

Глава 3

УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО СОЛИТОНА

Одним из самых значительных достижений нелинейной науки 1970-х годов было постепенное осознание того факта, что у некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных имеется множество различных точных решений. Оказалось, что эти решения можно получить не только для одной уединенной волны (solitary wave)— это было известно еще в девятнадцатом веке из работ Рассела, Базена и Буссинэка, — но также и для произвольного числа уединенных волн, движущихся с различными скоростями, имеющими различные амплитуды и испытывающими взаимные столкновения. Уединенные волны стали называться «солитонами», что должно было подчеркивать их корпускулярный характер, поскольку они покидали область взаимодействия в пространстве-времени с теми же скоростями и амплитудами, что характеризовали их в момент входа в эту область [61]. (Как было отмечено во введении, Рассел наблюдал гидродинамические уединенные волны, проходящие одна сквозь другую без изменения, но он не предложил аналитического объяснения этого явления.)

Первые и до сих пор наиболее важные солитонные системы появились задолго до 1970-х годов в ходе исследований широко известных прикладных проблем. Наиболее важными являются следующие три солитонные системы:

1. *Уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ)*. Это уравнение было предложено в 1895 в качестве модели для гидродинамической

уединенной волны Рассела [36]. В нормализованной форме оно имеет следующий вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (3.1)$$

Интересно отметить, что *Physical Review Letters* с большой неохотой опубликовал конструктивную статью Забуски и Крускала (в которой был предложен термин «солитон»), поскольку существовало мнение, что КдВ-уравнение бесполезно для исследования физических проблем. Несмотря на то, что авторы использовали уравнение (3.1) для исследования ион-акустических волн в плазме [70,75], КдВ-уравнение имеет более широкое научное значение. Фактически КдВ-уравнение возникает в случаях, когда исследуется простейшая нелинейная модель однонаправленного распространения длинных волн в диспергирующей среде с сохранением энергии. Аналогичные модели использовались ранее при исследовании ангармонических решеток [74], волн давления в паро-газовых смесях [72], вращающихся потоков жидкости в трубе [42], и фононных пакетов с тепловой накачкой в низкотемпературных нелинейных кристаллах [68]. Множество подобных систем описываются в книге Наугольных и Островского [48].

2. *Уравнение синус-Гордона (СГ-уравнение)*. Линейное волновое уравнение с одной из элементарных функций в правой части имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u, \quad (3.2)$$

где значения x , t , и u представлены в нормализованных единицах. Как было отмечено в главе 1, это уравнение имеет множество различных приложений [2], включая распространение дефектов в кристаллах [27] и границ доменов в ферромагнитных и ферроэлектрических материалах [22], скалярную модель элементарных частиц [24,55,64], распространение волн расширения в биологических (липидных) мембранах [25], самонаведенную прозрачность коротких оптических импульсов [37] и распространение квантовых объектов магнитного потока (флаксонов) в длинных (сверхпроводящих) переходах Джозефсона [62]. Все эти приложения были исследованы до того, как в 1970-х годах были заново открыты специальные свойства СГ-уравнения.

3. *Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)*. В нормализованной форме это уравнение может быть представлено в следующей форме:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0. \quad (3.3)$$

Это уравнение представляет собой модель пакетов гидродинамических волн на большой глубине [7] и носит имя Шредингера вследствие того, что аппроксимация этого уравнения при малой

¹⁾ Автор благодарен П.Л. Христиансену за помощь при составлении плана этой главы и за его вклад в материал раздела 3.2.4.

амплитуде соответствует уравнению, полученному Эрвином Шредингером в январе 1926 года для описания распространения квантового волнового пакета в открытом пространстве. (Если необходимо подчеркнуть степень нелинейности, уравнение (3.3) называют «кубическим уравнением Шредингера».) Начиная с середины 1970-х годов, уравнение (3.3) играло важную роль и представляло собой фундаментальное описание нелинейных импульсов в оптических волокнах [29], но оно имеет существенно большее потенциальное значение. Подобно КдВ-уравнению, уравнение Шредингера представляет собой модель с наименьшей степенью нелинейности, используемую при исследовании однонаправленного распространения волновых пакетов в диспергирующей среде с сохранением энергии. Эти явления возникали ранее при исследовании различных физических приложений, включая двумерную самофокусировку плоской волны [33,36], одномерную автомодуляцию монохроматической волны [29,32,67], распространение теплового импульса в твердых телах [68] и волн Ленгмюра в плазме [28,31].

Все эти три уравнения позволяют описать не только одиночный солитон, но и нелинейные периодические волны, а также вышеупомянутое коллективное движение N -солитонов. Основная цель этой главы состоит в том, чтобы детально исследовать решения этих уравнений и представить некоторые аналитические методы для их нахождения. В каждом случае мы рассмотрим соответствующие физические приложения и затем перейдем к математическому анализу. (Великолепное обсуждение физических моделей для этих трех уравнений включено в книгу Ремуассене [54].)¹⁾

3.1. Уравнение Кортевега–де Вриза

3.1.1. Длинные волны на воде

Кортевег и де Вриз исследовали динамику открытых Расселом длинных волн на воде и установили, что при малой амплитуде волны ее распространение вдоль канала может быть приблизительно описано уравнением

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2h} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (3.4)$$

где

- u (в сантиметрах) — вертикальное смещение поверхности воды относительно положения покоя,
- x (в сантиметрах) — расстояние вдоль канала,
- t (в секундах) — время, и

¹⁾ Прим. ред. перев. — Полезная книга: Э. Инфельд, Дж. Вуланс. *Нелинейные волны, солитоны и хаос*. ФМЛ, Москва, 2006. (Cambridge, 2000).

- h (в сантиметрах) — глубина канала, измеренная когда вода находится в состоянии покоя.

При выводе уравнения (3.4) были сделаны четыре предположения: (i) вода является невязкой жидкостью, т. е. при движении волны энергия не расходуется, (ii) амплитуда волны невелика, т. е. $u \ll h$, (iii) пространственные вариации происходят медленно, т. е. $hu_x \ll u$, и (iv) поверхностное натяжение отсутствует.

С учетом предположений (ii) и (iii) становится очевидным, что первые два члена в уравнении (2.3) больше оставшихся двух, поэтому можно считать, что допустима дальнейшая аппроксимация уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \approx 0.$$

Это справедливо для волны произвольной формы, распространяющейся в $+x$ -направлении с постоянной скоростью

$$c = \sqrt{gh},$$

где $g = 980 \text{ см/с}^2$ — ускорение свободного падения.

Третий и четвертый члены уравнения (3.4) выбраны так, чтобы обеспечить равный порядок малости, т. е.

$$\varepsilon \sim \left| \frac{u}{h} \right| \sim \left| h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right|.$$

Таким образом, символ « \sim » в уравнении (3.4) показывает, что члены высшего порядка по ε не учитывались при выводе этого уравнения. Как было отмечено в главе 1, третий член в уравнении (3.4) делает систему нелинейной, а четвертый учитывает эффекты дисперсии. Баланс между этими двумя эффектами обуславливает возникновение уединенной волны.

Несмотря на то, что уравнение (3.4) может быть исследовано в его изначальной форме, существует более удобная форма его представления, которую можно получить путем исключения члена $\partial u / \partial x$ с использованием замены независимых переменных

$$u(x, t) \rightarrow \tilde{u}(\zeta, \tau),$$

где

$$\begin{aligned} \zeta &= x - ct \\ \tau &= t. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} - c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

и при таком преобразовании уравнение (3.4) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \frac{3c}{2h} u \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta} + \frac{h^2 c}{6} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \zeta^3} = 0. \quad (3.5)$$

При соответствующем выборе единиц для \tilde{u} и ζ уравнение (3.5) может быть приведено к форме уравнения (3.1).

3.1.2. Решения, соответствующие уединенной волне

Рассмотрим уравнение (3.1)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

при $-\infty < x < +\infty$ и $-\infty < t < +\infty$. Сделав предположение о бегущей волне $u(x, t) = \tilde{u}(x - vt)$ (где функция \tilde{u} пока не определена), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(v + 6\tilde{u})\tilde{u}' - \tilde{u}''' = 0. \quad (3.6)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной бегущей волны $\xi = x - vt$. Интегрирование по ξ приводит к равенству

$$(v + 3\tilde{u})\tilde{u} - \tilde{u}'' = \frac{A}{2}.$$

После умножения на \tilde{u}' и интегрирования получаем

$$(v + 2\tilde{u})\tilde{u}^2 - (\tilde{u}')^2 = A\tilde{u} + B, \quad (3.7)$$

где A и B — постоянные интегрирования.

