

- [17] G.L.Lamb, Jr. *Elements of Soliton Theory*. John Wiley, New York, 1980. (Дж. Лэм. Введение в теорию солитонов. Мир, М. 1983. (также Меркурий - Пресс, М. 2000.))
- [18] L.D.Landau and E.M.Lifshitz. *Quantum Mechanics*. Pergamon, Oxford, 1965. (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1974 (также М.: Наука, 1989.))
- [19] S.V.Manakov. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves. *Sov. Phys. IETP* 38 (1974) 248-253.
- [20] R.Meinel, G.Neugebauer, and H.Steudel. *Solitonen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1991.
- [21] R.M.Miura, C.S.Gardner, and M.D.Kruskal. Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. *J. Math. Phys.* 9 (1968) 1204-1209.
- [22] A.C.Newell. *Solitons in Mathematics and Physics*. SIAM, Philadelphia, 1985. (А.Ньюэлл, Солитоны в математике и физике. Мир, 1989.)
- [23] S.Novikov, S.V.Manakov, L.P.Pitaevskii, and V.E.Zakharov. *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. Consultants Bureau, New York, 1984. (В.Е.Захаров, С.В.Манакон, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский. Теория солитонов и метод обратной задачи. Москва, Наука, 1980.)
- [24] M.Olsen, H.Smith, and A.C.Scott. Solitons in a wave tank. *Am. J. Phys.* 52 (1984) 826-830.
- [25] E.A.Overman II, D.W.McLaughlin, and A.R.Bishop. Coherence and chaos in the driven damped sine-Gordon equation: Measurement of the soliton spectrum. *Physica D* 19 (1986) 1-41.
- [26] J.Scott Russell. Report on waves. *Br. Ass. Adv. Sci. Rep.* 14 (1844) 311-392.
- [27] L.I.Schiff. *Quantum Mechanics*. 3rd edition. McGraw-Hill, New York, 1968. (Шифф Л. Квантовая механика. М.: ИЛ. 1967.)
- [28] A.C.Scott, F.Y.F.Chu, and S.A.Reible. Magnetic flux propagation on a Josephson transmission line. *J. Appl. Phys.* 47 (1976) 3272-3286.
- [29] L.A.Takhtajan and L.D.Faddeev. Essentially nonlinear one-dimensional model of classical field theory. *Theor. Math. Phys.* 21 (1974) 1046-1057.
- [30] D.D.Vvedensky. *Partial Differential Equations*. Addison-Wesley, Wokingham, 1993.
- [31] В.Е. Захаров, А.Б. Шабат. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерная автомодуляция волн в нелинейных средах. *ЖЭТФ*, 1971, т.74., с. 118-134.

## Глава 7

## ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

В предыдущих главах этой книги мы получили несколько точных решений для нелинейных динамических уравнений: были получены формулы для одиночного солитона и для  $N$ -солитонов, а также другие решения бегущей волны на решетках и в системах с нелинейной диффузией. То, что такие решения существуют — важный факт, который связан с парадигмой, охватившей область прикладных исследований с середины 1970-х годов.

Несмотря на то, что некоторые из этих точных результатов могут быть непосредственно применены в определенных приложениях, часто оказывается, что интересующая экспериментаторов динамическая система не может быть точно описана скажем СГ-уравнением или системой ФитцХью-Нагумо. Она может отличаться от желаемой модели членами, представляющими дополнительные механизмы накопления и диссипации энергии или других приблизительно сохраняющихся величин. Что следует предпринимать в подобных случаях? Следует ли нам опустить руки и заявить, что интересующая нас система может быть исследована численными методами? Вовсе нет — следует использовать результаты, представленные в этой главе.

Термин, выведенный в заголовок этой главы, может сбивать с толку, поскольку теория возмущений не является единым, унифицированным подходом для решения сложных задач. Она скорее представляет собой набор специальных средств целенаправленного анализа. Для того, чтобы успешно применять эту теорию, необходимо овладеть почти всеми ее методами и интуитивно понимать стратегию проводимого анализа.

<sup>1)</sup> Автор благодарен М.П.Серенсену за написание первоначальной версии разделов 7.2.2, 7.3.3 и 7.4.2 этой главы.

Целью этой главы является продемонстрировать основы теории возмущений на некоторых примерах, с которыми знаком автор.

В общем случае стратегия анализа заключается в следующем. Предположим, мы имеем уравнение (линейное или нелинейное), для которого может быть найдено точное решение:

$$E(\phi) = 0,$$

где  $\phi$  — известное точное решение. Предположим, что дополнительные эффекты могут моделироваться путем введения малого члена в правую часть исследуемого уравнения:

$$E(\tilde{\phi}) = \varepsilon R(\tilde{\phi}).$$

В этом случае член  $\varepsilon R(\tilde{\phi})$  выступает в роли возмущения,  $\tilde{\phi}$  — возмущенное решение и  $\varepsilon$  — малый параметр, с помощью которого мы можем прекратить и возобновить действие возмущений (при проведении аналитического или численного анализа).

Во многих случаях рассматриваемую задачу можно исследовать в предположении, что

$$\tilde{\phi} \rightarrow \phi \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Если параметр  $\varepsilon$  достаточно мал, мы можем оценить разность  $\tilde{\phi} - \phi$  между искомым решением  $\tilde{\phi}$  и известным решением  $\phi$  путем анализа линейного уравнения, которое тангенциально исходному уравнению в  $\phi$ . Существуют несколько подходов для реализации этой стратегии.

### 7.1. Возмущенные матрицы

Начнем с простого примера:  $(2 \times 2)$ -матрицы

$$M_0 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Нормализованные собственные вектора  $\phi_0$  и соответствующие собственные значения  $\lambda_0$  этой матрицы удовлетворяют уравнению

$$M_0 \phi_0 = \lambda_0 \phi_0, \quad (7.1)$$

и равны соответственно

$$\lambda_0^{(1)} = 1 \quad \text{и} \quad \phi_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

и

$$\lambda_0^{(2)} = 2 \quad \text{и} \quad \phi_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим возмущение матрицы  $M_0$

$$M = \begin{bmatrix} 4 & (2 + \varepsilon) \\ -3 & -1 \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Точные собственные значения этой матрицы имеют вид

$$\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)} = \frac{1}{2} [3 \pm \sqrt{1 - 12\varepsilon}],$$

и, следовательно,

$$\lambda_0^{(1)} = 1 + 3\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{и} \quad \lambda_0^{(2)} = 2 - 3\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (7.3)$$

Для получения аппроксимаций собственных значений (7.3) не обязательно применять стандартную процедуру. Заметим, что равенство (7.2) может быть представлено в следующей форме:

$$M = M_0 + \varepsilon R, \quad (7.4)$$

где

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора и собственные значения, удовлетворяющие уравнению

$$M\phi = \lambda\phi \quad (7.5)$$

могут быть представлены в виде степенных рядов по  $\varepsilon$ :

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \dots, \quad (7.6)$$

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \dots. \quad (7.7)$$

Предполагается, что при достаточно малых  $\varepsilon$  эти ряды сходятся.

Подставляя (7.4), (7.6) и (7.7) в (7.5) мы получаем уравнение, членами которого являются степени параметра возмущения  $\varepsilon$ . Поскольку это уравнение должно быть выполнено при всех  $\varepsilon$ , мы можем приравнять соответствующие члены при равных степенях  $\varepsilon$ . Тогда:

- Приравнивая постоянные члены, получаем

$$[M_0 - \lambda_0]\phi_0 = 0. \quad (7.8)$$

- Приравнивая члены при  $\varepsilon$ , получаем

$$[M_0 - \lambda_0]\phi_1 = \lambda_1\phi_0 - R\phi_0. \quad (7.9)$$

- Приравнивая члены при  $\varepsilon^2$ , получаем

$$[M_0 - \lambda_0]\phi_2 = \lambda_2\phi_0 + \lambda_1\phi_1 - R\phi_1. \quad (7.10)$$

⋮

- Приравнивая члены при  $\varepsilon^n$ , получаем

$$[M_0 - \lambda_0]\phi_n = \lambda_n\phi_0 + \dots + \lambda_1\phi_{n-1} - R\phi_{n-1}. \quad (7.11)$$

Очевидно равенство (7.8) идентично равенству (7.1) и поэтому все члены в правой части равенства (7.9) известны за исключением  $\lambda_1$ . По теореме Фредгольма необходимым и достаточным условием существования решения уравнения (7.9) является то, что правая часть

этого уравнения ортогональна всем нулевым векторам (аннуляторам) сопряженной матрицы

$$[M_0 - \lambda_0]^i = [M_0 - \lambda_0]^T.$$

Для выполнения этого условия ортогональности  $\lambda_1$  должно иметь следующее значение:

$$\lambda_1 = \frac{(\psi, R\phi_0)}{(\psi, \phi_0)}, \quad (7.12)$$

где

$$[M_0 - \lambda_0]^T \psi = 0$$

и  $(\cdot, \cdot)$  обозначает скалярное произведение.

При  $\lambda_0 = 1$  имеется только один аннулятор матрицы  $[M_0 - \lambda_0]^T$ :

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и, следовательно, из (7.12) мы получаем  $\lambda_1 = +3$ . Тогда равенство

$$\lambda_0^{(1)} = 1 + 3\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

согласуется с первым равенством (7.3).

При  $\lambda_0 = 2$

$$\psi = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

и  $\lambda_1 = -3$ . Тогда равенство

$$\lambda_0^{(2)} = 2 - 3\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

согласуется со вторым равенством (7.3).

В этом примере мы показали, что теорема Фредгольма может быть использована для вычисления изменения собственных значений возмущенной матрицы с точностью до первого порядка по параметру возмущения без использования стандартной процедуры с вычислением определителя. Использование теоремы Фредгольма в этом примере иллюстрирует другие вычислительные процедуры в теории возмущений.

## 7.2. Гармонический осциллятор с демпфированием

### 7.2.1. Анализ с использованием энергии

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (7.13)$$

с начальными условиями  $x(0) = 1$  и  $\dot{x}(0) = 0$ . С использованием представленных в главе 2 методов, можно найти точное решение

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \left[ \cos \left( t \sqrt{1 - \varepsilon^2/4} \right) + \frac{\varepsilon/2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}} \sin \left( t \sqrt{1 - \varepsilon^2/4} \right) \right]. \quad (7.14)$$

Таким образом, для решения этого уравнения не обязательно применять теорию возмущения, но мы сделаем это в качестве практического примера.

Амплитуда точного синусоидального решения (7.14) очевидно равна

$$A(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}} = e^{-\varepsilon t/2} [1 + O(\varepsilon^2)]. \quad (7.15)$$

Далее мы покажем, как этот результат может быть получен без использования точного решения.

При  $\varepsilon = 0$  равенство (7.14) сводится к  $x(t) = \cos t$  и энергия

$$E = (\dot{x}^2 + x^2)/2 = A(0)^2/2 = \frac{1}{2} \quad (7.16)$$

является сохраняющейся переменной.

При  $0 < \varepsilon \ll 1$  из уравнения (7.13) следует, что мгновенное значение производной  $E$  по времени удовлетворяет равенству

$$\frac{dE}{dt} \doteq -\varepsilon \dot{x}^2 = A \frac{dA}{dt},$$

в котором были опущены изменения формы колебания порядка  $\varepsilon$ . Поскольку  $\dot{x} = A(t) \sin t$ , при усреднении  $-\varepsilon \dot{x}^2$  по циклу колебания мы получаем, что амплитуда колебания  $A(t)$  определяется ОДУ первого порядка

$$\frac{dA}{dt} \doteq -\frac{\varepsilon}{2} A \quad (7.17)$$

с начальным условием  $A(0) = 1$ . При интегрировании этого уравнения с данным начальным условием мы получаем

$$A(t) = e^{-\varepsilon t/2} [1 + O(\varepsilon^2)], \quad (7.18)$$

что согласуется с равенством (7.15).

Таким образом, выражение для энергии может быть использовано для определения зависимости от времени амплитуды слабо демпфированного осциллятора без использования решения уравнения, описывающего эту систему. В представленном подходе никак не использовался тот факт, что уравнение (7.13) является линейным и, следовательно, этот метод может быть обобщен и на случай исследования ангармонических осцилляторов и солитонов. Эта идея является ключевой в методе усреднения, представленном Ван дер Полем в 1934 году [26] и использованном при анализе квазигармонических решеток в разделе 5.4.1.

## 7.2.2. Временное мультимасштабирование

Прежде чем перейти к рассмотрению теории возмущений для уравнений солитонов, рассмотрим систематическую процедуру нахождения приближенных решений демпфированного гармонического осциллятора [13, 19-21]. Решение  $x(t; \varepsilon)$  уравнения (7.13) зависит не только от времени, но также и от параметра  $\varepsilon$ . Раскладывая это решение в ряд по  $\varepsilon$ , мы получаем

$$x(t; \varepsilon) = x(t; 0) + \frac{\partial x(t; 0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \frac{\partial^2 x(t; 0)}{\partial \varepsilon^2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + O(\varepsilon^3), \quad (7.19)$$

где

$$x_n(t) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n x(t; 0)}{\partial \varepsilon^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

При подстановке (7.19) в (7.13) мы получаем полином по  $\varepsilon$ , который равен нулю. Следовательно, каждый коэффициент при  $\varepsilon^n$  должен быть равен нулю.

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  член  $\varepsilon x_1(t)$  представляет собой малую поправку величины  $x_0(t)$ , поэтому с точностью до членов порядка  $O(\varepsilon)$  мы имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 &= 0 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 &= \frac{dx_0}{dt} \end{aligned}$$

Решив первое уравнение относительно  $x_0$ , а затем второе относительно  $x_1$  с начальными условиями  $x(0) = 1$  и  $\dot{x}(0) = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \cos t, \\ x_1(t) &= \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t. \end{aligned}$$

Заметим, что в выражении для  $x_1(t)$  присутствует член  $t \cos t$ , который неограниченно возрастает при  $t$ , стремящемся к бесконечности. Подобный член называется «вековым», поскольку его наличие приводит со временем к нарушению предположения о том, что  $x_1$  является малой поправкой  $x_0$ , т. е. рассматриваемая аппроксимация верна лишь при временах меньше  $1/\varepsilon$ .<sup>1)</sup>

Существуют две причины, по которым член поправки увеличивает с течением времени: (i) амплитуда возмущенного решения медленно

<sup>1)</sup> В английском языке прилагательное «вековой» (secular) является скорее временной характеристикой, нежели духовной (spiritual). В небесной механике этот термин характеризует неустойчивые орбиты планет. (Можно ли представить себе существование подобных орбит в космосе?) Более прозаическое употребление этого термина имеет место в прикладной математике и соответствует характеристике возрастающих с течением времени членов.

уменьшается вследствие наличия члена  $e^{-\varepsilon t/2}$  в ее выражении, и (ii) частота колебаний возмущенного решения несколько отличается от частоты  $x_0$ . Поскольку амплитуда и частота решения нулевого порядка  $x_0(t)$  не изменяются, член поправки в  $x_1$  пытается скомпенсировать увеличивающееся расхождение между  $x_0(t)$  и точным решением. Для моментов времени, больших  $O(1/\varepsilon)$ , выражение для приближенного решения становится неверным.

