

Глава 6

МЕТОДЫ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

В главе 3 мы исследовали солитон — замечательный динамический объект, открытый экспериментальным путем Джоном Скоттом Расселом и заново открытый в ходе численных исследований Забуски и Крускалом в середине 1960-х годов, — и познакомились с преобразованием Бэклунда и формулами для N -солитона, которые будут использоваться в следующей главе для обобщения теории возмущений солитонов. Все эти вопросы содержат элемент мистики: как решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных могут продемонстрировать столь неожиданные свойства?

Ответом на этот вопрос является то, что каждому уравнению солитона соответствует линейный оператор рассеяния, который может быть введен следующим образом. Пусть оператор L действует на функцию $u(x, t)$ — решение исследуемого нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, имеющего вид операторного уравнения

$$L_t = [M, L] \equiv ML - LM. \quad (6.1)$$

Этим свойством обладают далеко не все дифференциальные уравнения в частных производных (например, рассмотренные в главе 4 дифференциальные уравнения нелинейной диффузии этим свойством не обладают), но в случаях, когда оно выполнено, в распоряжении исследователя оказывается множество полезных дополнительных свойств.

Предположим, что мы имеем такой оператор, соответствующий в указанном смысле дифференциальному уравнению

$$u_t = N(u),$$

¹⁾ Автор благодарен М.П.Сёренсену за написание первоначальной версии разделов 6.1 и 6.2 этой главы.

которое должно быть решено при начальном условии

$$u(x, 0) = f(x).$$

Для получения решения задачи следует выполнить следующее:

1. Вычислить данные рассеяния для оператора L при $t = 0$ из $u(x, 0)$.
2. Используя оператор M , определить эволюцию во времени этих данных рассеяния.
3. По данным рассеяния для $t > 0$ найти $u(x, t)$, используя вычисления обратного рассеяния для оператора L .

Таким образом, решение нелинейной задачи с начальными данными сводится к трем вышеперечисленным линейным вычислительным задачам.

«Метод обратной задачи рассеяния» (МОЗР), описанный впервые в 1967 году для КдВ-уравнения в классической работе Гарднера с соавторами [13], включает в себя некоторые аналитические тонкости, которые, тем не менее, не умаляют элегантность этого подхода. Целью этой главы является раскрытие структуры МОЗР и освещение других связанных с этим методом вопросов.

Раздел начинается с рассмотрения КдВ-уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

связанного вышеуказанным образом с оператором Шредингера

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t) \quad (6.2)$$

и оператором

$$M = -4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u \frac{\partial}{\partial x} + 3u_x.$$

(Читателю следует проверить, что из выполнения операторного уравнения $L_t = [M, L]$ следует то, что $u(x, t)$ удовлетворяет КдВ-уравнению.)

В главе 2 были представлены с использованием оператора Шредингера (6.2) правдоподобные аргументы в обоснование прямой и обратной вычислительной процедуры метода рассеяния (шаги 1 и 3). В первом разделе этой главы справедливость этих аргументов будет доказана с использованием теории комплексных функций. Основываясь на точном понимании сущности задачи рассеяния Шредингера, мы представим в разделе 6.2 метод обратной задачи рассеяния для КдВ-уравнения.

Далее, предполагая, что читатель знаком с общей стратегией МОЗР, мы представим в разделе 6.3 обобщение этого метода на случай, когда операторы рассеяния представляют собой (2×2) -матрицы. Как показано в классической работе Захарова и Шабата [31], это обобще-

ние позволяет применить МОЗР к нелинейному уравнению Шредингера (НУШ)

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0.$$

Вскоре после этого, Тахтаджан и Фаддеев [29] и Абловиц с соавторами [2] независимо друг от друга получили матричные операторы рассеяния для уравнения синус-Гордона (СГ-уравнения)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u$$

и других уравнений, представляющих практический интерес [3]. Следуя этой матричной формулировке для линейного оператора рассеяния, мы представим в разделах 6.4 и 6.5 различные случаи применения МОЗР к НУШ и СГ-уравнению. Наконец, в разделе 6.6 будет показано, как МОЗР может быть использован для получения счетного числа независимых законов сохранения.

6.1. Линейное рассеяние

Для уравнения

$$L\psi = \lambda\psi,$$

где L — линейный оператор, существует два типа собственных функций: решения рассеяния, которые являются ограниченными, но ненулевыми при $x \rightarrow \pm\infty$, и связанные состояния, которые затухают и стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$.

В главе 2 было отмечено, что в случае, когда оператор Шредингера определяется равенством (6.2), эти два типа собственных функций связаны друг с другом аналитическими свойствами коэффициентов прохождения и отражения решений рассеяния. В этом разделе задача рассеяния будет рассмотрена более подробно и будут получены соотношения между нормирующими множителями собственных функций и вычетами комплексных функций рассеяния. Основываясь на этом результате, мы заново выведем уравнение Гельфанда–Левитана, не прибегая к использованию «псевдовремени», введенного в главе 2.

6.1.1. Решения рассеяния, связанные состояния и полюса верхней полуплоскости

В случае, когда оператор L задан равенством (6.2) и при

$$k^2 \equiv \lambda > 0,$$

задача на собственные значения для уравнения Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + [k^2 - u(x)]\psi = 0, \quad (6.3)$$

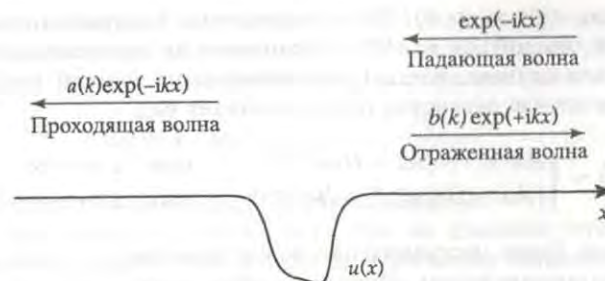


Рис. 6.1. Амплитуды решений рассеяния

где $\psi(x, k)$ — ограниченная функция при $x \rightarrow \pm\infty$ для всех вещественных значений k . В предположении

$$u(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty$$

решение рассеяния для этого ОДУ второго порядка может быть записано в следующем общем виде:

$$\psi(x, k) = A\psi^+(x, k) + B\psi^-(x, k) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (6.4)$$

где

$$\psi^+(x, k) \sim \begin{cases} e^{-ikx} + b(k)e^{ikx} & \text{при} \quad x \rightarrow +\infty \\ a(k)e^{-ikx} & \text{при} \quad x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\psi^-(x, k) \sim \begin{cases} e^{ikx} + d(k)e^{-ikx} & \text{при} \quad x \rightarrow -\infty \\ c(k)e^{ikx} & \text{при} \quad x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (6.6)$$

и $-\infty < k < +\infty$ — вещественное число.

Величины $b(k)$ и $a(k)$ играют роль соответственно коэффициентов прохождения и отражения для падающей волны справа ($x = +\infty$), а величины $d(k)$ и $c(k)$ — те же коэффициенты для падающей волны слева. В общем случае коэффициенты прохождения и отражения являются комплексными числами.

Поскольку рассеяние происходит упругим образом или с сохранением энергии, интенсивность приходящей волны должна быть равна сумме интенсивностей отраженной и проходящей волн. Другими словами, должно быть выполнено равенство

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad |c|^2 + |d|^2 = 1. \quad (6.7)$$

При аналитическом продолжении $\psi(x, k)$ с вещественной оси комплексной k -плоскости на верхнюю половину этой плоскости собственные функции связанных состояний будут соответствовать полюсам коэффициентов прохождения и отражения. Для того, чтобы убедиться в этом, представим, что k приближается к положительной части мнимой

оси ($k \rightarrow i\kappa_n$ при $\kappa_n > 0$). Тогда экспоненты в выражениях для ψ^+ и ψ^- будут стремиться к $e^{+\kappa_n x}$. Возможно ли построить связанные состояния для случаев, когда k расположены на мнимой оси и равны $i\kappa_n$? В этом случае равенство (6.4) принимает вид

$$\psi(x, k) \sim \begin{cases} Ae^{\kappa_n x} + (Ab + Bc)e^{-\kappa_n x} & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ (Aa + Bd)e^{\kappa_n x} + Be^{-\kappa_n x} & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (6.8)$$

Эта величина будет неограниченно возрастать при $x \rightarrow \pm\infty$, если не выбрать соответствующим образом коэффициенты при экспонентах. Для того, чтобы получить связанное состояние, необходимо обеспечить стремление A и B к нулю при приближении k к $i\kappa_n$ на положительной части мнимой оси, а также обеспечить ограниченность множителей $Ab + Bc$ и $Aa + Bd$. При этом величины a, b, c и d будут неограниченно возрастать при $k \rightarrow i\kappa_n$, что и соответствует случаю связанных состояний.

Из теоремы обращения для пассивных линейных систем (см. также задачу 4) следует, что $a = c$. Тогда $|b| = |d|$ и величина A должна стремиться к нулю по степенному закону с тем же показателем степени для $(k - i\kappa_n)$, что и для B . Следовательно, величины $A, B, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}$ и d^{-1} будут стремиться к нулю по одному степенному закону.

Действительно, выберем a и b так, чтобы они имели простые полюса в точках $k = i\kappa_n$ и рассмотрим следующие ряды

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{a_{-1,n}}{k - i\kappa_n} + a_{0,n} + a_{1,n}(k - i\kappa_n) + \dots, \\ b(k) &= \frac{b_{-1,n}}{k - i\kappa_n} + b_{0,n} + b_{1,n}(k - i\kappa_n) + \dots, \\ A(k) &= A_{1,n}(k - i\kappa_n) + A_{2,n}(k - i\kappa_n)^2 + \dots, \\ B(k) &= B_{1,n}(k - i\kappa_n) + B_{2,n}(k - i\kappa_n)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где $a(k)$ и $b(k)$ — ряды Лорана с требуемым свойством $a, b \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow i\kappa_n$. С использованием (6.9) и (6.8) можно получить представление для связанных состояний в предельном случае $k \rightarrow i\kappa_n$:

$$\psi(x, i\kappa_n) \sim \begin{cases} (A_{1,n}b_{-1,n} + B_{1,n}c_{-1,n})e^{-\kappa_n x} & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ (A_{1,n}a_{-1,n} + B_{1,n}d_{-1,n})e^{\kappa_n x} & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (6.10)$$

Поскольку $A(k)$ стремится к нулю при приближении k к $i\kappa_n$, связанное состояние может рассматриваться как ситуация, в которой падающие волны исчезают, а проходящие и отраженные — остаются конечными. Другими словами, связанное состояние является нормальной модой (или собственным состоянием) системы, не порожденной какой-либо причиной.

Вычетом $\text{Res}[b(k), i\kappa_n]$ функции $b(k)$ в точке $k = i\kappa_n$ является $b_{-1,n}$. При непосредственном вычислении рядов Лорана для b (6.9) мы получаем $b'/b^2 \rightarrow -1/b_{-1}$ при $k \rightarrow \kappa_n$ и, следовательно,

$$\text{Res}[b(k), i\kappa_n] = b_{-1,n} = - \left. \frac{b(k)^2}{b'(k)} \right|_{k=i\kappa_n}, \quad (6.11)$$

где штрих обозначает дифференцирование по k .

Следует отметить, что мы пока еще не доказали, что эти полюса являются простыми. Можно было бы попытаться использовать полюса второго порядка и выбрать A и B так, чтобы эти величины стремились к нулю при $(k - i\kappa_n)^2$, однако в следующем разделе будет показано, что этот путь невозможен и в нашем распоряжении оказывается лишь путь использования полюсов первого порядка.

6.1.2. Почему полюса в верхней полуплоскости должны быть простыми

Равенства (6.4) и (6.10) представляют собой решения уравнения Шредингера в предельном случае $x \rightarrow \pm\infty$, когда потенциал $u(x)$ стремится к нулю. Для того, чтобы исследовать уравнение (6.2) в областях, где потенциал не равен нулю, мы будем использовать результаты из раздела 2.6.2 и введем в рассмотрение следующие два независимые решения: ¹⁾

$$\begin{aligned} \phi_1(x, k) &= e^{ikx} + \int_x^\infty K(x, z) e^{ikz} dz \\ \phi_2(x, k) &= e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x L(x, z) e^{-ikz} dz, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где ядра $K(x, z)$ и $L(x, z)$ характеризуются свойствами

$$\left. \begin{aligned} K(x, z) &\rightarrow 0 \\ K_z(x, z) &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } z \rightarrow +\infty$$

$$\left. \begin{aligned} L(x, z) &\rightarrow 0 \\ L_z(x, z) &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } z \rightarrow -\infty,$$

где нижний индекс обозначает частную производную по z . При $k = i\kappa_n$ функция ϕ_1 представляет собой связанное состояние, которое может быть нормализовано путем умножения на константу c_n , определенную равенством

$$\frac{1}{c_n^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^2 dx. \quad (6.13)$$

¹⁾ Специалисты в области исследования солитонов иногда называют эти решения функциями Иоста, намекая на соответствующие уравнения из квантовой теории взаимодействующих частиц. Более подробно об этом см. [15].

Ранее мы предполагали, что коэффициенты прохождения $a(k)$ и отражения $b(k)$ имеют простые полюса в собственных значениях связанного состояния. Для того, чтобы убедиться в справедливости этого предположения, мы воспользуемся результатами Дразина и Джонсона [10], а также Введенского [30] для доказательства следующей теоремы.

- **Теорема:** Пусть c_n — константа нормализации для $\phi_1(x, i\kappa_n)$, где $k = i\kappa_n$ — собственное число связанного состояния с номером n . Тогда равенство

$$c_n^2 = i \frac{a(i\kappa_n)b(i\kappa_n)}{a'(i\kappa_n)} \quad (6.14)$$

справедливо при $k = i\kappa_n$.