При граничных условиях \tilde{u} и $\tilde{u}' \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$ уравнение (3.7) принимает вид

$$(\tilde{u}')^2 = \tilde{u}^2(2\tilde{u} + v)$$

или

$$\xi - x_0 = \pm \int \frac{\tilde{u}}{y\sqrt{2y+v}} dy. \quad (3.8)$$

Этот интеграл может быть вычислен, в результате чего получается решение бегущего импульса

$$u(x, t) = -\frac{v}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt - x_0) \right], \quad (3.9)$$

описывающее движение «волны переноса», открытой Расселом в 1834 году и показанной на рисунке 1.1.

Это выражение представляет собой ограниченное решение КдВ-уравнения для всех значений скорости $0 \leq v < +\infty$. При увеличении скорости импульс становится более узким и его амплитуда увеличивается. Постоянная интегрирования x_0 соответствует положению импульса в момент времени $t = 0$.

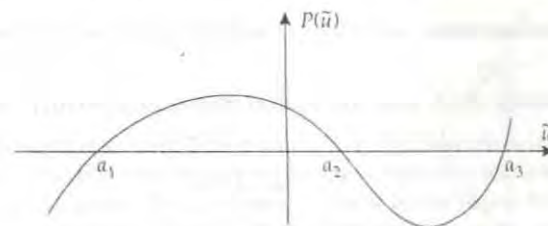


Рис. 3.1. Полином третьей степени $P(\tilde{u})$ в уравнении (3.10).

Решение уединенного импульса (3.9) представляет собой строительный элемент, с использованием которого могут быть сконструированы точные решения КдВ-уравнения для N -солитонов. Однако, прежде чем получить эти решения, мы рассмотрим возможность существования периодических решений бегущей волны, продолженных на интервал $-\infty < \xi < +\infty$.

3.1.3. Периодические решения

В случае, когда решения являются периодическими, произвольные постоянные интегрирования A и B в обыкновенном дифференциальном уравнении (3.7) для бегущей волны \tilde{u} не должны быть равны нулю. Это уравнение может быть переписано в следующей форме:

$$\tilde{u}' = \pm \sqrt{P(\tilde{u})}, \quad (3.10)$$

где полином третьей степени $P(\tilde{u})$ имеет вид

$$\begin{aligned} P(u) &= 2(\tilde{u}^3 + v\tilde{u}^2/2 - A\tilde{u}/2 - B/2) \equiv \\ &\equiv 2(\tilde{u} - a_1)(\tilde{u} - a_2)(\tilde{u} - a_3). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если значения v , A и B таковы, что три корня этого многочлена вещественны при $a_3 > a_2 > a_1$, то из результатов Приложения С следует, что

$$\tilde{u}(\xi) = a_2 - (a_2 - a_1) \operatorname{cn}^2 \left[(\xi - \xi_1) \sqrt{(a_3 - a_1)/2}, k \right], \quad (3.12)$$

где $\operatorname{cn}(\zeta, k)$ — эллиптическая функция Якоби с модулем k и

$$k^2 = (a_2 - a_1)/(a_3 - a_1).$$

На рисунке 3.2 изображено периодическое решение (при $\xi_1 = 0$), которое соответствует полиному $P(\tilde{u})$. Из этого рисунка видно, что

1. Несмотря на то, что введенная в Приложении С эллиптическая функция позволяет легко получить точное решение (3.12), качественные аспекты поведения $\tilde{u}(\xi)$ могут быть изучены с использованием рисунка 3.2. Вещественное и ограниченное решение уравнения (3.10) может существовать только при $a_1 \leq \tilde{u} \leq a_2$, т.ч. полином $P(\tilde{u})$ принимает положительные значения. Это решение имеет экстремумы в a_1 и a_2 , где $P(\tilde{u}) = 0$.

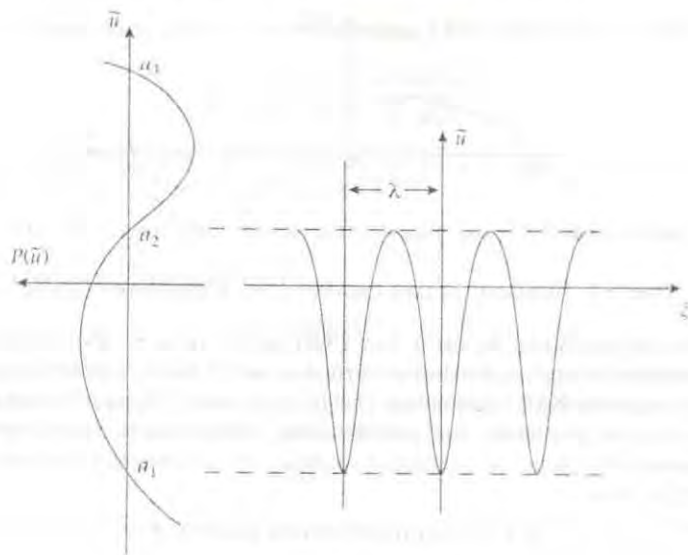


Рис. 3.2. Периодическое решение уравнения (3.12).

2. При $k = 0$, $\operatorname{cn}(\zeta, 0) = \cos(\zeta)$ и проблема сводится к линейному (синусоидальному) пределу.
3. При $0 < k < 1$ $\operatorname{cn}(\zeta, k)$ сохраняет свои качественные свойства функции косинуса (см. рисунок С.2), однако период этой функции становится равным $4K(k)$ и эта величина неограниченно возрастает при $k \rightarrow 1$. Этот случай соответствует предельному случаю уединенной волны, рассмотренному в предыдущем разделе.
4. Поскольку в равенстве (3.12) функция $\operatorname{cn}(\zeta, k)$ возводится в квадрат, $\tilde{u}(\xi)$ имеет период (см. рисунок 3.2)

$$\lambda = 2K(k)/\sqrt{(a_3 - a_1)/2}. \quad (3.13)$$

5. Из определения полинома (3.11) видно, что

$$v = -2(a_1 + a_2 + a_3).$$

Таким образом, для получения полного набора параметров задачи необходимо задать максимальное значение периодической волны (a_2), минимальное значение (a_1) и скорость бегущей волны v .

Как было отмечено в главе 1, периодическая нелинейная волна может модулироваться таким образом, чтобы скорость волны (v), длина волны (λ) и амплитуда ($a_2 - a_1$) являлись медленно меняющимися функциями времени и пространственной переменной. Уизем показал, как формулировка проблемы на основе усредненного Лагранжиана

позволяет получить динамические уравнения, описывающие эти медленные вариации [71].

3.1.4. Преобразование Бэклунда для КдВ-уравнения

Получив решение бегущей волны для КдВ-уравнения, мы можем рассмотреть проблему нахождения аналитического выражения, описывающего столкновение N -солитонов. Одним из методов получения этих решений является последовательное применение нескольких преобразований Бэклунда (ПБ), которые в общем случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} w_{1,x} &= F(w_0, w_1, w_{0,x}, w_{0,t}; \lambda) \\ w_{1,t} &= G(w_0, w_1, w_{0,x}, w_{0,t}; \lambda), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $w_0(x, t)$ — известное решение рассматриваемой системы и $w_1(x, t)$ — новое решение, которое должно быть получено в результате применения преобразования. В принципе эта процедура может быть повторена бесконечное число раз и параметр λ характеризует добавленные на каждом шаге качественные особенности нового решения.

Для доказательства существования функций F и G необходимо показать, что если w_0 является решением рассматриваемого уравнения, то w_1 , полученное интегрированием равенств (3.14), также является решением этого уравнения. Интересно отметить, что для линейных ДУ в частных производных преобразование Бэклунда с указанным свойством всегда существует и каждое выполнение этого преобразования приводит к добавлению новой собственной функции в решение рассматриваемого уравнения. В случае рассмотрения нелинейных ДУ в частных производных возникают определенные трудности.

Преобразование Бэклунда для КдВ-уравнения было впервые получено в 1973 Валквистом и Эстабруком [69] и этот результат, а также инспирированное работой Дразина и Джонсона [21] обсуждение этой проблемы, будут представлены в этом разделе.

В 1968 году Миура показал, что если $v(x, t)$ является решением модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза (МКдВ-уравнения)

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0, \quad (3.15)$$

то

$$u \equiv v^2 + v_x \quad (3.16)$$

является решением КдВ-уравнения (3.1) [46]. Для того, чтобы убедиться в этом, заметим, что при подстановке (3.16) в КдВ-уравнение можно получить следующее равенство:

$$\left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right)(v_t - 6v^2v_x + v_{xxx}) = 0. \quad (3.17)$$

Из этого результата следует, что

1. Если v является решением

$$v_t - 6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx} = 0, \quad (3.18)$$

$$\text{то} \quad u = \lambda + v^2 + v_x \quad (3.19)$$

является решением КдВ-уравнения.