Мы можем решить эту проблему с учетом того, что амплитуда и частота  $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$  медленно уменьшаются с течением времени, т. к. в этом случае можно выписать выражение для приближенного решения

$$x(t) = A(\varepsilon t) \cos[\omega(\varepsilon)t] + \varepsilon B(\varepsilon t) \sin[\omega(\varepsilon)t]. \quad (7.20)$$

Тогда подставляя это выражение в (7.13) и используя разложение  $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2$ , мы получаем

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[ \left( 1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2} \varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[ \left( 1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \right) t \right] + O(\varepsilon^3), \quad (7.21)$$

что соответствует

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_2 &= -\frac{1}{8} \\ A(\varepsilon t) &= e^{-\varepsilon t/2} \\ B(\varepsilon t) &= \frac{1}{2} e^{-\varepsilon t/2}. \end{aligned}$$

Полученный результат лучше первого варианта и представляет собой хорошую аппроксимацию точного решения даже при  $\varepsilon$  порядка 1.

Следует отметить, что представленный метод получения приближенного решения основан на знании точного решения, но в общем случае мы можем его не знать и поэтому необходимо выработать процедуру, которая не требовала бы априорной информации подобного рода. Заметим, что амплитуда зависит от медленной переменной  $\varepsilon t$ . Кроме того, аргументы функций косинуса и синуса зависят от  $\varepsilon^2 t$ . Это наводит на мысль об использовании переменных масштабирования времени

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t, \quad \text{и т.д.} \quad (7.22)$$

В терминах этих «растянутых переменных» решение демпфированного гармонического осциллятора может быть записано в форме

$$x(t) = x(T_0, T_1, T_2, \dots).$$

В этой формулировке могут быть получены в терминах  $T_0, T_1, T_2$  и т.д. выражения для производных и иерархия соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений для степеней  $\varepsilon$ . Последовательное решение этих уравнений приводит к получению последовательно более точной аппроксимации точного решения. Де-

тали этого «анализа временного мультимасштабирования» приведены в Приложении G, где показаны методологические основы получения равенства (7.21).

Поскольку анализ ограничивался членами порядка  $O(\varepsilon^2)$ , в нем использовались переменные растянутого времени того же порядка. Другим словами, для проведения анализа возмущений использовались только переменные  $T_0, T_1$  и  $T_2$ . Если при анализе используются разложения в ряд порядка  $O(\varepsilon^n)$ , то необходимо использовать переменные масштабирования  $T_i, i = 0, 1, \dots, n$ .

### 7.3. Энергетический анализ динамики солитона

В главе 3 были рассмотрены классические уравнения солитона и их общее свойство — на решениях этих систем энергия сохраняется. При исследовании систем реального мира это свойство часто нарушается вследствие эффектов диссипации энергии и наличия внешних воздействий. Таким образом, для анализа подобных систем в классические уравнения для солитона необходимо ввести дополнительные члены, описывающие эти возмущения. В этих случаях для получения достоверных с качественной и количественной точки зрения решений следует использовать комбинацию теории возмущений и численного анализа.

#### 7.3.1. Солитоны Кортевега-де Вриза

В этом разделе будет исследовано возмущенное КдВ-уравнение с использованием представленного в предыдущем разделе энергетического анализа. Это уравнение с введенным в правую часть членом возмущения имеет следующий вид:<sup>1)</sup>

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R, \quad (7.23)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр и  $\varepsilon R$  представляет собой член, который явно зависит от  $x, t, u$  и частных производных по  $u$ .

При  $\varepsilon = 0$  односолитонное решение КдВ-уравнения имеет вид

$$u(x, t) = 3v \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt) \right). \quad (7.24)$$

Введем функцию  $w$  равенством  $w_x \equiv u$ . Тогда КдВ-уравнение может быть получено из плотности лагранжиана (см. Приложение А)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} w_x w_t + \frac{1}{6} w_x^3 - \frac{1}{2} w_{xx}^2. \quad (7.25)$$

<sup>1)</sup> Здесь используется другая нормализация КдВ-уравнения, поскольку множитель «-6» при члене  $uu_x$  не играет существенной роли при анализе возмущений.

Соответствующая плотность гамильтониана определяется равенством

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6} w_x^3 + \frac{1}{2} w_{xx}^2 \quad (7.26)$$

и представляет собой плотность энергии системы.

Основная идея энергетического анализа динамик солитона заключается в том, чтобы рассмотреть вариации полной энергии системы при возмущениях, описывающих потери и приток энергии, и в предположении, что член  $\varepsilon R$  настолько мал, что можно пренебречь изменениями порядка  $\varepsilon$  в решении одиночного солитона (7.24). В этом случае воздействие возмущений будет выражаться в медленном изменении с течением времени скорости  $v$ . Если возмущения известны, при выполнении численных вычислений следует проверять выполнение указанного предположения. (Заметим, что этот анализ не позволяет исследовать возникновение и разрушение солитона. Мы также не будем учитывать волны малой амплитуды, которые могут возникать под воздействием возмущений.)

Для КдВ-уравнения полная энергия определяется равенством

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} dx, \quad (7.27)$$

и ее производная по времени

$$\frac{dH}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} (w_x w_{xt} + w_{xxx} w_t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-w_{xt} + \varepsilon R) w_t dx. \quad (7.28)$$

Это выражение получено при интегрировании по частям в предположении, что производные  $w$  стремятся к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Тогда

$$\frac{dH}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} R w_t dx. \quad (7.29)$$

Подставим (7.24) в (7.27) и вычислим интегралы, пренебрегая медленным изменением с течением времени скорости  $v$ . Тогда

$$H = -\frac{36}{5} v^{5/2}. \quad (7.30)$$

Дифференцируя (7.30) по времени с учетом  $w_t = -v w_x = -v u$  и приравнявая к (7.29), получаем результат

$$\frac{dv}{dt} = +\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{\infty} R u dx. \quad (7.31)$$

В качестве подтверждения достоверности этого выражения рассмотрим возмущение вида

$$\varepsilon R = -\varepsilon u, \quad (7.32)$$

соответствующее постепенному увеличению глубины в КдВ-модели движения волн на мелководье.

Из равенства (7.31) видно, что эволюция скорости солитона определяется ОДУ первого порядка

$$\frac{dv}{dt} \doteq -\frac{4}{3}\varepsilon v, \quad (7.33)$$

где знак  $\doteq$  указывает на то, что в оценке были опущены изменения формы солитона порядка  $\varepsilon$ .

Из (7.24) видно, что  $v$  пропорциональна амплитуде солитона. Тогда из (7.33) следует, что амплитуда эволюционирует с течением времени в соответствии с законом

$$A(t) \doteq A(0) e^{-4\varepsilon t/3}, \quad (7.34)$$

что согласуется с результатом, полученным в 1970-м году Оттом и Суданом [23], и подтверждается численными исследованиями Книккер-боккера и Ньюелла, выполненными десятилетием ранее [15].

Несмотря на то, что этот пример подтверждает возможность использования в рассматриваемой задаче энергетического анализа, возникают некоторые вопросы. При анализе мы использовали единственный факт — то, что энергия остается постоянной на решениях невозмущенной системы. Однако, КдВ-уравнение, будучи интегрируемым, имеет бесконечное число подобных постоянных движений. Получим ли мы аналогичный результат, если будем использовать любую из этих сохраняющихся величин?

В качестве примера рассмотрим одну из этих величин

$$Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx,$$

которая очевидно остается постоянной для всех  $u$ , являющихся решениями КдВ-уравнения. Можно показать, что с использованием предложенного выше подхода можно получить уравнение (7.33) и, следовательно, показать, что амплитуда солитона уменьшается в соответствии с законом (7.34).

Однако, если рассмотреть

$$Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx,$$

то мы получим

$$\frac{dv}{dt} \doteq -2\varepsilon v$$

и, следовательно,

$$A(t) \doteq A(0) e^{-2\varepsilon t}, \quad (7.35)$$

что противоречит равенству (7.34) и численным результатам [15]. В чем дело?

Парадокс «теряющейся массы» рассматривался несколькими исследователями и его разрешение связано с возникновением «шельфа» (уступа) (shelf) конечной длины и постоянной амплитуды турбулентного следа солитона [2,8,10,15,16,22]. Поскольку высота этого шельфа порядка  $\varepsilon$ , а его длина пропорциональна времени, он поглощает разность порядка  $\varepsilon t$  между оценками (7.34) и (7.35). В случаях использования  $H$  и  $Q_2$  мы получали корректные результаты вследствие того, что на них не оказывает влияние шельф порядка  $\varepsilon$ . С более общей точки зрения, возникновение шельфа может рассматриваться как излучение из солитона, индуцированное возмущением. Следствием рассмотрения этого примера должно являться то, что проведение энергетического анализа следует совмещать с проведением численного анализа, который позволяет выявить скрытые аспекты проблемы.

Из проведенного анализа возмущений следует, что поступление энергии в систему, обусловленное наличием диссипативного возмущения (7.32), не приводит к увеличению длительности существования солитона. В действительности, продолжительность существования одиночной волны малой амплитуды равна  $1/\varepsilon$ , в то время как продолжительность существования солитона меньше этой величины на 25% и равна  $3/4\varepsilon$ .

### 7.3.2. Солитоны уравнения синус-Гордона

Рассмотрим СГ-уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R, \quad (7.36)$$

где  $\varepsilon R$  — возмущение. При  $\varepsilon = 0$  решение одиночного кинка имеет следующий вид:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]. \quad (7.37)$$

Несмотря на то, что волновое решение невозмущенного уравнения содержит два параметра  $v$  и  $x_0$ , соответствующее выражение для энергии не зависит от  $x_0$  — положения кинка в момент  $t = 0$ . Поэтому, если возмущение  $R$  не зависит от  $x$ , мы можем использовать энергетический анализ, представленный в предыдущем разделе.

Невозмущенное СГ-уравнение может быть получено из плотности лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u),$$

Соответствующая плотность гамильтониана определяется равенством (см. Приложение А)

$$\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u). \quad (7.38)$$

Так же как и в случае КдВ-уравнения, интересно рассмотреть полную энергию  $H$ , определяемую равенством (7.27). В предположении о медленном изменении с течением времени скорости  $v$  и используя (7.27) и (7.36), можно получить выражение для производной по времени полной энергии:

$$\frac{dH}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} (u_{tt} - u_{xx} + \sin u) u_t dx = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} R u_t dx. \quad (7.39)$$

(Заметим, что для невозмущенного СГ-уравнения ( $\varepsilon = 0$ ) энергия сохраняется.) Подставляя решение одиночного кинка в (7.27) и пренебрегая медленным изменением с течением времени скорости  $v$ , получаем

$$H = \frac{8}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (7.40)$$

С практической точки зрения интересно рассмотреть возмущение, описывающее потерю энергии и ее поступление в систему [30]

$$\varepsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma, \quad (7.41)$$

поскольку возмущение этого типа соответствует случаю диссипации магнитного потока в длинном сверхпроводящем туннельном переходе Джозефсона (см. рисунок 7.1).

Член при  $\alpha$  описывает потерю энергии при туннелировании нормальных (т. е. несверхпроводящих) электронов через барьер на переходе. Член  $\beta u_{xxt}$  также соответствует потере энергии, обусловленный конечностью глубины проникновения электромагнитного поля в сверхпроводящую пленку [27]. Пространственно однородный ток смещения определяется членом  $\gamma$ .

В предположении, что скорость постоянна (т. е. пренебрегая медленными изменениями скорости  $v$ ), интеграл (7.39) может быть вычислен для решения одиночного кинка и с учетом выражения для возмущения (7.41). С другой стороны, производная по времени  $H$  в левой части (7.39) может быть вычислена с использованием (7.40) и это позволяет определить медленные изменения с течением времени скорости  $v$ . Таким образом, ОДУ первого порядка для скорости солитона имеет следующий вид [18]:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi\gamma}{4} (1-v^2)^{3/2} - \alpha v (1-v^2) - \frac{\beta}{3} v. \quad (7.42)$$

Справедливость этого уравнения подтверждается многими экспериментальными и численными исследованиями.

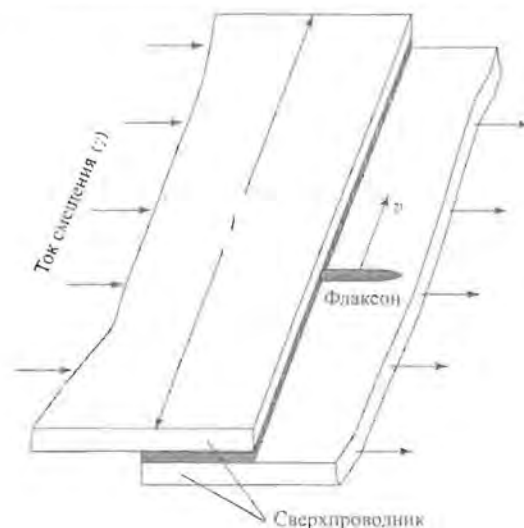


Рис. 7.1. Сверхпроводящий переход Джозефсона длины  $l$  с флаксон (кинком),двигающимся в  $x$ -направлении со скоростью  $v$ .

С использованием этого уравнения можно исследовать влияние различных членов возмущения на динамику кинка. Два члена при  $\alpha$  и  $\beta$  замедляют движение правого и левого распространяющихся кинков. Положительный ток смещения  $\gamma$  смещает кинк вправо, а отрицательный ток смещения смещает кинк влево. Если вышеприведенные выкладки проводятся для антикинка, в уравнении (7.42) член при  $\gamma$  должен изменить знак на противоположный. В этом случае положительный ток смещения смещает кинк влево, а отрицательный ток смещения смещает кинк вправо.

При достаточно длинном переходе уравнение (7.42) имеет равновесное решение  $v_\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , определяемое условием  $\dot{v} = 0$ . При  $\beta = 0$  это уравнение может быть решено аналитически:

$$v_\infty = \left[ 1 + (4\alpha/\pi\gamma)^2 \right]^{-1/2}. \quad (7.43)$$

Это стационарное значение скорости соответствует балансу энергии между диссипативными эффектами и поступлением энергии, обусловленным наличием тока смещения  $\gamma$ . Величину  $v_\infty$  принято называть «скоростью баланса энергии».

В практических ситуациях пространственные размеры всегда конечны и поэтому следует накладывать граничные условия. Показанный на рисунке 7.1 случай перекрытия имеет важное практическое значение и ему соответствуют граничные условия разомкнутой цепи:

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0.$$

При отражении кинка от границы замкнутой цепи он становится антикинком и, следовательно, показанная на рисунке 7.1 система может рассматриваться как флуксонный осциллятор. В такой системе последовательность динамических событий следующая: (i) кинк движется направо, накапливая энергию от  $\gamma$ , (ii) он отражается от границы замкнутой цепи и становится антикинком, (iii) антикинк движется налево, снова накапливая энергию от  $\gamma$ , (iv) он отражается от другой границы замкнутой цепи и становится кинком, (v) и т.д.

С точностью до членов нулевого порядка в выражении для возмущений (т. е. в предположении, что  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  равны нулю) равенство (3.80) описывает подобные колебания в терминах эллиптических функций, что предоставляет основу для проведения энергетического анализа [5]. Таким образом выходная мощность  $P_{out}$  равна входной мощности тока смещения минус диссипация. Выражение для этого баланса мощности может быть получено с использованием (7.39) и (7.41):

$$P_{out} = \left| \gamma \int_0^l u_t dx \right| = \int_0^l (\alpha u_t^2 + \beta u_{xt}^2) dx. \quad (7.44)$$

В этой формулировке выходная мощность высвобождается путем излучения на одном из концов устройства. При этом амплитуда  $A$  в (3.80) самоподстраивается так, чтобы было выполнено условие (7.44). Если в качестве  $\gamma$  выступает прямой ток, мы получаем устройство, преобразующее электрическую энергию в колебания с частотой колебания несколько терагерц.