Доказательство: Поскольку $\phi_1(x, k)$ и $\phi_1(x, -k)$ — независимые решения ОДУ второго порядка, $\phi_2(x, k)$ может быть записано в следующем виде:

$$\phi_2(x, k) = C(k)\phi_1(x, -k) + D(k)\phi_1(x, k).$$

После деления на C мы можем получить ϕ_2 в предельном случае $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\frac{1}{C}\phi_2 = \begin{cases} e^{ikx} + D/C e^{ikx} & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ 1/C e^{-ikx} & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (6.15)$$

Тогда мы можем идентифицировать $a(k)\phi_2(x, k) = \psi^+(x, k)$ и, следовательно, $a = 1/C$, $b = D/C$, а также

$$\phi_2(x, k) = \frac{1}{a}\phi_1(x, -k) + \frac{b}{a}\phi_1(x, k). \quad (6.16)$$

Поскольку при $k \rightarrow i\kappa_n$ величина $a(k)$ неограниченно возрастает, из предыдущего обсуждения связанных состояний следует, что величина $b(k)$ также должна неограниченно возрастать. Поэтому при $k \rightarrow i\kappa_n$ отношение $b(i\kappa_n)/a(i\kappa_n)$ остается конечной величиной и, следовательно, в полюсе $a(k)$ равенство (6.16) принимает вид

$$\phi_2(x, i\kappa_n) = \frac{b(i\kappa_n)}{a(i\kappa_n)}\phi_1(x, i\kappa_n). \quad (6.17)$$

Вычислив с использованием (6.15) вронскиан ¹⁾ $W(\phi_1, \phi_2)$ при $x \rightarrow -\infty$, мы получаем

$$W[\phi_1(x, k); \phi_2(x, k)] = -\frac{2ik}{a(k)}. \quad (6.18)$$

¹⁾ Вронскиан двух независимых решений ОДУ второго порядка определяется как $W(v; w) \equiv vw' - wv'$. Для уравнения Шредингера вронскиан не зависит от x . Джозеф Мария Вронски (1778-1853) — немецкий математик польского происхождения, проведший большую часть жизни во Франции.

При дифференцировании уравнения Шредингера (6.3) по k мы получаем

$$\psi_{xxk} + 2k\psi + (k^2 - u)\psi_k = 0.$$

Умножая это уравнение на ψ и вычитая результат из уравнения Шредингера, умноженного на ψ_k , получаем

$$\psi_k\psi_{xx} - \psi\psi_{xxk} - 2k\psi^2 = 0.$$

Это выражение эквивалентно равенству

$$\frac{dW(\psi_k; \psi)}{dx} = 2k\psi^2,$$

после интегрировании которого следует

$$2k \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx = W(\psi_k; \psi)|_{x \rightarrow +\infty} - W(\psi_k; \psi)|_{x \rightarrow -\infty}.$$

Полагая $\psi = \phi_1$ и рассматривая предельный случай $k \rightarrow i\kappa_n$, мы получаем

$$2i\kappa_n \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^2 dx = \frac{2i\kappa_n}{c_n^2} = W(\phi_{1,k}; \phi_1)|_{x \rightarrow +\infty} - W(\phi_{1,k}; \phi_1)|_{x \rightarrow -\infty}. \quad (6.19)$$

Дифференцируя вронскиан (6.18) по k , получаем

$$\frac{d}{dk}W(\phi_1; \phi_2) = W(\phi_{1,k}; \phi_2) + W(\phi_1; \phi_{2,k}) = -\frac{2i}{a(k)} + \frac{2ik}{a(k)^2}a'(k). \quad (6.20)$$

При $k = i\kappa_n$ равенство (6.20) может быть переписано в следующей форме

$$\begin{aligned} \frac{b(i\kappa_n)}{a(i\kappa_n)} W(\phi_{1,k}; \phi_1)|_{x \rightarrow -\infty} + \frac{a(i\kappa_n)}{b(i\kappa_n)} W(\phi_2; \phi_{2,k})|_{x \rightarrow -\infty} = \\ = -\frac{2\kappa_n}{a^2(i\kappa_n)}a'(i\kappa_n), \end{aligned} \quad (6.21)$$

поскольку величина $1/a(i\kappa_n)$ становится равной нулю. Из равенств (6.19) и (6.20) следует, что

$$\begin{aligned} W(\phi_{1,k}; \phi_1)|_{x \rightarrow +\infty} + \frac{a(i\kappa_n)^2}{b(i\kappa_n)^2} W(\phi_2; \phi_{2,k})|_{x \rightarrow -\infty} = \\ = -\frac{2i\kappa_n}{c_n^2} - \frac{2\kappa_n}{a^2(i\kappa_n)} \frac{a'(i\kappa_n)}{b(i\kappa_n)}. \end{aligned}$$

Непосредственно вычисляя вронскиан, можно показать, что он равен нулю и, следовательно, справедливо равенство (6.14). \square

Если коэффициенты прохождения и отражения имеют при $k = i\kappa_n$ полюса порядка $m \geq 2$, то правая часть равенства (6.14) неограниченно возрастает и, следовательно, константа нормализации также должна неограниченно возрастать (см. задачу 9). Поэтому, если полюса не являются простыми, то связанных состояний не существует. При вычислении рядов Лорана (6.9) можно показать, что в случае простых полюсов предельное значение правой части равенства (6.14) имеет вид

$$c_n^2 = -ib_{-1,n}. \quad (6.22)$$

Тот факт, что полюса верхней полуплоскости для коэффициентов прохождения и отражения уравнения Шредингера являются простыми, проявляется в нескольких контекстах:

1. Из анализа фазового пространства уравнения (6.3) следует, что различные связанные состояния принимают различные значения при $k^2 = \lambda$. Это свойство использовалось в главе 4 для анализа устойчивости решений бегущей волны для уравнения Фишера. Оно также будет использовано в главе 8 при квантовом анализе ангармонического осциллятора.
2. Каждый полюс верхней полуплоскости для коэффициента отражения (и прохождения) соответствует солитонному компоненту $u(x, t)$ в (6.2). В главе 3 было отмечено, что с использованием преобразования Бэклунда для КДВ-уравнения невозможно получить два солитона с одной скоростью и этот факт согласуется с тем, что полюса верхней полуплоскости являются простыми.

6.1.3. Снова уравнение Гельфанда–Левитана

Для того, чтобы вывести уравнение Гельфанда–Левитана, рассмотрим функцию ϕ_1 , удовлетворяющую уравнению Шредингера

$$\phi_{1,xx} + (k^2 - u)\phi_1 = 0. \quad (6.23)$$

Дифференцируя ϕ_1 в (6.12) дважды по x , получаем

$$\begin{aligned} \phi_{1,xx} = & -k^2 e^{ikx} - \frac{dK(x, x)}{dx} e^{ikx} - iK(x, x) e^{ikx} - \\ & - \frac{\partial K(x, x)}{\partial x} e^{ikx} + \int_x^\infty K_{xx}(x, z) e^{ikz} dz, \end{aligned} \quad (6.24)$$

где

$$\frac{\partial K(x, x)}{\partial x} \equiv \left. \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \right|_{y=x},$$

т. е. частное дифференцирование выполняется по подчеркнутой переменной.

Дважды интегрируя (6.12) по частям, получаем

$$\begin{aligned} \phi_1(x, k) = & \left[1 + \frac{i}{k} K(x, x) - \frac{1}{k^2} \frac{\partial K(x, x)}{\partial x} \right] e^{ikx} - \\ & - \frac{1}{k^2} \int_x^\infty K_{zz}(x, z) e^{ikz} dz. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Подставим выражение (6.24) для $\phi_{1,xx}$ в уравнение Шредингера (6.23), а в члены $k^2 \phi_1$ и $u \phi_1$ этого уравнения подставим соответственно выражения (6.25) и (6.12) для ϕ_1 . После всех этих подстановок уравнение Шредингера (6.23) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{dK(x, x)}{dx} - \frac{\partial K(x, x)}{\partial x} - \frac{\partial K(x, x)}{\partial x} - u(x) \right] e^{ikx} + \\ & + \int_x^\infty [K_{xx}(x, z) - K_{zz}(x, z) - uK(x, z)] e^{ikz} dz = 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Легко видеть, что равенство (6.26) выполнено при

$$\begin{aligned} u(x) = & -2dK(x, x)/dx \\ K_{xx}(x, z) - K_{zz}(x, z) - u(x)K(x, z) = & 0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Первое из этих двух равенств позволяет найти $u(x)$ с использованием $K(x, z)$, а второе показывает как $K(x, z)$ связано с $u(x)$. На практике $K(x, z)$ определяется с использованием свойств решений рассеяния и решений связанных состояний и ниже будет показано, как это может быть сделано.

Умножая соотношение между ϕ_1 и ϕ_2 (6.16) на a и используя определения функций Июста (6.12), получаем

$$\begin{aligned} a(k)\phi_2 = & \phi_1^* + b(k)\phi_1 = e^{-ikx} + \int_x^\infty K(x, z) e^{-ikz} dz + \\ & + b(k)e^{-ikx} + b(k) \int_x^\infty K(x, z) e^{ikz} dz. \end{aligned}$$

Доопределив ядро $K(x, z) = 0$ при $z < x$, мы можем расширить пределы интегрирования от $-\infty$ до ∞ и, следовательно, применить преобразование Фурье:

$$\hat{K}(x, k) = \int_{-\infty}^\infty K(x, z) e^{-ikz} dz = a\phi_2 - e^{-ikx} - b e^{ikx} - b \int_x^\infty K(x, z) e^{ikz} dz.$$

Тогда $K(x, z)$ может быть найдено с использованием обратного преобразования Фурье:

$$K(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a\phi_2 e^{ikz} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(z-x)} dk - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b e^{ik(z+x)} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} bK(x, y) e^{ik(z+y)} dk dy.$$

Это выражение может быть записано в более компактной форме, если ввести функцию

$$B(x+z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{ik(x+z)} dk. \quad (6.28)$$

Тогда

$$K(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a\phi_2 e^{ikz} dk - \delta(z-x) - \\ - B(x+z) - \int_x^{\infty} K(x, y) B(y+z) dy,$$

где $\delta(z-x)$ — дельта-функция Дирака. При $z > x$ предыдущее равенство принимает следующий вид

$$K(x, z) + B(x+z) + \int_x^{\infty} K(x, y) B(y+z) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a\phi_2 e^{ikz} dk. \quad (6.29)$$

Интеграл в правой части этого равенства может быть вычислен с использованием теоремы Коши о вычетах путем распространения интегрирования на верхнюю половину k -плоскости вдоль большого контура C в форме полуокружности:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C a\phi_2 e^{ikz} dk. \quad (6.30)$$

При больших (по модулю) k потенциалом в уравнении Шредингера можно пренебречь и в этом случае решение ϕ_2 может быть записано в следующей форме

$$\phi_2 \sim d_1 e^{ikx} + d_2 e^{-ikx}, \quad \text{при } \text{Im}(k) \rightarrow +\infty.$$

Заметим, что при $z > x$ величина $a(k)\phi_2(x, k) \exp(ikz)$ становится равной нулю вдоль полукруглого контура при распространении $\text{Im}(k)$ до плюс бесконечности и, как следствие, интеграл в (6.30) равен правой части (6.29).

Далее мы рассмотрим три случая (в порядке возрастания их сложности).

Полюса в верхней полуплоскости отсутствуют. Если $a(k)$ и $b(k)$ не имеют полюсов в верхней k -полуплоскости, из теоремы Коши следует, что интеграл в (6.30) равен нулю и равенство (6.29) принимает следующий вид:

$$K(x, z) + B(x+z) + \int_x^{\infty} K(x, y) B(y+z) dy = 0, \quad (6.31)$$

где $z > x$. Как было отмечено в главе 2, это равенство представляет собой уравнение Гельфанда–Левитана, которое может быть использовано для определения $u(x)$ из $b(k)$ следующим образом: (i) Находим $B(x+z)$ из преобразования Фурье (6.28). (ii) Решаем уравнение (6.31) относительно $K(x, z)$. (iii) Вычисляем $u(x) = -2dK(x, x)/dx$.

Один полюс в верхней полуплоскости. В этом случае необходимо вычислить интеграл I в (6.30). Для этого заметим, что из (6.17) следует, что при $k = i\kappa_n$

$$a(i\kappa_1)\phi_2(x, i\kappa_1) = b(i\kappa_1)\phi_1(x, i\kappa_1)$$

и из первого равенства (6.12) имеем

$$\phi_1(x, i\kappa_1) = e^{-\kappa_1 x} + \int_x^{\infty} K(x, z) e^{-\kappa_1 z} dz.$$

Тогда интеграл I представляет собой сумму двух компонент: $I_1 + I_2$. Первая из них определяется равенством

$$I_1 = ir_1 e^{-\kappa_1(x+z)},$$

где величина

$$r_1 = b_{-1,1} = ic_1^2$$

представляет собой вычет $b(k)$ при $k = \kappa_1$. Вторая компонента I определяется равенством

$$I_2 = 12\pi \oint_C \left(\frac{r_1}{k - i\kappa_1} \right) \left[\int_x^{\infty} K(x, z) e^{-\kappa_1(x+z)} dz \right] dk = \\ = \int_x^{\infty} ir_1 K(x, z) e^{-\kappa_1(x+z)} dz.$$

Могут ли эти дополнительные члены быть включены в уравнение Гельфанда–Левитана

$$K(x, z) + B(x+z) + \int_x^{\infty} K(x, y) B(y+z) dy = 0?$$

Ответ на этот вопрос будет положительным, если переопределить $B(x+z)$ следующим образом:

$$B(x+z) = c_1^2 e^{-\kappa_1(x+z)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{ik(x+z)} dk.$$

N полюсов в верхней полуплоскости. В случае, когда коэффициенты отражения и прохождения имеют *N* полюсов следует выполнить вышеприведенное переопределение *N* раз, в результате чего результирующее переопределение будет иметь следующий вид:

$$B(x+z) = \sum_{n=1}^N c_n^2 e^{-\kappa_n(x+z)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{ik(x+z)} dk. \quad (6.32)$$

Особенностью этой формулировки задачи рассеяния является то, что полюса в верхней полуплоскости и их вычеты могут быть выбраны независимо от $b(k)$ для вещественных k . Таким образом, мы имеем три случая:

Случай 1: Полюса в верхней полуплоскости отсутствуют при $b(k) \neq 0$.

Случай 2: Полюса в верхней полуплоскости имеют место при $b(k) = 0$ для всех вещественных k .

Случай 2: Полюса в верхней полуплоскости имеют место при $b(k) \neq 0$.

6.1.4. Есть вопросы?