2. Если v является решением уравнения (3.18), то $-v$ также является решением этого уравнения.

Из равенства (3.19) можно получить два различных решения КдВ-уравнения:

$$\begin{aligned} u_0 &= \lambda + v^2 + v_x \\ u_1 &= \lambda + v^2 - v_x. \end{aligned}$$

Сложение и вычитание этих двух равенств приводит к получению следующих:

$$\begin{aligned} u_0 - u_1 &= 2v_x \\ u_0 + u_1 &= 2(\lambda + v^2). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Далее, удобно ввести замену независимой переменной

$$u_0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{и} \quad u_1 = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad (3.21)$$

где w_0 и w_1 определены с точностью до произвольной функции времени. Тогда равенство (3.20) может быть переписано в следующей форме:

$$w_0 - w_1 = 2v$$

и

$$(w_1 + w_0)_x = 2\lambda + (w_1 - w_0)^2/2. \quad (3.22)$$

С учетом этих результатов, мы можем переписать (3.18) следующим образом:

$$(w_1 - w_0)_t - 3(w_{1,x}^2 - w_{0,x}^2) + (w_1 - w_0)_{xxx} = 0. \quad (3.23)$$

Равенства (3.22) и (3.23) представляют собой преобразование Бэклунда, структура которого задается равенствами (3.14). [На первый взгляд равенство (3.23) не соответствует структуре второго равенства в (3.14), но на самом деле зависимость от $w_{1,x}$ и $w_{1,xxx}$ может быть устранена, т. к. эти величины могут быть получены с использованием (3.22).]

Первым шагом проверки работоспособности преобразования Бэклунда является проверка возможности получения с его помощью элементарного решения (солитона) из решения вакуума. Итак, при постановке решения вакуума $w_0 = 0$ в равенство (3.22) мы получаем

$$w_{1,x} = 2\lambda + w_1^2/2. \quad (3.24)$$

Полагая

$$\lambda = -\kappa^2 < 0$$

и интегрируя, получаем промежуточный результат

$$w_1(x, t) = -2\kappa \operatorname{th}[\kappa x + f(t)],$$

где κ — вещественное число и $f(t)$ — произвольная функция времени.

Для решения проблемы зависимости w_1 от времени вернемся к равенству (3.23), из которого следует, что

$$w_{1,t} = 3w_{1,x}^2 - w_{1,xxx}. \quad (3.25)$$

Дифференцируя (3.24), получаем

$$\begin{aligned} w_{1,xx} &= w_1 w_{1,x} \\ w_{1,xxx} &= w_{1,x}^2 + w_1 w_{1,xx}. \end{aligned}$$

Тогда (3.25) принимает вид

$$\begin{aligned} w_{1,t} &= 2w_{1,x}^2 - w_1 w_{1,xx} \\ &= 2w_{1,x}(w_{1,x} - w_1^2/2), \end{aligned}$$

или с учетом (3.24)

$$w_{1,t} + 4\kappa^2 w_{1,x} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что w_1 — решение бегущей волны с функциональной зависимостью

$$\begin{aligned} w_1(x, t) &= w_1(x - 4\kappa^2 t) \\ &= -2\kappa \operatorname{th}[\kappa(x - 4\kappa^2 t - x_0)]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Поскольку $w_{1,x} \equiv u_1$, то

$$u_{1,x,t} = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2[\kappa(x - 4\kappa^2 t - x_0)] \quad (3.27)$$

является решением. Очевидно, что это решение идентично ранее полученному решению (3.9) при условии, что скорость бегущей волны удовлетворяет равенству

$$v = 4\kappa^2 = -4\lambda.$$

Таким образом, преобразование Бэклунда может использоваться для получения решения из решения вакуума, т. е. для операции, которая может быть представлена в виде следующей диаграммы:

$$0 \xrightarrow{\lambda} u_1.$$

Полученный результат подтверждает работоспособность используемого подхода, но не имеет большой ценности, поскольку мы имели формулу для решения КдВ-уравнения до применения метода преобразования Бэклунда и формулы для самого преобразования Бэклунда, позволяющие получить решение уединенной волны из вакуума. Для того, чтобы доказать ценность преобразования Бэклунда, необходимо получить с его помощью решение для более чем одного солитона.

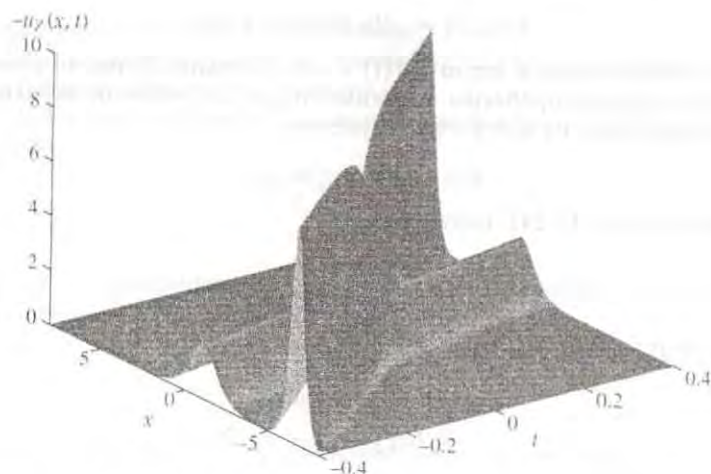


Рис. 3.3. Диаграмма столкновения двух солитонов: $-u_z(x, t)$ из равенства (3.28).

Построим решение КдВ-уравнения для солитона с двумя компонентами. Первым таким решением, полученным Забуски в 1968 году, было следующее выражение [73]

$$u_z(x, t) = -12 \frac{3 + 4 \operatorname{ch}(2x - 8t) + \operatorname{ch}(4x - 64t)}{[3 \operatorname{ch}(x - 28t) + \operatorname{ch}(3x - 36t)]^2}. \quad (3.28)$$

Это выражение представляет собой точное решение уравнения (3.1), описывающее столкновение двух солитонов вблизи начала координат на (x, t) -плоскости. При $t \rightarrow -\infty$ мы имеем выражение для суммы двух солитонов перед столкновением:

$$u_z(x, t) \sim -8 \operatorname{sech}^2(2x - 32t + \frac{1}{2} \log 3) - 2 \operatorname{sech}^2(x - 4t - \frac{1}{2} \log 3). \quad (3.29)$$

При $t \rightarrow +\infty$ мы имеем выражение для суммы двух солитонов, расходящихся после столкновения:

$$u_z(x, t) \sim -8 \operatorname{sech}^2(2x - 32t - \frac{1}{2} \log 3) - 2 \operatorname{sech}^2(x - 4t + \frac{1}{2} \log 3). \quad (3.30)$$

В результате столкновения точка на траектории более быстрого солитона ($v = 16$) продвинулась на расстояние $\log 3$, а точка на траектории сравнительно медленного солитона ($v = 4$) отстает на расстояние $\log 3$. Все эти результаты и многие другие могут быть получены при моделировании равенства (3.28). Графическое представление решения (3.28) приведено на рисунке 3.3.

Для того, чтобы получить этот результат с использованием преобразования Бэклунда, можно в качестве w_0 рассмотреть одно из решений, изображенных на рисунке 3.3, скажем

$$w_1 = -2 \operatorname{th}(x - 4t),$$

представляющее собой результат применения преобразования

$$\begin{aligned} w_{1,x} &= -2 + w_1^2/2 \\ w_{1,t} &= 2w_{1,x}^2 - w_{1,xxx} \end{aligned}$$

к вакуум-решению. Тогда, полагая $\lambda = -4$, что соответствует скорости ($v = 16$) другого солитона, и интегрируя

$$\begin{aligned} (w_{12} + w_1)_x &= -8 + (w_{12} - w_1)^2/2 \\ (w_{12} + w_1)_t &= 3(w_{12,x}^2 - w_{1,x}^2) - (w_{12} - w_1)_{xxx}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

можно получить решение для столкновения двух солитонов. Эти равенства могут быть представлены в виде следующей диаграммы:

$$0 \xrightarrow{-1} w_1 \xrightarrow{-4} w_{12},$$

где определенная в (3.31) величина $w_{12,x}$ должна быть равна искомому решению $u_z(x, t)$. Однако, с вычислительной точки зрения задача интегрирования (3.31) может оказаться слишком трудной. Можно ли найти решение для 2-солитона более простым способом?

