сохраняющиеся величины.

КУБИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

9.3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Можно разработать и метод возмущений для эволюционных уравнений, связанных с рассмотренной в гл. 5 задачей на собственные значения для системы двух уравнений. Этот метод является лишь небольшим обобщением метода, использованного в предыдущих разделах для уравнения Кортевега — де Фриза. В качестве примера рассмотрим возмущенное кубическое уравнение Шрёдингера

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = i\epsilon R(u). \quad (9.3.1)$$

Начнем с построения операторной формы этого уравнения (и его комплексно-сопряженного), соответствующей (9.1.2) для уравнения Кортевега — де Фриза. Мы используем оператор, полученный в упр. 3 гл. 5, а именно

$$A = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} D^2 - 2i \begin{pmatrix} 0 & u \\ u^* & 0 \end{pmatrix} D - i \begin{pmatrix} -|u|^2 & u_x \\ u_x^* & |u|^2 \end{pmatrix}, \quad (9.3.2)$$

где $D = \partial/\partial x$. Используем также оператор

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} D - \begin{pmatrix} 0 & u \\ u^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.3.3)$$

который можно найти, переписав (5.3.2) в виде

$$Lv = \lambda v, \quad (9.3.4)$$

где $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ и $\lambda = -i\xi$. Тогда получим

$$[L, A] = \begin{pmatrix} 0 & i(u_{xx} + 2u|u|^2) \\ -i(u_{xx}^* + 2u^*|u|^2) & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.3.5)$$

Так как $L_t = -U_t$, где

$$U = \begin{pmatrix} 0 & u \\ u^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.3.6)$$

мы можем переписать уравнение (9.3.1) и комплексно-сопряженное ему в виде

$$U_t - [L, A] = \epsilon R, \quad (9.3.7)$$

где

$$R = \begin{pmatrix} 0 & R \\ R^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.3.8)$$

Вполне аналогично выводу (9.1.4) находим, что производная по времени от (9.3.4) приводит к выражению

$$(L - \lambda)\Phi = Gv, \quad (9.3.9)$$

где $\Phi = v_t - Av$,

$$G = \begin{cases} vR + \lambda_l I & \text{для связанных состояний,} \\ vR & \text{для решений рассеяния} \end{cases} \quad (9.3.10)$$

и I — единичная 2×2 -матрица. Рассмотрим фундаментальное решение уравнения (9.3.9), пропорциональное $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx}$ при $x \rightarrow -\infty$. Таким образом, полагаем $v = h(t)\varphi(x, k; t)$, где φ — фундаментальное решение того типа, который был определен в (2.11.15). Используя предельную форму A при $x \rightarrow -\infty$, где $u = 0$, находим, что

$$\Phi \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} (h_l + 2ik^2 h) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx} \quad (9.3.11)$$

и, таким образом, $h(t) = h(0)e^{-2ik^2 t}$. При x , стремящемся к $+\infty$, получим

$$\Phi \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx} h(t) (c_{11t} - 4ik^2 c_{11}) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx} h(t) c_{12t}, \quad (9.3.12)$$

где мы использовали соотношения между φ и ψ , данное формулой (3.9.8а), и предельные формы

$$\begin{aligned} \psi &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx}, \\ \bar{\psi} &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx}. \end{aligned} \quad (9.3.13)$$

Теперь зависимость c_{12} от времени, а также вызванная возмущением дополнительная зависимость от времени c_{11} , определяются решением уравнения (9.3.9) для промежуточных значений x , как это было сделано для уравнения Кортевега — де Фриза в разд. 9.1. Используем снова метод вариации параметров и запишем

$$\Phi = \alpha\psi + \beta\bar{\psi}, \quad (9.3.14)$$

где ψ и $\bar{\psi}$ — фундаментальные решения однородной части уравнения (9.3.9), а α и β — функции, подлежащие определению. Подстановка (9.3.14) в уравнение (9.3.9) дает

$$K\alpha_x\psi + K\beta_x\bar{\psi} = Gv, \quad (9.3.15)$$

где мы положили

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.3.16)$$

Для решения уравнения (9.3.15) удобно ввести

$$\hat{\Phi} \equiv \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi} \equiv \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (9.3.17)$$

Согласно (9.3.16) и определению вронскиана (2.11.18), имеем

$$\hat{\Phi}^T K \hat{\Psi} = (\varphi_2, \varphi_1) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix} = -W(\varphi, \psi) = -c_{12}. \quad (9.3.18)$$