В этот момент лекции внимательный студент может откинуться на спинку кресла, нахмуриться и задумчиво произнести:

«Минуточку, я не понял.»

«Да, какие вопросы?» — спросит лектор.

«Я не понял.»

«Какие проблемы?»

«Я могу понять ваш первый случай» — ответит студент, — «Мы имеем потенциал $u(x)$, который слишком слаб для того, чтобы захватить связанное состояние, но он способен рассеять приходящие и падающие волны и поэтому имеет место некоторое отражение $b(k)$. И я понимаю третий случай, т. к. вы продолжаете $b(k)$ на верхнюю k -полуплоскость для нахождения полюсов верхней полуплоскости и их вычетов, но ...»

«Но ...» — говорит лектор, лукаво улыбаясь.

«Я не понял второй случай. Если $b(k)$ равен нулю для вещественных k , как он может быть продолжен на верхнюю полуплоскость для нахождения соответствующих полюсов?»

«Уравнение Шредингера линейно и связанные состояния являются его решениями. Вы сомневаетесь в этом?»

«Нет ...»

«Нет причин беспокоиться по поводу того, что это уравнение имеет решения связанных состояний, но не имеет решений рассеяния.»

«Да, разумеется. Но почему $b(k)$ равен нулю? Означает ли это, что $u(x)$ прозрачен для радиации? Может ли потенциал рассеяния быть безотражательным? Это звучит как оксюморон¹⁾.»

«Безотражательные потенциалы действительно могут показаться несколько странными, но они представляют технический интерес на протяжении многих лет. Ученые-оптики долго работали над тем, чтобы уменьшить внутреннее отражение в сложных линзовых системах и военные инженеры пытаются сделать невидимый для радаров самолет. Специалисты в области акустики создали безэховые камеры.»

«Можно ли назвать эти разработки успешными?»

«Пожалуй, да, но самолет получился очень дорогой и хрупкий. Они разработали нечто похожее на потенциал рассеяния для связанного состояния, поскольку, как вы сказали, он является безотражательным. Но в чем заключается ваш вопрос?»

«Как мы можем продолжить коэффициент отражения, равный нулю на вещественной k -оси, на верхнюю полуплоскость для нахождения полюсов, соответствующих связанным состояниям? Это выглядит как мошенничество.»

«Вернемся к равенствам (6.16) и (6.17). Первое из них определяет решение рассеяния. Оно состоит из падающей волны, пропорциональной величине $1/a(k)$, и отраженной волны, пропорциональной величине $b(k)/a(k)$. Второе равенство (6.17) выполнено при $k = i\kappa_n$, т. е. там, где величина $1/a(k)$ равна нулю, но величина $b(k)/a(k)$ принимает конечное значение. В этой точке на k -плоскости падающая волна может быть отражена без учета связанного состояния.»

«Таким образом, мы продолжаем ненулевой коэффициент отражения на верхнюю полуплоскость для того, чтобы изучить свойства связанного состояния, соответствующего безотражательному потенциалу»

«Правильно.»

«И сделав это, мы предполагаем, что коэффициент отражения равен нулю.»

«Правильно. Мы его просто выбрасываем ... как пустую банку пива.»

[Нервный смех]

«Но из этого следует,» — продолжает студент, — «что если вы вычислите вычет полюса верхней полуплоскости и сделаете потенциал рассеяния безотражательным, то ваш результат будет отличаться от результата, соответствующего случаю когда вы сначала сделаете потенциал безотражательным, а потом вычислите вычет. Верно?»

¹⁾ Сочетание контрастных или несовместимых слов.

«Совершенно верно. И пример подобного предельного случая рассматривается в задачах 7 и 8, которые являются частью домашней работы на эту неделю.»

[Стонь]

«Я хотел бы сказать несколько слов о коэффициентах нормализации c_n^2 для связанных состояний, которые играют ключевую роль в равенстве (6.32). Если связанные состояния имеют асимптотическое поведение при $x \rightarrow +\infty$ вида $\exp(-\kappa_n x)$, то эти коэффициенты определяются равенством (6.13). Асимптотическое поведение при $x \rightarrow +\infty$ собственных функций нормализованных связанных состояний имеет вид $c_n \exp(-\kappa_n x)$. В любом случае, вычет соответствующего полюса коэффициента отражения равен ic_n^2 .»

«Почему это представляется важным?» — спрашивает другой студент.

«В случае безотражательного потенциала вычеты удобно определять из свойств связанного состояния.»

[Пауза]

«И ...»

«Мы пришли другим путем к тем же заключениям, что были сделаны в конце главы 2, но с тем преимуществом, что поняли связь между константами нормировки связанных состояний и вычетами соответствующих полюсов коэффициентов отражения. Мы используем эти результаты для того, чтобы решить нелинейное волновое уравнение.»

6.2. Метод обратной задачи рассеяния для КдВ-уравнения

6.2.1. Общее описание

Во введении к этой главе читателю было предложено проверить, что $u(x, t)$ является решением КдВ-уравнения

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

если справедливо операторное уравнение

$$L_t = ML - LM \equiv [M, L],$$

где

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t)$$

и

$$M = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x.$$

В предыдущем разделе мы исследовали решения задачи на собственные значения

$$L\psi = \lambda\psi \quad (6.33)$$

и выяснили, как ее спектр связан с потенциалом рассеяния $u(x, t)$. Дифференцируя (6.33) по времени, получаем

$$L_t\psi + L\psi_t = \lambda_t\psi + \lambda\psi_t.$$

Задав эволюцию ψ законом

$$\psi_t = M\psi, \quad (6.34)$$

мы можем переписать предыдущее уравнение в следующем виде:

$$\{L_t + [L, M]\}\psi = \lambda_t\psi.$$

Таким образом, если эволюция ψ определяется равенством (6.34) и $u(x, t)$ является решением КдВ-уравнения, то спектр уравнения (6.33) не зависит от времени. Это свойство будет той основой, на которой будет построен метод обратной задачи рассеяния для решения КдВ-уравнения.

Интересно рассмотреть вопрос о том, как временная эволюция, предопределенная равенством (6.34), влияет на решения рассеяния, рассмотренные в предыдущем разделе и изображенные на рисунке 6.1. Коэффициент отражения $b(k)$ определяется как отношение отраженной волны

$$\psi_{\text{refl.}} \sim b(k)e^{ikx}$$

к падающей волне

$$\psi_{\text{inc.}} \sim e^{-ikx}.$$

Поскольку падающая и отраженная волны определяются в предельном случае $x \rightarrow +\infty$, когда величины u и u_x равны нулю, равенство (6.34) принимает более простую форму

$$\psi_t = -4\partial^3\psi/\partial x^3.$$

Из этого равенства следует, что падающая и отраженная волны зависят от времени следующим образом:

$$\psi_{\text{refl.}} \sim b(k)e^{i(kx+4k^3t)}$$

и

$$\psi_{\text{inc.}} \sim e^{-i(kx+4k^3t)}.$$

Таким образом, эволюция коэффициента отражения определяется следующим простым равенством:

$$b(k, t) = b(k, 0)e^{+8ik^3t}. \quad (6.35)$$

Поскольку решения связанных состояний были получены путем продолжения решений рассеяния на верхнюю половину k -плоскости, эволюция их нормировочных констант (или вычетов) определяется равенством

$$c_N^2(t) = c_N^2(0)e^{+8i\kappa_n^3t}. \quad (6.36)$$

С учетом всех этих результатов МОЗР для КдВ-уравнения может быть описан следующей последовательностью действий.

1. Задав начальное условие

$$u(x, 0) = f(x),$$

определим собственные числа κ_n связанного состояния, их вычеты $c_n^2(0)$ при $n = 1, 2, \dots, N$ и $b(k, 0)$ для вещественных значений k . Этот набор представляет собой так называемые «данные рассеяния» в момент времени $t = 0$.

2. С использованием (6.35) и (6.36) вычислим $c_n^2(t)$ и $b(k, t)$ — данные рассеяния при $t > 0$.
3. С использованием равенства (6.32) из предыдущего раздела и данных рассеяния при $t > 0$ вычислим

$$B(x+z; t) = \sum_{n=1}^N c_n^2(0) e^{-\kappa_n(x+z) + 8\kappa_n^3 t} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k, 0) e^{i[k(x+z) + 8k^3 t]} dk. \quad (6.37)$$

4. Решим уравнение Гельфанда–Левитана

$$K(x, z) + B(x+z) + \int_x^\infty K(x, y) B(y+z) dy = 0$$

относительно $K(x, z; t)$.

5. Вычислим

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x; t).$$

6.2.2. Примеры

Одиночный солитон

В качестве первого примера применения МОЗР рассмотрим исследованную в конце главы 2 проблему в предположении, что $u(x, t)$ должно быть решением КдВ-уравнения и

$$u(x, 0) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa x.$$

Соответствующее уравнение Шредингера имеет вид

$$\psi_{xx} + (k^2 + 2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa x) \psi = 0,$$

для которого $b(k, 0)$ равен нулю и, следовательно, $b(k, t)$ также равен нулю. При $k = i\kappa$ имеется единственное собственное значение

связанного состояния и соответствующая нормализованная собственная функция удовлетворяет условию

$$\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \operatorname{sech} \kappa x \rightarrow \sqrt{2\kappa} \exp(-\kappa x) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty,$$

т. е. $c^2(0) = 2\kappa$. Таким образом, в момент времени $t = 0$

$$B(x+z; 0) = 2\kappa e^{-\kappa(x+z)}$$

и

$$B(x+z; t) = 2\kappa e^{-\kappa(x+z) + 8\kappa^3 t}.$$

Как было отмечено в главе 2, при таком отражении величина $K(x, z; t)$ пропорциональна $\exp(-\kappa x)$ и, следовательно, уравнение Гельфанда–Левитана имеет решение

$$K(x, z; t) = -\frac{2\kappa e^{-\kappa(x+z) + 8\kappa^3 t}}{1 + e^{-2\kappa x + 8\kappa^3 t}}.$$

Тогда равенство

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x; t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 [\kappa(x - 4\kappa^2 t)]$$

определяет одиночный КдВ-солитон со скоростью $v = 4\kappa^2$.

Двух-солитонные столкновения

Читатель возможно заметит, что МОЗР является избыточно сложным методом нахождения формулы для одиночного солитона, но для получения формул взаимодействия более чем одного солитона этот метод является наиболее эффективным. Для вывода формулы для столкновения двух солитонов положим

$$u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x.$$

Тогда соответствующее уравнение Шредингера будет иметь вид

$$\psi_{xx} + (k^2 + 6 \operatorname{sech}^2 x) \psi = 0.$$

Для этого уравнения $b(k) = 0$ и две собственные функции связанного состояния, ведущих себя в пределе $x \rightarrow \infty$ как $e^{-\kappa x}$. Этими функциями являются:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{2} \tanh x \operatorname{sech} x, & \kappa_1 &= 1, & c_1^2(0) &= 6, \\ \psi_2(x) &= \frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 x, & \kappa_2 &= 2, & c_2^2(0) &= 12. \end{aligned}$$

Тогда

$$B(x+z; t) = 6 e^{8t-(x+z)} + 12 e^{64t-2(x+z)}$$

и, следовательно,

$$K(x, z; t) = K_1(x, z; t) e^{-\kappa_1 x} + K_2(x, z; t) e^{-\kappa_2 x}.$$

Решение соответствующего уравнения Гельфанда–Левитана имеет вид

$$K(x, z; t) = \frac{6e^{-z}(e^{72t-5x} - e^{8t-x}) - 12e^{-2z}(e^{64t-2x} + e^{72t-4x})}{1 + 3e^{8t-2x} + 3e^{64t-4x} + 2e^{72t-6x}}.$$

Наконец

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial K(x, x; t)}{\partial x} = -12 \frac{3 + 4 \operatorname{ch}(2x - 8t) + \operatorname{ch}(4x - 64t)}{[3 \operatorname{ch}(x - 28t) + \operatorname{ch}(3x - 36t)]^2}.$$

Это выражение представляет собой решение Забуски для двух-солитонного столкновения, полученное в главе 3 с использованием преобразования Бэклунда и изображенное на рисунке 3.3.

N-солитонные решения

Дразин и Джонсон показали, что если

$$u(x, 0) = -N(N+1) \operatorname{sech}^2 x,$$

то $b(k, 0) = 0$ и N дискретным собственным значениям в [10]

$$k = i\kappa_n = in \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

соответствуют собственные функции уравнения Шредингера

$$\psi_n(x) \propto P_N^n(\operatorname{th} x),$$

где $P_N^n(\cdot)$ — присоединенная функция Лежандра ¹⁾, о которой известно много результатов [14]. Тогда

$$B(x+z; t) = \sum_{n=1}^N c_n^2(0) e^{8n^3 t - n(x+z)},$$

и решение уравнения Гельфанда–Левитана может быть записано в следующем виде:

$$K(x, z; t) = \sum_{n=1}^N v_n(x, t) e^{-nz},$$

где v_n — элементы вектор-столбца \mathbf{V} , удовлетворяющего матричному уравнению

$$\mathbf{A}\mathbf{V} + \mathbf{D} = \mathbf{0}.$$

В этом уравнении \mathbf{D} — вектор-столбец с элементами $c_n^2(0) \exp(8n^3 t - nx)$ и $\mathbf{A} = [a_{mn}]$ — $(N \times N)$ -матрица с элементами

$$a_{mn} = \delta_{mn} + \left(\frac{c_m^2(0)}{m+n} \right) e^{8m^3 t - (m+n)x}.$$

¹⁾ Андриен-Мари Лежандр (1752-1833) — французский математик.

Наконец,

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log |A|, \quad (6.38)$$

и это решение является частным случаем N -солитонного решения, представленного в Приложении В.

Выражение (6.38) представляет собой суперпозицию N солитонов вида

$$-2n^2 \operatorname{sech}^2[n(x - 4n^2 t) + \theta_n],$$

в дополнение к $-N(N+1) \operatorname{sech}^2 x$ в $t = 0$. Однако при $t \rightarrow +\infty$ они разворачиваются в вереницу sech^2 волн, в начале которой идет волна с наибольшими скоростью и амплитудой.