### 7.3.3. Солитоны нелинейного уравнения Шредингера

Возмущения играют важную роль в приложениях НУШ и должны быть включены в него для полноты описания исследуемой физической системы. Возмущенное НУШ имеет вид

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = \varepsilon R. \quad (7.45)$$

При  $\varepsilon = 0$  мы можем получить из (3.106) следующее выражение для точного решения одиночного солитона:

$$u(x, t) = a \operatorname{sech}[a(x - v_e t - x_0)] \exp \left[ i \frac{1}{2} v_e x + (a^2 - \frac{1}{4} v_e^2) t - i \sigma_0 \right],$$

где  $a$  — амплитуда и  $v_e$  — групповая скорость,  $x_0$  и  $\sigma_0$  — константы, соответствующие центру соответственно огибающей и несущей волн. Для проведения последующего анализа удобно ввести переменную  $\xi \equiv x - v_e t/2$  и записать выражение для солитона в следующей форме:

$$u(x, t) = a \operatorname{sech}(a\theta) \exp(i\xi\theta + i\sigma), \quad (7.46)$$

где

$$\theta = x - 2\xi t - x_0 \quad \text{и} \quad \sigma = (a^2 + \xi^2)t - \sigma_0 + \xi x_0.$$

Заметим, что это выражение содержит четыре независимых параметра  $a, \xi, x_0$  и  $\sigma_0$ , но последние два определяют положение солитона и фазу его несущей и поэтому не участвуют в процедуре вычисления энергии.

Плотность лагранжиана для невозмущенного НУШ определяется равенством

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (u^* u_t - u_t^* u) - |u_x|^2 + |u|^4, \quad (7.47)$$

где  $u^*$  — комплексно сопряженная величина для  $u$ . Переменные  $u$  и  $u^*$  независимы, т. к.  $u$  определяется двумя независимыми вещественными функциями: вещественной и мнимой частями этой величины. Вычисляя вариацию  $\mathcal{L}$  по  $u^*$ , мы получаем невозмущенное НУШ, а вычисляя вариацию по  $u$  — комплексно сопряженное уравнение.

Плотности импульсов определяются равенствами

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = +\frac{i}{2} u^* \\ \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} = -\frac{i}{2} u$$

и, следовательно, плотность гамильтониана

$$\mathcal{H} = u_t \pi + u_t^* \pi^* - \mathcal{L} = |u_x|^2 - |u|^4$$

и полная энергия

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} dx. \quad (7.48)$$

С использованием возмущенного НУШ (7.45) мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= - \int_{-\infty}^{\infty} (u_{txx} + 2|u|^2 u) u_t^* dx + cc = \\ &= -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} R u_t^* dx + cc, \end{aligned} \quad (7.49)$$

где «cc» обозначает комплексное сопряжение предшествующих членов.

Для одиночного солитона (7.46) гамильтониан (7.48) имеет вид

$$H = 2a\xi^2 - \frac{2}{3}a^3 \quad (7.50)$$

и, следовательно, производная энергии по времени определяется равенством

$$\frac{dH}{dt} = 2(\xi^2 - a^2) \frac{da}{dt} + 4a\xi \frac{d\xi}{dt}. \quad (7.51)$$

Заметим, что равенство содержит две производные  $a_t$  и  $\xi_t$  и это обстоятельство представляет собой препятствие для непосредственного применения энергетического метода, т. к. мы не можем найти обе эти величины из одного равенства (7.49). Однако, полагая групповую скорость равной нулю (т. е. предполагая  $\xi = 0$ ) и выбрав возмущение таким образом, чтобы оно не изменяло групповую скорость, мы можем получить следующее равенство:

$$\frac{dH}{dt} = -2a^2 \frac{da}{dt} = -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} Ru_t^* dx + cc. \quad (7.52)$$

Рассмотрим в качестве примера возмущение

$$R = -iu,$$

которое не смещает солитон (почему?). При таком возмущении синусоидальное волновое решение НУШ малой амплитуды будет затухать как  $\exp(-\varepsilon t)$ . Из (7.52) видно, что амплитуда стационарного солитона определяется равенством

$$\frac{da}{dt} = -2\varepsilon a$$

и, следовательно,

$$a(t) = a(0)e^{-2\varepsilon t}.$$

Таким образом, простое диссипативное возмущение демпфирует амплитуду стационарного НУШ-солитона в два раза быстрее, чем малую амплитуду синусоидальной волны.

#### 7.4. Более общие методы анализа солитона

В этом разделе энергетический метод будет усовершенствован с использованием двух подходов: мультимасштабной теории возмущений для СГ-солитонов и метод усредненного лагранжиана для НУШ-солитонов. Эти методы могут быть применены для исследования не только солитонных систем, но также и для других дифференциальных уравнений в частных производных, допускающих решения вида уединенной волны.

##### 7.4.1. Мультимасштабная теория возмущений для СГ-кинка

Рассмотрим возмущенное СГ-уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R.$$

Основная идея мультимасштабной теории возмущений заключается во временном увеличении числа независимых переменных, что позволяет отдельно рассмотреть эволюцию быстрых переменных

$$T_0 = t \quad \text{и} \quad X_0 = x,$$

соответствующих переменным невозмущенного решения, и медленных переменных

$$T_1 = \varepsilon t \quad \text{и} \quad X_1 = \varepsilon x.$$

Для реализации этой стратегии, запишем решение возмущенной задачи в виде

$$u(x, t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1),$$

где  $X_0$  и  $T_0$  соответствуют переменным  $x$  и  $t$  в невозмущенном решении, а переменные  $X_1$  и  $T_1$  — медленным (порядка  $\varepsilon$ ) изменениям параметров невозмущенной системы. В этих обозначениях следует сделать следующую замену частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \\ \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} \end{aligned} \quad (7.53)$$

Такое расширение пространства переменных позволяет подстраивать медленные вариации параметров и одновременно обеспечивать ограниченность возмущенного решения.

Для локализованной бегущей волны медленные изменения по пространственным и временным переменным перестановочны. Поэтому удобно предположить, что

$$u(x, t) = u(X_0, T_0, T_1).$$

Далее, стандартная форма СГ-уравнения содержит член вида  $\partial^2 u / \partial t^2$ , что приводит к наличию члена второй производной по медленной переменной времени  $T_1$ . Удобно также записать возмущенное СГ-уравнение в виде системы первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}. \quad (7.54)$$

В предположении

$$u = u_0 + \varepsilon u_1$$

(сумма уединенной волны с медленно изменяющимися параметрами и подстроечного члена, позволяющего модифицировать форму волны) введение быстрых и медленных переменных и группировка членов при одинаковых степенях  $\varepsilon$  приводит к получению двух уравнений:

$$u_{0,T_0,T_0} - u_{0,X_0,X_0} + \sin u_0 = 0 \quad (7.55)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial T_0} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1,T_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ (-\partial_{X_0 X_0} + \cos u_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1,T_0} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -u_{0,T_1} \\ R - u_{0,T_0,T_1} \end{bmatrix}. \quad (7.56)$$

Мы получили эти уравнения с точностью до членов порядка  $O(\varepsilon)$ . Если необходимо включить большее количество членов, следует ввести

дополнительные переменные масштабирования. Например, при анализе с точностью до членов порядка  $O(\varepsilon^2)$  необходимо использовать дополнительную переменную  $T_2 = \varepsilon^2 t$  для того, чтобы были верны все выкладки.

Из уравнения (7.55) видно, что  $u_0$ , разумеется, является решением невозмущенного СГ-уравнения, но параметры, от которых зависит это решение  $u_0$ , зависят от  $T_1$ . Именно эта медленная  $T_1$ -зависимость параметров  $u_0$  приводит к появлению дополнительных членов  $-u_{0,T_1}$  и  $-u_{0,T_0,T_1}$  в правой части уравнения (7.56).

В качестве простого примера рассмотрим одиночный кинк (или антикинк)

$$u_0 = \pm \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}} \right) \right], \quad (7.57)$$

где

$$\frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1)$$

и  $\partial X / \partial T_1$  должны быть определены в ходе анализа.

Подстроечный член  $u_1$  является решением линейного уравнения (7.56) с параметрическим возбуждением  $\cos(u_0)u_1$  и членом внешнего возмущения в правой части. Параметрическое возбуждение обусловлено динамикой решения  $u_0$ , а внешнее возмущение — наличием возмущающих членов в  $R$ , а также динамикой  $u_0$ . Запишем уравнение для  $u_1$  в следующей форме:

$$L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1,T_0} \end{bmatrix} = \mathcal{F},$$

где

$$L \equiv \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0} X_0 + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix} \quad (7.58)$$

и

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} -u_{0,v} \dot{v} - u_{0,X} \dot{X} \\ R - u_{0,T_0} \dot{v} - u_{0,T_0,X} \dot{X} \end{bmatrix}. \quad (7.59)$$

В выражении для  $\mathcal{F}$

$$\dot{v} \equiv \frac{\partial v}{\partial T_1} \quad \text{и} \quad \dot{X} \equiv \frac{\partial X}{\partial T_1}$$

и

$$u_{0,T_1} = u_{0,v} \dot{v} + u_{0,X} \dot{X} \\ u_{0,T_0,T_1} = u_{0,T_0} \dot{v} + u_{0,T_0,X} \dot{X}.$$

Из теоремы Фредгольма следует, что уравнение для  $u_1$  имеет единственное решение, только если решения  $\psi$  уравнения  $L^\dagger \psi = 0$  ортогональны  $\mathcal{F}$ , где  $L^\dagger$  — оператор, сопряженный  $L$ .

Для определения сопряженного оператора рассмотрим вектор-функции

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

которые (i) определены на области  $-\infty < X_0 < +\infty$  и  $-\infty \leq T_0 \leq +\infty$ , (ii) дважды дифференцируемы и (iii) становятся равными нулю при  $X_0$  и  $T_0 \rightarrow \pm\infty$ . При выполнении этих условий оператор  $L^\dagger$  определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{w}^T L \mathbf{u} dX_0 dT_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (L^\dagger \mathbf{w})^T \mathbf{u} dX_0 dT_0. \quad (7.60)$$

Интегрируя по частям, получаем равенство

$$L^\dagger = \begin{bmatrix} -\partial_{T_0} & (-\partial_{X_0} X_0 + \cos u_0) \\ -1 & -\partial_{T_0} \end{bmatrix}, \quad (7.61)$$

из которого видно, что уравнение

$$L^\dagger \psi = 0$$

имеет два решения:

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} u_{0,T_0} T_0 \\ -u_{0,T_0} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \psi_2 = \begin{bmatrix} u_{0,T_0} v \\ -u_{0,v} \end{bmatrix}.$$

Из условия ортогональности  $\psi_1$  и  $\mathcal{F}$  следует

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (u_{0,T_0} v u_{0,T_0} - u_{0,v} u_{0,T_0} T_0) dX_0 \right] \frac{dv}{dT_1} + \\ & + \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (u_{0,T_0} X u_{0,T_0} - u_{0,X} u_{0,T_0} T_0) dX_0 \right] \frac{dX}{dT_1} = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} R u_{0,T_0} dX_0. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Если  $u_0$  — одиночный кинк, то  $u_{0,T_0}$  и  $u_{0,X}$  являются четными функциями по  $X_0 - X$ , а  $u_{0,T_0} X$  и  $u_{0,T_0} T_0$  — нечетными. Тогда коэффициент при  $\partial X / \partial T_1$  равен нулю и при подстановке  $u_{0,T_0} T_0 = u_{0,X_0} X_0 - \sin u_0$  и интегрировании по частям первое условие ортогональности сводится к следующему равенству:

$$\left[ \frac{d}{dv} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} u_{0,T_0}^2 + \frac{1}{2} u_{0,X_0}^2 + 1 - \cos u_0 \right) dX_0 \right] \frac{dv}{dT_1} = \int_{-\infty}^{\infty} R u_{0,T_0} dX_0. \quad (7.63)$$

которое представляет собой уравнение для энергии

$$\frac{dH}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} Ru_t dx,$$

которое было получено в разделе 7.3.2 с использованием менее формальных рассуждений.

При рассмотрении условия ортогональности  $\psi_2$  и  $\mathcal{F}$  можно заметить, что коэффициент при  $dv/dT_1$  тождественно равен нулю и, следовательно, это условие ортогональности сводится к следующему равенству:

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} (u_{0,T_0} X u_{0,v} - u_{0,X} u_{0,T_0}) dX_0 \right] \frac{dX}{dT_1} = \int_{-\infty}^{\infty} Ru_{0,v} dX_0,$$

которое с учетом  $u_{0,X} = -u_{0,X_0}$  и при интегрировании по частям может быть переписано в следующем виде:

$$\left[ \frac{d}{dv} \int_{-\infty}^{\infty} (u_{0,X_0} u_{0,T_0} dX_0) \right] \frac{dX}{dT_1} = \int_{-\infty}^{\infty} Ru_{0,v} dX_0. \quad (7.64)$$

Из равенства (7.57) видно, что  $u_{0,v}$  является нечетной функцией от  $X_0 - X$ . Если возмущение  $R$  является четной функцией от  $X_0 - X$ , то правая часть равенства (7.64) равна нулю и, следовательно,  $\partial X / \partial T_1 = 0$ . В этом случае проведенный анализ эквивалентен энергетическому анализу, представленному в разделе 7.3.2.

Для кинка или антикинка (7.57) уравнения (7.63) и (7.64) принимают следующий вид:

$$\frac{dv}{dT_1} = +\frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2} I_1 \quad (7.65)$$

$$\frac{dX}{dT_1} = -\frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2} I_2, \quad (7.66)$$

где

$$I_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} R[u_0(\Theta)] \operatorname{sech} \Theta d\Theta$$

$$I_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} R[u_0(\Theta)] \Theta \operatorname{sech} \Theta d\Theta$$

$$u_0(\Theta) = \pm \operatorname{arctg}(e^{\Theta})$$

$$\Theta = \frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1-v^2(T_1)}}.$$

Уравнения (7.65) и (7.66) описывают медленное изменение с течением времени величин  $v(T_1)$  и  $X(T_0, T_1)$ . В исходных независимых переменных  $x$  и  $t$  эти уравнения могут быть переписаны в следующем виде:

$$\frac{dv}{dt} = \pm \frac{1}{4} \varepsilon (1-v^2)^{3/2} I_1$$

$$\frac{dX}{dt} = v(t) - \frac{1}{4} \varepsilon v(1-v^2) I_2. \quad (7.67)$$

Первое из этих уравнений может быть решено относительно  $v(t)$  и, следовательно, решение второго уравнения имеет следующий вид:

$$X(t) = \int_0^t v(t') dt' + x_0(t),$$

где

$$\frac{dx_0}{dt} = -\frac{1}{4} \varepsilon v(1-v^2) I_2. \quad (7.68)$$

В невозмущенной задаче величина  $x_0$  соответствует положению кинка в  $t=0$ . При  $\varepsilon \neq 0$  эта величина соответствует движению виртуального положения со скоростью порядка  $\varepsilon$  и обуславливает возникновение новых членов в окончательном выражении, описывающем движение кинка

$$u_0(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - \int_0^t v(t') dt' - x_0(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} \right) \right], \quad (7.69)$$

где  $v(t)$  и  $x_0$  можно получить соответственно при интегрировании первого уравнения (7.67) и уравнения (7.68).

В общем случае интегралы  $I_1$  и  $I_2$  могут быть функциями времени и положения кинка, но в случае, когда возмущение определяется равенством (7.41),  $R[u_0(\Theta)]$  является четной функцией  $\Theta$ . Таким образом,  $I_2 = 0$  и величина  $x_0$  равна константе, что согласуется с результатами энергетического анализа, выполненного в разделе 7.3.2.