Мы нашли также, что $\hat{\Psi}^T K \hat{\Psi} = 0$. Аналогично мы нашли, что $\hat{\Phi}^T K \hat{\Phi} = 0$ и $\hat{\Psi}^T K \hat{\Phi} = c_{12}$. Эти соотношения оказываются удобными для определения α_x и β_x . Умножая уравнение (9.3.15) по очереди на $\hat{\Phi}^T$ и $\hat{\Psi}^T$, мы тотчас же получаем

$$\alpha_x = \frac{-\hat{\Phi}^T G v}{c_{12}}, \quad (9.3.19)$$

$$\beta_x = \frac{\hat{\Psi}^T G v}{c_{12}}.$$

Таким образом, решение для Φ , обращающееся в нуль при $x \rightarrow -\infty$, имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{c_{12}} \left(\psi \int_{-\infty}^x dx' \hat{\Phi}^T G v + \varphi \int_{-\infty}^x dx' \hat{\Psi}^T G v \right). \quad (9.3.20)$$

Если вычислить этот результат при $x \rightarrow +\infty$ и приравнять коэффициенты при $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikh}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikh}$ тем, которые были получены в (9.3.12), то найдем, что

$$c_{11t} - 4ik^2 c_{11} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\Psi}^T G \varphi, \quad (9.3.21a)$$

$$c_{12t} = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\Psi}^T G \varphi. \quad (9.3.21b)$$

Чтобы записать при получении (9.3.21a) выражение

$$-\hat{\Phi}^T + c_{11} \hat{\Psi}^T = -c_{12} (\tilde{\Psi}_2, \tilde{\Psi}_1), \quad (9.3.22)$$

мы использовали (3.9.8a) и определили

$$\tilde{\Psi}^T \equiv (\tilde{\Psi}_2, \tilde{\Psi}_1). \quad (9.3.23)$$

Полагая $c_{12t} = 0$ в (9.3.21b) и используя $G = eR(u) + \lambda_1 I$, мы получим зависимость собственного значения $\zeta = k_n$ от времени. Вспомогая данное в (9.3.8) определение R и замечая, что $\lambda = -i\zeta =$

$= -ik_n$, мы можем перемножить матрицы в подинтегральном выражении и свести (9.3.21b) к виду

$$k_{nt} = -\frac{ie}{2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx' (R\phi_2^2 + R^*\phi_1^2)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi_1 \phi_2}. \quad (9.3.24)$$

Функции ϕ_1 и ϕ подсчитываются при $\zeta = k_n$, где $\tilde{\psi}$ и ϕ пропорциональны.

При вычислении первого из уравнений (9.3.21) видно, что функция $\hat{\psi}^T$ сингулярна в полюсах в верхней полуплоскости, соответствующих связанным состояниям. Это очевидно для решений с одним полюсом, которые будут приведены впоследствии (формула (9.4.5)). Однако, используя (9.3.8a) и вычисля полученную неопределенную форму при $\zeta \rightarrow k_n$, получим

$$c_{11t} - 4ik_1^2 c_{11} = -\frac{e}{\epsilon_{12}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' [R\phi_2(\phi_2 - c_{11}\phi_2) + R^*\phi_1(\phi_1 - c_{11}\phi_1)]|_{\zeta=k_1}, \quad (9.3.25)$$

где точка означает производную по ζ . Эта процедура аналогична той, которая была использована при получении (9.1.14). Результат выраженный в (9.3.24) и (9.3.25), создает основу теории возмущений для параметров связанных состояний. Сейчас мы рассмотрим использование этих формул при анализе изменения односолитонного решения за счет диссипации.

9.4. ЗАТУХАНИЕ ЕДИНИЧНОГО СОЛИТОНА

Общий вид односолитонного решения, соответствующего нулю функции $c_{12}(\zeta)$ при $\zeta = k_1 = \alpha + i\beta$, где $\beta > 0$, приведен в упр. 4 гл. 5, а именно

$$u_s(z) = 2\beta e^{-i\theta} \operatorname{sech} z, \quad (9.4.1)$$

где теперь

$$z = 2\beta(t)[x - \xi(t)], \quad (9.4.2)$$

$$\theta = \frac{\alpha(t)z}{\beta(t)} + \delta(t). \quad (9.4.3)$$

Как и в упр. 4 гл. 5, при отсутствии возмущения $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\xi = -4\alpha_0 t + \text{const}$ и $\delta = -4(\alpha_0^2 + \beta_0^2) + \text{const}$. Кроме того, приведен

ные там фундаментальные решения могут быть записаны в виде

$$\varphi(x, k; t) = \frac{e^{-ik\sigma}}{k - k_1^*} \begin{pmatrix} k - \alpha - i\beta \operatorname{th} z \\ -i\beta e^{i\theta} \operatorname{sech} z \end{pmatrix}, \quad (9.4.4)$$

$$\psi(x, k; t) = \frac{e^{ik\sigma}}{k - k_1^*} \begin{pmatrix} -i\beta e^{-i\theta} \operatorname{sech} z \\ k - \alpha + i\beta \operatorname{th} z \end{pmatrix}, \quad (9.4.5)$$