Начальное условие с дельта-функцией

В рассмотренных выше примерах начальные потенциалы были безотражательными $b(k, 0) = b(k, t) = 0$.

Пример с не безотражательным потенциалом был рассмотрен в разделе 2.6.1 в предположении, что начальное условие имеет вид

$$u(x, 0) = \alpha \delta(x),$$

при котором выполнено равенство

$$b(k, 0) = \frac{\alpha}{2ik - \alpha}.$$

При $\alpha < 0$ этот потенциал порождает нормализованное связанное состояние

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{-\alpha/2} e^{+\alpha x/2} & \text{при } x > 0 \\ \sqrt{-\alpha/2} e^{-\alpha x/2} & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

а при $\alpha > 0$ связанного состояния не существует.

Тогда при $\alpha < 0$

$$B(x+z; t) = -\frac{\alpha}{2} e^{\alpha(x+z)/2 - \alpha^3 t} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha e^{i[k(x+z)/2 + 8k^3 t]}}{2ik - \alpha} dk.$$

Решив уравнение Гельфанда–Левитана, мы получаем при $t \rightarrow +\infty$

$$u(x, t) \rightarrow -\frac{\alpha^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[-\frac{\alpha}{2}(x - \alpha^2 t - x_0) \right] + \text{излучение}, \quad (6.39)$$

где солитонная компонента образуется первым членом из выражения для $B(x+z; t)$, а компонента излучения — вторым членом этого выражения. Поскольку излучение не локализовано, оно рассеивается вдоль x -оси и соответствующая компонента постепенно становится пренебрежимо малой по сравнению с солитонной компонентой.

Прямоугольные начальные условия

Как мы видели ранее (см. рисунок 1.1) при проведении первоначальных экспериментов с солитонами в цистерне для их возбуждения при $t = 0$ использовалась масса воды прямоугольной формы, которая эволюционировала в солитон согласно, как мы теперь знаем, КдВ-уравнению. В контексте обсуждаемых в этом разделе проблем подобное начальное условие может быть записано в следующем виде:

$$u(x, 0) = \begin{cases} -u_0 & \text{при } |x| < x_0/2 \\ 0 & \text{при } |x| > x_0/2. \end{cases} \quad (6.40)$$

Шредингеровская задача рассеяния для этого прямоугольного потенциала была исследована в квантовой механике [18, 27] и полученный результат заключался в том, что существует конечное число связанных состояний, зависящее от ширины x_0 и глубины u_0 начального углубления воды. В частности, если

$$(N+1)^2 \pi^2 > u_0 x_0^2 > N^2 \pi^2, \quad (6.41)$$

то существует $N+1$ связанных состояний.

Каждое связанное состояние соответствует солитонному компоненту в решении КдВ-уравнения и это согласуется с экспериментальными данными о гидродинамических волнах в цистерне: N гидродинамических солитонов возникают из первоначально прямоугольных углублений воды, удовлетворяющих вышеприведенным неравенствам [5, 24]. Это явление впервые наблюдалось Расселом, который опубликовал волновые профили (см. рисунок 6.2) и прокомментировал их следующим образом [26]: «... составная или двойная волна первого рода сразу же разрушается и порождает две волны, большая из которых движется быстрее и опережает малую.»

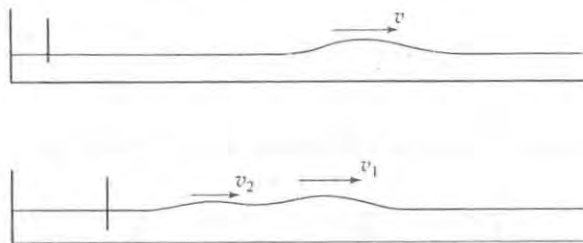


Рис. 6.2. В ходе экспериментов в цистерне (см. рисунок 1.1) Джон Скотт Рассел наблюдал, как две или более одиночных волны образуются при принудительном поднятии и свободном опускании некоторой массы воды. Заметим, что $v_1 > v_2$. (Воспроизведено из [26].)

6.2.3. Анализ Фурье в предельном случае малой амплитуды

С вычислительной точки зрения метод обратной задачи рассеяния аналогичен рассмотренному в главе 2 методу преобразования Фурье для линейных систем. В обоих случаях процедура состоит из трех шагов:

1. Начальное условие $u(x, 0)$ представляется в виде преобразованной функции.
2. Поскольку эволюция преобразованной функции во времени задается простым выражением, она может быть легко вычислена в моменты времени большие нуля.
3. Знание значения преобразованной функции в некоторый момент времени $t > 0$ позволяет вычислить $u(x, t)$.

Интересно отметить, что при приближении амплитуды волны к нулю, а КдВ-уравнения — к линейной системе

$$u_t + u_{xxx} = 0,$$

МОЗР сводится к методу Фурье (МФ).

Для того, чтобы убедиться в этом, напомним, что при использовании МОЗР получается решение

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, z; t),$$

где $K(x, z; t)$ — решение уравнения Гельфанда–Левитана. Интегральный член этого уравнения включает произведение переменных амплитуд и поэтому в предельном случае малой амплитуды он становится достаточно мал по сравнению с линейными членами. Таким образом, уравнение Гельфанда–Левитана сводится к следующему равенству

$$K(x, z; t) = -B(x + z; t)$$

и соответствующее решение может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &\doteq 2 \frac{\partial}{\partial x} B(2x; t) \doteq \\ &\doteq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [2ikb(k, 0)] e^{2ikx + 8ik^3 t} dk. \end{aligned}$$

Заметим, что это решение было получено в предположении, что $b(k, 0)$ не имеет полюсов в верхней полуплоскости. Сделав замену переменной интегрирования с k на $2k$ и введя обозначение

$$ikb(k/2) \equiv U(k),$$

мы получаем

$$u(x, t) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(k) e^{i(kx + k^3 t)} dk, \quad (6.42)$$

где величина

$$U(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx$$

представляет собой преобразование Фурье начального условия.

Предположение о том, что коэффициент отражения не имеет полюсов в верхней полуплоскости не может быть обеспечено простым выбором достаточно малой величины $u(x, 0)$. Например, при прямоугольном потенциале (6.40) мы получаем связанное состояние для любого значения $u_0 > 0$. Тем не менее, в подобных случаях удобно использовать (6.42), т. к. полюса $U(k)$ в верхней полуплоскости делают вклад в $u(x, 0)$ при $x > 0$, подобно тому, как полюса в нижней полуплоскости делают вклад $u(x, 0)$ при $x < 0$. Таким образом, метод обратной задачи рассеяния для КдВ-уравнения может рассматриваться как нелинейное обобщение метода Фурье.

Так же как и для метода Фурье, существуют численные методы вычисления нелинейного спектра параметров МОЗР [6.25].

6.3. Двухкомпонентная теория рассеяния

В предыдущих разделах мы предприняли обзор классической теории рассеяния для уравнения Шредингера и рассмотрели метод обратной задачи рассеяния для решения КдВ-уравнения. На первый взгляд МОЗР имеет ограниченную область применения, т. к. мы применили его лишь к решению КдВ-уравнения, однако в 1971 году Захаров и Шабат обобщили этот метод на случай нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [31] с использованием матричного обобщения линейного оператора Шредингера. В 1974 году Тахтаджан и Фаддеев предложили матричный МОЗР для СГ-уравнения [29] и примерно в это же время Абловиц, Кауп, Ньюелл, Сегур и другие авторы [2,3] разработали аналогичную методику, которую можно одновременно использовать для решения СГ-уравнений и НУШ. В этом разделе мы рассмотрим обобщение МОЗР на случай двухкомпонентного рассеяния, предложенное Абловицем и его коллегами. Для того, чтобы изложение материала было более понятным читателю, мы представим его так, как были изложены материалы в предыдущих разделах.

6.3.1. Линейная теория

При двухкомпонентном рассеянии оператор L и волна ψ в задаче на собственное значение

$$L\psi = \lambda\psi \quad (6.43)$$

становятся соответственно (2×2) -матричным оператором и вектор-функцией:

$$L = i \begin{bmatrix} \partial_x & -q(x) \\ -\sigma q^*(x) & -\partial_x \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{bmatrix}. \quad (6.44)$$

Параметр σ представляет собой вещественное число (обычно ± 1) и $q(x)$ — комплексная функция от x , которая играет роль потенциала, на котором рассеиваются приходящие волны. Кроме того, предполагается, что в пределах $x \rightarrow \pm\infty$ потенциал $q(x)$ становится равным нулю. Заметим, что если $\psi(x; \lambda)$ является решением уравнения (6.43) для вещественного λ , то вектор-функция $\hat{\psi}(x; \lambda)$, определенная равенством

$$\hat{\psi}(x; \lambda) = \hat{I}\psi^*(x; \lambda), \quad \text{где} \quad \hat{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.45)$$

представляет собой линейно независимое решение, соответствующее тому же собственному значению λ .

В предельном случае $x \rightarrow \pm\infty$ задача на собственное значение (6.43) имеет два линейно независимых решения

$$\mathbf{v}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{+i\lambda x} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}^- = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\lambda x}.$$

Вектора \mathbf{v}^+ и \mathbf{v}^- представляют собой соответственно правую и левую бегущую волну, причем $\mathbf{v}^-(x)$ равен $\hat{\mathbf{v}}^+(x)$. Как и в случае уравнения Шредингера, собственные значения $\lambda = \lambda_n$ с положительными мнимыми частями соответствуют связанным состояниям, становящимся равными нулю в предельных случаях $x \rightarrow \pm\infty$.

Для непрерывных собственных значений λ мы можем записать решение ψ^+ уравнения (6.43) в следующей форме:

$$\psi^+(x, \lambda) = \begin{cases} \mathbf{v}^- + b(\lambda)\mathbf{v}^+ & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ a(\lambda)\mathbf{v}^- & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (6.46)$$

Это решение может быть интерпретировано как левая бегущая волна \mathbf{v}^- , ударяющаяся в потенциал q справа, частично переходящая в волну $a\mathbf{v}^-$ с коэффициентом прохождения $a(\lambda)$ и частично отражающаяся в виде волны $b\mathbf{v}^+$ с коэффициентом отражения $b(\lambda)$. С другой стороны, мы можем рассмотреть другую волну, ударяющую потенциал слева. В этом случае мы имеем функцию ψ^- , определяемую равенством

$$\psi^-(x, \lambda) = \begin{cases} \mathbf{v}^+ + d(\lambda)\mathbf{v}^- & \text{при } x \rightarrow -\infty \\ c(\lambda)\mathbf{v}^+ & \text{при } x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (6.47)$$

где $c(\lambda)$ и $d(\lambda)$ — коэффициенты прохождения и отражения, соответственно. Поскольку ψ^+ и ψ^- линейно независимы, общее решение ψ двухкомпонентной задачи рассеяния (6.43) может быть представлено в следующей форме:

$$\psi(x, \lambda) = A(\lambda)\psi^+ + B(\lambda)\psi^- \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty.$$

Из определений ψ^+ и ψ^- (6.46) и (6.47) получаем

$$\psi(x, \lambda) = \begin{cases} A\mathbf{v}^- + (Ab + Bc)\mathbf{v}^+ & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ (Aa + Bd)\mathbf{v}^- + B\mathbf{v}^+ & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Это равенство аналогично равенству (6.8) из раздела 6.1.1, так что представленное в этом разделе обсуждение предельного поведения A, B, a, b, c и d при стремлении λ к полюсу в верхней полуплоскости коэффициентов отражения и прохождения может быть перенесено и на рассматриваемый в этом разделе случай. Для того, чтобы вектор ψ оставался конечным при стремлении λ к полюсу, необходимо обеспечить стремление A и B к нулю и конечность множителей $(Ab + Bc)$ и $(Aa + Bd)$. Это предельное значение ψ является решением связанного состояния, для которого коэффициенты отражения и прохождения имеют полюса в λ_n при $\text{Im}[\lambda_n] > 0$.

Однако рассматриваемая здесь задача имеет важное отличие от стандартной задачи рассеяния Шредингера: не требуется, чтобы полюса были простыми. В этом разделе предполагается, что все полюса в верхней полуплоскости являются простыми, но это предположение не является слишком ограничительным требованием, т. к. кратные полюса могут рассматриваться как предельный случай слияния простых полюсов.

Выражения для предельных решений \mathbf{v}^+ и \mathbf{v}^- справедливы лишь в областях $x \rightarrow \pm\infty$, где потенциал $q(x)$ становится равным нулю. Для решения задачи в областях с ненулевым потенциалом удобно сделать следующие предположения для решений уравнения (6.43):

$$\psi^+(z, \lambda) = \left[e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K_2(x, z) e^{i\lambda z} dz \right], \quad (6.48)$$

и

$$\psi^-(z, \lambda) = \left[e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^x L_2(x, z) e^{-i\lambda z} dz \right]. \quad (6.49)$$

Эти решения аналогичны функциям Иоста (6.12) и мы опять будем предполагать, что интегральные ядра и их частные производные по z становятся равными нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Функция $\psi^-(x, \lambda)$ может быть записана в виде линейной комбинации

$$\psi^-(x, \lambda) = C\hat{\psi}^+(x, \lambda) + D\psi^+(x, \lambda), \quad (6.50)$$

где $\hat{\psi}^+$ определяется так же, как и $\hat{\psi}$ в (6.45).

Разделив на C и рассмотрев предельные случаи, получаем

$$\frac{1}{C}\psi^- = \begin{cases} \mathbf{v}^-(x, \lambda) + D/C\mathbf{v}^+(x, \lambda) & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ 1/C\mathbf{v}^-(x, \lambda) & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Сравнение этого равенства с выражением для ψ^+ (6.46) показывает, что $\psi^- = C\psi^+$ при

$$\frac{1}{C} = a \quad \text{и} \quad \frac{D}{C} = b.$$

С учетом этого результата равенство (6.50) может быть переписано в следующем виде:

$$\psi^-(x, \lambda) = \frac{1}{a}\hat{\psi}^+(x, \lambda) + \frac{b}{a}\psi^+(x, \lambda). \quad (6.51)$$

В полюсе верхней полуплоскости λ_n , соответствующем номеру связанного состояния n , два решения ψ^- и ψ^+ связаны друг с другом соотношением

$$\psi^-(x, \lambda_n) = \frac{b_{-1,n}}{a_{-1,n}}\psi^+(x, \lambda_n), \quad (6.52)$$

поскольку $1/a(\lambda_n) = 0$.