Более простой путь существует и он основан на свойстве перестановочности последовательных преобразований Бэклунда. Это свойство было установлено для СГ-уравнения в девятнадцатом столетии [23]. В контексте теории обратного преобразования рассеяния, которая будет рассмотрена в главе 6, каждый новый солитон вводит соответствующий множитель в выражение для коэффициента прохождения в соответствующей задаче рассеяния. Поскольку решение для нелинейной задачи может быть сконструировано из коэффициента прохождения (множители которого могут быть распложены в произвольном порядке), для получения одного и того же результата последовательные преобразования Бэклунда могут быть применены в любом порядке [26, 39]. Это свойство может быть представлено в виде следующих диаграмм:

$$w_0 \xrightarrow{\lambda_1} w_1 \xrightarrow{\lambda_2} w_{12} = w_{21},$$

или

$$w_0 \xrightarrow{\lambda_2} w_2 \xrightarrow{\lambda_1} w_{21} = w_{12}.$$

Первая из этих двух диаграмм соответствует паре равенств

$$\begin{aligned} (w_1 + w_0)_x &= 2\lambda_1 + (w_1 - w_0)^2/2 \\ (w_{12} + w_1)_x &= 2\lambda_2 + (w_{12} - w_1)^2/2, \end{aligned}$$

а вторая диаграмма — паре равенств

$$\begin{aligned}(w_2 + w_0)_x &= 2\lambda_2 + (w_2 - w_0)^2/2 \\ (w_{21} + w_2)_x &= 2\lambda_1 + (w_{21} - w_2)^2/2.\end{aligned}$$

Поскольку

$$w_{12} = w_{21},$$

производная по x может быть исключена из этих четырех равенств. В результате мы получаем алгебраическое выражение

$$w_{12} = w_0 - \frac{4(\lambda_1 - \lambda_2)}{w_1 - w_2}. \quad (3.32)$$

Легко видеть, что по сравнению с непосредственным интегрированием равенств (3.31) по x и по t , предложенный подход позволяет получить результат (3.32) более простым способом. Рассмотрим два следствия из полученного результата.

1. Полагая в равенстве (3.32) $\lambda_1 = \lambda_2$, получаем $w_{12} = w_0$. Поскольку скорости солитонов непосредственным образом связаны с λ -ми, мы не можем создать два различных солитона, движущихся с равными скоростями. Это утверждение согласуется с представленными в разделах 3.1.2 и 3.1.3 результатами о бегущей волне: может существовать либо одиночный солитон, либо бесконечное число солитонов (периодическая бегущая волна), но невозможно получить конечное число солитонов.
2. Во избежание возникновения сингулярности w_{12} на (x, t) -плоскости необходимо, чтобы величина w_1 никогда не была равна w_2 . Эта проблема действительно существует, поскольку всегда можно найти значения x и t , при которых компоненты вида

$$-2\kappa \operatorname{th}[\kappa(x - 4\kappa^2 t - x_0)]$$

(при различных значениях κ) пересекаются. Однако эта проблема может быть решена с использованием следующего приема. Несмотря на то, что при получении решения для одиночного солитона (3.26) и (3.27) мы проигнорировали сингулярные решения вида

$$-2\kappa \operatorname{cth}[\kappa(x - 4\kappa^2 t - x_0)],$$

отсутствие сингулярности w_{12} может быть обеспечено, если в качестве (скажем) w_1 выбрать «th», а в качестве w_2 — «cth» (при $\kappa_2 > \kappa_1$).

Таким образом, для построения решения Забуски для 2-солитона $u_Z(x, t)$ (3.28) с использованием равенства (3.32) следует положить

$$\begin{aligned}w_0 &= 0 \\ \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= -4 \\ w_1 &= -2 \operatorname{th}(x - 4t) \\ w_2 &= -4 \operatorname{cth}(2x - 32t).\end{aligned}$$

Тогда

$$w_{12} = -\frac{12}{4 \operatorname{cth}(2x - 32t) - 2 \operatorname{th}(x - 4t)} \quad (3.33)$$

и $u_Z(x, t) = \partial w_{12} / \partial x$.

3.1.5. Формулы для N -солитона

Читатель возможно осознает, что КдВ-уравнение имеет точные решения для N -солитона, но процедура их нахождения непроста. В 1971 году Хирота предложил гениальную схему построения этих решений [21, 30, 71].

При использовании подхода Хирота удобно ввести в рассмотрение билинейный дифференциальный оператор

$$D_t^m D_x^n (a \cdot b) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right]^m \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right]^n a(x, t) b(x', t') \Big|_{\substack{x=x' \\ t=t'}}. \quad (3.34)$$

Несколько наиболее важных свойств этого оператора рассматриваются в задаче 19. (Читателю будет полезно решить эту задачу прежде, чем продолжить чтение этой книги.) Это обозначение может показаться несколько странным с учетом того, что стандартное обозначение для производной высшего порядка имеет вид

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} (a \cdot b) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \right]^m \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x'} \right]^n a(x, t) b(x', t') \Big|_{\substack{x=x' \\ t=t'}}.$$

В своем первоначальном виде КдВ-уравнение содержит члены с различными степенями независимой переменной (u), но этого можно избежать с использованием следующего преобразования

$$u = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log f, \quad (3.35)$$

которое может быть представлено в виде двух-шаговой процедуры. Полагая в уравнении (3.1) $u = w_x$ и интегрируя по x , получаем

$$w_t - 3(w_x)^2 + w_{xxx} = 0 \quad (3.36)$$

при соответствующих граничных условиях на бесконечности. Подставляя $w = -2f_x/f$ в уравнение (3.36) получаем

$$ff_{xt} - f_x f_t + ff_{xxx} - 4f_x f_{xx} + 3f_{xx}^2 = 0. \quad (3.37)$$

Это уравнение нельзя назвать упрощением КдВ-уравнения, но оно обладает несколькими полезными свойствами.

1. Если $f(x, t)$ является решением уравнения (3.37), то $\alpha f(x, t)$ также является решением этого уравнения для любой константы α . Таким образом, это нелинейное уравнение обладает одним из характерных свойств линейных уравнений.
2. Если $f(x, t)$ является решением уравнения (3.37), то $\beta(t)f(x, t)$ также является решением этого уравнения для любой дифференцируемой функции $\beta(t)$.
3. Уравнение (3.37) может быть переписано в следующей форме:

$$f(f_t + f_{xxx})_x - f_x(f_t + f_{xxx}) + 3(f_{xx}^2 - f_x f_{xxx}) = 0.$$

При таком представлении подчеркивается роль линейного оператора

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}.$$

4. В терминах билинейного дифференциального оператора Хирота уравнение (3.37) может быть представлено в виде

$$D_x(D_t + D_x^3)(f \cdot f) = 0.$$

5. В представленной формулировке решение одиночного солитона для КдВ-уравнения

$$u(x, t) = -\frac{v}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt - x_0) \right]$$

принимает простую форму

$$f(x, t) = 1 + e^{-\sqrt{v}(x - vt - x_0)}. \quad (3.38)$$

Эти замечательные свойства исследуемого уравнения, а также уверенность в существовании решения для N -солитона, настраивают на оптимистичный лад и мы приступаем к его нахождению. Прежде всего, определим билинейный дифференциальный оператор

$$B \equiv D_x(D_t + D_x^3)$$

и заметим, что

$$B(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2) = B(a_1 \cdot b_1) + B(a_2 \cdot b_2).$$

Далее, рассмотрим

$$f(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^N f_n(x, t) \quad (3.39)$$

и потребуем

$$B(f \cdot f) = 0 \quad (3.40)$$

при каждом значении степени ε .

Интересно отметить, что первые члены этого ряда, включая член при ε^N , генерируют решение для N -солитона. Рассмотрим соответствующие уравнения для различных порядков ε .

Одиночный солитон.

Уравнение порядка ε

$$B(f_1 \cdot 1 + 1 \cdot f_1) = B(f_1 \cdot 1) + B(1 \cdot f_1) = 0$$

может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3} \right) = 0 \quad (3.41)$$

и имеет решение

$$\begin{aligned} f_1 &= e^{\theta_1} \\ \theta_1 &= k_1 x - k_1^3 t + \alpha_1. \end{aligned}$$

Тогда уравнение порядка ε^2 имеет вид

$$2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) f_2 = -B(f_1 \cdot f_1) = 0.$$

Это равенство выполнено при $f_2 = 0$ и, следовательно, $f_3 = f_4 = \dots = 0$. Поскольку ряд для f обрывается, можно положить $\varepsilon = 1$. Тогда

$$f = 1 + e^{\theta_1}$$

и это выражение соответствует решению одиночного солитона для уравнения (3.38) при $k_1 = -\sqrt{v}$ и $\alpha_1 \sqrt{v} x_0$.