#### 7.4.2. Вариационный анализ НУШ-солитона

Вторым примером более общего анализа динамики усединенной волны является вариационный метод, используемый для определения медленной эволюции при изменении  $x$  и  $t$  параметров, описывающих решение солитона НУШ при наличии в нем членов возмущения. Эти параметры называются коллективными координатами и основная идея их использования заключается в том, чтобы подставить солитонное решение в плотность лагранжиана, вычислить усредненную функцию Лагранжа, считая при интегрировании коллективные координаты постоянными, и, наконец, проварьировать полученный усредненный лагранжиан по коллективным координатам [3]. Эта стратегия соотносится с методом Уизема, рассмотренным в главе 3.

Несмотря на то, что возмущения могут нарушить гамильтоново свойство невозмущенных уравнений солитона, диссипативные эффекты и внешние неконсервативные силы могут быть учтены при вариации лагранжиана путем введения обобщенных сил, соответствующих обобщенным координатам. Ниже будет показано, что в ходе этой процедуры обобщенные силы, соответствующие коллективным координатам, будут введены таким же образом, как это делается в классической механике.

Для иллюстрации предлагаемого метода рассмотрим возмущенное НУШ

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = \varepsilon R$$

и решение одиночного солитона

$$u(x, t) = a \operatorname{sech}(a\theta) \exp(i\theta + i\sigma), \quad (7.70)$$

где

$$\theta \equiv x - \alpha.$$

Вообще говоря, в этом выражении имеются четыре независимых параметра (или коллективных координаты) и два из них —  $a$  и  $\xi$  — являются константами в случае, когда  $u(x, t)$  представляет собой решение невозмущенного уравнения.

Невозмущенное НУШ (и его комплексно сопряженный аналог) могут быть получены из плотности лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(u^* u_t - u_t^* u) - |u_x|^2 + |u|^4,$$

с использованием которой может быть определена функция Лагранжа

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} dx. \quad (7.71)$$

Тогда можно непосредственно показать, что

$$L = \frac{2}{3}a^3 - 2a\xi^2 + 2a\xi d\alpha/dt - 2a d\sigma/dt, \quad (7.72)$$

и варьируя это выражение для  $L$  по  $a, \xi, \alpha$  и  $\sigma$ , мы можем получить

$$\begin{aligned} da/dt &= 0, & d\xi/dt &= 0, \\ d\alpha/dt &= 2\xi, & d\sigma/dt &= a^2 + \xi^2. \end{aligned}$$

При наличии возмущений эти коллективные координаты становятся более интересными функциями времени. Для удобства записи введем обозначение

$$[a, \xi, \alpha, \sigma] = [y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)]. \quad (7.73)$$

Тогда

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(u, u^*, u_t, u_t^*, u_x, u_x^*) dx = \\ &= L(y_i, y_{i,t}), \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

После подстановки этого выражения в (А.2) необходимо вычислить

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y_{i,t}} \right).$$

Рассмотрим эти два члена по отдельности. Меняя порядок интегрирования и дифференцирования при определении первого члена, мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_i} &= \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \frac{\partial u_x}{\partial y_i} \right] dx + cc = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) \frac{\partial u}{\partial y_i} \right] dx + cc, \end{aligned}$$

где интегрирование по частям (по  $x$ ) выполнено с учетом того факта, что функция  $u$  и ее производные стремятся к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Для вычисления второго члена заметим, что  $L$  зависит от  $y_{i,t}$  только вследствие наличия в выражении для  $\mathcal{L}$  членов  $u_t$  и  $u_t^*$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y_{i,t}} \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial y_{i,t}} \right] dx + cc = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \frac{\partial u}{\partial y_i} \right] dx + cc = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) \frac{\partial u}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial y_i} \right] dx + cc \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y_{i,t}} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial y_i} dx + cc.$$

Поскольку выражение в скобках может быть идентифицировано как

$$[\cdot] = -iu_t^* + u_{xx}^* + 2|u|^2 u^* = \varepsilon R^*,$$

мы получаем возмущенное уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y_{i,t}} \right) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} R \frac{\partial u^*}{\partial y_i} dx + \text{с.с.} \quad (7.74)$$

Уравнение (7.74) является важным результатом, поскольку эти обыкновенные дифференциальные уравнения определяют эволюцию коллективных координат  $a, \xi, \alpha$  и  $\sigma$  под воздействием обобщенных сил, наличие которых обусловлено действием возмущений. Поскольку при проведении представленного анализа мы пренебрегли обусловленными действием возмущений изменениями формы солитона, эти обыкновенные дифференциальные уравнения верны с точностью до  $O(\varepsilon)$ .

В качестве первого примера рассмотрим возмущение вида

$$R = -iu(x, t).$$

В этом случае уравнения (7.74) приобретают следующую форму:

$$\begin{aligned} da/dt &\doteq -2\varepsilon a, & d\xi/dt &\doteq 0, \\ d\alpha/dt &= 2\xi, & d\sigma/dt &= a^2 + \xi^2. \end{aligned}$$

где знак  $\doteq$  указывает на то, что при получении этого равенства были опущены поправки порядка  $\varepsilon^2$ .

Рассмотрим следующий пример

$$\varepsilon R = -i\Gamma u + \frac{ig_0 u}{1 + p/p_s}, \quad (7.75)$$

соответствующий случаю распространения света через оптоволоконный усилитель, используемый в коммуникационных системах. В этом случае величина  $u$  соответствует электрическому полю,  $-i\Gamma u$  — линейный член потерь и член при  $g_0$  — коэффициент усиления, включающий насыщение яркости при больших значениях мощности  $p$

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx.$$

Параметр  $p_s$  — уровень насыщения, являющийся характеристикой данного усилителя.

При таком возмущении  $\varepsilon \sim \Gamma$  и динамические уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &\doteq -2\Gamma a + \frac{2g_0 a}{1 + 2a^2/p_s}, & \frac{d\xi}{dt} &\doteq 0, \\ \frac{d\alpha}{dt} &\doteq 2\xi, & \frac{d\sigma}{dt} &\doteq a^2 + \xi^2. \end{aligned} \quad (7.76)$$

При  $g_0 = 0$  эти уравнения могут быть решены:

$$a = a_0 e^{-2\Gamma t}$$

$$\xi = \xi_0 \text{ (постоянная),}$$

где  $a_0$  — начальная амплитуда солитона. При анализе этих равенств можно сделать два вывода:

- Амплитуда подвижного НУШ-солитона демпфируется в два раза быстрее, чем малая амплитуда синусоидальной волны.
- Возмущение (7.75) не влияет на групповую скорость солитона с точностью до членов первого порядка в скорости демпфирования.

При  $g_0 > 0$  член  $-2\Gamma a$  демпфирует световой импульс при его прохождении по волокну, а член  $+2g_0 a/(1 + 2a^2/p_s)$  — усиливает его. Заметим, что при увеличении амплитуды увеличивается член усиления, что приводит к насыщению усиления. Таким образом, условие баланса можно получить из равенства  $a_t = 0$ , т. е. равновесная амплитуда  $a_\infty$  определяется равенством

$$a_\infty = \sqrt{\frac{(g_0 - \Gamma)p_s}{2\Gamma}}. \quad (7.77)$$

Из этого равенства видно, что для того, чтобы конечный световой импульс не прекратил свое существование в усилителе необходимо, чтобы коэффициент  $g_0$  был больше  $\Gamma$ .

## 7.5. Теория возмущений для множественных солитонов

Одним из самых важных результатов теории солитонов является получение точных решений множественных солитонов для различных нелинейных волновых уравнений, описывающих реальные физические системы. Интересно исследовать вопрос о влиянии на эти точные решения малых возмущений. В этом случае следует ожидать проявления по крайней мере пяти эффектов: (i) изменение скоростей солитонов, (ii) изменение их относительных фаз, (iii) изменение формы солитонов, (iv) генерирование излучения, и (v) возникновение новых или разрушение существующих солитонов. В этом разделе мы рассмотрим анализ этих явлений.

Одним из подходов теории возмущений для множественных солитонов является допущение медленных вариаций параметров рассеяния, рассматриваемых в рамках теории обратной задачи рассеяния. Этот вариант анализа, рассмотренный в предыдущей главе, применим во многих случаях [8,10], но требует знания метода обратной задачи рассеяния. Кинер и МакЛафлин показали в работах [11,12] как теория возмущений может быть применена непосредственно в терминах скоростей и фаз солитонов, а также амплитуды сопутствующего излучения. В контексте этих исследований можно сказать, что

1. Если необходимо вычислить модуляции порядка  $\varepsilon$  скоростей солитонов и их относительные фазы, то следует использовать лишь формулу для множественных солитонов. Эта теория будет рассмотрена в этом разделе.
2. В теории возмущений процесс образования и разрушения солитонов изучен к настоящему времени недостаточно глубоко. Затухание СГ-кинка и СГ-антикинка и их превращение в бризер — это один из случаев, который может быть исследован в рамках теории возмущений для множественных солитонов.
3. Для определения амплитуды излучения от одного или нескольких солитонов порядка  $\varepsilon$ , или для нахождения изменений их формы (которая может рассматриваться как «ближнее поле», движущееся со скоростью солитона) недостаточно формул для множественных солитонов и необходимо использовать дополнительные результаты. Несмотря на то, что эта дополнительная информация может быть получена с использованием теории обратного преобразования, ее можно получить при выполнении преобразования Бэклунда. Этот подход рассматривается в Приложении Н.

### 7.5.1. Общая теория

Рассмотрим возмущенное СГ-уравнение (7.36) [18] и запишем его в виде системы первого порядка

$$\partial_t \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}, \quad (7.78)$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Напомним, что возмущение  $R$  может зависеть от  $u(x, t)$ , его производных по времени или пространственной переменной и явным образом от  $x$  и  $t$ .

Введя векторное обозначение

$$\mathbf{W} \equiv \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix},$$

мы можем переписать (7.78) в следующей компактной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{W} + N(\mathbf{W}) = \varepsilon \mathbf{f}, \quad (7.79)$$

где

$$\mathbf{f} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}$$

и нелинейный оператор  $N(\cdot)$  определяется равенством

$$N(\mathbf{W}) \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix}.$$

При  $\varepsilon = 0$  невозмущенная волна множественных солитонов может быть записана в общем виде

$$\mathbf{W}_{(N+M+2L)} = \mathbf{W}(x, v_i t + x_1, \dots, v_{(N+M+2L)} t + x_{(N+M+2L)}; \mathbf{v}), \quad (7.80)$$

где  $\mathbf{v}$  — постоянный  $(N + M + 2L)$ -вектор, компонентами которого являются скорости  $N$  кинков и  $M$  антикинков волны и  $2L$  частот и скоростей бризеров. Параметрами  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{(N+M+2L)})$  являются положения кинков, антикинков, бризеров, а также фазы бризеров. Волна множественных солитонов (7.80) имеет  $2(N + M + 2L)$  параметров, являющихся элементами вектора  $\mathbf{p} = (\mathbf{v}, \mathbf{x})$ . (Заметим, что время  $t$  входит в выражение для волны множественных солитонов  $\mathbf{W}$  только в виде комбинаций  $v_i t$ , ( $i = 1, 2, \dots, N + M + 2L$ ), но скорости  $v_i$  могут самостоятельно входить во все другие члены этого выражения.)

Первым этапом нашего анализа является предположение о том, что решение  $\mathbf{W}$  уравнения (7.78) имеет вид

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \varepsilon \mathbf{W}_1 + O(\varepsilon^2), \quad (7.81)$$

где в качестве  $\mathbf{W}_0$  используется выражение для состояния невозмущенного множественного солитона (7.80), в котором все параметры, входящие в состав вектора  $\mathbf{p}$ , могут медленно изменяться с течением времени следующим образом:

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{W}_{(N+M+2L)}[x, X_i(t) + x_1(t), \dots, X_{(N+M+2L)}(t) + x_{(N+M+2L)}(t); \mathbf{v}(t)], \quad (7.82)$$

где  $dX_i/dt = v_i$ .

Следующие комментарии проясняют приведенную формулировку задачи.

1. Прежде всего, временная модуляция параметров  $\mathbf{p}(t)$  индуцируется возмущением  $\varepsilon \mathbf{f}$ . Поскольку возмущение порядка  $O(\varepsilon)$ ,  $d\mathbf{p}/dt = O(\varepsilon)$ . Модуляция не известна на этой стадии анализа и ее следует определить.
2. Далее, необходимо корректно идентифицировать соответствующие «скоростные» параметры  $(v_1, \dots, v_{(N+M+2L)})$  до замены  $v_i t$  на  $X_i(t)$ . Одним из подходов к решению этой задачи идентификации является использование асимптотической формы  $\mathbf{W}_0$  для больших  $t$ . В этом пределе  $\mathbf{W}_0$  можно разложить на кинки, антикинки и бризеры, которые могут быть исследованы отдельно.
3. Идентификация частоты бризера может быть корректно выполнена, если учесть при этом то обстоятельство, что форма волны бризера является аналитическим продолжением в пространстве параметров двойной формы волны для пары кинка и антикинка.

В качестве примера решения нулевого порядка рассмотрим одиночный кинк ( $N = 1, M = L = 0$ ), который рассматривался в контексте

теории мультимасштабирования (см. раздел 7.4.1). В этом случае из (7.69) следует, что

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - X_0(t) - x_0(t)}{\sqrt{1 - v^2(t)}} \right) \right] \\ \frac{-2v(t)}{\sqrt{1 - v^2(t)}} \operatorname{sech} \left( \frac{x - X_0(t) - x_0(t)}{\sqrt{1 - v^2(t)}} \right) \end{bmatrix}, \quad (7.83)$$

где

$$X_0(t) \equiv \int_0^t v(t') dt'.$$

На втором шаге анализа следует найти систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая описывает эволюцию модуляций параметров  $\mathbf{p}(t)$ . Для этого подставим выражение (7.81) в нелинейную систему уравнений (7.78) и линеаризуем в окрестности  $\mathbf{W}_0$ :

$$L\mathbf{W}_1 = \mathcal{F}(\mathbf{W}_0), \quad \mathbf{W}_1(t=0) = 0, \quad (7.84)$$

где линейный оператор  $L$  определяется равенством

$$L \equiv \begin{bmatrix} \partial_t & -1 \\ (-\partial_{xx} + \cos u_0) & \partial_t \end{bmatrix}. \quad (7.85)$$

Тогда поправка первого порядка  $\mathbf{W}_1$  удовлетворяет линейному неоднородному уравнению с переменным коэффициентом. Если рассматривать это уравнение с начальными данными, стремящимися к нулю, то это эквивалентно предположению о том, что при  $t=0$  волна представляет собой невозмущенное состояние солитона  $\mathbf{W}_0$ .

В равенстве (7.84) эффективный источник  $\mathcal{F}$  определяется равенством

$$\mathcal{F} = \mathbf{f}(\mathbf{W}_0) - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{2(N+M+2L)} \frac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt}, \quad (7.86)$$

в котором при вычислении частных производных величины  $X_1(t), \dots, X_{(N+M+2L)}(t)$  считаются фиксированными. Заметим, что эффективный источник включает члены поправок возмущения  $\mathbf{f}$ , поскольку  $\mathbf{W}_0$  не является точным решением невозмущенной СГ-системы (т. к. параметры  $\mathbf{W}_0$  изменяются с течением времени). При вычислении этого эффективного источника следует иметь в виду, что  $dp_j/dt = O(\varepsilon)$  и, следовательно, поправка имеет порядок  $O(1)$ , а не  $O(1/\varepsilon)$ , как это могло бы показаться при использовании принятых обозначений.