где θ определяется формулой (9.4.3) и

$$\sigma = \frac{z}{2\beta(t)} + \xi(t). \quad (9.4.6)$$

Зависимость от времени для величин ξ и δ , так же как для α и β , определяется возмущением. Если нуль $c_{12}(\zeta)$ расположен при $\zeta = k_1 = \alpha + i\beta$, то фундаментальные решения сводятся к следующим:

$$\varphi(x, k_1; t) = \frac{1}{2} e^{-ik_1\sigma} \operatorname{sech} z \begin{pmatrix} e^{-z} \\ -e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad (9.4.7)$$

$$\psi(x, k_1; t) = \frac{1}{2} e^{ik_1\sigma} \operatorname{sech} z \begin{pmatrix} -e^{-i\theta} \\ e^z \end{pmatrix}. \quad (9.4.8)$$

Затем мы находим, что

$$c_{11}(k_1) = \frac{\varphi_1(k_1)}{\psi_1(k_1)} = \frac{\varphi_2(k_1)}{\psi_2(k_1)} = -e^{-z-2ik_1\sigma+i\theta}. \quad (9.4.9)$$

Мы имеем также

$$c_{12}(\zeta) = W(\varphi, \psi) = \frac{\zeta - k_1}{\zeta + k_1^*}, \quad (9.4.10)$$

и поэтому $c_{12}(k_1) = (2k_1)^{-1}$. Теперь зависимость собственного значения от времени дается уравнением (9.3.24), которое сводится к

$$k_{nt} = \frac{ie}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dz \operatorname{sech}^2 z (R e^{z+i\theta} + R^* e^{-z-i\theta}). \quad (9.4.11)$$

Разделяя действительную и мнимую часть, получим

$$\alpha_t = -\frac{1}{2} e \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dz R e^{i\theta} \operatorname{sech} z \operatorname{th} z, \quad (9.4.12a)$$

$$\beta_t = \frac{1}{2} e \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dz R e^{i\theta} \operatorname{sech} z. \quad (9.4.12b)$$

В качестве простого примера использования этих результатов рассмотрим влияние затухания на единичный солитон. Затухание

можно ввести, рассматривая уравнение

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = -i\gamma u. \quad (9.4.13)$$

Таким образом, $eR = -\gamma u$, или $eRe^{i\theta} = -2\beta\gamma \operatorname{sech} z$. Тогда мы находим, что $\beta_t = -2\gamma\beta$ и $\alpha_t = 0$, так что

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0 e^{-2\gamma t}. \quad (9.4.14)$$

Таким образом, как и в случае уравнения Кортевега — де Фриза, солитон расплывается и затухает.

Изменение фазы солитона получим из (9.3.25) предварительно используя (9.4.9), чтобы записать

$$c_{11t} = e^{-2ik_t\xi + i\delta} [2i(k_{1t}\xi + k_1\xi_t) - i\delta_t]. \quad (9.4.15)$$

Вычисляя (9.3.25), требуем, чтобы

$$\varphi_2(\dot{\varphi}_2 - c_{11}\dot{\varphi}_2) = -\frac{i}{2} e^{-i\theta + z - 2ik_t\xi + i\delta} \operatorname{sech} z \left(\sigma e^z \operatorname{sech} z - \frac{1}{2\beta} \right), \quad (9.4.16)$$

$$\varphi_1(\dot{\varphi}_1 - c_{11}\dot{\varphi}_1) = -\frac{i}{2} e^{-i\theta - 2ik_t\xi + i\delta} \operatorname{sech} z \left(\sigma e^{-z} \operatorname{sech} z + \frac{1}{2\beta} \right).$$

Разделяя в (9.3.25) действительную и мнимую части, получим

$$\xi_t = -4\alpha + \frac{e}{4\beta^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dz z \operatorname{sech} z R e^{i\theta}, \quad (9.4.17a)$$

$$\delta_t = 2\alpha\xi_t + 4(\alpha^2 - \beta^2) - \frac{e}{2\beta} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dz \operatorname{sech} z (1 - z \operatorname{th} z) R e^{i\theta}. \quad (9.4.17b)$$

Для введенного выше возмущения $eR = -\gamma u$, оба интеграла в (9.4.17) обращаются в нуль. Тогда $\xi_t = -4\alpha_0$ и $\delta_t = 2\alpha_0\xi_t + 4[\alpha_0^2 - \beta^2(t)]$, где $\beta(t)$ дается выражением (9.4.14). В результате интегрирования получим

$$\begin{aligned} \xi &= -4\alpha_0 t + \xi_0, \\ \delta &= -4\alpha_0^2 t - \frac{\beta_0^2}{\gamma} (1 - 4e^{-\gamma t}) + 2\alpha_0\xi_0. \end{aligned} \quad (9.4.18)$$

При $\gamma \rightarrow 0$ это сводится к результату для невозмущенного случая, приведенному в упр. 4 гл. 5.

Зависимость параметров α и β от времени, определяющая форму односолитонного решения кубического уравнения Шрёдингера с затуханием, может быть также определена с помощью сохраняющихся величин, связанных с невозмущенным уравнением. При этом используется та же процедура, что и для уравнения Кортевега — де Фриза в предыдущем разделе.