2-солитон

Предположим, что в (3.41)

$$f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2},$$

где $\theta_i = k_i x - k_i^3 t + \alpha_i$ ($i = 1, 2$). Тогда уравнение порядка ε^2 имеет вид

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) f_2 &= -B(e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_2}) - B(e^{\theta_2} \cdot e^{\theta_1}) = \\ &= -2 \left[(k_1 - k_2)(k_2^3 - k_1^3) + (k_1 - k_2)^4 \right] e^{\theta_1 + \theta_2} \end{aligned}$$

и имеет решение

$$f_2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}.$$

С учетом этого выражения для f_2 уравнение порядка ε^3 может быть записано в следующей форме:

$$2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) f_3 = -B(f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_1). \quad (3.42)$$

Можно показать, что правая часть этого равенства равно нулю. Таким образом, можно положить $f_3 = f_4 = \dots = 0$ и $\varepsilon = 1$. Тогда

$$f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}$$

и это выражение соответствует решению 2-солитона для КдВ-уравнения.

N-солитон

В общем случае предположим, что в (3.41)

$$f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + \dots + e^{\theta_N},$$

где $\theta_i = k_i x - k_i^3 t + \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Тогда с учетом (3.40) можно получить следующие равенства:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) f_1 &= 0 \\ 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) f_2 &= -B(f_1 \cdot f_1) \\ 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) f_3 &= -B(f_2 \cdot f_1 + f_1 \cdot f_2) \\ 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) f_4 &= -B(f_3 \cdot f_1 + f_2 \cdot f_2 + f_1 \cdot f_3) \\ &\vdots \\ 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) f_N &= -B(f_{N-1} \cdot f_1 + \dots + f_1 \cdot f_{N-1}) \\ 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) f_{N+1} &= 0 \\ 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) f_{N+2} &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Таким образом, необходимо решить эту систему уравнений относительно f_2, f_3, \dots, f_N , положить $\varepsilon = 1$ и построить решение N -солитона

для КдВ-уравнения

$$u_N(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(1 + f_1 + f_2 + \dots + f_N),$$

явный вид которого представлен равенством (В.1) в Приложении В.

3.2. Уравнение синус-Гордона

3.2.1. Длинные переходы Джозефсона

Среди нескольких приложений уравнения синус-Гордона (СГ-уравнения), упомянутых во введении к этой главе, наиболее важным является его использование в качестве модели распространения поперечных электромагнитных волн (ПЭВ) в сверхпроводящей системе передачи электроэнергии («полосковом волноводе»). Схема этой системы изображена на рисунке 3.4: волна распространяется в направлении оси x , электрическое поле E и магнитное поле H направлены соответственно вдоль осей y и z .

В нижней части рисунка показана электрическая цепь, являющаяся эквивалентом режима распространения ПЭВ: величины напряжения V в поперечном сечении изолятора и электрического тока в продольном направлении I связаны между собой законами сохранения для магнитного потока и электрического заряда (законами Кирхгофа¹⁾ для напряжения и силы тока) [59]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -L \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -C \frac{\partial V}{\partial t} - I_0 \sin \phi, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где L — индукция на единицу длины полоскового волновода и C — емкостное сопротивление на единицу длины.

Член $I_0 \sin \phi$ во втором уравнении представляет собой квантово-механический туннельный переход (переход Джозефсона) сверхпроводящих электронных пар через показанный на рисунке 3.4 изолятор [3]. В этом члене ϕ соответствует изменению фазы сверхпроводящей волновой функции в поперечном сечении изолятора. Эта величина связана с напряжением соотношением

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = + \frac{2e}{\hbar} V, \quad (3.44)$$

где e — заряд электрона и $\hbar \equiv h/2\pi$ — постоянная Планка.

¹⁾ Густав Роберт Кирхгоф (1824-1887) — немецкий физик.

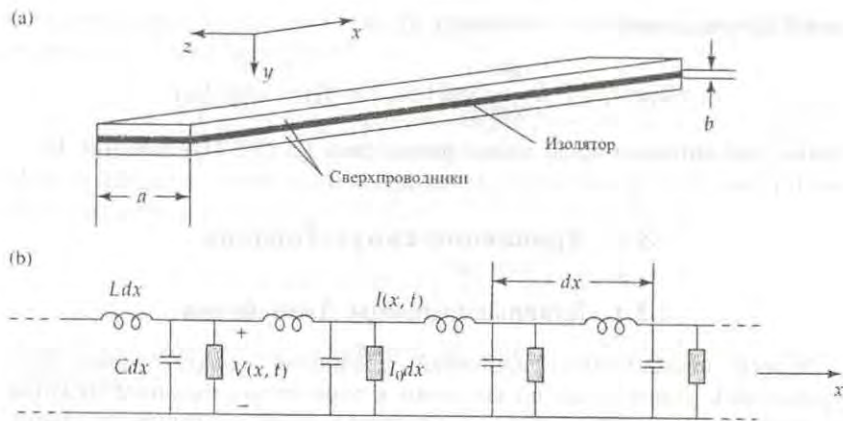


Рис. 3.4. (а) Сверхпроводящий полосковый волновод, в котором происходит распространение ПЭВ в x -направлении. (б) Эквивалентная модель электрической цепи.

Подставляя (3.44) в первое уравнение (3.43) и интегрируя по времени, получаем

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{2eL}{\hbar} I \quad (3.45)$$

с точностью до произвольной константы, которая в рассматриваемом случае равна нулю.

Тогда второе уравнение в (3.43) может быть переписано в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \phi, \quad (3.46)$$

где

$$c = 1/\sqrt{LC} \quad (3.47)$$

называется скоростью Суихарта [65] и

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\hbar}{2eLI_0}}. \quad (3.48)$$

Нормализация уравнения (3.43) к виду (3.2) может быть осуществлена, если расстояние измерять в единицах λ_J , а время — в единицах λ_J/c .

3.2.2. Уединенные волны

Рассмотрим нормализованное СГ-уравнение (3.2)

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u$$

при $-\infty < x < +\infty$ и $-\infty < t < +\infty$. В условиях предположения о бегущей волне $u(x, t) = \tilde{u}(x - vt)$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(1 - v^2) \tilde{u}'' = \sin \tilde{u}. \quad (3.49)$$

Умножая на \tilde{u}' и интегрируя по переменной бегущей волны $\xi = x - vt$ получаем

$$\frac{1}{2} (1 - v^2) (\tilde{u}')^2 = A - \cos \tilde{u}, \quad (3.50)$$

где A — постоянная интегрирования.

Положим $A = 1$ и наложим граничные условия $\tilde{u} \rightarrow 0 \pmod{2\pi}$ и $\tilde{u}' \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Тогда решение уединенной волны имеет следующий вид:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\pm \frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]. \quad (3.51)$$

Несмотря на то, что это решение Гудермана является солитоном, оно несколько отличается от рассмотренного в предыдущем разделе КдВ-солитона.

1. *Кинки и антикинки (Kinks and antikinks)*. Решение (3.51) представляет собой не настоящий импульс, но монотонное изменение амплитуды 2π при увеличении ξ от $-\infty$ до ∞ . Решение со знаком $+$ принято называть кинком, а решение со знаком $-$ — антикинком.
2. *Инвариантность относительно преобразования Лоренца*.¹⁾ Подобно релятивистской частице, СГ-кинк испытывает сжатие Лоренца, т. е. становится более узким при $v \rightarrow \pm 1$. Это свойство обусловлено тем, что СГ-уравнение инвариантно относительно замены независимой переменной $(x, t) \rightarrow (\xi, \tau)$

$$\xi = (x - vt)/\sqrt{1 - v^2} \quad \text{и} \quad \tau = (t - vx)/\sqrt{1 - v^2}. \quad (3.52)$$

3. *Кинк-антикинк аннигиляция*. При фиксированных граничных условиях в $x = \pm\infty$ величина совокупного изменения уровня решения

$$u(+\infty, t) - u(-\infty, t)$$

остаётся постоянной. При столкновении кинка с антикинком эта величина становится равной нулю, т. е. две компоненты волны аннигилируют друг друга, в результате чего происходит высво-

¹⁾ Хендрик Антуан Лоренц — голландский физик, установивший инвариантность электромагнитных уравнений относительно этого преобразования.