Равенство (7.84) представляет собой линейное уравнение для  $\mathbf{W}_1$ , явное решение которого может быть найдено с использованием функции Грина. В частности, эта функция Грина может использоваться для определения излучения из ускоряющегося кинка, но в случае, когда

требуется найти лишь модуляции солитонов, эти вычисления могут быть выполнены непосредственным образом.

В общем случае решение  $\mathbf{W}_1$  уравнения (7.84) возрастает с течением времени. В этих случаях член поправки первого порядка  $\varepsilon \mathbf{W}_1$  становится достаточно большим и аппроксимация (7.81) перестает быть верной. Причиной этого роста является резонанс между источником  $\mathcal{F}$  и функцией Грина для оператора (7.85).

Во избежание этого роста модуляцию параметров  $\{p_j\}$  следует выбрать так, чтобы исключить этот резонанс. Линейный рост по  $t$  проявляется в наибольшей степени в тех случаях, когда резонанс возникает между солитонами в эффективном источнике  $\mathcal{F}(\mathbf{W}_0)$  и теми же солитонами в функции Грина. Этот рост не возникает, если эффективный источник ортогонален некоторому подпространству конечной размерности нуль-пространства оператора

$$L^\dagger = - \begin{bmatrix} \partial_t & (\partial_{xx} - \cos u_0) \\ 1 & \partial_t \end{bmatrix}, \quad (7.87)$$

сопряженного оператору  $L$ .

Обозначим нуль-пространства операторов  $L$  и  $L^\dagger$  через  $N(L)$  и  $N(L^\dagger)$ , и дискретные подпространства через  $N_d(L)$  и  $N_d(L^\dagger)$ . Эти подпространства имеют размерность  $2(N+M+2L)$ .

Идея заключается в том, чтобы выбрать модуляцию  $2(N+M+2L)$  параметров  $\{p_j\}$  так, чтобы эффективный источник  $\mathcal{F}(\mathbf{W}_0)$  стал ортогонален  $N_d(L^\dagger)$ . Заметим, что требование

$$\mathcal{F}(\mathbf{W}_0) \perp N_d(L^\dagger)$$

представляет собой условие разрешимости из теоремы Фредгольма.

Это условие ортогональности может быть представлено в виде системы из  $2(N+M+2L)$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающей влияние возмущения  $\varepsilon R$  на солитоны. Для вывода этих уравнений обозначим базис дискретного подпространства  $N_d(L^\dagger)$  через  $\{\mathbf{b}_j(x), j=1, 2, \dots, 2(N+M+2L)\}$ . Тогда с учетом выражения для эффективного источника (7.86) мы можем представить условие ортогональности в следующей форме:

$$\sum_{k=1}^{2(N+M+2L)} \left( \mathbf{b}_j, \frac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial p_k} \right) \frac{dp_k}{dt} = \varepsilon (\mathbf{b}_j, \mathbf{f}), \quad (7.88)$$

где  $j=1, 2, \dots, 2(N+M+2L)$  и обозначение

$$(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}^T(x) \mathbf{G}(x) dx$$

соответствует скалярному произведению интегралов по  $x$ .

Равенства (7.88) представляют собой систему  $2(N + M + 2L)$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающую медленные изменения с течением времени параметров кинков, антикинков и бризеров. На этом этапе анализа мы не имеем лишь базиса для  $N_d(L^+)$ , но он может быть определен непосредственно из волны множественных солитонов  $\mathbf{W}_0$  и, следовательно, модуляции параметров  $p_j(t)$  зависят лишь от волны множественных солитонов.

Заметим, что базис  $\mathbf{b}_j$  подпространства  $N_d(L^+)$  должен быть определен лишь с точностью до  $O(1)$  по  $\varepsilon$ . Поэтому при определении  $\{\mathbf{b}_j\}$  мы можем пренебречь зависимостью  $p_j(t)$  от времени и считать эти величины фиксированными. Тогда при нахождении этого базиса мы можем использовать невозмущенное решение (7.80) вместо (7.82).

Заметим также, что члены базиса  $N_d(L)$  могут быть получены при дифференцировании  $\mathbf{W}_0$  по  $2(N + M + 2L)$  параметрам  $p$ . Для того, чтобы убедиться в этом заметим, что уравнение (7.78) не зависит явным образом от этих параметров. Поэтому дифференцирование (7.78) по  $p_j$  сводится к следующему равенству

$$L \frac{d\mathbf{W}_0}{dp_j} = 0.$$

Действуя таким образом, мы можем получить  $2(N + M + 2L)$  независимых элементов

$$\frac{d\mathbf{W}_0}{dp_j} \in N_d(L).$$

Для нахождения элементов  $N_d(L^+)$  заметим, что если  $\mathbf{V} \in N_d(L)$ , то  $J\mathbf{V} \in N_d(L^+)$ , где

$$J \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.89)$$

Поэтому с точностью до ведущего порядка по  $\varepsilon$

$$N_d(L^+) = \text{span} \left\{ J \frac{d\mathbf{W}_0}{dp_j}; j = 1, 2, \dots, 2(N + M + 2L) \right\}.$$

Наконец, поскольку

$$\mathbf{W}_0 \simeq \mathbf{W}(x, v_1 t + x_1, \dots, v_{(N+M+2L)} t + x_{(N+M+2L)}; \mathbf{v}),$$

очевидно, что

$$\frac{d\mathbf{W}_0}{dv_j} \simeq t \frac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial v_j},$$

где при вычислении частных производных величины  $\{X_j\}$  полагались фиксированными. Таким образом, при фиксированном  $t$  как функции от  $x$

$$\text{span} \left\{ J \frac{d\mathbf{W}_0}{dp_j} \right\} = \text{span} \left\{ J \frac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial p_j} \right\}$$

и равенства принимают следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{2(N+M+2L)} \left( J \frac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial p_j}, \frac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial p_k} \right) \frac{dp_k}{dt} = \varepsilon \left( J \frac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial p_j}, \mathbf{f} \right), \quad (7.90)$$

где  $j = 1, 2, \dots, 2(N + M + 2L)$ . Эти равенства представляют собой основной результат этого раздела.

С использованием этих обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть непосредственно определены изменения параметров скоростей и положения. Для этого необходимо лишь знание волны множественных солитонов. В широком смысле использование теории возмущения позволило свести анализ бесконечномерной системы (исходное дифференциальное уравнение в частных производных) к анализу конечномерной системы. Эта редуцированная система представляет собой множество обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих основные характеристики солитона: его положение и скорость.

### 7.5.2. Столкновения кинка с антикинком

В качестве примера применения теории возмущений для множественных солитонов рассмотрим столкновение кинка с антикинком возмущенного СГ-уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = -\alpha u_t - \gamma, \quad (7.91)$$

где  $-\infty < x < +\infty$ . В этом примере  $\alpha$  — малый параметр, соответствующий диссипативным эффектам в длинном переходе Джозефсона, и  $\gamma$  — параметр смещения, играющий роль источника энергии. Предполагается, что кинк и антикинк имеют скорости соответственно  $v$  и  $-v$ .

Если параметр  $\gamma$  достаточно мал, скорость  $v$  будет уменьшаться во время столкновения до некоторого минимального значения, а после столкновения — снова возрастать до равновесного значения  $v_\infty$ , определенного равенством (7.43). В этом случае, пара кинка и антикинка продолжат свое существование после столкновения. Если величина  $\gamma$  меньше некоторого критического значения  $\gamma_c$ , скорость уменьшается до нулевого значения и пара кинка и антикинка превращается в колеблющийся бризер, который не способен абсорбировать энергию смещения и постепенно затухает.

Оценка критического значения энергии смещения может быть получена с использованием следующего энергетического анализа. Полная кинетическая энергия кинка и антикинка, движущихся со скоростью  $v_\infty$ , определяется равенством

$$E_{\text{kin}} = 2 \times \frac{1}{2} \times 8 \times v_\infty^2 = \frac{8}{1 + (4\alpha/\pi\gamma)^2}.$$

где  $u_\infty$  задается равенством (7.43). Потеря энергии во время столкновения  $E_{\text{loss}}$  была вычислена Педерсеном с соавторами:

$$E_{\text{loss}} = 4\pi^2 \alpha f(v),$$

где  $f(v)$  — функция, которая гладко убывает от значения 2 при  $v = 0$  до 1 при  $v = 1$  [24]. (Кившар и Маломед получили другую оценку потери энергии  $8\pi^2 \alpha$  [14].) Критическому значению параметра  $\gamma_c$  соответствует ситуация, когда  $E_{\text{kin}} = E_{\text{loss}}$ :

$$\gamma_c^2 = \frac{16\alpha^3 f}{2 - \pi^2 \alpha f}.$$

Тогда при  $\alpha \ll 1/\pi^2$  мы имеем следующую оценку энергии:

$$2\sqrt{2}\alpha^{3/2} < \gamma_c < 4\alpha^{3/2}. \quad (7.92)$$

Далее мы рассмотрим вопрос о том, как этот результат согласуется с более точной оценкой, полученной с использованием теории возмущений.

Для разложения  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \alpha \mathbf{W}_1 + \dots$ , где

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_{0,t} \end{bmatrix},$$

медленная модуляция кинк-антикинк-решения имеет вид

$$u_0 = 4 \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{sh} \left( \int_0^t v(t') dt' + x_0(t)/\sqrt{1-v^2} \right)}{v \operatorname{ch} \left( x - x_1(t)/\sqrt{1-v^2} \right)} \right].$$

Соответствующая формула для второго компонента  $\mathbf{W}_0$  может быть получена аналогичным образом. В этом выражении имеется лишь три независимых параметра  $v$ ,  $x_0$  и  $x_1$ , но не четыре, как это можно было бы ожидать для кинк-антикинк-решения. Это произошло потому, что оно было получено в предположении о равенстве скоростей кинка и антикинка.

Возмущение первого порядка

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1,t} \end{bmatrix}$$

генерируется эффективным источником

$$\mathcal{F}(\mathbf{W}_0) = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} -u_{0,v} \dot{v} + u_{0,x} \dot{x}_1 + u_{0,x_0} \dot{x}_0 \\ -\alpha u_{0,t} - \gamma - u_{0,v} \dot{v} + u_{0,x} \dot{x}_1 - u_{0,x_0} \dot{x}_0 \end{bmatrix},$$

который должен быть ортогонален дискретному нуль-пространству оператора  $L^1$ . Три независимых элемента базиса пространства  $\mathcal{N}_d(L^1)$  могут быть найдены путем дифференцирования  $u_0$  по  $x$ ,  $t$  и  $v$ :

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} u_{0,x} \\ -u_{0,t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} u_{0,v} \\ -u_{0,t} \end{bmatrix}, \quad \text{и} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} u_{0,v} \\ -u_{0,t} \end{bmatrix}.$$

Если  $x_1 = 0$ , функции  $u_{0,x}$  и  $u_{0,v}$  являются четными по переменной  $x$  и, следовательно, условие ортогональности  $(\mathcal{F}, \mathbf{b}_1) = 0$  выполнено автоматически и для его выполнения нам не следует накладывать каких-либо ограничений на  $\dot{v}$ ,  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_0$ . Кроме того, коэффициенты при  $\dot{x}_1$  в выражениях для  $(\mathcal{F}, \mathbf{b}_2)$  и  $(\mathcal{F}, \mathbf{b}_3)$  равны нулю. Поэтому параметр  $x_1$  может быть выбран равным нулю, что соответствует случаю, когда столкновение кинка с антикинком происходит в начале координат.

После исключения нулевых членов условия  $(\mathcal{F}, \mathbf{b}_2) = 0$  и  $(\mathcal{F}, \mathbf{b}_3) = 0$  принимают следующий вид:

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} (u_{0,v} u_{0,v} - u_{0,v} u_{0,t}) dx \right) \dot{v} = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha u_{0,t}^2 + \gamma u_{0,t}) dx \quad (7.93)$$

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} (u_{0,v} u_{x_0} - u_{0,x_0} u_{0,v}) dx \right) \dot{x}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha u_{0,v} u_{0,t} + \gamma u_{0,v}) dx. \quad (7.94)$$

Интегрируя по частям с учетом равенства  $u_{0,v} = u_{0,xx} - \sin u_0$ , можно показать, что первое из этих равенств эквивалентно уравнению энергии

$$\frac{dH(u_0)}{dv} \dot{v} = - \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha u_{0,t}^2 + \gamma u_{0,t}) dx,$$

где

$$H(u_0) = \frac{16}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Тогда скорость  $v$  может быть определена как решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{d\Theta} = \frac{\sqrt{1-v^2}}{v} F(v, \Theta, \alpha, \gamma), \quad \text{где} \quad \Theta \equiv \frac{\int_0^t v(t') dt' + x_0(t)}{\sqrt{1-v^2}} \quad (7.95)$$

и

$$F = \gamma \pi (1-v^2)^{3/2} \frac{\operatorname{ch} \Theta}{4 \sqrt{\operatorname{sh}^2 \Theta + v^2}} - \alpha v^3 (1-v^2) \times \\ \times \frac{\operatorname{ch}^2 \Theta}{\operatorname{sh}^2 \Theta + v^2} \left[ \frac{1}{v^2} - \frac{\log \left( \left( \sqrt{\operatorname{sh}^2 \Theta + v^2} - \operatorname{sh} \Theta \right) / v \right)}{\operatorname{sh} \Theta \sqrt{\operatorname{sh}^2 \Theta + v^2}} \right]. \quad (7.96)$$

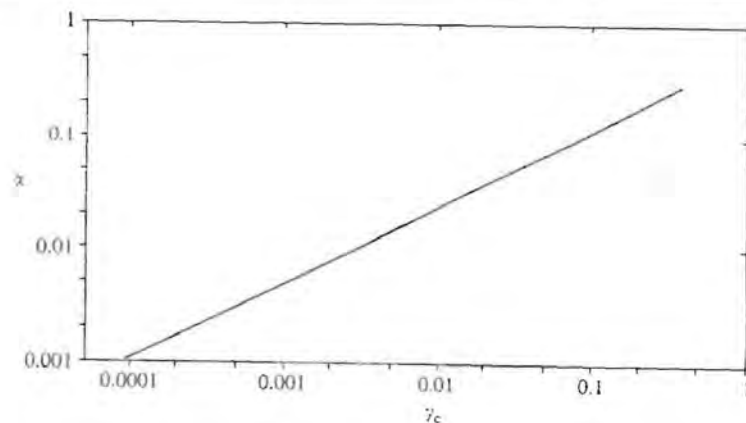


Рис. 7.2. Зависимость между  $\alpha$  и  $\gamma_c$  при кинк-антикин-аннигиляции, полученная при численном интегрировании уравнения (7.95).

При численном интегрировании этого уравнения при начальных условиях  $v = v_\infty$  при  $t = -\infty$  было определено критическое значение энергии  $\gamma_c$ , при котором  $v$  уменьшается до нулевого значения, т. е. происходит аннигиляция кинка и антикинка. Изображенные на рисунке 7.2 результаты согласуются с численным интегрированием уравнения (7.91) при значениях  $\alpha$  до  $\alpha \approx 0.3$  [18], а также с оценкой (7.92).

### 7.5.3. Излучение флаксона

В Приложении Н показано, что излучение солитона может быть вычислено с точностью до первого порядка по формуле

$$W_1(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t|x', t') \mathcal{F}(x', t') dx' dt', \quad (7.97)$$

где  $G(x, t|x', t')$  — излучательная функция Грина и  $\mathcal{F}(x', t')$  — источник. В настоящем разделе мы будем использовать эту формулировку для исследования излучения флаксона в переходе Джозефсона, распространяющегося в области периодической пространственной модуляции (или в области изменений ширины перехода) [18].