Из (3.9.28) получим

$$2iC_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g_1 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx, \quad (9.4.19)$$

$$(2i)^3 C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} g_3 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (|u|^4 - |u_x|^2) dx.$$

Как можно видеть, используя плотность лагранжиана $\mathcal{L} = u_x^* u_x - \frac{1}{2}(u^* u_t - u_t^* u) - (u^* u)^2$; последнее из этих выражений соответствует энергии решения. Интеграл по всему пространству от соответствующей плотности гамильтониана $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} + u_t^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} - \mathcal{L}$ оказывается пропорциональным C_3 .

Для односолитонного решения $u = 2\beta e^{-i\theta} \operatorname{sech} z$, приведенного в (9.4.1),

$$2iC_1 = 8\beta, \quad (9.4.20)$$

$$(2i)^3 C_3 = 32\beta \left(\frac{1}{3} \beta^2 - \alpha^2 \right).$$

Если предположить, что u удовлетворяет кубическому уравнению Шрёдингера с затуханием (9.4.13), то производная по времени от C_1 и C_2 дает

$$2iC_{1t} = -2i\gamma \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx,$$

$$(2i)^3 C_{3t} = i\gamma \int_{-\infty}^{\infty} (u^* u_t - u_t^* u) dx. \quad (9.4.21)$$

Если приравнять производную по времени от C_1 , заданную формулой (9.4.20), ее выражению, полученному из (9.4.21), мы снова получим соотношение $\beta_t = -2\gamma\beta$. Аналогичное рассмотрение C_3 приводит к $\alpha_t = 0$, так что вновь получаются оба результата (9.4.14).

Теперь аналогия с теорией возмущений для уравнения Кортевега — де Фриза очевидна. Рассмотрение непрерывного спектра также аналогично рассмотрению для уравнения Кортевега — де Фриза и здесь излагаться не будет. Этот вопрос, равно как и дополнительные примеры вычисления возмущений, можно найти в научной литературе, цитированной в начале этой главы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abella J. D., Kurnit N. A., Hartmann S. R. 1966. Photon echoes. — *Phys. Rev.* 141, 391—406.
2. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. 1974a. The inverse scattering transform—Fourier analysis for nonlinear problems. — *Stud. Appl. Math.* 53, 249—315.
3. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. 1974b. Coherent pulse propagation, a dispersive, irreversible phenomenon. — *J. Math. Phys.* 15, 1852—1858.
4. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
5. Агранович З. С., Марченко В. А. Обратная задача теории рассеяния. — Изд-во Харьк. ун-та, 1964.
6. Allen L., Eberly J. H. 1975. Optical resonance and two-level atoms. — Wiley, New York.
7. Ames W. F. 1965. Nonlinear partial differential equations in engineering. — Academic, New York.
8. Amsler M. H. 1955. Des surfaces a courbure négative constante dans l'espace à trois dimensions et de leurs singularités. — *Math. Ann.* 130, 234—256.
9. Bäcklund A. V. 1882. Zur Theorie der Flächentransformationen. — *Math. Ann.* 19, 387—422.
10. Balanis G. N. 1972. The plasma inverse problem. — *J. Math. Phys.* 13, 1001—1005.
11. Bargmann V. 1949. On the connection between phase shifts and scattering potential. — *Rev. Mod. Phys.* 21, 488—493.
12. Batchelor G. K. 1967. An introduction to fluid dynamics. — Cambridge University Press, New York.
13. Березин Ю. А., Карпман В. И. — *ЖЭТФ*, 1964, 46, № 5, с. 1880.
14. Березин Ю. А., Карпман В. И. — *ЖЭТФ*, 1966, 51, № 5, с. 1557.
15. Bergmann P. G. 1946. The wave equation in a medium with a variable index of refraction. — *J. Acoust. Soc. Am.* 17, 329—333.
16. Bloch F. 1946. Nuclear induction. — *Phys. Rev.* 70, 460—474.
17. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
18. Bullough R. K., Caudrey P. J. 1978. The double-sine-Gordon equation: wobbling solitons? — *Rocky Mt. J. Math.* 8, 53—70.
19. Cajori F. 1904. An introduction to the theory of equations. — Macmillan, New York. Reprinted 1969, Dover, New York.
20. Calogero F., Degasperis A. 1968. Values of the potential and its derivatives at the origin in terms of the s-wave phase shift and bound state parameters. — *J. Math. Phys.* 9, 90—116.
21. Calogero F., Degasperis A. 1977. Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform II. — *Nuovo Cimento* 39B, 1—54.
22. Churchill R. V. 1948. Introduction to complex variables and applications. — McGraw-Hill, New York.
23. Clairin J. 1903. Sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre. — *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse 2e Sér.* 5, 437—458.
24. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
25. Cole J. D. 1950. On a quasilinear parabolic equation occuring in aerodynamics. — *Q. Appl. Math.* 9, 225—236.