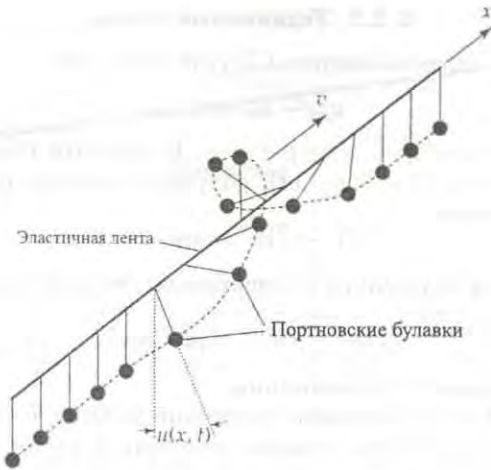


Рис. 3.5. Кинк в простейшей механической модели СГ-уравнения, которая может быть изготовлена с использованием портновских булавок и гибкой ленты. (Иглы вращаются по часовой стрелке в направлении распространения волны.)

бождение энергии в виде излучения, описываемого (линейным) уравнением Клейна-Гордона ¹⁾ $u_{xx} - u_{tt} \approx u$. Это явление может быть подвержено некоторым диссипативным эффектам, которые будут рассматриваться в главе 7, и аналогично по своей природе аннигиляции элементарной частицы при ее столкновении с соответствующей античастицей (например, при столкновении электрона с позитроном возникает гамма-излучение).

4. **Тахионы.** Кроме волн, описываемых решениями (3.51) при $|v| < 1$, существуют также решения вида

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\pm \frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right] + \pi, \quad (3.53)$$

которые имеют место при $|v| > 1$. Эти решения неустойчивы и соответствуют своим электромагнитным аналогам в виде тахионов — гипотетических частиц, скорость движения которых превосходит скорость света.

Все вышеперечисленные явления (исключая тахионы) могут наблюдаться в механических моделях СГ-уравнения [58], простейшая из которых изображена на рисунке 3.5. Эта модель может быть построена путем втыкания множества портновских булавок в гибкую ленту.

¹⁾ В 1920-х годах О. Клейн и В. Гордон независимо друг от друга предложили это уравнение в качестве квантового волнового уравнения. Термин «синус-Гордон уравнение» представляет собой игру слов, основанную на этом более раннем наименовании этого уравнения.

Интересно представить кинк-волну (или антикинк-волну) (3.51) в случае перехода Джозефсона, упомянутого в предыдущем разделе. Первое из уравнений (3.43) представляет собой не что иное, как закон сохранения для магнитного потока

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} LI dx,$$

где величина I связана с производной по x (или по u) равенством (3.45). Поскольку ϕ изменяется на 2π при интегрировании по всему кинку, каждый кинк содержит некоторое количество магнитного потока

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{2e} = \frac{\hbar}{2e} \doteq 2.064 \times 10^{-15} \text{Vs},$$

называемое квантом потока.

В настоящее время проводятся активные исследования динамики подобных квантов, часто называемых флаксонами и антифлаксонами по аналогии с кинками и антикинками. Эти исследования связаны с многочисленными экспериментальными, теоретическими и вычислительными аспектами [3,51].

3.2.3. Периодические волны

Кинк-решение (3.51) было получено при значении постоянной интегрирования A равном единице, что обусловило $|v| < 1$. В этом разделе мы исследуем периодические решения

$$u(x, t) = \tilde{u}(\theta) = \tilde{u}(\theta + 2\pi) \pmod{2\pi}, \quad (3.54)$$

где θ — переменная бегущей волны

$$\theta = \omega t - \beta x.$$

Локальное значение скорости волны определяется равенством

$$v = \frac{\omega}{\beta}.$$

Используя эти обозначения, рассмотрим следующие решения:

1. $A > 1$ и $|v| < 1$. В этом случае уравнение (3.50) может быть переписано в следующей форме:

$$\sqrt{\beta^2 - \omega^2} \int_{\tilde{u}} \frac{dy}{\sqrt{2(A - \cos y)}} = \theta. \quad (3.55)$$

Из этого равенства видно, что \tilde{u} является монотонно возрастающей функцией θ . (В контексте исследований электромагнитных волн в переходе Джозефсона это решение представляет собой одномерный массив флаксонов, движущихся при субкритической скорости.)

2. $1 > A > -1$ и $|v| < 1$. В этом случае уравнение (3.50) может быть также переписано в форме (3.55) и соответствующее решение периодически осциллирует вблизи $\tilde{u} = \pi$.
3. $1 > A > -1$ и $|v| > 1$. В этом случае уравнение (3.50) может быть переписано в следующей форме:

$$\sqrt{\beta^2 - \omega^2} \int_{\tilde{u}}^{\tilde{u}} \frac{dy}{\sqrt{2(\cos y - A)}} = \theta, \quad (3.56)$$

- т. е. решение периодически осциллирует вблизи $\tilde{u} = 0$.
4. $A < -1$ и $|v| > 1$. Из равенства (3.56) видно, что \tilde{u} является монотонно возрастающей функцией θ и представляет собой одномерный массив тахионов, движущихся при субкритической скорости.

Эти решения представляют собой бегущие волны. Как было отмечено во введении, Уизем показал в книге [71], что формулировка задачи на основе усредненного лагранжиана может быть использована для получения динамических уравнений медленных вариаций этих волн.

Плотность лагранжиана для уравнения (3.2) задается равенством

$$\mathcal{L} = (u_t^2 - u_x^2)/2 + \cos u. \quad (3.57)$$

Усреднение этой величины по периоду $\theta = \omega t - \beta x$ имеет вид

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} (\omega^2 - \beta^2) \tilde{u}_\theta^2 + \cos \tilde{u} \right] d\theta. \quad (3.58)$$

Интеграл может быть упрощен с учетом того, что равенство (3.50) может быть переписано в следующей форме:

$$\frac{1}{2} (\beta^2 - \omega^2) \tilde{u}_\theta^2 + \cos \tilde{u} = A. \quad (3.59)$$

Действительно, подставляя $\cos \tilde{u}$ из этого равенства в (3.58), мы получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\omega^2 - \beta^2) \tilde{u}_\theta^2 d\theta + A = \\ &= \frac{1}{2\pi} (\omega^2 - \beta^2) \int_0^{2\pi} \tilde{u}_\theta d\tilde{u} + A. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение

$$\langle \mathcal{L} \rangle(\omega, \beta, A) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \oint \sqrt{2(\cos y - A)} dy + A$$

представляет собой усредненную плотность функции Лагранжа, определяющую медленные вариации трех параметров (ω, β, A) .

Эти три параметра связаны тремя уравнениями, которые могут быть получены следующим образом. Во-первых, с использованием выражения для вариации $\langle \mathcal{L} \rangle$ по A мы получаем нелинейное уравнение дисперсии

$$\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \oint \frac{dy}{\sqrt{2(\cos y - A)}} = 2\pi. \quad (3.60)$$

Во-вторых, с использованием выражения для вариации $\langle \mathcal{L} \rangle$ по θ мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \langle \mathcal{L} \rangle}{\partial \omega} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \langle \mathcal{L} \rangle}{\partial \beta} = 0. \quad (3.61)$$

(Вычисление этой вариации приведено в Приложении А.) И наконец для того, чтобы θ являлась функцией x и t существует условие совместности:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (3.62)$$

Эти три равенства могут быть записаны в более компактной форме, если ввести обозначение

$$I(A) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2(\cos y - A)} dy. \quad (3.63)$$

Тогда, подставив это выражение в (3.60), возведя в квадрат и продифференцировав по x , мы получаем

$$(I')^2 (\omega \omega_x - \beta \beta_x) + (\omega^2 - \beta^2) I' I'' A_x = 0. \quad (3.64)$$

Далее, уравнение (3.61) приобретает вид

$$(\omega^2 - \beta^2) I' (\omega A_t + \beta A_x) + \omega I (\beta \beta_t + \omega \omega_x) - \beta I (\beta \omega_t + \omega \omega_x) = 0. \quad (3.65)$$

В матричной форме равенства (3.64), (3.65) и (3.62) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \omega^2 I & -\omega \beta I & \beta(\omega^2 - \beta^2) I' \\ -\beta(I')^2 & \omega(I')^2 & (\omega^2 - \beta^2) I' I'' \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \beta \\ \omega \\ A \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \omega \beta I & -\beta^2 I & \omega(\omega^2 - \beta^2) I' \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \beta \\ \omega \\ A \end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Эта нелинейная система описывает медленные вариации параметров $\beta(x, t)$, $\omega(x, t)$ и $A(x, t)$.

Характеристическая скорость v_e этой системы может быть определена с использованием равенства

$$v_e \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \beta \\ \omega \\ A \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \beta \\ \omega \\ A \end{bmatrix}$$

и равна

$$v_e = \frac{\beta \pm \sqrt{\alpha} \omega}{\omega \pm \sqrt{\alpha} \beta} \quad (3.67)$$

где $\alpha \equiv -II''/(I')^2$.