Соотношение между ядрами K_1 и K_2 и q может быть найдено из равенства

$$L\psi^+ = \lambda\psi^+. \quad (6.53)$$

Правую часть этого равенства можно найти, выполнив интегрирование по частям в выражении для ψ^+ :

$$\psi^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\lambda x} + \frac{i}{\lambda} \begin{bmatrix} K_1(x, x) \\ K_2(x, x) \end{bmatrix} e^{i\lambda x} + \frac{i}{\lambda} \int_x^\infty \begin{bmatrix} K_{1,z}(x, z) \\ K_{2,z}(x, z) \end{bmatrix} e^{i\lambda z} dz. \quad (6.54)$$

Левая часть этого равенства вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} L\psi^+ = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\lambda x} + \begin{bmatrix} -iK_1(x, x) \\ iK_2(x, x) \end{bmatrix} e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \begin{bmatrix} iK_{1,x}(x, z) \\ -iK_{2,x}(x, z) \end{bmatrix} e^{i\lambda z} dz + \\ + \begin{bmatrix} -iq e^{i\lambda x} - iq \int_x^\infty K_2(x, z) e^{i\lambda z} dz \\ -i\sigma q^* \int_x^\infty K_1(x, z) e^{i\lambda z} dz \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

После подстановки (6.55) и (6.54) в (6.53) получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} C_{11}(x) e^{i\lambda x} + \int_x^\infty C_{12}(x, z) e^{i\lambda z} dz &= 0 \\ C_{21}(x, x) e^{i\lambda x} + \int_x^\infty C_{22}(x, z) e^{i\lambda z} dz &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_{11} &\equiv 2K_1(x, x) + q(x) \\ C_{12} &\equiv K_{1,z}(x, z) - K_{1,x}(x, z) + qK_2(x, z) \\ C_{21} &\equiv K_2(x, x) - K_2(x, x) = 0 \\ C_{22} &\equiv K_{2,x}(x, z) + K_{2,z}(x, z) + \sigma q^* K_1(x, z). \end{aligned}$$

Поскольку все коэффициенты C_{ij} должны быть равны нулю, мы получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных для ядер

$$\begin{aligned} K_{1,x}(x, z) - K_{1,z}(x, z) &= qK_2(x, z) \\ K_{2,x}(x, z) + K_{2,z}(x, z) &= -\sigma q^* K_1(x, z) \end{aligned} \quad (6.56)$$

и дополнительное соотношение

$$q(x) = -2K_1(x, x). \quad (6.57)$$

Равенства (6.56) справедливы для всех z , включая $z = x$, поэтому

$$|q(x)|^2 = \frac{2}{\sigma} \frac{d}{dx} K_2(x, x). \quad (6.58)$$

Система уравнений (6.56) связывает ядра и потенциал q . (Заметим, что равенства (6.56) и (6.57) представляют собой граничные условия на K_1 и K_2 вдоль линии $z = x$, что гарантирует единственность решения системы (6.56).)

В задаче рассеяния для уравнения Шредингера используется интегральное уравнение Гельфанда-Левитана, из которого определяется ядро в выражении для решения рассеянной волны. Для двухкомпонентной задачи рассеяния соответствующее интегральное уравнение может быть выведено с использованием полученных в предыдущих разделах результатов. Для этого рассмотрим (6.51), где

$$\psi^+(x, \lambda) \equiv \begin{bmatrix} \phi_1^+(x, \lambda) \\ \phi_2^+(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

и

$$\psi^-(x, \lambda) \equiv \begin{bmatrix} \phi_1^-(x, \lambda) \\ \phi_2^-(x, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Умножим левую и правую части (6.51) на a :

$$a\phi_1^-(x, \lambda) = \phi_2^{*+}(x, \lambda^*) + b\phi_1^+(x, \lambda) \quad (6.59)$$

$$a\phi_2^-(x, \lambda) = -\sigma\phi_1^{*+}(x, \lambda^*) + b\phi_2^+(x, \lambda). \quad (6.60)$$

Разделим левую часть равенства (6.59) на 2π , умножим на $\exp(i\lambda z)$ и проинтегрируем по λ на промежутке от $-\infty$ до $+\infty$. Применяя теорему Коши вдоль замкнутого контура, распространенного на верхнюю полуплоскость, получаем

$$\begin{aligned} \text{Левая часть (6.59)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a\phi_1^-(x, \lambda) e^{i\lambda z} dz = \\ &= i \sum_{n=1}^N \text{Res}[a(\lambda_n) \phi_1^-(x, \lambda_n) e^{+i\lambda_n z}] = \\ &= i \sum_{n=1}^N b_{-1,n} \int_x^{\infty} K_1(x, y) e^{+i\lambda_n(y+z)} dy. \end{aligned} \quad (6.61)$$

При получении последнего равенства мы использовали (6.52) и определение ϕ^+ (6.48). Величины $b_{-1,n}$ представляют собой вычеты полюсов коэффициента отражения.

Выполнив аналогичные действия в отношении правой части, получаем:

$$\begin{aligned} \text{Правая часть (6.59)} &= \delta(x - z) + \int_x^{\infty} K_2^*(x, y) \delta(z - y) dy = \\ &= \int_x^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) e^{i\lambda(y+z)} d\lambda K_1(x, y) dy. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Приравнявая полученные выражения для обеих частей, мы получаем интегральное уравнение

$$K_2^*(x, z) + \int_x^{\infty} B(y + z) K_1(x, y) dy = 0,$$

где $z > x$ и

$$B(x + z) \equiv -i \sum_{n=1}^N b_{-1,n} e^{i\lambda_n(x+z)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) e^{i\lambda(x+z)} d\lambda. \quad (6.63)$$

Аналогичная процедура может быть применена к равенству (6.60), в результате чего мы получаем второе интегральное уравнение для ядер K_1 и K_2 :

$$-\sigma K_1^*(x, z) + B(x + z) + \int_x^{\infty} B(y + z) K_2(x, y) dy = 0. \quad (6.64)$$

Комбинируя эти два уравнения, мы получаем окончательный результат

$$\sigma K_1(x, z) = B^*(x + z) + \int_x^{\infty} \int_x^{\infty} K_1(x, y) B(y + y') B^*(y' + z) dy dy', \quad (6.65)$$

где $B(x + z)$ определяется данными рассеяния: $b(\lambda)$, $\{\lambda_n\}$ и $b_{-1,n}$, $n = 1, 2, \dots, N$. Решив это интегральное уравнение относительно $K_1(x, z)$, получаем

$$q(x) = -2K_1(x, x).$$

В следующем разделе мы увидим, как эта теория может быть применена в контексте МОЗР для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

6.3.2. МОЗР для двухкомпонентного рассеяния

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$q_t = N(q), \quad (6.66)$$

которое должно быть решено с использованием МОЗР и двухкомпонентного матричного оператора L (6.44). Одним из путей решения этой задачи является предложенный Захаровым и Шабатом подход [31], согласно которому следует найти матричный оператор M , для которого из операторного уравнения $L_t = [M, L]$ следует уравнение (6.66), но этот путь не простой.

Более систематический метод был предложен Абловицем и его коллегами [3]. Заметим, что уравнение (6.43) может быть переписано в следующей форме:

$$\begin{aligned} \psi_{1,x} &= -i\lambda\psi_1 + q(x, t)\psi_2 \\ \psi_{2,x} &= i\lambda\psi_2 - \sigma q^*(x, t)\psi_1. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Зависимость ψ_1 и ψ_2 от времени может быть представлена в следующем общем виде

$$\begin{aligned} \psi_{1,x} &= A\psi_1 + B\psi_2 \\ \psi_{2,x} &= C\psi_1 + D\psi_2, \end{aligned} \quad (6.68)$$

где A, B, C и D — операторы, подлежащие определению. Можно ожидать, что эти операторы могут содержать дифференцирование по x , но это не обязательно, поскольку какие-либо производные по x в правой части (6.68) могут быть исключены путем подстановки соответствующих выражений из (6.67). Таким образом, можно полагать, что элементами матрицы

$$V = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

являются функции от q, q^* и их производных по x , а также от λ .

Однако, имеется одно ограничение на матрицу V : производная по x функции (6.68) должна быть равна производной по t функции (6.67) для того, чтобы ψ была однозначной функцией от x и t . В предположении $\lambda_t = 0$ из этого требования на перекрестные производные следует

$$D = -A,$$

а для выполнения этого требования необходимо

$$\begin{aligned} A_x &= qC + \sigma q^*B \\ B_x + 2i\lambda B &= q_t - 2Aq \\ C_x - 2i\lambda C &= -\sigma q_t^* - 2A\sigma q^*. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Таким образом, исходная задача свелась к следующей: найти решения (6.69), из которых следует уравнение (6.66). Как можно решить эту задачу?

Один из подходов основан на предположении о том, что A, B и C представляют собой усеченные степенные ряды по λ . Например, можно рассмотреть случай [3]

$$\begin{aligned} A &= A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 \\ B &= B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 \\ C &= C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2. \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в (6.69) следует приравнять члены при одинаковых степенях λ . В результате мы имеем:

- Приравнивая члены при λ^3 получаем, что $B_2 = C_2 = 0$.
- Приравнивая члены при λ^2 получаем, что $A_2 = \text{const}$.
- Приравнивая члены при λ^1 получаем, что $A_1 = \text{const}$. Положим $A_1 = 0$.
- Приравнивая члены при λ^0 получаем

$$q_t = \frac{A_2}{2} q_{xx} + \sigma A_2 |q|^2 q + \text{const} = 0.$$

- Наконец, полагая в этом равенстве $A_2 = -2i, \sigma = +1$ и $\text{const} = 0$, мы получаем НУШ

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = 0.$$

Таким образом, если матрица V имеет элементы

$$\begin{aligned} A &= -2i\lambda^2 + iqq^* \\ B &= 2q\lambda + iq_x \\ C &= -2q^*\lambda + iq_x^* \\ D &= +2i\lambda^2 - iqq^* \end{aligned}$$

и оператор рассеяния L определяется равенством (6.44) из предыдущего раздела (при $\sigma = +1$), то вышеприведенное требование на перекрестные производные приводит к НУШ. Таковы средства, необходимые для решения НУШ с использованием МОЗР.

Очевидно, что представленное выше обсуждение представляет собой лишь намек на те возможности, которые возникают при рассмотрении различных форм матрицы M в контексте решения нелинейных волновых уравнений. Степенные ряды для A, B, C и D могут содержать большее или меньшее количество членов, константы могут быть выбраны не нулевыми. В этих случаях в результирующем дифференциальном уравнении в частных производных могут возникнуть дополнительные члены. В книге Абловица и Сегура обсуждается несколько подобных случаев, которые могут представлять интерес для исследователей в области прикладных наук, включая НУШ и форму СГ-уравнения [4].

В последующих разделах будут рассмотрены СГ-уравнения и НУШ, поскольку они представляют наибольший интерес для приложений.

6.4. Уравнение синус-Гордона

В главе 3 было рассмотрено СГ-уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u, \quad (6.70)$$

которое описывает динамику перехода Джозефсона, а также одномерную систему связанных маятников. В первом случае (см. рисунок 3.4) переменной u соответствует разность фаз сверхпроводящих волновых функций в слое изолятора. Во втором случае (см. рисунок 3.5) переменной u соответствует угол поворота маятника.

Для того, чтобы исследовать СГ-уравнение с использованием МОЗР удобно сделать замену исходных переменных ¹⁾

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \xi = (x+t)/2 \\ t &\rightarrow \tau = (x-t)/2 \\ u(x, t) &\rightarrow \phi(\xi, \tau) = u(x, t), \end{aligned}$$

после которой уравнение (6.70) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \tau} = \sin \phi. \quad (6.71)$$

Если в качестве оператора L в (6.43) выбрать

$$L = i \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & \phi_\xi/2 \\ \phi_\xi/2 & -\frac{\partial}{\partial \xi} \end{bmatrix},$$

то двухкомпонентные уравнения рассеяния могут быть записаны в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\lambda & -\phi_\xi/2 \\ \phi_\xi/2 & i\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}.$$

При τ -эволюции, определяемой уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \frac{i}{4\lambda} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad (6.72)$$

из условия на перекрестные производные

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

следует уравнение (6.71), что составляет базис для применения МОЗР.

¹⁾ Эти новые переменные иногда называют координатами «светового конуса», т. к. они направлены вдоль характеристических линий на (x, t) -плоскости.

В предположении, что $\phi \rightarrow 0 \pmod{2\pi}$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$, матрица временной эволюции в (6.72) принимает простой вид

$$V \rightarrow \frac{i}{4\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда временная эволюция коэффициента отражения и вычетов полюсов верхней полуплоскости определяется равенствами

$$\begin{aligned} b(\lambda, \tau) &= b(\lambda, 0) e^{-i\tau/2\lambda} \\ r_n(\tau) &= r_n(0) e^{-i\tau/2\lambda_n} \end{aligned}$$

и с использованием результатов раздела 6.3.1 можно получить следующее решение

$$\phi_\xi(\xi, \tau) = 4K(\xi, \xi; \tau), \quad (6.73)$$

где $K(\xi, z; \tau)$ — решение интегрального уравнения

$$K(\xi, z; \tau) = B^*(\xi + z; \tau) - \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} K(\xi, y; \tau) B(y + y'; \tau) B^*(z + y'; \tau) dy dy'. \quad (6.74)$$

Здесь $z > \xi$ и величина

$$\begin{aligned} B(\xi + z; \tau) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda, 0) e^{i\lambda(\xi+z) - i\tau/2\lambda} d\lambda - \\ &- i \sum_{n=1}^N r_n(0) e^{i\lambda_n(\xi+z) - i\tau/2\lambda_n} \end{aligned} \quad (6.75)$$

определяется из анализа рассеяния начальных условий.

Рассмотрим некоторые применения полученных результатов.