Под влиянием диссипативных эффектов скорость кинка будет колебаться вблизи усредненного значения  $v_m$  с частотой

$$\omega_0 = 2\pi v_m/a,$$

где  $a$  — период пространственной модуляции. Таким образом, источник в (7.97) будет иметь вид ряда Фурье по  $\omega_0$ :

$$\mathcal{F}(x', t') = F_0(x' - v_m t') + F_1(x' - v_m t') e^{i\omega_0 t'} + F_1^*(x' - v_m t') e^{-i\omega_0 t'} + \text{+ гармоника более высокого порядка.}$$

Рассмотрим сначала член усреднения

$$\begin{aligned} W_{10}(x, t) &= \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\exp\{-i[k(\lambda)(x - x') + \omega(\lambda)(t - t')]\}}{\lambda(\zeta^2 - \lambda^2)^2} \times \\ &\times [g_{ij}] F_0(x' - v_m t'), \end{aligned} \quad (7.98)$$

где компоненты функции Грина определены равенством (Н.8) и  $\lambda$  — спектральный параметр, позволяющий выполнить интегрирование по частоте. Это выражение, в состав которого входит интегрирование по  $t'$  от 0 до  $t$ , позволяет определить переходную характеристику при включении  $F_0$  в момент времени  $t = 0$ . Для определения характеристики установившегося режима мы можем считать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t dt' = \int_{-\infty}^{\infty} dt'.$$

При интегрировании по  $x'$  мы имеем члены

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' F(x' - v_m t') \exp(ikx') \propto \exp(ikv_m t'),$$

так что при интегрировании по  $t'$  имеется множитель

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \exp[i(kv_m + \omega)t'] = 2\pi \delta(kv_m + \omega).$$

Таким образом, в равенстве (7.98)  $\omega = -kv_m$ , из чего следует, что  $W_{10}(x, t)$  — функция лишь  $x - v_m t$ . Другими словами, возмущение установившегося режима движется вместе с кинком и приводит к коррекции порядка  $\varepsilon$  формы этого кинка. Этой поправкой можно пренебречь при определении излучения с точностью до первого порядка.

Рассмотрим далее основную гармонику  $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} W_{11}(x, t) &= \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\exp\{-i[k(\lambda)(x - x') + \omega(\lambda)(t - t')]\}}{\lambda(\zeta^2 - \lambda^2)^2} \times \\ &\times [g_{ij}] [F_1(x' - v_m t') e^{i\omega t'} + F_1^*(x' - v_m t') e^{-i\omega t'}]. \end{aligned} \quad (7.99)$$

Как и в предыдущем случае, при интегрировании по  $x'$  мы получаем член  $\exp(ikv_m t')$  и, следовательно, при интегрировании по  $t'$  мы получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i[kv_m + \omega \pm \omega_0]t'\} dt' = 2\pi\delta(kv_m + \omega \pm \omega_0),$$

т. е. излучение имеет доплеровский сдвиг частоты <sup>1)</sup>:

$$\omega = -kv_m \pm \omega_0. \quad (7.100)$$

Испускаемое излучение удовлетворяет соотношению дисперсии, которое в физических единицах имеет следующий вид:

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_J^2, \quad (7.101)$$

где, в соответствии с терминологией Джозефсона,  $c$  — «скорость Свихарта» и  $\omega_J$  — «плазменная частота» перехода. Решая уравнения (7.100) и (7.101) относительно  $\omega$ , мы получаем частоту излучения

$$\omega = \omega_0 \frac{1 + (v_m/c) \sqrt{1 - (\omega_J^2/\omega_0^2)(1 - v_m^2/c^2)}}{1 - v_m^2/c^2},$$

значение которой стремится к  $2\omega_0/(1 - v^2/c^2)$  при стремлении усредненной скорости флаксона к скорости Свихарта.

## 7.6. Возмущения нейронов

Одна из основных целей этой книги — показать, что солитоны хотя и играют важную роль в теории когерентных структур, но являются лишь частью всей картины. Глава 4 была посвящена исследованию систем реакции-диффузии, в которых когерентные структуры возникали в ходе нелинейных взаимодействий между источниками энергии и диссипативными эффектами. В этом разделе мы покажем, как теория возмущений может быть применена к нейронным системам, описываемым уравнениями реакции-диффузии.

### 7.6.1. Система ФитцХью–Нагумо

В разделе 4.3.2 мы рассмотрели модель ФитцХью–Нагумо (ФН-модель), описывающую распространение нервного импульса, и показали, что скорость бегущей волны  $v$  в этом нерве является функцией от температурного параметра  $\varepsilon$  (см. рисунок 4.12). Ниже будет представлен основанный на использовании теории возмущений метод, предложенный Кастеном и его коллегами и позволяющий получить изображенную на рисунке 4.12 кривую в диапазоне  $0 < \varepsilon \ll 1$  [4].

<sup>1)</sup> Кристиан Йоган Допплер (1803–1853) — австрийский физик и математик.

Рассмотрим уравнения (4.25) и (4.26) при  $b = 0$  и  $c = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + v \frac{\partial V}{\partial \xi} &= F(V) + R \\ \frac{\partial R}{\partial \xi} &= -\frac{\varepsilon V}{v}. \end{aligned}$$

(Предположение о том, что  $b$  и  $c$  равны нулю, сделано для упрощения выкладки. Представленные результаты могут быть получены для общего случая аналогичным образом.) Далее, представим  $v$ ,  $V$  и  $R$  в виде степенных рядов по  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \\ V &= V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \dots \\ R &= R_0 + \varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2 + \dots \end{aligned} \quad (7.102)$$

Приравнивая члены при равных степенях  $\varepsilon$ , мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_0}{d\xi^2} + v_0 \frac{dV_0}{d\xi} - [F(V_0) + R_0] &= 0 \\ \frac{dR_0}{d\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (7.103)$$

и

$$\frac{d^2 V_1}{d\xi^2} + v_0 \frac{dV_1}{d\xi} - V_1 F'(V_0) = R_1 - v_1 \frac{dV_0}{d\xi} \quad (7.104)$$

$$\frac{dR_1}{d\xi} = -\frac{V_0}{v_0}. \quad (7.105)$$

В предположении, что импульс распространяется в область нулевой переменной восстановления (см. рисунок 4.10), мы получаем  $R_0 = 0$  и из нашего исследования 3Ф-уравнения в разделе 4.1.1 следует, что уравнение (7.103) имеет решение

$$V_0(\xi) = [1 + \exp(\xi/\sqrt{2})]^{-1}. \quad (7.106)$$

При интегрировании (7.105), мы получаем

$$R_1(\xi) = \frac{1}{v_0} \int_{\xi}^{\infty} V_0(\xi') d\xi'.$$

Таким образом, в правой части уравнения (7.104) нам известны все члены за исключением величины  $v_1$ , но она может быть выбрана так, чтобы это уравнение удовлетворяло условию Фредгольма на существование решения.

Для осуществления указанного выбора  $v_1$  перепишем уравнение (7.104) в следующей форме:

$$LV_1 = R_1 - v_1 \frac{dV_1}{d\xi},$$

где оператор

$$L \equiv \frac{d^2}{d\xi^2} + v_0 \frac{d}{d\xi} - F'(V_0).$$

Продифференцировав (7.103) по  $\xi$  можно показать, что  $dV_0/d\xi$  является нуль-функцией оператора  $L$ . Сопряженный оператор

$$L^\dagger = \frac{d^2}{d\xi^2} - v_0 \frac{d}{d\xi} - F'(V_0)$$

имеет нуль-функцию  $\psi$ :

$$L^\dagger \psi = 0$$

и

$$\psi = e^{i v_0 \xi} \frac{dV_0}{d\xi}.$$

Согласно теореме Фредгольма необходимым условием существования решения уравнения (7.104) является ортогональность  $\psi$  правой части этого уравнения. Таким образом,

$$v_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{\xi}^{\infty} V_0(\xi') d\xi' \right] (dV_0/d\xi) e^{i v_0 \xi} d\xi}{v_0 \int_{-\infty}^{\infty} (dV_0/d\xi)^2 e^{i v_0 \xi} d\xi}$$

и скорость бегущей волны определяется равенством

$$v = v_0 + \left( \frac{\varepsilon}{v_0} \right) \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{\xi}^{\infty} V_0(\xi') d\xi' \right] (dV_0/d\xi) e^{i v_0 \xi} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} (dV_0/d\xi)^2 e^{i v_0 \xi} d\xi} + O(\varepsilon^2). \quad (7.107)$$

Первый член в правой части этого равенства определяет скорость бегущей волны в случае, когда  $\varepsilon$  и переменная восстановления  $R$  равны нулю. Отрицательный второй член представляет собой поправку порядка  $O(\varepsilon)$  для скорости бегущей волны в предположении, что импульс сохраняет свою форму нулевого порядка. Последний член соответствует вариациям скорости бегущей волны, обусловленным изменениями формы импульса.

Представленная процедура не применима в отношении неустойчивого импульса меньшей скорости при  $v_0 = 0$ , но с использованием разложений [4]

$$V = V_0 + \sqrt{\varepsilon} V_1 + \varepsilon V_2 + \dots$$

$$R = \sqrt{\varepsilon} R_1 + \varepsilon R_2 + \dots$$

$$v = \sqrt{\varepsilon} v_1 + \varepsilon v_2 + \dots$$

можно получить следующее равенство:

$$v = \sqrt{\varepsilon} v_1 + O(\varepsilon), \quad (7.108)$$

где

$$v_1 = + \left[ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} V_0^2 d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} (dV_0/d\xi)^2 d\xi} \right]^{1/2}$$

Асимптотическое поведение вблизи  $\varepsilon = 0$  импульсов со скоростями (7.107) и (7.108) согласуется с графиками решений бегущей волны для ФН-системы, изображенными на  $(v, \varepsilon)$ -плоскости (см. рисунок 4.12).

### 7.6.2. Электродинамическое (эфаптическое) взаимодействие нервных импульсов

В предыдущем разделе представлен анализ возмущений для ФН-описания распространения нервного импульса с использованием малого параметра, в качестве которого была выбрана обратная величина временной постоянной, определяющей переменную восстановления. Ниже будут рассмотрены два нервных волокна, которые расположены параллельно друг другу и на небольшом расстоянии. В этом случае электродинамические процессы в одном волокне могут повлиять на электродинамические процессы в другом волокне. Подобные взаимодействия параллельных волокон исследуются электрофизиологами с 1940-х годов [9,28]. Термин «эфаптическое» взаимодействие (по контрасту с «синаптическим»<sup>1)</sup> взаимодействием) указывает на то, что эти взаимодействия могут служить в качестве средств коммуникации между соответствующим образом ориентированных аксонов и дендритов [7,29].

Интересующая нас система описывается совместными ФН-уравнениями [31]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial t} &= (1 - \alpha) \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} - F(V_1) - R_1 \\ \frac{\partial R_1}{\partial t} &= \varepsilon V_1 \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} &= (1 - \alpha) \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} - F(V_2) - R_2 \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} &= \varepsilon V_2, \end{aligned} \quad (7.109)$$

где нижние указывают на переменные, соответствующие волокнам 1 и 2.

При проведении анализа мы не будем предполагать, что величина  $\varepsilon$  мала, т. к. для реального нервного волокна значение этой величины

<sup>1)</sup> Прим. ред. перев. — Синапсы представляют собой контакты между нервными клетками с односторонним проведением импульса, МСЭ, т.8, 1960.

равно приблизительно 0.1. С другой стороны, величина  $\alpha$ , соответствующая интенсивности взаимодействия между двумя волокнами, будет предполагаться малой. Наличие этого взаимодействия обусловлено тем, что электрические токи, связанные с прохождением импульса по одному из волокон, влияют на потенциал мембраны другого нервного волокна. При  $\alpha \rightarrow 0$  волокна становятся не связанными этими взаимодействиями и нервные импульсы распространяются в волокнах независимо друг от друга.

Начиная анализ возмущений для рассматриваемой системы, рассмотрим решения бегущей волны вида

$$V_k(x, t) = V_k(\xi) = V_k(x - vt), \quad k = 1, 2,$$

где  $v$  — скорость распространения двух импульсов, двигающихся в синхронизме. Тогда уравнения (7.109) могут быть переписаны в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -v \frac{dV_1}{d\xi} &= (1 - \alpha) \frac{d^2 V_1}{d\xi^2} - \alpha \frac{d^2 V_2}{d\xi^2} - F(V_1) - R_1 \\ -v \frac{dR_1}{d\xi} &= \varepsilon V_1 \\ -v \frac{dV_2}{d\xi} &= (1 - \alpha) \frac{d^2 V_2}{d\xi^2} - \alpha \frac{d^2 V_1}{d\xi^2} - F(V_2) - R_2 \\ -v \frac{dR_2}{d\xi} &= \varepsilon V_2. \end{aligned}$$

Решение  $[V_1(\xi), V_2(\xi)]$  состоит из двух импульсов, движущихся в отдельных волокнах со скоростью  $v$ . Поскольку  $\alpha \ll 1$  мы можем представить это решение в виде степенного ряда

$$V_k = V_{k0} + \alpha V_{k1} + \alpha^2 V_{k2} + \dots, \quad k = 1, 2.$$

Скорость также может быть записана в виде ряда:

$$v(k) = v_0 + \alpha v_1^{(k)} + \alpha^2 v_2^{(k)} + \dots,$$

где мы временно предположили, что решения могут иметь различные скорости импульсов в двух волокнах. Исключая  $R_1$  и  $R_2$ , получаем уравнения

$$\frac{d^3 V_{k0}}{d\xi^3} + v_0 \frac{d^2 V_{k0}}{d\xi^2} - F'(V_{k0}) \frac{dV_{k0}}{d\xi} + \frac{\varepsilon}{v_0} V_{k0} = 0 \quad (7.110)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d^3 V_{k1}}{d\xi^3} + v_0 \frac{d^2 V_{k1}}{d\xi^2} - F'(V_{k0}) \frac{dV_{k1}}{d\xi} - \left( F''(V_{k0}) \frac{dV_{k0}}{d\xi} - \frac{\varepsilon}{v_0} \right) V_{k1} = \\ = v_1^{(k)} \left( \frac{\varepsilon}{v_0^2} V_{k0} - \frac{d^2 V_{k0}}{d\xi^2} \right) + \frac{d^3 V_{10}}{d\xi^3} + \frac{d^3 V_{20}}{d\xi^3}, \end{aligned} \quad (7.111)$$

где  $k = 1, 2$ ,

$$F'(V_{k0}) \equiv \left[ \frac{dF(V_k)}{dV_k} \right]_{V_k=V_{k0}}$$

и выражение  $F''(V_{k0})$  может быть получено аналогичным образом.

Таким образом, исходная связанная система нелинейных уравнений сведена к системе, состоящей из несвязанных нелинейных уравнений (7.110) и линейных уравнений (7.111) для поправок первого порядка. Заметим, что уравнения (7.111) несвязаны по переменной  $V_{k1}$  и члены в правой части включают только решения нулевого порядка и два возмущения скорости первого порядка  $v_1^{(1)}$  и  $v_1^{(2)}$ . Тогда каждое из уравнений (7.111) может быть записано в виде неоднородного линейного операторного уравнения

$$L_k V_{k1} = f_k.$$

По теореме Фредгольма необходимым условием существования решения является равенство нулю скалярного произведения

$$(y_k, f_k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} y_k(\xi) f_k(\xi) d\xi = 0,$$

где  $y_k$  — решение уравнения

$$L_k^\dagger y_k = 0 \quad (7.112)$$

и  $L_k^\dagger$  — оператор, сопряженный оператору  $L$  по вышеопределенному внутреннему произведению.