26. Condon E. V., Shortley G. H. 1957. The theory of atomic spectra. — Cambridge University Press, New York.
27. Crum M. M. 1955. Associated Sturm — Liouville equations. — Q. J. Math. 6, 121—127.
28. Darboux G. 1882. Sur une proposition relative aux équations linéaires. — Comptes Rendus 94, 1456—1459.
29. Darboux G. 1915. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, Vol. 2, 2-nd ed. — Gauthier-Villars, Paris.
30. Davey A. 1972. The propagation of a weak nonlinear wave. — J. Fluid Mech. 53, 769—781.
31. Davis H. T. 1960. Introduction to nonlinear differential and integral equations. — United States Atomic Energy Commission. U. S. Government Printing Office, Washington, D. C. Reprinted Dover, New York.
32. Dodd R. K., Bullough R. K., Duckworth S. 1975. Multisoliton solutions of nonlinear dispersive wave equations not soluble by the inverse method. — J. Phys. A, 8, L64—L68.
33. Eckart C. 1930. The penetration of a potential barrier by electrons. — Phys. Rev. 35, 1303—1309.
34. Eisenhart L. P. 1909. A treatise on the differential geometry of curves and surfaces. — Ginn, Boston, Reprinted Dover, New York.
35. Фаддеев Л. Д. — ДАН 1958, 121, № 1, с. 63.
36. Фаддеев Л. Д. — УМН, 1959, 64, № 4, с. 57.
37. Фаддеев Л. Д. — Труды Математ. ин-та им. Стеклова, 1964, 73, с. 314.
38. Flaschka H., McLaughlin D. W. 1976. Some comments on Bäcklund transformations and inverse scattering problems. In «Bäcklund transformations». Vol. 515 in Lecture Notes in Mathematics, A. Dold and B. Eckmann, eds. Springer-Verlag, Berlin.
39. Forsyth A. R. 1906. Theory of differential equations, Vol. 6. — Cambridge University Press, New York. Reprinted 1959, Dover, New York.
40. Frank F. C., van der Merwe J. H. 1949. One dimensional dislocations. I. Static theory. — Proc. R. Soc. Lond. A 198, 205—216.
41. Frank F. C., van der Merwe J. H. 1950. One dimensional dislocations. IV. Dynamics. — Proc. R. Soc. Lond. A 201, 261—268.
42. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. 1974. Korteweg — de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solution. — Commun. Pure Appl. Math. 27, 97—133.
43. Gibbon J. D., Caudrey P. J., Bullough R. K., Eilbeck J. C. 1973. An N -soliton solution of a nonlinear optics equation derived by a general inverse method. Lett. Nuovo Cimento 8, 775—779.
44. Gibbs H. M., Slusher R. E. 1972. Sharp line self-induced transparency. — Phys. Rev. A 6, 2326—2334.
45. Goldstein H. 1950. Classical mechanics. — Addison-Wesley, Reading, Mass.
46. Goursat E. 1925. Le problème de Bäcklund. — Mem. Sci. Math. Fasc. 6, Gauthier-Villars, Paris.
47. Grieneisen H. P., Goldhar J., Kurnit N. A., Javan A., Schlossberg H. R. 1972. Observation of the transparency of a resonant medium to zero-degree optical pulses. — Appl. Phys. Lett. 21, 559—562.
48. Hahn E. 1950. Spin echoes. — Phys. Rev. 80, 580—594.
49. Hammack J. L., Segur H. 1974. The Korteweg — de Vries equation and water waves. Part 2. Comparison with experiments. — J. Fluid Mech. 65, 289—314.
50. Hasimoto H., Ono H. 1972. Nonlinear modulation of gravity waves. — J. Phys. Soc. Japan 33, 805—811.
51. Hasimoto H. 1972. A soliton on a vortex filament. — J. Fluid Mech. 51, 477—485.
52. Hildebrand F. B., 1976. Advanced calculus for applications, 2nd ed. — Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