Одиночный кинк/антикинк

Возможно, что простейшим примером использования представленного подхода является случай, когда потенциал является безотражаемым и имеет только одно связанное состояние, соответствующее одиночному полюсу $\lambda_1 = i\kappa$ на мнимой оси верхней половины λ -плоскости с вычетом $r_1 = \pm 2i\kappa$. Тогда

$$B(\xi + z; \tau) = \pm 2\kappa e^{-\kappa(\xi+z) - \tau/2\kappa},$$

так что

$$\begin{aligned} K(\xi, z; \tau) &= \pm 2\kappa e^{-\kappa(\xi+z) - \tau/2\kappa} - \\ &- 4\kappa^2 e^{-\tau/\kappa} \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} K(\xi, y; \tau) e^{-\kappa(y+y')} e^{-\kappa(z+y')} dy dy'. \end{aligned}$$

Поскольку $K(\xi, z; \tau) \propto \exp(-\kappa z)$, это интегральное уравнение может быть легко решено:

$$K(\xi, z; \tau) = \pm \frac{2\kappa \exp[-\kappa(\xi + z) - \tau/2\kappa]}{1 + \exp(-4\kappa\xi - \tau/\kappa)}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \pm 4K(\xi, \xi; \tau) = \pm 4\kappa \operatorname{sech}(2\kappa\xi + \tau/2\kappa)$$

и, следовательно,

$$\phi(\xi, \tau) = 4 \operatorname{arctg}\{\exp[\pm(2\kappa\xi + \tau/2\kappa)]\}.$$

При переходе к исходным (x, t) -координатам мы получаем известное кинк/антикин-решение уравнения (6.70):

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\pm \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right],$$

где v — скорость, определяемая равенством

$$v = \frac{1 - 4\kappa^2}{1 + 4\kappa^2} = \frac{1 + 4\lambda_1^2}{1 - 4\lambda_1^2}. \quad (6.76)$$

Разумеется, существуют более простые способы получения выражения для СГ-кин-ка, но при использовании представленного подхода мы получили выражение для скорости (6.76), которое связывает скорость кинк-солитона с положением полюса верхней полуплоскости для коэффициента отражения в $\lambda_1 = i\kappa$.

Интересно отметить, что в $\lambda_1 = i/2$ и в (x, t) -координатах кинк является стационарным. Кроме того, v изменяется от $+1 \rightarrow 0$ при изменении κ от $0 \rightarrow 1/2$ и v изменяется от $0 \rightarrow -1$ при изменении κ от $1/2 \rightarrow +\infty$.

Прямоугольные начальные условия

Поскольку в качестве начальной точки была выбрана $B(\xi + z; 0)$, в предыдущем примере не используются все преимущества МОЗР. Поэтому интересно исследовать динамику ϕ_ξ , эволюционирующей из прямоугольных начальных условий [28]

$$\phi_\xi = \begin{cases} A/p & \text{при } 0 \leq \xi \leq p, \\ 0 & \text{при } \xi < 0 \text{ и } \xi > p. \end{cases} \quad (6.77)$$

В контексте сверхпроводящих переходов Джозефсона (см. рисунок 3.4) это условие соответствует $A/2\pi$ флаксонам, равномерно распределенным по $0 \leq x \leq 2p$. В случае механической системы, изображенной на рисунке 3.5, это условие соответствует $A/2\pi$ оборотам, распределенным аналогичным образом.

Если функции рассеяния определены при $\tau = 0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Падающая волна} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\lambda\xi}, \\ \text{отраженная волна} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} b(\lambda, 0) e^{+i\lambda\xi} \end{aligned}$$

при $\xi \rightarrow -\infty$ и

$$\text{проходящая волна} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} a(\lambda) e^{-i\lambda\xi}$$

при $\xi \rightarrow +\infty$, то можно легко получить соответствующие граничные условия в $\xi = 0$ и $\xi = p$. Мы имеем три результата:

1. Коэффициент отражения

$$b(\lambda, 0) = \frac{A}{2mp} e^{-2i\lambda p} \left[\frac{\sin(mp)}{\cos(mp) - (i\lambda/m) \sin(mp)} \right],$$

где

$$m^2 \equiv (\lambda^2 + A^2/4p^2).$$

2. При $A > (2N - 1)\pi$ существуют N связанных состояний в

$$\lambda_n = i\sqrt{(A/2p)^2 - m_n^2}$$

где m_n — корни уравнения

$$\operatorname{ctg}(mp) + \sqrt{\left(\frac{A}{2mp}\right)^2 - 1} = 0.$$

3. Вычет коэффициента $b(\lambda, 0)$ в λ_n определяется равенством

$$r_n(0) = i \frac{A^2 + 4\lambda_n^2 p^2}{2Ap(1 - i\lambda_n p)} e^{-2i\lambda_n p}.$$

Как мы знаем, каждому связанному состоянию соответствует солитон с асимптотической скоростью $1/4\gamma_n^2$ в (ξ, τ) -координатах, или $(1 + 4\lambda_n^2)/(1 - 4\lambda_n^2)$ — в исходных (x, t) -координатах.

Подставляя эти данные рассеяния в (6.75) для $B(\xi + z; \tau)$, мы получаем решение уравнения (6.74) и решение $\phi_\xi(\xi, \tau)$ уравнения (6.73).

Несмотря на то, что представленная вычислительная процедура кажется достаточно простой, имеются некоторые практические трудности при ее выполнении: (i) Может оказаться трудным вычислить радиационную составляющую решения, которая обусловлена первым членом в (6.75). Для этого могут потребоваться численные методы [25]. (ii) Даже если радиационной составляющей можно пренебречь (полагая $b(\lambda, 0) = 0$), для решения уравнения (6.74) необходимо обратить $(N \times N)$ -матрицу. В реальных случаях переходов Джозефсона величина N может быть равна 100 и более, вследствие чего возникает

необходимость в применении других методов получения численных решений, включая метод Уизема для медленно модулированных периодических волн (см. раздел 3.2.3) и прямое интегрирование уравнение (6.70) [28].

Столкновение кинков с антикинками и бризеры

В главе 3 преобразование Бэклунда использовалось для того, чтобы показать, что СГ-уравнение имеет точные решения, описывающие столкновение кинков с кинками и кинков с антикинками. Рассмотрим равенство (3.84) и положим $u_0 = 0$, $(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) = v$ и

$$\begin{aligned} u_1 &= 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(+ \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right] \\ u_2 &= 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(+ \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Тогда описывающее столкновение решение имеет вид

$$u_{\text{kak}}(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{v} \operatorname{tg} \left(\frac{u_2 - u_1}{4} \right) \right]$$

или более простую форму

$$u_{\text{kak}}(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1 - v^2})}{v \operatorname{ch}(x/\sqrt{1 - v^2})} \right]. \quad (6.78)$$

При соответствующем выборе констант c_1 и c_2 это решения для столкновения кинка с антикинком может быть получено из

$$B(\xi + z; 0) = c_1 e^{-\kappa_1(\xi + z)} + c_2 e^{-\kappa_2(\xi + z)}, \quad (6.79)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}} \\ \kappa_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}}. \end{aligned}$$

При $v \rightarrow 0$ полюса верхней полуплоскости в $\lambda_1 = i\kappa_1$ и $\lambda_2 = i\kappa_2$ сливаются в один полюс двойной кратности в $\lambda = i/2$ и из (6.78) следует, что

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg}(t \operatorname{sech} x). \quad (6.80)$$

В главе 3 было замечено, что если параметр скорости в формуле для кинка-антикинка примет чисто мнимое значение

$$v = \frac{i\omega}{\sqrt{1 - \omega^2}}, \quad \omega < 1,$$

то равенство (6.78) принимает вид

$$u_b = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{1 - \omega^2}}{\omega} \frac{\sin \omega t}{\operatorname{ch} \sqrt{1 - \omega^2} x} \right], \quad (6.81)$$

что соответствует случаю бризера, когда имеются два комплексных полюса в верхней полуплоскости с равными мнимыми частями и вещественными частями противоположных знаков — подобная симметрия необходима для того, чтобы величина $u(x, t)$ принимала вещественные значения.

В следующей главе мы будем исследовать (с использованием многосолитонной теории возмущений) динамику столкновения кинков с антикинками в условиях наличия источника энергии и ее диссипации. Мы покажем, что существует критическое значение величины энергии, ниже которого описываемая равенством (6.78) функция столкновения кинка с антикинком затухает и переходит в бризер, описываемый равенством (6.81).

6.5. Нелинейное уравнение Шредингера

В этом разделе мы рассмотрим вопрос применения МОЗР к НУШ

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0, \quad (6.82)$$

которое было введено в главе 3 как общее описание волновых пакетов в диспергирующей среде. С учетом результатов из раздела 6.3, это уравнение следует из условия на перекрестные производные при

$$L = i \begin{bmatrix} \partial_x & -u(x, t) \\ -u^*(x, t) & -\partial_x \end{bmatrix}$$

и

$$V = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A &= -2i\lambda^2 + i|u|^2 \\ B &= 2u\lambda + iu_x \\ C &= -2u^*\lambda + iu_x^*. \end{aligned}$$

В предположении $u(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ мы получаем

$$V \rightarrow 2i\lambda^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}.$$

Тогда данные рассеяния для задачи

$$L \begin{bmatrix} \psi_1(x, t) \\ \psi_2(x, t) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \psi_1(x, t) \\ \psi_2(x, t) \end{bmatrix}$$

временной эволюции определяются равенствами

$$b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) e^{+4i\lambda^2 t} \quad \text{и} \quad r_n(t) = r_n(0) e^{+4i\lambda^2 t}.$$

Решения уравнения (6.82) могут быть записаны в следующем виде

$$u(x, t) = -2K(x, x; t), \quad (6.83)$$

где $K(x, z; t)$ — решение интегрального уравнения

$$K(x, z; t) = B^*(x + z; t) - \int_x^\infty \int_x^\infty K(x, y; t) B(y + y'; t) B^*(y' + z; t) dy dy' \quad (6.84)$$

и

$$B(x + z; t) \equiv -i \sum_{n=1}^N r_n(0) e^{i[\lambda_n(x+z) + 4\lambda_n^2 t]} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty b(\lambda, 0) e^{i[\lambda(x+z) + 4\lambda^2 t]} d\lambda. \quad (6.85)$$

В контексте решения НУШ с использованием метода обратной задачи рассеяния напомним некоторые результаты, связанные с соответствующими решениями КдВ- и СГ-уравнений.

1. Все решения КдВ-уравнения, а также кинки и антикинки СГ-уравнения, являются вещественными функциями, описываемыми двумя параметрами, соответствующими скорости и положению. В этих случаях вполне естественно обнаружить, что соответствующие полюсы коэффициента отражения лежат на положительной части мнимой оси и имеют чисто мнимые вычеты. Расположение полюса в верхней полуплоскости определяет скорость солитона, а вычет этого полюса представляет собой параметр, определяющий положение солитона.
2. Бризеры СГ-уравнения описываются четырьмя параметрами: (i) скоростью, (ii) частотой колебания, (iii) положением, и (iv) фазой колебания. Для того, чтобы бризер был вещественной функцией от x и t , эти два полюса и два их вычета должны обладать симметрией, $\lambda_1 = -\lambda_2^*$ и $r_1 = -r_2^*$, что обеспечивает наличие четырех параметров, необходимых для решения задачи рассеяния.

Солитон НУШ подобен бризеру СГ-уравнения в том смысле, что он характеризуется также четырьмя параметрами, определяющими скорость, частоту, положение и фазу, однако он не обязательно должен быть вещественной функцией от x и t , т. е. соответствующий полюс может находиться в любой точке верхней λ -полуплоскости и вычет этого полюса может быть произвольным комплексным числом. Для более

полного исследования этой ситуации предположим, что $b(\lambda, 0) = 0$ и рассмотрим одиночный простой полюс в

$$\lambda_1 = \xi + i\eta, \quad \eta > 0$$

с

$$r_1 = \alpha + i\beta,$$

так что

$$B(x + z, t) = (\beta - i\alpha) \exp[(-\eta + i\xi)(x + z) - 8\xi\eta t + 4i(\xi^2 - \eta^2)t].$$

Заметим, что

$$K(x, z; t) \propto \exp[-(\eta + i\xi)z]$$

и, следовательно, уравнение (6.84) может быть решено относительно $K(x, z; t)$, что позволяет найти с использованием (6.83) следующее выражение для солитона НУШ

$$u(x, t) = 2\eta \exp[-2i\xi x - 4i(\xi^2 - \eta^2)t + i\theta_2] \operatorname{sech}[2\eta(x + 4\xi t) + \theta_1],$$

где параметры θ_1 и θ_2 — 2 определяются равенствами

$$e^{\theta_1} = \frac{2\eta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}},$$

$$e^{i\theta_2} = \frac{-\beta + i\alpha}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}.$$

Эти два последних равенства показывают, каким образом положение и фаза солитона связаны с вещественными и мнимыми частями вычета. Заметим, что эти равенства согласуются с (3.106), если идентифицировать амплитуду как $a = 2\eta$, а скорость огибающей как -4ξ .

Заметим, что, как и ранее, полюсы коэффициентов прохождения и отражения не обязательно должны быть простыми для двухкомпонентного оператора рассеяния. В своей первой работе, посвященной МОЗР, Захаров и Шабат показали, что наличие двойного полюса приводит к возникновению двух солитонов, разделенных промежутком, который увеличивается с течением времени как $\log(4\eta^2 t)$ [31]. Аналогичное поведение наблюдается для решения (6.80) кинка и антикинка, разделенных промежутком $2 \log 2t$.

6.6. Законы сохранения

Поскольку в рассмотренных в этой главе задачах рассеяния поведение проходящей волны идентично поведению падающей волны, величина $a(k)$ является константой на решениях МОЗР. Это обстоятельство может быть использовано для получения счетного набора независимых законов сохранения вида

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

где D — плотность сохраняющейся величины и F — ее поток.

В этом разделе мы рассмотрим обобщение бесконечных наборов подобных законов с использованием линейного метода рассеяния Шредингера, а также метода двухкомпонентного рассеяния.