Поскольку оператор, сопряженный оператору

$$F'(V_{k0}) \frac{d}{d\xi} - F''(V_{k0}) \frac{dV_{k0}}{d\xi},$$

имеет вид

$$+ F'(V_{k0}) \frac{d}{d\xi},$$

уравнения (7.112) могут быть переписаны в следующей форме:

$$\frac{d^3 y_k}{d\xi^3} - v_0 \frac{d^2 y_k}{d\xi^2} - F'(V_{k0}) \frac{dy_k}{d\xi} - \frac{\varepsilon}{v_0} y_k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (7.113)$$

С использованием выражений для решений уравнений (7.113) можно вычислить соответствующие внутренние произведения с правыми частями уравнений (7.111) и получить выражения для возмущений первого порядка бегущих волн  $v_1^{(k)}$ . Эти вычисления следует выполнять следующим образом:

1. Решите уравнение (7.110) относительно  $V_{k0}(\xi)$ . Эта функция имеет форму нормального нервного импульса.
2. Решите уравнение (7.113) относительно  $y_k(\xi)$ , решения сопряженной задачи. Форма этой функции аналогична с качественной точки зрения форме  $V_{k0}(-\xi)$ .
3. Предположите, что  $V_{20}$  отличается от  $V_{10}$  лишь сдвигом  $\delta$  переменной бегущей волны  $\xi$ . Тогда

$$V_{20}(\xi) = V_{10}(\xi - \delta) \\ y_2(\xi) = y_1(\xi - \delta),$$

т. е. импульс в волокне 2 предшествует импульсу в волокне 1 и их разделяет промежуток  $\delta$ .

Согласно условию Фредгольма разрешимости уравнений (7.111) скалярные произведения правых частей с  $y_k$  должны быть равны нулю. Из этого условия в свою очередь следует, что

$$Nv_1^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} y_k \left( \frac{d^3 V_{10}}{d\xi^3} + \frac{d^3 V_{20}}{d\xi^3} \right) d\xi,$$

где

$$N \equiv \int_{-\infty}^{\infty} y_1 \left( \frac{d^2 V_{10}}{d\xi^2} - \frac{\varepsilon}{v_0^2} V_{10} \right) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} y_2 \left( \frac{d^2 V_{20}}{d\xi^2} - \frac{\varepsilon}{v_0^2} V_{20} \right) d\xi.$$

С точностью до членов первого порядка в  $\alpha$  условие существования решения бегущей волны имеет вид

$$v(1) = v_0 + \alpha v_1^{(1)} = v(2) = v_0 + \alpha v_1^{(2)}$$

или

$$v_1^{(1)} = v_1^{(2)}. \quad (7.114)$$

На рисунке 7.3 изображены поправки первого порядка в виде функций от  $\delta$  (смещение импульса 2 относительно импульса 1), вычисленные вышеуказанным образом для типичного ФН-импульса [17].

На этом рисунке изображены пять решений уравнения (7.114), но только три из них (обозначены черными точками) устойчивы в следующем смысле. При увеличении  $\delta$ , т. е. когда импульс 2 еще более сдвигается вперед относительно импульса 1, скорость импульса 1 становится больше скорости импульса 2. Это приводит к уменьшению расстояния  $\delta$ , что и означает устойчивость. Аналогичным образом определяется понятие неустойчивости для двух других решений, обозначенных белыми точками.

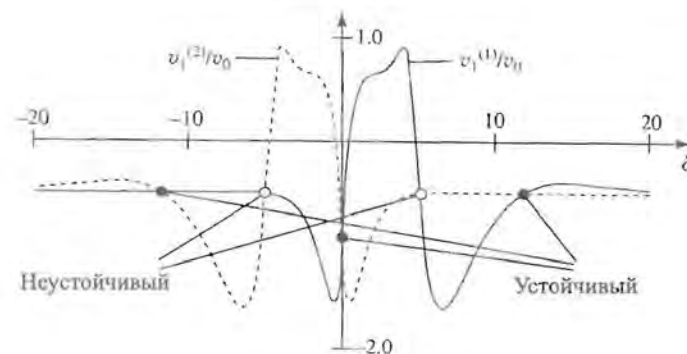


Рис. 7.3. Поправки первого порядка для скорости импульса при наличии взаимодействия между волокнами. (Воспроизведено с разрешения Стива Лузадера [17]).

Несмотря на то, что представленный метод был разработан в предположении о равенстве скоростей импульсов, из полученных результатов следует, что

$$\frac{d\delta}{dt} = v_1^{(2)}(\delta) - v_1^{(1)}(\delta).$$

Интересно отметить, что подобная эволюция подтверждается численными исследованиями решений исходных дифференциальных уравнений в частных производных [6].

Рассмотренный характер эволюции скоростей и положений нервных импульсов в параллельных волокнах соотносится с характером эволюции фаз и частот слабо связанных нелинейных осцилляторов. Наблюдавшиеся и описанные в 1940 году [9] взаимодействия импульсов в близко расположенных аксонах и дендритах могут играть функциональную роль в системах обработки информации живых организмов [7,28,31]. Дополнительная информация по этим вопросам может быть найдена в работах [1,29], в которых описаны соответствующие исследования связанных ЗФ-уравнений, МЧ-систем и взаимодействующих миелинизированных нервных волокон. Рассмотренный подход может также использоваться для исследования связанных систем солитонов. В частности, взаимодействие флаксонов в многослойных переходах Джозефсона представляет особенный интерес [25,32].

## 7.7. Заключение

Материал этой главы не раскрывает все аспекты теории возмущений, но тем не менее позволяет интересующемуся читателю познакомиться с общей стратегией выполнения анализа возмущений и намечает пути, которых следует придерживаться при использовании этой теории.

Наше обсуждение началось с рассмотрением двух вводных примеров использования теории для исследования малых возмущений матриц и демпфированных линейных осцилляторов. В обоих случаях были получены точные решения. Для анализа осциллятора был представлен энергетический метод, после чего была рассмотрена мультимасштабная теория возмущений. Несмотря на то, что эти два примера были представлены для того, чтобы проиллюстрировать основные концепции теории возмущений без углубления в ее детали, они не тривиальны. Нахождение определителей больших матриц является непростой вычислительной задачей. Поэтому был предложен метод усреднения, полезный при анализе приблизительно синусоидальных нелинейных осцилляторов.

Первое приложение теории к исследованию нелинейных систем было представлено в разделе 7.3, где медленные вариации энергии использовались для получения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих изменения скорости и амплитуды одиночных волн при наличии возмущения. Несмотря на то, что исследование солитонов КдВ-, СГ-уравнений, и НУШ было представлено в качестве примера использования энергетического анализа, этот метод может быть применен при исследовании любой уединенной волны, которая характеризуется единственным параметром и сохраняет энергию в предельном случае  $\varepsilon = 0$ , что допускает изменение скорости волны в непрерывном промежутке значений.

Большим достоинством энергетического анализа является то, что этот метод физически мотивирован. Однако он имеет и два недостатка. Во-первых, метод неприменим к солитонам, которые характеризуются более чем одним медленно изменяющимся параметром. Во-вторых, метод не предоставляет средств для оценки эффектов, обусловленных изменением формы одиночной волны. Для преодоления первого недостатка следует воспользоваться либо методом временного мультимасштабирования, либо методом усредненного лагранжиана (см. раздел 7.4).

Несмотря на то, что в качестве примеров использовались формулы для одиночных и множественных солитонов, ничто в представленном материале не требует использования аналитической мощи метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), описанного в предыдущей главе. В разделе 7.5 некоторые результаты теории солитонов использовались для разработки аналитических средств, которые оказываются достаточно мощными для исследования возмущений  $N$ -солитонов. Этот подход имеет две полезные особенности: во-первых, для применения метода знание теории МОЗР не требуется и, во-вторых, функции Грина могут быть получены в явном виде, что позволяет вычислить деформацию первого порядка формы  $N$ -солитона и излучение из него. Полученные формулы выглядят очень сложными, но это отражает сложность проведенных вычислений.

Теория возмущений для солитонов привлекает внимание исследователей на протяжении последних двух десятилетий и все полученные результаты не могли быть представлены в этой вводной главе. Занимательный читатель может найти более подробное изложение в обширном обзоре, подготовленном Кившаром и Маломедом [14]. Однако одна из основных задач этой книги заключается в том, чтобы показать, что область применения теории нелинейных волн шире, чем исследование систем, которые могут быть получены из функционалов Лагранжа. В разделе 7.6 рассмотрено в этом контексте применение теории возмущений к исследованию важной модели нервной проводимости в биологических системах — ФН-модели. Глава завершается рассмотрением проблемы, находящейся на переднем рубеже научных исследований в области динамики нелинейных волн: трансверсального взаимодействия между уединенными волнами в параллельных системах.

### 7.8. Задачи

1. Выполните вычисления раздела 7.1 для следующих матриц:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Выведите иерархию уравнений (7.8)–(7.11).
3. Покажите, что сопряженная матрица вещественной квадратной матрицы равна ее транспонированной.
4. (a) Для

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и  $M$  из раздела 7.1 вычислите  $\phi^{(1)}$  и  $\phi^{(2)}$  с использованием (7.9).

- (b) Используйте полученный результат для нахождения  $\lambda^{(1)}$  и  $\lambda^{(2)}$  с использованием (7.10).
- (c) Сравните полученные результаты с точным решением (7.5).
5. (a) Найдите все собственные значения и собственные векторы  $(100 \times 100)$ -матрицы

$$M_0 = \text{diag}[1, 2, 3, \dots, 98, 99, 100].$$

- (b) Используйте результаты раздела 7.1 для вывода общего выражения с точностью до членов порядка  $\varepsilon$  для всех собственных значений  $(100 \times 100)$ -матрицы

$$M = M_0 + \varepsilon R,$$

где  $R$  — произвольная  $(100 \times 100)$ -матрица.

- (с) Сравните численную эффективность использования теории возмущений с непосредственным решением уравнения  $\det(M) = 0$ .
6. Решите предыдущую задачу для собственных значений, определенных с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$ .
7. Используйте метод преобразования Лапласа для получения точного решения демпфированного гармонического осциллятора (7.14). (Указание: см. главу 2.)
8. Покажите, что  $dE/dt = 0$ , где  $E$  — энергия гармонического осциллятора (7.16).
9. Почему выражение в скобках равенства (7.18) имеет вид  $[1 + O(\varepsilon^2)]$ , а не  $[1 + O(\varepsilon)]$ ?
10. (а) Используйте анализ возмущений из раздела 7.2.1 для нахождения  $A(t)$ , в случае, когда вместо уравнения (7.13) исследуется следующее:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0,$$

где  $x(0) = b$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  и  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

- (б) Проиллюстрируйте ваш результат анализом фазовой картины системы.
11. (а) Выполните выкладки, ведущие от решения (7.20) к решению (7.21) для демпфированного гармонического осциллятора.
- (б) Сравните решение (7.21) с точным решением уравнения (7.13).
12. Выведите выражения (G.4) для возмущений демпфированного гармонического осциллятора.
13. Используйте вариационный метод Лагранжа-Эйлера из Приложения А для получения невозмущенного КдВ-уравнения из плотности лагранжиана (7.25).
14. Покажите, что для невозмущенного КдВ-уравнения определенный равенствами (7.27) и (7.26) гамильтониан не зависит от времени.
15. (а) Покажите, что величина

$$Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx$$

сохраняет постоянное значение на решениях  $u$  невозмущенного КдВ-уравнения.

- (б) Используйте этот результат для вывода равенства (7.34).
16. (а) Покажите, что величина

$$Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx$$

сохраняет постоянное значение на решениях  $u$  невозмущенного КдВ-уравнения.

- (б) Используйте этот результат для вывода равенства (7.35).
17. Рассмотрим КдВ-уравнение, в котором возмущение

$$\varepsilon R = -\varepsilon u$$

возникает в момент времени  $t = 0$ , когда решение проходит через точку  $x = 0$ . С учетом вычисленной в предыдущих двух задачах разности в уменьшении массы вычислите размеры шельфа, распространяющегося от  $x = 0$  до заднего фронта солитона.

18. Используйте энергетический анализ для изучения эволюции решений возмущенного КдВ-уравнения

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon u_{xx},$$

где  $-\infty < x < +\infty$ ,  $0 \leq t < +\infty$  и

$$u(x, 0) = 3 \operatorname{sech}^2(x/2).$$

19. (а) Исследуйте систему из предыдущей задачи с использованием анализа бегущей волны, представленного в главе 3.

(б) Сравните результаты применения двух подходов.

20. (а) С использованием заданной равенством (7.38) плотности энергии  $\mathcal{H}$  для СГ-уравнения, а также с учетом закона сохранения

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = 0,$$

найдите выражение для потока мощности  $\mathcal{P}$  для общего решения  $\phi$ . (Указание: см. Приложение А.)

- (б) Для кинк-решения  $\phi = 4 \arctg(\exp \Theta)$ , где  $\Theta \equiv (x - vt)/\sqrt{1 - v^2}$ , вычислите полную энергию, проходящую точку  $x = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P} dt.$$

- (с) Вычислите энергию кинка как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} dx$$

и сравните полученный результат с результатом пункта (б).

21. Выведите выражение (7.42) для возмущенной скорости флаксона в переходе Джозефсона.
22. (а) Покажите, что баланс энергии флаксона (7.43) следует из уравнения (7.42) при  $\beta = 0$ .

- (b) Обсудите решения уравнения (7.42), полученные при различных начальных условиях на  $v$  и в предположении, что параметры удовлетворяют следующим равенствам: (i)  $\gamma = 0$ , (ii)  $\beta = 0$ , (iii)  $\alpha = 0$ , (iv)  $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$ .
23. Выведите НУШ с использованием плотности лагранжиана (7.47).
24. Покажите, что выражения для энергии (7.50) верны.
25. Рассмотрим уравнение

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = i\varepsilon u,$$

где  $-\infty < x < +\infty, t \geq 0$  и

$$u(x, 0) = a \operatorname{sech} ax.$$

- (a) Представьте физическое обоснование того, что положение центра масс решения не изменяется под воздействием возмущений.
- (b) Найдите при  $0 < \varepsilon \ll 1$  оценку  $u(x, t)$  с точностью до  $O(\varepsilon)$ .
26. Покажите, что сопряженный оператор к оператору  $L$  (7.58) определяется равенством (7.61).
27. Проверьте вычисления, ведущие к выражениям (7.63) и (7.64) для возмущенных значений скорости и положения СГ-кинка.
28. С использованием фазовой картины на  $(v, X)$ -плоскости обсудите решения уравнений (7.67) при возмущении

$$R = \delta(x) \sin \phi.$$

29. Рассмотрим невозмущенное НУШ

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0.$$

- (a) Покажите, что плотность лагранжиана определяется равенством

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(u^* u_t - u u_t^*) - |u_x|^2 + |u|^4.$$

- (b) Предположим, что решение уединенной волны имеет вид

$$u(x, t) = a \operatorname{sech}(a\theta) \exp(i\xi\theta + i\sigma),$$

где  $\theta = x + \alpha$  и параметры  $a, \xi, \alpha$  и  $\sigma$  могут быть функциями времени. Покажите, что

$$L \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} dx = \frac{2}{3}a^3 - 2a\xi^2 - 2a\xi\alpha_t - 2a\sigma_t.$$

- (c) Получите вариации  $L$  по  $a, \xi, \alpha$  и  $\sigma$ , показав, что

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dt} = -2\xi, \quad \text{и} \quad \frac{d\sigma}{dt} = a^2 + \xi^2.$$

30. Рассмотрим возмущенное НУШ

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = \varepsilon R$$

и его решение уединенной волны

$$u(x, t) = a \operatorname{sech}(a\theta) \exp(i\xi\theta + i\sigma),$$

со свойствами параметров, определенными в предыдущей задаче. При  $R = -iu$  получите вариации  $L$  из предыдущей задачи, показав, что с точностью до членов порядка  $\varepsilon$

$$\frac{da}{dt} = -2\varepsilon a, \quad \frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dt} = -2\xi, \quad \text{и} \quad \frac{d\sigma}{dt} = a^2 + \xi^2.$$

31. Решите предыдущую задачу при  $R = iu_{xx}$ .
32. Решите предыдущую задачу при  $R = -i|u|^2 u$ .
33. Изобразите на рисунке семейство решений уравнений (7.76) при  $\Gamma > g_0$  и  $\Gamma < g_0$ .
34. Используйте теорию возмущений для исследования системы

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = -i\varepsilon u + \alpha e^{i\omega t},$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$  и  $|\alpha| \ll 1$ . (Указание: реакции первого порядка на  $\varepsilon$  и  $\alpha$  линейны.)