53. Hirota R. 1973. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation. — *J. Math. Phys.* 14, 805—809.
54. Hopf E. 1950. The partial differential equation $u_t + uu_x \neq \mu u_{xx}$. — *Commun. Pure Appl. Math.* 3, 201—230.
55. Hopf F. A., Scully M. O. 1969. Theory of an inhomogeneously broadened laser amplifier. — *Phys. Rev.* 179, 399—416.
56. Hopf F. A., Lamb G. L., Jr., Rhodes C. K., Scully M. O. 1971. Some results on coherent radioactive phenomena with 0π pulses. — *Phys. Rev. A* 3, 758—766.
57. Iscsevgi A., Lamb W. E., Jr., 1969. Propagation of light pulses in a laser amplifier. — *Phys. Rev.* 185, 517—545.
58. Ikezi H. 1973. Experiments on ion-acoustic solitary waves. *Phys. Fluids* 16, 1668—1675.
59. Ince E. L. 1926. Ordinary differential equations. — Longmans, New York. Reprinted 1956, Dover, New York.
60. Инденбом В. Л. — Кристаллография, 1958, 3, № 2, с. 197.
61. Infeld L., Hull T. E. 1951. Factorization method. — *Rev. Mod. Phys.* 23, 21—68.
62. Jackson J. D. 1962. Classical electrodynamics. — Wiley, New York.
63. Jeffrey A., Kakutani T. 1972. Weak nonlinear dispersive waves: a discussion centered around the Korteweg — de Vries equation. — *SIAM Rev.* 14, 582—643.
64. Jeffreys H., Jeffreys B. S. 1956. Methods of mathematical physics. 3rd ed. — Cambridge University Press, New York.
65. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1961.
66. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. — М.: Наука, 1973.
67. Karpman V. I. 1979. Soliton evolution in the presence of perturbation. — *Phys. Scr.* 20, 462—478.
68. Карпман В. И., Соколов В. П. — ЖЭТФ, 1968, 54, № 5, с. 1568.
69. Карпман В. И., Маслов В. Е. — ЖЭТФ, 1978, 73, № 2, с. 537.
70. Kaup D. J. 1977. Coherent pulse propagation: a comparison of the complete solution with the McCall — Hahn theory and others. — *Phys. Rev. A* 16, 704—719.
71. Kaup D. J., Newell A. C. 1978. Solitons as particles, oscillators, and in slowly varying media: a singular perturbation theory. — *Proc. R. Soc. Lond. A* 361, 413—446.
72. Kay I., Moses H. E. 1956. Reflectionless transmission through dielectrics and scattering potentials. — *J. Appl. Phys.* 27, 1503—1508.
73. Kay I. 1960. The inverse scattering problem when the reflection coefficient is a rational function. — *Commun. Pure Appl. Math.* 13, 371—393.
74. Korteweg D. J., de Vries G. 1895. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves. — *Phil. Mag.* (5) 39, 422—443.
75. Lake B. M., Yuen H. C., Rungaldier H., Ferguson W. E. 1977. Nonlinear deep water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous train. — *J. Fluid Mech.* 83, 49—74.
76. Lakshmanan M. 1979. Rigid body motions, space curves, prolongation structures, connection forms, fiber bundles and solitons. — *J. Math. Phys.* 20, 1667—1672.
77. Лакс П. — Математика, 1969, 13, № 5, 128.
78. Leibovich S., Seebass A. R., eds. 1974. Nonlinear waves. Cornell University Press, Ithaca, N. Y.
79. Liouville J. 1853. Sur l'équation aux différences partielles: $\partial^2 \log \lambda / \partial u \partial v \pm \lambda / 2a^2 = 0$. — *J. Math.* 18, 71—72.
80. Ляв А. Математическая теория упругости. — М. — Л.: Гл. ред. общетехн. лит-ры, 1935.
81. Lovitt W. V. 1924. Linear Integral Equations. McGraw-Hill, New York. Reprinted 1950, Dover, New York.