6.6.1. Законы сохранения для КдВ-уравнения

Для рассеяния, определяемого линейным уравнением Шредингера, из выражений (6.5) и (6.12) следует, что

$$\begin{aligned}\psi^+(x, k) &= a(k)\phi_2(x, k) \\ &= a(k) \left[e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x L(x, z) e^{-ikz} dz \right].\end{aligned}$$

Не умаляя общности, эту функцию можно представить в следующей форме [21]

$$\psi^+(x, k) = a(k) e^{-ikx + \alpha(x, k)}.$$

Подстановка этого выражения в уравнение Шредингера дает

$$\alpha_{xx} - 2ik\alpha_x + \alpha_x^2 - u(x, t) = 0.$$

При больших k величина $\alpha_x \rightarrow 0$ может быть представлена в виде ряда

$$\alpha_x(x, k) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n(x)}{(2ik)^n},$$

который может быть решен относительно β_n путем приравнивания коэффициентов при степенях k :

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -u \\ \beta_2 &= -u_x \\ \beta_3 &= u^2 - u_{xx}\end{aligned}$$

и в общем случае

$$\beta_n = \beta_{n-1,x} + \sum_{m=1}^{n-2} \beta_m \beta_{n-m-1}.$$

Рассмотрим предельный случай $x \rightarrow +\infty$. Из (6.5) следует, что

$$\psi^+(x, k) \rightarrow e^{-ikx} + b(k) e^{ikx}.$$

При $|k| \rightarrow \infty$ и $\text{Im}(k) > 0$ мы получаем более простое поведение

$$\psi^+(x, k) \rightarrow e^{-ikx}$$

и, следовательно,

$$a(k) e^{\alpha(k, x)} \rightarrow 1.$$

Таким образом, в этом пределе ($x \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned}-\log a(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_x(x, k) dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2ik)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_n(x) dx.\end{aligned}$$

Поскольку это условие выполнено для любой степени k , величины β_n составляют счетный набор сохраняющихся плотностей для любой нелинейной волновой системы, которая интегрируема с использованием линейного оператора Шредингера.

Эти сохраняющиеся плотности могут быть использованы для получения множества нетривиальных и независимых законов сохранения для КдВ-уравнения. При $\beta_1 = u$ соответствующий закон сохранения имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} - 3u^2) = 0.$$

Это равенство может представлять собой другую запись исходного КдВ-уравнения. Таким образом,

$$D_1 = u \quad \text{и} \quad F_1 = u_{xx} - 3u^2.$$

При $\beta_2 = u_x$ соответствующая сохраняющаяся величина равна нулю для всех $u(x, t)$, которые стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Поскольку в этом случае мы не получаем ничего интересного о решениях КдВ-уравнения, мы причисляем соответствующий закон сохранения к набору «тривиальных» законов сохранения.

При $\beta_3 = u^2 - u_{xx}$ очевидно, что член u_{xx} представляет собой тривиальное дополнение и следующий нетривиальный закон сохранения принимает следующий вид:

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(2uu_{xx} - u_x^2 - 4u^3) = 0.$$

Это равенство представляет собой КдВ-уравнение, умноженное на $2u$. Поэтому

$$D_2 = u^2 \quad \text{и} \quad F_2 = 2uu_{xx} - u_x^2 - 4u^3,$$

и эти функции независимы по отношению к D_1 и F_1 соответственно.

При

$$\beta_4 = 3uu_x - u^2u_x + u_xu_{xx} - u_{xxx}$$

мы опять получаем тривиальную плотность, поскольку она может быть представлена в виде полной производной по x . В общем случае все β_n являются в этом смысле тривиальными.

Продолжая эту процедуру далее, Миура с соавторами [21] нашли (с возрастающими трудностями вычислительного характера) первые 10 независимых законов сохранения для КдВ-уравнения и показали, что существует счетное число таких законов.

6.6.2. Сохраняющиеся плотности для матричного метода рассеяния

В случае задачи двухкомпонентного рассеяния (6.43) рассмотрим полученное с использованием (6.49) решение [31]

$$\phi_1^-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^x L_1(x, z) e^{-i\lambda z} dz,$$

которое может быть представлено в следующей форме:

$$\phi_1^-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x + \alpha(x, \lambda)}.$$

Из уравнений рассеяния следует, что выполняется

$$\alpha_{xx} - (2i\lambda + q_x \cdot q)\alpha_x + \alpha_x^2 + \sigma|q|^2 = 0 \quad (6.86)$$

и из равенств (6.48) и (6.59) следует, что в предельном случае $x \rightarrow +\infty$ мы имеем

$$a(\lambda)\phi_1^-(x, \lambda) \rightarrow e^{-i\lambda x},$$

или

$$a(\lambda) e^{\alpha(x, \lambda)} \rightarrow 1.$$

При $|\lambda| \rightarrow \infty$ $\alpha_x \rightarrow 0$ и поэтому

$$\alpha_x(x, \lambda) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n(x)}{(2i\lambda)^n}.$$

В предположении $\sigma = +1$ из равенства (6.86) следует, что

$$\begin{aligned} \beta_1 &= |q|^2 \\ \beta_2 &= qq_x^* \\ \beta_3 &= qq_x^* + |q|^4 \\ &\vdots \\ \beta_{n+1} &= q \left(\frac{\beta_n}{q} \right)_x + \sum_{i+j=n} \beta_i \beta_j. \end{aligned}$$

Используя тот факт, что величина $a(\lambda)$ остается постоянной на решениях системы, мы получаем, что при $x \rightarrow +\infty$

$$-\log a(\lambda) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (2i\lambda)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_n(x) dx.$$

Из этого следует, что β_n являются сохраняющимися плотностями. Первые три из них являются нетривиальными

$$\begin{aligned} D_1 &= |q|^2 \\ D_2 &= i(qq_x^* - q^*q_x) \\ D_3 &= |q_x|^2 - q^4 \end{aligned} \quad (6.87)$$

и соответствуют массе, импульсу и энергии решения НУШ.

6.7. Заключение

На протяжении последних двух десятилетий появилось множество книг, посвященных методу обратной задачи рассеяния и его связи с теорией солитонов [1,4,7-12,17,20,22,23]. Эта глава является дополнением к перечисленным книгам в том смысле, что она может служить в качестве введения и облегчает путь, который необходимо пройти тому студенту, который заинтересовался этими вопросами и намерен продолжить исследования в этой области. С этой целью мы представили четкое описание структуры метода обратной задачи рассеяния на основе линейного оператора Шредингера и двухкомпонентных (матричных) операторов рассеяния. Выбранные примеры и задачи позволяют познакомиться с различными аспектами теории обратной задачи рассеяния и раскрывают ее возможности в применении к гидродинамическим солитонам, магнитным флаксонам в длинных (сверхпроводящих) Джозефсоновских линиях передач и дисперсным нелинейным волновым пакетам.

6.8. Задачи

1. Рассмотрим задачу Шредингера на собственные значения

$$L\phi(x) = \lambda\phi(x), \quad \text{где } L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x).$$

(а) Покажите, что оператор L является самосопряженным, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* L\phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [L\psi(x)]^* \phi(x) dx,$$

где ϕ и ψ — произвольные функции, равные нулю при $x = \pm\infty$. [Указание: интегрируйте по частям.]

(б) Пусть λ_n — n -ое собственное значение L , которому соответствует собственная функция $\phi_n(x)$. Замените в вышеприведенном интеграле ψ и ϕ на ϕ_n и докажите, что собственное число λ_n является вещественным.

- (с) Замените в вышеприведенном интеграле ψ и ϕ на ϕ_m и ϕ_n соответственно и с использованием результата (b) докажите, свойство ортогональности для собственных функций

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^*(x) \phi_n(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_m \neq \lambda_n.$$

2. Вронскиан двух произвольных функций определяется равенством

$$W(\psi; \phi) \equiv \psi(x)\phi'(x) - \psi'(x)\phi(x).$$

Покажите, что $W(\psi; \phi)$ не зависит от x , если ψ и ϕ являются решениями уравнения Шредингера для общего значения k^2 . [Указание: вычислите dW/dx .]

3. Докажите равенства (6.7) (сохранение энергии) путем вычисления вронскианов $W(\psi^+; \psi^{+*})$ и $W(\psi^-; \psi^{-*})$ при $x \rightarrow \pm\infty$.
4. (a) Вычислив $W(\psi^+; \psi^-)$ в предельных случаях $x \pm \infty$ покажите, что в (6.5) и (6.6) $a = c$. (Заметим, что это является примером применения теоремы обращения.)
- (b) Вычислив $W(\psi^+; \psi^{-*})$ в предельных случаях $x \pm \infty$ покажите, что $|b| = |d|$.
5. Рассмотрим уравнение Шредингера (6.3) с прямоугольным потенциалом u

$$u(x) = \begin{cases} -a & \text{при} \quad -\ell \leq x \leq +\ell, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где a — положительная константа и ℓ — ширина прямоугольного потенциала. Для отрицательных собственных значений из интервала $-a \leq \lambda < 0$ соответствующее связанное состояние может быть записано в следующем виде

$$\phi(x, \lambda) = \begin{cases} A_1 e^{\kappa_1(x+\ell)} & \text{при} \quad x \leq -\ell, \\ A_2 e^{i\kappa_2(x+\ell)} + B_2 e^{-i\kappa_2(x+\ell)} & \text{при} \quad -\ell \leq x \leq +\ell, \\ B_3 e^{-\kappa_1(x-\ell)} & \text{при} \quad \ell \leq x. \end{cases}$$

- (a) Определите κ_1 и κ_2 как функции от λ .
- (b) Покажите, что собственные значения связанного состояния определяются трансцендентным уравнением

$$\operatorname{tg}(2\ell\sqrt{a+\lambda}) = \frac{2\sqrt{-\lambda}\sqrt{a+\lambda}}{2\lambda+a}.$$

[Указание: Потребуйте, чтобы $\phi(x)$ и $\phi'(x)$ были непрерывны в $x = \pm\ell$.]

- (с) Нарисуйте график связанных состояний $\phi(x, \lambda)$.

- (d) При $a = 9$ и $\ell = 1$ нарисуйте с использованием компьютерных средств график величины

$$\operatorname{tg}(2\ell\sqrt{a+\lambda}) - \frac{2\sqrt{-\lambda}\sqrt{a+\lambda}}{2\lambda+a}$$

в виде функции от λ . Сколько связанных состояний вы нашли?

6. При $\lambda > 0$ уравнение Шредингера с прямоугольным потенциалом из предыдущей задачи имеет решения рассеяния вида

$$\phi(x, \lambda) = \begin{cases} A_1 e^{i\kappa_1(x+\ell)} + B_1 e^{-i\kappa_1(x+\ell)} & \text{при} \quad x \leq -\ell, \\ A_2 e^{i\kappa_2(x+\ell)} + B_2 e^{-i\kappa_2(x+\ell)} & \text{при} \quad -\ell \leq x \leq +\ell, \\ A_3 e^{i\kappa_1(x-\ell)} + B_3 e^{-i\kappa_1(x-\ell)} & \text{при} \quad \ell \leq x. \end{cases}$$

- (a) Определите κ_1 и κ_2 как функции от λ .
- (b) Определите A_3 при $A_1 = 0$ и $B_3 = 1$.
- (с) Как ϕ связана с ψ^+ в формулах после равенства (6.4)?
- (d) Нарисуйте график коэффициента отражения $|A_3|^2$ как функции от λ с использованием компьютерных средств.
7. Пусть $\phi(x)$ является решением задачи Шредингера на собственные значения (6.3) с потенциалом [17]

$$u(x) = -a \operatorname{sech}^2(x).$$

- (a) Введя в рассмотрение преобразование $\phi(x) = A \operatorname{sech}^b(x) y(x)$ покажите, что y удовлетворяет равенству

$$y'(x) - 2b \operatorname{th}(x)y'(x) + (a - b - b^2) \operatorname{sech}^2(x)y(x) = 0$$

при $b^2 = -k^2$.

- (b) Введя в рассмотрение преобразования $z = \frac{1}{2}[1 - \operatorname{th}(x)]$ и $v(z) = y(x)$ покажите, что $v(z)$ удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению

$$z(1-z)v'(z) + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]v'(z) - \alpha\beta v(z) = 0$$

и выразите α, β и γ в терминах a и b .

- (с) Ограниченное решение гипергеометрического дифференциального уравнения $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ может быть найдено из гипергеометрического ряда

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdot 1 \cdot 2}z^2 + \dots$$

При $b = -ik$ покажите с использованием гипергеометрического ряда, что в предельном случае $x \rightarrow +\infty$ решение $\phi(x, k)$ имеет вид $c e^{ikx}$. Что есть c ?

(d) Выполнено следующее равенство:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = A_1 F(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z) + \\ + (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} B_1 F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z),$$

где

$$A_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \quad \text{и} \quad B_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

и $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Используя это тождество, определите поведение $\phi(x)$ в предельном случае $x \rightarrow -\infty$.

8. В предыдущей задаче коэффициент отражения для падающей слева волны (см. равенство (6.6)) определяется равенством

$$d(k, a) = A_1/B_1.$$

(a) С использованием тождества

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi x)}$$

покажите, что определенный выше коэффициент отражения равен нулю при всех значениях k во всех случаях, когда

$$\sqrt{a + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(b) Проверьте, что $d(k, a)$ имеет полюс в $k = i$.

(c) Покажите, что

$$\lim_{a \rightarrow 2} \lim_{k \rightarrow i} [(k - i)d(k, a)] \neq \lim_{k \rightarrow i} \lim_{a \rightarrow 2} [(k - i)d(k, a)].$$

(d) Продемонстрируйте графически результат (c).

9. Предположим, что коэффициенты прохождения и отражения имеют полюса порядка $m \geq 1$ в $k = i\kappa_n$. Ряды Лорана для коэффициентов прохождения $a(k)$ и отражения $b(k)$ имеют следующий вид

$$a(k) = \frac{a_{-m,n}}{(k - i\kappa_n)^m} + \frac{a_{-(m-1),n}}{(k - i\kappa_n)^{m-1}} + \dots \\ b(k) = \frac{b_{-m,n}}{(k - i\kappa_n)^m} + \frac{b_{-(m-1),n}}{(k - i\kappa_n)^{m-1}} + \dots$$

(a) Докажите, что предельное значение величины $a(k)b(k)/a'(k)$ неограниченно возрастает при $k \rightarrow i\kappa_n$ и $m \geq 2$. (См. равенство (6.14).)