Особый интерес представляет третье решение (3.56), представляющее собой периодическую бегущую волну, осциллирующую вблизи $\tilde{u} = 0$. В линейном пределе $A \rightarrow 1$, $\alpha \rightarrow 0$ и равенство (3.60) сводится к следующему

$$\omega^2 - \beta^2 = 1.$$

Таким образом, величина

$$v_e = \beta/\omega = d\omega/d\beta$$

представляет собой линейную групповую скорость. Очевидно, что равенство (3.66) представляет нелинейную огибающую волну, или волну модуляции, которая двигается на несущей волне, определяемой равенством (3.54), со скоростью $v_e = \omega/\beta$.

Если $II'' > 0$, $\sqrt{\alpha}$ является мнимой величиной и скорость огибающей волны (3.67) не принимает вещественных значений, что может служить критерием модуляционной неустойчивости. Это было впервые отмечено в работе Островского [50] в контексте нелинейной оптики. Уизем показал, что этот эффект имеет место для периодических волн типа 3 [71] и приводит к неустойчивости движения глубоководных волн, исследованных Бенджамином и Фейером [6]. В этом случае волна с постоянной амплитудой является неустойчивой по отношению к малым вариациям модуляции и эта «неустойчивость Бенджамина-Фейера» может привести к возникновению солитонов огибающей волны, которые будут рассматриваться в разделе 3.3.1. (Другие связанные с решениями третьего типа аспекты рассматриваются в задачах 31 и 32).

3.2.4. Нелинейные стоячие волны

При нахождении решения бегущей волны для СГ-уравнения мы предполагали $-\infty < x < +\infty$, но реальные сверхпроводящие полосковые волноводы имеют конечную длину в x -направлении (см. рисунок 3.4). Таким образом, интересно рассмотреть систему

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u \quad (3.68)$$

при

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq l \\ 0 &\leq t < +\infty \\ u_x(0, t) &= u_x(l, t) = 0. \end{aligned}$$

Граничное условие имеет следующий смысл: ток в x -направлении (пропорциональный u_x) равен нулю на двух концах разомкнутой цепи

структуры полоскового волновода. Уравнение (3.68) описывает нелинейный резонатор, для которого можно найти различные экспериментально наблюдаемые точные решения [51].

Для того, чтобы решить линейную задачу этого типа можно использовать метод разделения переменных, т. е. искать решение в виде $u(x, t) = X(x)T(t)$ и соответствующие ОДУ для $X(x)$ и $T(t)$. В общем случае нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных этот метод неэффективен, но СГ-уравнение имеет некоторые интересные решения, принадлежащие классу [38]

$$u(x, t) = 4 \arctg[X(x)T(t)]. \quad (3.69)$$

Легко видеть, что этот класс включает кинки и антикинки (3.51).

Подставляя (3.69) в (3.68) получаем

$$\begin{aligned} (1 + X^2 T^2)(X''T - XT'' - XT) - \\ - 2XT[(X')^2 T^2 - X^2 (T')^2 - X^2 T] = 0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Далее, предположим, что $X(x)$ и $T(t)$ — эллиптические функции, удовлетворяющие уравнениям

$$(X')^2 = a_1 X^4 + a_2 X^2 + a_3 \quad (3.71)$$

$$(T')^2 = b_1 T^4 + b_2 T^2 + b_3, \quad (3.72)$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 и b_3 — некоторые постоянные. Из (3.71) и (3.72) следует, что

$$X'' = 2a_1 X^3 + a_2 X \quad (3.73)$$

$$T'' = 2b_1 T^3 + b_2 T. \quad (3.74)$$

При подстановке (3.71)-(3.74) в (3.70) члены при $X^5 T^3$ и $X^3 T^5$ сокращаются и в результате мы получаем

$$\begin{aligned} 2X^3 T(a_1 + b_3) - 2XT^3(a_3 + b_1) + \\ + XT(a_2 - b_2 - 1) + X^3 T^3(-a_2 + b_2 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Это равенство справедливо при трех условиях:

$$\begin{aligned} b_1 &= -a_3 \\ b_2 &= a_2 - 1 \\ b_3 &= -a_1, \end{aligned}$$

связывающих шесть параметров a_1, \dots, b_3 ; таким образом, осталось три неопределенных параметра: a_1, a_2, a_3 . Множители $X(x)$ и $T(t)$ определяются соответственно равенством (3.71) и

$$(T')^2 = -a_3 T^4 + (a_2 - 1)T^2 - a_1 \quad (3.75)$$

и они могут быть выражены в форме эллиптических функций Якоби (см. Приложение С) [11, 40].

При некотором выборе параметров a_1, a_2 и a_3 можно получить три различных решения граничной задачи (3.68) [19]. Эти решения, а также их предельные аппроксимации, показывающие качественные характеристики их эволюции, будут представлены ниже. При нахождении аппроксимаций использовались данные из Таблицы С.1 для эллиптических функций.

Колебания плазмы

В этом случае

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg}[A \operatorname{cn}(\beta x; k_x) \operatorname{cn}(\omega t; k_t)], \quad (3.76)$$

где

$$k_x^2 = \frac{A^2[\beta^2(1+A^2)+1]}{\beta^2(1+A^2)^2}$$

$$k_t^2 = \frac{A^2[\omega^2(1+A^2)-1]}{\omega^2(1+A^2)^2}$$

и β, ω и A связаны нелинейным соотношением дисперсии

$$\omega^2 - \beta^2 = \frac{1-A^2}{1+A^2}. \quad (3.77)$$

Допустимые значения β в этих формулах определяются граничными условиями

$$\beta_n = \frac{2n}{l} K(k_x),$$

где n — число антиузлов (циклов) стоячей волны и $K(\cdot)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

При $A \rightarrow 0, k_x \rightarrow 0$ и $k_t \rightarrow 0$

$$u(x, t) \rightarrow 4A \cos \beta x \cos \omega t$$

при

$$\omega^2 - \beta^2 = 1.$$

Специалисты в области исследования переходов Джозефсона называют этот случай поведения решений «колебаниями плазмы», т. к. в пределе $\beta \rightarrow 0$ соотношение дисперсии сводится к $\omega^2 = 1$, что соответствует повсеместному колебанию системы с собственной частотой

$$\frac{c}{\lambda_j} = \sqrt{\frac{2eI_0}{\hbar C}},$$

подобно студенистому шару.

В этом пределе малой амплитуды синусоидальная бегущая волна распространяется в обоих направлениях и интерферирует согласованно с граничными условиями при $x = 0$ и $x = l$.

Бризеры

Совершенно другой тип решения характеризуется связанным колебанием кинка или антикинка, которое может быть расположено в центре или на концах системы. В этом случае

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg}\{A \operatorname{dn}[\beta(x-x_0); k_x] \operatorname{sn}(\omega t; k_t)\}, \quad (3.78)$$

где

$$k_x^2 = 1 - \left[\frac{1 - \beta^2(1+A^2)/A^2}{\beta^2(1+A^2)} \right]$$

$$k_t^2 = \frac{A^2[1 - \omega^2(1+A^2)]}{\omega^2(1+A^2)},$$

и нелинейное соотношение дисперсии имеет вид

$$\beta = \omega A.$$

Для выполнения граничных условий необходимо

$$\beta_n = \frac{n}{l} K(k_x)$$

и x_0 может принимать три значения: $0, l/2$ и l .

В отличие от случая колебания плазмы, имеется некоторое минимальное значение A , ниже которого бризеры не могут существовать. Для того, чтобы убедиться в этом, заметим, что величина k_x^2 становится больше единицы при $A^2 < A_c^2 \equiv \beta_l^2/(1-\beta_l^2)$. Однако, при $l \rightarrow \infty$ имеет место $\beta \rightarrow 0$ и, следовательно, $A_c \rightarrow 0$. В этом предельном случае большой длины волны $k_x^2 = 1$. Кроме того, $k_t^2 = 0$ при $\omega^2(1+A^2) = 1$. Тогда соотношение дисперсии принимает вид

$$\omega^2 + \beta^2 = 1$$

и, следовательно, выражение для решения (3.78) сводится к

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\beta \sin \omega t}{\omega \operatorname{ch} \beta(x-x_0)} \right]. \quad (3.79)$$

Это решение называется бризером (breather). Колебания, описываемые равенством (3.78), соответствуют бризерам, область существования которых ограничена боксом длины l .