82. McCall S. L., Hahn E. L. 1969. Self-induced transparency. — *Phys. Rev.* 183, 457—485.
83. McLaughlin D. W., Scott A. C. 1978. Perturbation analysis of fluxon-dynamics. — *Phys. Rev. A* 18, 1652—1680.
84. Magnus W., Oberhettinger F. 1954. Formulas and theorems for the functions of mathematical physics. — Chelsea, New York.
85. Miura R. M. 1968. Korteweg — deVries equation and generalization. I. A remarkable explicit nonlinear transformations. — *J. Math. Phys.* 9, 1202—1204.
86. Miura R. M., ed. 1976. Bäcklund transformations. Vol. 515 in *Lecture Notes in Mathematics*, A. Dold and B. Eckmann, eds. — Springer-Verlag, Berlin.
87. Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D. 1968. Korteweg — deVries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. — *J. Math. Phys.* 9, 1204—1209.
88. Morse P. M. 1948. *Vibration and sound*, 2nd ed. — McGraw-Hill, New York.
89. Морс Ф., Фешбах Г. *Методы математической физики*. — М.: ИЛ, 1958.
90. Newton R. 1960. Analytic properties of radial wave functions. — *J. Math. Phys.* 1, 319—347.
91. Nissenzweig H. M. 1959. The poles of the *s*-matrix of a rectangular potential well or barrier. — *Nucl. Phys.* 11, 499—521.
92. Patel C. K. N., Slusher R. E. 1968. Photon echoes in gases. — *Phys. Rev. Lett.* 20, 1087—1089.
93. Randall J. D., Leibovich S. 1973. The critical state: a trapped wave model of vortex breakdown. — *J. Fluid Mech.* 58, 495—515.
94. Rhodes C. K., Szöke A., Javan A. 1968. The influence of level degeneracy on the self-induced transparency effect. — *Phys. Rev. Lett.* 21, 1151—1155.
95. Reiter G. 1980. Lie groups, spin equations and the geometrical interpretation of solitons. — *J. Math. Phys.*
96. Schiff L. I. 1949. *Quantum mechanics*. — McGraw-Hill, New York.
97. Schnack D. D., Lamb G. L., Jr. 1973. Higher conservation laws and coherent pulse propagation. In «Coherence and quantum optics», L. Mandel and E. Wolf, eds., pp. 23—33. — Plenum, New York.
98. Seeger A., Donth H., Kochenforfer A. 1953. Theorie der Versetzungen in ein-dimensionalen Atomreihen. — *Z. Phys.* 134, 173—193.
99. Seeger A. 1955. Theorie der Gitterfehlstellen. In «Handbuch der Physik», Vol. 7, pp. 383—665, p. 566. — Springer-Verlag, Berlin.
100. Seeger A., Schiller P. 1966. Kinks and dislocation lines and their effects on the internal friction in crystals. In «Physical Acoustics», Vol. 3, P. A. W. Mason, Ed., pp. 361—495. — Academic, New York.
101. Shimizu K., Ichikawa Y. H. 1972. Automodulation of ion oscillation modes in plasma. — *J. Phys. Soc. Japan* 33, 789—792.
102. Slusher R. E., Gibbs H. M. 1972. Self-induced transparency in atomic rubidium. — *Phys. Rev. A* 5, 1634—1659.
103. Спитцер Л. *Физика полностью ионизованного газа*. — М.: Мир, 1965.
104. Steuerwald R. 1936. Über enneper'sche Flächen und Bäcklund'sche Transformation. — *Abh. Bayer. Akad. Wiss. (Muench.)* 40, 1—105.
105. Struik D. J. 1961. *Lectures on classical differential geometry*, 2nd ed. — Addison-Wesley, Reading, Mass.
106. Su C. H., Gardner C. S. 1969. Korteweg-deVries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg — deVries equation and Burgers' equation. — *J. Math. Phys.* 10, 536—539.
107. Tanaka S. 1972. Modified Korteweg — deVries equation and scattering theory. — *Proc. Japan Acad.* 48, 466—489.
108. Taniuti T., Wei C.-C. 1968. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation I. — *J. Phys. Soc. Japan* 24, 941—946.
109. Tappert F. D., Zabusky N. J. 1971. Gradient-induced fission of solitons. — *Phys. Rev. Lett.* 27, 1774—1776.

110. Tidman D. A., Krall N. A. 1971. Shock waves in collisionless plasma. — Wiley-Interscience, New York.
111. Verde M. 1955. Asymptotic expansion of phase shifts at high energies. — *Nuovo Cimento* 2, 1001—1014.
112. Wadati M. 1973. The modified Korteweg — deVries equation. — *J. Phys. Soc. Japan* 34, 1289—1296.
113. Wadati M. 1974. Bäcklund transformation for solutions of the modified Korteweg — deVries equation. — *J. Phys. Soc. Japan* 36, 1498.
114. Wadati M., Toda M. 1972. The exact N -soliton solution of Korteweg — deVries equation. — *J. Phys. Soc. Japan* 32, 1403—1411.
115. Wadati M., Sanuki H., Konno K. 1975. Relationships among inverse method, Bäcklund transformation and an infinite number of conservation laws. — *Prog. Theor. Phys.* 53, 419—436.
116. Wahlquist H., Estabrook F. B. 1973. Bäcklund transformation for solutions of the Korteweg — deVries equation. — *Phys. Rev. Lett.* 31, 1386—1390.
117. Унзем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
118. Zabusky N. J. 1968. Solitons and bound states of the time-independent Schrödinger equation. — *Phys. Rev.* 168, 124—128.
119. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — *ЖЭТФ*, 1971, 61, № 1, с. 118.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е. — ПМТФ, 1964, № 3, с. 96—99.
2. Захаров В. Е. — ПМТФ, 1968, № 2, с. 86—91.
3. Захаров В. Е. — ЖЭТФ, 1971, т. 60, с. 993—998.
4. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. — Функци. анализ, 1971, вып. 5, с. 18—27.
5. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 219—227.
6. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — Функци. анализ, 1974, вып. 3, с. 43—49.
7. Захаров В. Е., Манаков С. В. — ТМФ, 1974, т. 19, с. 332—339.
8. Захаров В. Е., Манаков С. В. — ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 1654—1663.
9. Захаров В. Е., Манаков С. В. — ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 203—214.
10. Захаров В. Е., Михайлов А. В. — ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 1953—1962.
11. Будаков А. С., Тахтаджян Л. А. — ДАН СССР, 1977, т. 235, с. 805—810.
12. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. — ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 590—599.
13. Манаков С. В. — ЖЭТФ, 1974, т. 67, вып. 2, с. 543—550.
14. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. — ТМФ, 1974, т. 21, с. 160—172.
15. Тахтаджян Л. А. — ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 543—550.
16. Манаков С. В. — ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 1392—1398.
17. Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. — ДАН СССР, 1976, вып. 1, с. 15—19.
18. Новиков С. П. — Функци. анализ, 1974, т. 8, вып. 3, с. 54—63.
19. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. — М.: ВИНТИ, 1964.
20. Марченко В. А., Островский И. В. — Матем. сборник, 1974, т. 95, вып. 3, с. 331.
21. Дубровин Б. А., Новиков С. П. — ЖЭТФ, 1974, т. 67, вып. 12, с. 2131—2140.
22. Дубровин Б. А., Матвеев Б. В., Новиков С. П. — УМН, 1976, т. 31, вып. 1, с. 55—74.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава 1. Введение	10
1.1. Уравнение Штурма — Лиувилля	11
1.2. Уравнение Кортевега — де Фриза	13
1.3. Многосолитонные решения как потенциалы Баргмана	17
1.4. Физическая система, приводящая к уравнению Кортевега — де Фриза	22
1.5. Распространение на случай других нелинейных уравнений	29
1.6. План дальнейшего изложения	30
Глава 2. Вопросы одномерной теории рассеяния	32
2.1. Колебания струны	32
2.2. Рассеяние осциллятором	36
2.3. Упруго закрепленная струна	39
2.4. Уравнение Шрёдингера	43
2.5. Рассеяние потенциалом вида sech^2	45
2.6. Соответствующие уравнения Штурма — Лиувилля	48
2.7. Двумерные волны в неоднородной среде	51
2.8. Общий подход к проблеме рассеяния	56
2.9. «Обрезанные» потенциалы	70
2.10. Рассеяние импульсов — уравнения Марченко	73
2.11. Задача рассеяния Захарова — Шабата	78
2.12. Связь между уравнением Шрёдингера и уравнениями Захарова — Шабата: уравнения Риккати	91
Глава 3. Одномерная обратная задача рассеяния	95
3.1. Соотношение между потенциалом и функциями $A_R(x, y)$ и $A_L(x, y)$	95
3.2. Наличие связанных состояний	98
3.3. Безотражательные потенциалы	101
3.4. Коэффициент отражения — рациональная функция k	103
3.5. Потенциалы Баргмана	106
3.6. Метод обратной задачи рассеяния Захарова — Шабата для действительных потенциалов	109
3.7. Безотражательные потенциалы для системы Захарова — Шабата	112
3.8. Коэффициент отражения для системы Захарова — Шабата в виде рациональной функции k	115
3.9. Система Захарова — Шабата с комплексным потенциалом	116