(b) Покажите, что предельное значение величины $a(k)b(k)/a'(k)$ равно $-b_{-1,n}$ при $k \rightarrow i\kappa_n$ и $m = 1$.

10. С использованием анализа фазового пространства уравнения (6.3) покажите, что полюса верхней полуплоскости для $a(k)$ просты.

11. С использованием графика на (x, z) -плоскости покажите, как можно использовать второе из равенств (6.27) и граничные условия, приведенные ниже равенств (6.12), для определения $K(x, z)$ из $u(x)$.

12. Покажите, что определенный интеграл (6.29) равен интегралу Коши (6.30).

13. Обсудите связь между выводами уравнения Гельфанда–Левитана в разделах 6.1.3 и 2.6.2. Каковы преимущества и недостатки этих двух подходов?

14. Как бы вы ответили на вопрос студента в конце раздела 6.1.3?

15. В предположении

$$B(x + z; 0) = 2\kappa_1 e^{-\kappa_1(x+z)} + 2\kappa_2 e^{-\kappa_2(x+z)}$$

решите уравнение Гельфанда–Левитана для соответствующего двухсолитонного решения КдВ-уравнения.

16. Обсудите поведение излучения в предельном случае малой амплитуды при рассмотрении второго члена в выражении для $B(x + z; t)$ в (6.37).

17. (a) Опишите безотражательное рассеяние для уравнения Шредингера с использованием фазовой картины на (ψ_x, ψ) -плоскости.

(b) Покажите, что $u(x, 0) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa x$ — безотражательный потенциал.

(c) Покажите, что $u(x, 0) = -N(N + 1) \operatorname{sech}^2 \kappa x$ — безотражательный потенциал, где N — положительное целое число.

(d) Обсудите член «излучения» в (6.39).

18. (a) Решите задачу рассеяния Шредингера для прямоугольного потенциала (6.40).

(b) Проверьте условие (6.41) существования N -солитонного решения для КдВ-уравнения.

19. С использованием фазовой картины на (x, z) -плоскости покажите, как можно использовать уравнения (6.56) для определения $K_1(x, z)$ и $K_2(x, z)$ из $q(x)$.

20. Покажите, что соотношение (6.64) для $K_1(x, z)$ и $K_2(x, z)$ следует из (6.60).

21. С использованием введенной в главе 2 концепции «причинности по псевдовремени» выведите равенство (6.65).

22. Рассмотрим двухкомпонентную задачу рассеяния

$$\begin{aligned}\psi_{1,x} &= -i\lambda\psi_1 + u(x, t)\psi_2 \\ \psi_{2,x} &= -\psi_1 + i\lambda\psi_2\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\psi_{1,x} &= A\psi_1 + B\psi_2 \\ \psi_{2,x} &= C\psi_1 - A\psi_2,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A &= -4i\lambda^3 + 2iu\lambda - u_x \\ B &= 4u\lambda^2 + 2iu_x\lambda - 2u^2 - u_{xx} \\ C &= -4\lambda^2 + 2u.\end{aligned}$$

- (a) Покажите, что эта задача полностью аналогична задаче для оператора Шредингера.
 (b) Покажите, что из условия на перекрестные производные следует КдВ-уравнение.
23. Покажите, что представленный в разделе 6.3.2 двухкомпонентный МОЗР сводится в предельном случае малой величины $q(x, t)$ к методу Фурье.
24. (a) Пусть ψ — N -вектор и U и V — $(N \times N)$ -матрицы такие, что

$$\begin{aligned}\psi_x &= U\psi \\ \psi_t &= V\psi.\end{aligned}$$

Покажите, что из условия на перекрестные производные следует

$$U_t - V_x = [V, U].$$

- (b) Как это условие на перекрестные производные связано с равенством (6.1), если L — двухкомпонентный матричный оператор (6.44)? (См. [12].)
25. (a) Решите задачу рассеяния для прямоугольного потенциала (6.77).
 (b) Найдите соответствующие данные рассеяния при $t = 0$.
26. Найдите $u(x, t)$ в предположении, что

$$B(\xi + z; 0) = e^{-\kappa(\xi+z)}$$

в интегральном уравнении (6.74).

27. Решите предыдущую задачу при

$$B(\xi + z; 0) = 2a e^{-a(\xi+z)} + (2/a) e^{-(\xi+z)/a}.$$

28. Для СГ-уравнения определите начальное условие, эволюционирующее в бризер с частотой $\omega = \sqrt{3}/2$.

29. Обсудите вычислительную задачу нахождения обратной $(N \times N)$ -матрицы при $N = 10, N = 100$ и $N = 1000$.
30. Используя (6.76), найдите местоположение полюсов верхней полуплоскости, соответствующие бризер-решению (6.81) СГ-уравнения.
31. Найдите значения констант c_1 и c_2 в равенстве (6.79) и получите выражение для столкновения кинка с антикинком (6.78).
32. (a) Нарисуйте график (6.80) как функции от x и t при $-\infty < x < +\infty$ и $0 \leq t < +\infty$.
 (b) Покажите, что эта функция является предельным случаем для столкновения кинка с антикинком (6.78) и для бризера (6.81).
33. Покажите, как можно использовать интегральное уравнение (6.84) для получения формулы для N -солитона НУШ.
34. (a) Определите общее решение НУШ, соответствующее простым полюсам коэффициентов прохождения и отражения в $\lambda_1 = \xi_1 + i\eta_1$ и $\lambda_2 = \xi_2 + i\eta_2$.
 (b) Обсудите поведение этого решения при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$, т. е. когда коэффициенты прохождения и отражения имеют двойной полюс.
35. (a) Рассмотрим операторы [19,31]

$$L = i \begin{bmatrix} 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 1+p & 0 \\ 0 & 0 & 1+p \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1^* & 0 & 0 \\ u_2^* & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и

$$M = -p \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{bmatrix} -(|u_1|^2 + |u_2|^2)/(1-p) & -iu_{1,x} & -iu_{2,x} \\ iu_{1,x}^* & |u_1|^2/(1+p) & u_2 u_1^*/(1+p) \\ iu_{2,x}^* & u_2^* u_1/(1+p) & |u_2|^2/(1+p) \end{bmatrix}.$$

Покажите, что из операторного уравнения

$$L_t = i[L, M]$$

следуют связанные НУШ

$$\begin{aligned}iu_{1,t} + u_{1,xx} + \left(\frac{2}{1-p^2}\right) u_1(|u_1|^2 + |u_2|^2) &= 0 \\ iu_{2,t} + u_{2,xx} + \left(\frac{2}{1-p^2}\right) u_2(|u_1|^2 + |u_2|^2) &= 0.\end{aligned}$$

- (b) Можно ли обобщить эту систему на случай более высокого порядка?
 (c) Предложите область применения этой системы.

36. (а) Для определенной в предыдущей задаче системы связанных уравнений обсудите решение рассеяния

$$\text{падающая волна} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\lambda x},$$

$$\text{отраженная волна 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b_1(\lambda, 0) e^{+i\lambda x},$$

$$\text{отраженная волна 2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} b_2(\lambda, 0) e^{+i\lambda x}$$

при $x \rightarrow +\infty$ и

$$\text{проходящая волна} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} a_1(\lambda) e^{-i\lambda x}$$

при $x \rightarrow -\infty$, а также аналогичное решение для другого канала.

- (б) Можно ли найти начальные условия, эволюционирующие в связанное состояние? На что похожи эти решения?
37. Найдите сохраняющуюся плотность D_3 и поток F_3 для КдВ-уравнения.
38. Найдите сохраняющуюся плотность D_4 и поток F_4 для КдВ-уравнения.
39. Найдите законы сохранения для плотностей (6.87) НУШ.
40. (а) Для СГ-уравнения, представленного в переменных «светового конуса» $\phi_{\xi\tau} = \phi$, покажите, что справедливы следующие законы сохранения:

$$(\phi_{\xi}^2)_{\tau} + (2 \cos \phi)_{\xi} = 0$$

$$(\phi_{\xi}^4 - 4\phi_{\xi\xi}^2)_{\tau} + (4\phi_{\xi}^2 \cos \phi)_{\xi} = 0.$$

- (б) Найдите соответствующие законы сохранения в (x, t) -координатах.
- (с) Выведите эти законы с использованием метода, представленного в разделе 6.6.2.
- (д) Можно ли найти другие два нетривиальных закона сохранения?

Литература

- [1] M.J.Ablowitz and P.A.Clarkson. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge University Press, Cambridge. 1991.
- [2] M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C.Newell, and H.Segur. The initial value solution for the sine-Gordon equation. *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973) 1262-1264.
- [3] M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C.Newell, and H.Segur. The inverse scattering transform Fourier analysis for nonlinear problems. *Stud. Appl. Math.* 53 (1974) 294-315.
- [4] M.J.Ablowitz and H.Segur. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. SIAM, Philadelphia, 1981.
- [5] A.Bettini, T.A.Minelli, and D.Pascoli. Solitons in undergraduate laboratory. *Am. J. Phys.* 51 (1983) 977-984.
- [6] G.Boffetta and A.R.Osborne. Computing of the direct scattering transform for the nonlinear Schrödinger equation. *J. Comput. Phys.* 102 (1992) 252-264.
- [7] F.Calogero and A.Degasperis. *Spectral Transform and Solitons*. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [8] R.K.Dodd, J.C.Eilbeck, J.D.Gibbon, and H.C.Morris. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. Academic Press, London, 1982.
- [9] P.G.Drazin. *Solitons*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [10] P.G.Drazin and R.S.Johnson. *Solitons: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [11] G.Eilenberger. *Solitons: Mathematical Method for Physicists*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [12] L.D.Faddeev and L.A.Takhtajan. *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Springer-Verlag, Berlin, 1987. (Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. *Гамильтонов подход в теории солитонов*. М.: Наука, 1986.)
- [13] C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal, and R. M.Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.* 19 (1967) 1095-1097.
- [14] I.S.Gradshteyn and I.M.Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, New York, 1980. (Градштейн И. С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М.: Физматгиз, 1963.)
- [15] R.Jost. Über die falschen Nullstellen der Eigenwerte der S'-Matrix. *Helv. Phys. Acta* 20 (1947) 256-266.
- [16] G.L.Lamb, Jr. Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium. *Rev. Mod. Phys.* 43 (1971) 99-124.

- [17] G.L.Lamb, Jr. *Elements of Soliton Theory*. John Wiley, New York, 1980. (Дж. Лэм. *Введение в теорию солитонов*. Мир, М. 1983. (также Меркурий - Пресс, М. 2000.))
- [18] L.D.Landau and E.M.Lifshitz. *Quantum Mechanics*. Pergamon, Oxford, 1965. (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика*. М., Физматгиз, 1974 (также М.: Наука, 1989.))
- [19] S.V.Manakov. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves. *Sov. Phys. JETP* 38 (1974) 248-253.
- [20] R.Meinel, G.Neugebauer, and H.Steudel. *Solitonen*. Akademie-Verlag, Berlin. 1991.
- [21] R.M.Miura, C.S.Gardner, and M.D.Kruskal. Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. *J. Math. Phys.* 9 (1968) 1204-1209.
- [22] A.C.Newell. *Solitons in Mathematics and Physics*. SIAM, Philadelphia, 1985. (А.Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*. Мир, 1989.)
- [23] S.Novikov, S.V.Manakov, L.P.Pitaevskii, and V.E.Zakharov. *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. Consultants Bureau, New York, 1984. (В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский. *Теория солитонов и метод обратной задачи*. Москва, Наука, 1980.)
- [24] M.Olsen, H.Smith, and A.C.Scott. Solitons in a wave tank. *Am. J. Phys.* 52 (1984) 826-830.
- [25] E.A.Overman II, D.W.McLaughlin, and A.R.Bishop. Coherence and chaos in the driven damped sine-Gordon equation: Measurement of the soliton spectrum. *Physica D* 19 (1986) 1-41.
- [26] J.Scott Russell. Report on waves. *Br. Ass. Adv. Sci. Rep.* 14 (1844) 311-392.
- [27] L.I.Schiff. *Quantum Mechanics*. 3rd edition. McGraw-Hill, New York, 1968. (Шифф Л. *Квантовая механика*. М.: ИЛ. 1967.)
- [28] A.C.Scott, F.Y.F.Chu, and S.A.Reible. Magnetic flux propagation on a Josephson transmission line. *J. Appl. Phys.* 47 (1976) 3272-3286.
- [29] L.A.Takhtajan and L.D.Faddeev. Essentially nonlinear one-dimensional model of classical field theory. *Theor. Math. Phys.* 21 (1974) 1046-1057.
- [30] D.D.Vvedensky. *Partial Differential Equations*. Addison-Wesley, Wokingham, 1993.
- [31] В.Е. Захаров, А.Б. Шабат. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерная автомодуляция волн в нелинейных средах. *ЖЭТФ*, 1971, т.74., с. 118-134.

Глава 7

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

В предыдущих главах этой книги мы получили несколько точных решений для нелинейных динамических уравнений: были получены формулы для одиночного солитона и для N -солитонов, а также другие решения бегущей волны на решетках и в системах с нелинейной диффузией. То, что такие решения существуют — важный факт, который связан с парадигмой, охватившей область прикладных исследований с середины 1970-х годов.

Несмотря на то, что некоторые из этих точных результатов могут быть непосредственно применены в определенных приложениях, часто оказывается, что интересующая экспериментаторов динамическая система не может быть точно описана скажем СГ-уравнением или системой ФитцХью–Нагумо. Она может отличаться от желаемой модели членами, представляющими дополнительные механизмы накопления и диссипации энергии или других приблизительно сохраняющихся величин. Что следует предпринимать в подобных случаях? Следует ли нам опустить руки и заявить, что интересующая нас система может быть исследована численными методами? Вовсе нет — следует использовать результаты, представленные в этой главе.

Термин, выведенный в заголовок этой главы, может сбивать с толку, поскольку теория возмущений не является единым, унифицированным подходом для решения сложных задач. Она скорее представляет собой набор специальных средств целенаправленного анализа. Для того, чтобы успешно применять эту теорию, необходимо овладеть почти всеми ее методами и интуитивно понимать стратегию проводимого анализа.

¹⁾ Автор благодарен М.П.Сёренсену за написание первоначальной версии разделов 7.2.2, 7.3.3 и 7.4.2 этой главы.