35. Опишите при малых значениях  $\alpha_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  поведение системы

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = i(\alpha_1 u + \alpha_2 u_x + \alpha_3 u_{xx})$$

в пространстве  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ -параметров.

36. Подставьте (7.81) в (7.78) и выведите выражение для линейного оператора для возмущений (7.85) СГ-уравнения.
37. Покажите, что  $L^\dagger$  (7.87) представляет собой сопряженный оператор для оператора  $L$  (7.85).
38. Пусть  $\mathbf{V}$  — нуль-функция оператора  $L$  (7.85). Покажите, что  $\mathbf{J}\mathbf{V}$  — нуль-функция сопряженного оператора  $L^\dagger$  (7.87), где  $(2 \times 2)$ -матрица  $\mathbf{J}$  определена равенством (7.89).
39. Предположим, что возмущенная система (7.78) имеет решение одиночного солитона (7.83). Используя (7.90) покажите, что эволюция параметров  $v(t)$  и  $x_0(t)$  определяется обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\varepsilon}{4}(1 - v^2) \int_{-\infty}^{\infty} R[\phi_0(\Theta, x, t)] \operatorname{sech} \Theta dx$$

и

$$\frac{dx_0}{dt} = -\frac{\varepsilon}{4}v\sqrt{1 - v^2} \int_{-\infty}^{\infty} R[\phi_0(\Theta, x, t)] \Theta \operatorname{sech} \Theta dx.$$

где

$$\Theta = \Theta(x, t) \equiv \frac{x - \int_0^t v(t') dt' - x_0(t)}{\sqrt{1 - v^2}},$$

40. В условиях предыдущей задачи предположим, что возмущение зависит только от  $x$ , т. е.  $R = R(x)$  и не зависит от  $\phi_0(x, t)$  и производных этой функции. Покажите, что скорость кинка удовлетворяет второму закону Ньютона

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial X},$$

где

$$U \equiv \frac{\varepsilon(1 - v^2)^{3/2}}{8} \int_{-\infty}^{\infty} R(\Theta \sqrt{1 - v^2} - X) \phi_0(\Theta) d\Theta$$

и величина

$$X = X(t) \equiv \int_0^t v(t') dt' + x_0$$

определяет положение кинка как функцию времени.

41. Покажите, что равенство (7.93) может быть интерпретировано как закон баланса энергии.  
 42. Изобразите на рисунке траектории уравнения (7.95) при: (i)  $\gamma > \gamma_c$  и (ii)  $\gamma < \gamma_c$ .  
 43. Покажите путем непосредственной подстановки (Н.1) в (7.84), что функция Грина  $\mathcal{G}(x, t|x', t')$  для СГ-уравнения должна удовлетворять условиям (Н.2) и (Н.3).  
 44. Рассмотрим возмущенное уравнение Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi = \varepsilon R$$

с начальными условиями  $\phi(x, 0) = 0$  и  $\phi_t(x, 0) = 0$ .

- (а) Запишите это уравнение в виде матричного уравнения первого порядка для переменной

$$\mathbf{W} \equiv \begin{bmatrix} \phi \\ \phi_t \end{bmatrix}.$$

- (b) В предположении, что  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \varepsilon \mathbf{W}_1 + O(\varepsilon^2)$ , найдите  $\mathbf{W}_0$  и интегральное выражение для  $\mathbf{W}_1$  с использованием матричной функции Грина для нуль-солитона (Н.5).  
 (с) Проверьте правильность полученного решения.  
 45. Покажите, что излучательная функция Грина для одиночного кинка (Н.8) удовлетворяет условиям (Н.2) и (Н.3).

46. Обсудите (без углубления в детали) стратегию построения излучательной функции Грина для взаимодействия двух СГ-кинок.  
 47. Покажите с использованием (7.98), что в установившемся режиме ( $t \rightarrow \infty$ )

$$\mathbf{W}_{10} = \mathbf{W}_{10}(x - v_m t).$$

48. Переход Джозефсона, изготовленный из ниобия и олова, описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\alpha}{c \lambda_J} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \phi,$$

где  $\phi$  — нормализованная плотность магнитного потока и измеренные значения параметров приведены в следующей таблице

Параметр	$\epsilon 1$	$\epsilon 2$	Единицы
$c$	$1.76 \times 10^9$	$2.3 \times 10^9$	см/с
$\lambda_J$	0.0263	0.127	см
$\alpha$	$5.55 \times 10^{-3}$	$5.52 \times 10^{-3}$	—

С использованием предложенной в разделе 7.5.3 концепции обсудите возможность построения осцилляторов, характеризующихся частотой излучения  $10^{10}$ ,  $10^{11}$  и  $10^{12}$  Гц.

49. (а) Покажите, что форма заднего фронта импульса не влияет на выражение для члена поправки первого порядка по  $\varepsilon$  скорости бегущей волны (7.107).  
 (b) Влияет ли член поправки первого порядка переменной восстановления (проводимость ионов калия) на увеличение или уменьшение скорости бегущей волны? Поясните ответ.  
 (с) Вычислите (7.107) при  $F(V) = V(V - a)(V - 1)$ .  
 (d) Обсудите эволюцию скорости бегущей волны  $v$  при  $a \rightarrow \frac{1}{2}$  снизу.  
 50. Рассмотрим ФН-уравнение при

$$F(V) = V(V - 0.25)(V - 1).$$

- (а) С использованием выражений (7.107) и (7.108) нарисуйте график  $O(\varepsilon)$ -оценки местоположения решений бегущей волны на  $(v, \varepsilon)$ -плоскости.  
 (b) Как соотносится результат пункта (а) с истинным местоположением этих траекторий.

51. Решите предыдущую задачу при

$$F(V) = \begin{cases} 0 & \text{при } V < \alpha, \\ V - 1 & \text{при } V > \alpha. \end{cases}$$

52. Рассмотрим импульс ФН-модели, распространяющийся в область, где переменная восстановления  $R = R_0 > 0$ . Какова зависимость скорости бегущей волны от  $R_0$ ?

53. (a) Для ФН-системы при  $\varepsilon = 0$  покажите, что существует стационарное (неподвижное) решение импульсного типа с  $V_0(\xi) = V_0(x)$ , где

$$d^2 V_0 / d\xi^2 = F(V_0).$$

(b) В предположении о том, что выражения для возмущений имеют вид

$$V = V_0 + \sqrt{\varepsilon} V_1 + \dots$$

$$R = \sqrt{\varepsilon} R_1 + \dots$$

$$v = \sqrt{\varepsilon} v_1 + \dots$$

покажите, что

$$v_1 = \left[ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} V_0^2 d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} (dV_0/d\xi)^2 d\xi} \right]^{1/2}.$$

(c) Обсудите полученный результат для случая, когда  $F(V) = V(V - a)(V - 1)$  при  $a \rightarrow \frac{1}{2}$  снизу.

54. (a) Выполните вычисления из раздела 7.6.2 для уравнений (7.109) в 3Ф-пределе ( $\varepsilon = 0$ ).

(b) Как в этом случае изменилось выражение для  $v^{(1)}(\delta)$ ? (Указание: см. [1].)

(c) Нарисуйте соответствующий вариант рисунка 7.3.

55. С использованием МЧ-модели нервного импульса из раздела 4.3.1 изобразите эфapticкое взаимодействие, аналогичное тому, что изображено на рисунке 7.3. (Указание: см. [29].)

56. (a) Выведите уравнения (7.110) и (7.111) для взаимодействующих нервных импульсов при

$$F(V) = V(V - a)(V - 1).$$

(b) Проверьте, что линейные операторы в левой части равенства (7.113) являются сопряженными операторами для операторов в левой части равенства (7.111).

57. Сформулируйте и решите интересную для вас задачу на возмущения.

## Литература

- [1] S.Binczak, J.C.Eilbeck, and A.C.Scott. Ephaptic coupling of myelinated nerve fibers. *Physica D* 148 (2001) 159-174.
- [2] S.Chandler and R.S.Johnson. On the asymptotic solutions of the perturbed KdV equation using the inverse scattering method. *Phys. Lett. A* 86 (1981) 337-340.
- [3] J.G.Caputo, N.Flytzanis, and M.P.Sørensen. The ring laser configuration studied by collective coordinates. *J. Opt. Soc. Am. B* 12 (1995) 139-145.
- [4] R.G.Casten, H.Cohen, and P.A.Lagerstrom. Perturbation analysis of an approximation to Hodgkin-Huxley theory. *Q. Appl. Math.* 32 (1975) 356-402.
- [5] G.Costabile, R.D.Parmenier, B.Savo, D.W.McLaughlin, and A.C.Scott. Exact solutions of the SG equation describing oscillations in a long (but finite) Josephson junction. *Appl. Phys. Lett.* 32 (1978) 587-589.
- [6] J.C.Eilbeck, S.D.Luzader, and A.C.Scott. Pulse evolution on coupled nerve fibers. *Bull. Math. Biol.* 43 (1981) 389-400.
- [7] J.G.R.Jefferys. Nonsynaptic modulation of neuronal activity in the brain: Electric currents and extracellular ions. *Physiol. Rev.* 75 (1995) 689-723.
- [8] V.I.Karpman and E.M.Maslov. Structure of tails produced under the action of perturbations on solitons. *Sov. Phys. JETP* 48 (1978) 252-259.
- [9] B.Katz and O.H.Schmitt. Electric interaction between two adjacent nerve fibers. *J. Physiol.* 97 (1940) 471-488.
- [10] D.J.Kaup and A.C.Newell. Solitons as particles and oscillators in slowly varying media. *Proc. R. Soc. (London) A* 361 (1978) 413-466.
- [11] J.P.Keener and D.W.McLaughlin. A Green function for a linear equation associated with solitons. *J. Math. Phys.* 18 (1977) 2008-2013.
- [12] J.P.Keener and D.W.McLaughlin. Solitons under perturbations. *Phys. Rev. A* 16 (1977) 777-790.
- [13] J.Kevorkian and J.D.Cole. *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [14] Y.S.Kivshar and B.A.Malomed. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. *Rev. Mod. Phys.* 61 (1989) 763-915.
- [15] C.J.Knickerbocker and A.C.Newell. Shelves and the Korteweg-de Vries equation. *J. Fluid Mech.* 98 (1980) 803-818.
- [16] G.L.Lamb, Jr. *Elements of Soliton Theory*. John Wiley, New York, 1980. (Дж. Лэм. *Введение в теорию солитонов*. Мир, М. 1983. (также Меркурий-Пресс, М. 2000.))
- [17] S.D.Luzader. *Neurophysics of Parallel Nerve Fibers*. PhD thesis. University of Wisconsin, Madison, 1979.

- [18] D.W.McLaughlin and A.C.Scott. Perturbation analysis of fluxon dynamics. *Phys. Rev. A* 18 (1978) 1652-1680.
- [19] A.H.Nayfeh. *Perturbation Methods*. John Wiley, New York, 1973. (Найфэ А. *Методы возмущений*. М.: Мир, 1976.)
- [20] A.H.Nayfeh and D.T.Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [21] A.H.Nayfeh. *Introduction to Perturbation Techniques*. John Wiley & Sons, New York, 1981. (Найфэ А. *Введение в методы возмущений*. М.: Мир, 1984.)
- [22] A.C.Newell. *Solitons in Mathematics and Physics*. SIAM, Philadelphia, 1985. (А.Ньюэлл. *Солитоны в математике и физике*. М.: Мир, 1989.)
- [23] E.Ott and R.N.Sudan. Damping of solitary waves. *Phys. Fluids* 13 (1970) 1432-1434.
- [24] N.F.Pedersen, M.R.Samuelsen, and D.Welner. Soliton annihilation in the perturbed SG system. *Phys. Rev. B* 30 (1984) 4057-4059.
- [25] A.Petraglia, A.V.Ustinov, N.F.Pedersen, and S.Sakai. Numerical study of fluxon dynamics in a system of two-stacked Josephson junctions. *J. Appl. Phys.* 77 (1995) 1171-1177.
- [26] B. van der Pol. The nonlinear theory of electric oscillations. *Proc. IRE* 22 (1934) 1051-1086.
- [27] A.C.Scott. Distributed device applications of the superconducting tunnel junction. *Solid State Electron.* 7 (1964) 137-146.
- [28] A.C.Scott. The electrophysics of a nerve fiber. *Rev. Mod. Phys.* 47 (1975) 487-533.
- [29] A.C.Scott. *Neuroscience: A Mathematical Primer*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [30] A.C.Scott, F.Y.F.Ghu, and S.A.Reible. Magnetic-flux propagation on a Josephson transmission line. *J. Appl. Phys.* 47 (1976) 3272-3286.
- [31] A.C.Scott and S.D.Luzader. Coupled solitary waves in neurophysics. *Phys. Scr.* 20 (1979) 395-401.
- [32] A.C.Scott and A.Petraglia. Flux interactions on stacked Josephson junctions. *Phys. Lett. A* 211 (1996) 161-167.

## Глава 8

## СОЛИТОНЫ В КВАНТОВЫХ РЕШЕТКАХ

Вообще говоря, солитон — это классическое явление. Нет необходимости в выполнении вычислений квантовых поправок для исследованной Джоном Скоттом Расселом «Волны Переноса», для цунами или для Большого Красного Пятна на Юпитере — подобная деятельность была бы абсурдной. Однако солитоны могут возникать на молекулярном уровне или в молекулярных кристаллах и в этих случаях необходимо учитывать квантовые особенности процесса. Целью этой главы является представить теорию солитонов в квантовых решетках в таком виде, чтобы это оказалось полезным при интерпретации экспериментальных исследований.

Поскольку явления ангармоничности в молекулах обусловлены химическими связями, мы начнем изложение с рассмотрения осциллятора «груз на пружине», являющегося примером слабо нелинейной системы. Изложение квантовой теории представляет определенную трудность аналитического характера, но полученные результаты могут быть обобщены с целью интерпретации применений этой теории, мотивированных исследованиями колебательных спектров молекул, молекулярных кристаллов и биомолекул.

Глава завершается комментариями, касающимися общей теории квантовых решеток и открывающими пути для дальнейших исследований.

## 8.1. Квантовые осцилляторы

## 8.1.1. Классический нелинейный осциллятор

Рассмотрим массу, подвешенную на нелинейной пружине к неподвижному подвесу (см. рисунок 8.1). Нелинейность пружины может быть описана потенциальной функцией

$$V(x) = \frac{Kx^2}{2} - \frac{\alpha x^4}{4}, \quad (8.1)$$