Глава 4. Уравнение Кортевега — де Фриза	122
4.1. Стационарное решение	122
4.2. Результаты численных решений	124
4.3. Обратная задача рассеяния и уравнение Кортевега — де Фриза	127
4.4. Многосолиitonные решения	130
4.5. Сохраняющиеся величины	134
4.6. Начальный профиль импульса в виде $\delta'(x)$: автомодельное решение	138
4.7. Другой подход к линейным уравнениям для уравнения Кортевега — де Фриза	140
Глава 5. Некоторые эволюционные уравнения, связанные с системой Захарова — Шабата	142
5.1. Модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза	143
5.2. Уравнение sine-Gordon	152
5.3. Кубическое уравнение Шрёдингера	164
5.4. Общий класс разрешимых нелинейных эволюционных уравнений	169
Глава 6. Приложения I	178
6.1. Волны на мелкой воде и уравнение Кортевега — де Фриза	178
6.2. Волны на мелкой воде и кубическое уравнение Шрёдингера	183
6.3. Ионно-звуковые волны в плазме и уравнение Кортевега — де Фриза	186
6.4. Классическая модель одномерной теории дислокаций — уравнение sine-Gordon	190
6.5. Выбор параметров разложения	194
Глава 7. Приложения II	198
7.1. Самондущиванный вихрь	199
7.2. Движение нити	202
7.3. Форма односолитонной нити	205
7.4. Другие солитонные уравнения	208
7.5. Описание электромагнитного поля	213
7.6. Двухуровневый атом	214
7.7. Уравнения модели	216
7.8. Неподвижные атомы — предел sine-Gordon	218
7.9. Движущиеся атомы и теорема площадей	221
7.10. Решение методом обратной задачи	224
7.11. Распространение в усилителе	229
7.12. Метод обратной задачи	234
7.13. Вырождение уровней	245
Глава 8. Преобразования Бэклунда	249
8.1. Преобразование Бэклунда для уравнения Кортевега — де Фриза	249
8.2. Преобразования Бэклунда для некоторых других эволюционных уравнений	256
8.3. Более общие преобразования Бэклунда	261

Глава 9. Теория возмущений	267
Уравнение Кортевега — де Фриза	267
9.1. Основные уравнения	267
9.2. Возмущение односолитонного решения	270
Кубическое уравнение Шрёдингера	279
9.3. Основные уравнения	279
9.4. Затухание единичного солитона	282
Литература	286
Дополнительная литература	291