Кинк-антикинк колебания

Третье решение для нелинейной граничной задачи имеет вид

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg}[A \operatorname{dn}(\beta x; k_x) \operatorname{sc}(\omega t; k_t)], \quad (3.80)$$

где $sc \equiv \text{sn} / \text{cn}$ и

$$k_x^2 = 1 - \left[\frac{\omega^2(A^2 - 1) - 1}{\beta^2(A^2 - 1)} \right]$$

$$k_t^2 = 1 - \left[\frac{A^2[\omega^2(A^2 - 1) - 1]}{\omega^2(A^2 - 1)} \right].$$

Нелинейное соотношение дисперсии имеет вид

$$\beta = \omega A,$$

где β могут принимать значения (для обеспечения выполнения граничных условий)

$$\beta_n = \frac{n}{l} K(k_x).$$

Полагая $\omega^2(A^2 - 1) = 1$, получаем $k_x^2 = k_t^2 = 1$. Тогда соотношение дисперсии принимает следующий вид:

$$\beta^2 - \omega^2 = 1$$

и

$$u(x, t) = 4 \arctg \left[\frac{\beta \text{sh} \omega t}{\omega \text{ch} \beta x} \right]. \quad (3.81)$$

Это решение представляет собой колебание, которое может быть описано следующим образом. Бегущий в x -направлении кинк отражается от границы $x = l$ в виде антикинка. Антикинк распространяется в $-x$ -направлении и отражается от границы $x = 0$ в виде кинка. Эти колебания продолжаются бесконечно долго. В случае полоскового волновода Джозефсона, это нелинейное колебание может управляться постоянным источником электрического тока и служить теоретической основой для построения генераторов электромагнитных волн с частотой нескольких сотен гигагерц.¹⁾

3.2.5. Двухсолитонные решения

Возвращаясь к случаю бесконечной длины можно сказать, что СГ-уравнение имеет точное решение вида

$$u_{kk}(x, t) = 4 \arctg \left[\frac{v \text{sh}(x/\sqrt{1-v^2})}{\text{ch}(vt/\sqrt{1-v^2})} \right], \quad (3.82)$$

которое соответствует ситуации, когда один кинк, имеющий скорость $+v$, сталкивается в начале координат с другим кинком, имеющим скорость $-v$. График этого решения при $v = \frac{1}{2}$ изображен на рисунке 3.6.

¹⁾ Результаты моделирования нелинейных стоячих волн можно посмотреть на сайте <http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/soliton-lab/gallery/solitons/sg-e.html>.

Аналогично, на рисунке 3.7 показан график решения, соответствующего случаю столкновения кинка с антикинком

$$u_{kak}(x, t) = 4 \arctg \left[\frac{\text{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v \text{ch}(x/\sqrt{1-v^2})} \right] \quad (3.83)$$

при $v = \frac{1}{2}$

Представленные выше решения были получены в 1950-х годах Сигером с соавторами [63] и использовались для описания дислокаций в кристаллах. Эти решения были также независимо получены в контексте нелинейной теории элементарных частиц Перрингом и Скирмом в 1962 году [52].

Решения (3.82) и (3.83) можно получить с использованием метода разделения переменных, описанного в предыдущем разделе (например при $v \equiv \omega/\beta$ равенства (3.83) и (3.81) идентичны), но более поучительно будет использовать для этих целей преобразование Бэклунда. Напомним (см. главу 1), что при замене независимой переменной

$$u(x, t) \rightarrow \tilde{u}(\xi, \tau) = u(x, t)$$

$$x \rightarrow \xi = (x + t)/2$$

$$t \rightarrow \tau = (x - t)/2$$

СГ-уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \tau} = \sin \tilde{u}.$$

Преобразование Бэклунда для такого уравнения известно с девятнадцатого века:

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} = 2a \sin \left(\frac{\tilde{u}_1 + \tilde{u}_0}{2} \right) + \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tau} = \frac{2}{a} \sin \left(\frac{\tilde{u}_1 - \tilde{u}_0}{2} \right) - \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \xi}.$$

Так же как и в случае КдВ-уравнения, преобразование Бэклунда обладает свойством перестановочности, которое может быть представлено в виде следующих диаграмм:

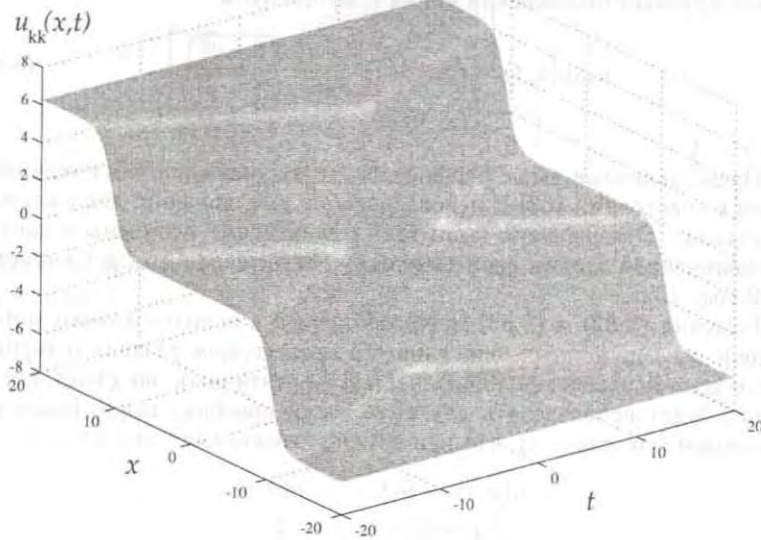
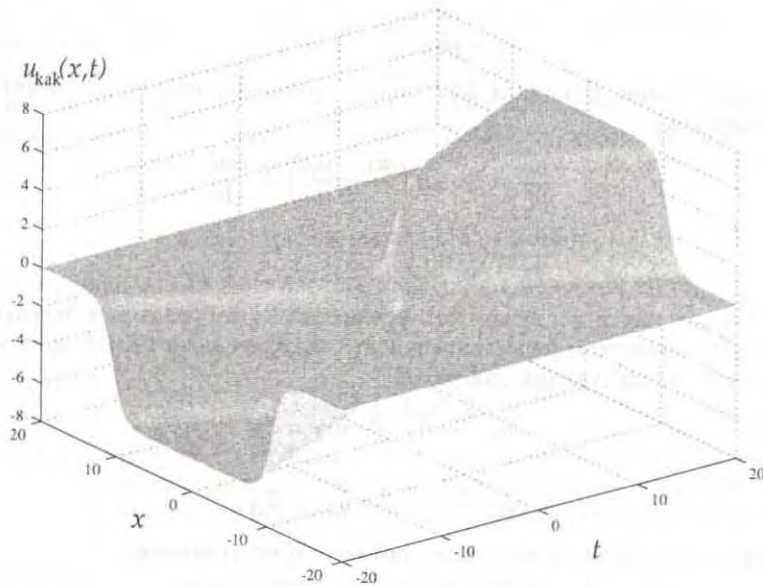
$$\tilde{u}_0 \xrightarrow{a_1} \tilde{u}_1 \xrightarrow{a_2} \tilde{u}_{12} = \tilde{u}_{21}$$

и

$$\tilde{u}_0 \xrightarrow{a_2} \tilde{u}_2 \xrightarrow{a_1} \tilde{u}_{21} = \tilde{u}_{12}.$$

Первой из этих двух диаграмм соответствуют уравнения

$$\frac{\partial(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_0)}{\partial \xi} = 2a_1 \sin \left(\frac{\tilde{u}_1 + \tilde{u}_0}{2} \right)$$

Рис. 3.6. График решения кинк-кинк (3.82) для СГ-уравнения при $v = \frac{1}{2}$.Рис. 3.7. График решения кинк-антикинк (3.83) для СГ-уравнения при $v = \frac{1}{2}$.

$$\frac{\partial(\tilde{u}_{12} - \tilde{u}_1)}{\partial \xi} = 2a_2 \sin\left(\frac{\tilde{u}_{12} + \tilde{u}_1}{2}\right),$$

а второй —

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_0)}{\partial \xi} &= 2a_2 \sin\left(\frac{\tilde{u}_2 + \tilde{u}_0}{2}\right) \\ \frac{\partial(\tilde{u}_{21} - \tilde{u}_2)}{\partial \xi} &= 2a_1 \sin\left(\frac{\tilde{u}_{21} + \tilde{u}_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Свойство перестановочности преобразования Бэклунда

$$\tilde{u}_{21} = \tilde{u}_{12},$$

позволяет исключить производные по ξ . В результате мы получаем равенство

$$\tan\left(\frac{u_{12} - u_0}{4}\right) = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}\right) \tan\left(\frac{u_2 - u_1}{4}\right), \quad (3.84)$$

которое выполнено как для $u(x, t)$, так и для $\tilde{u}(\xi, \tau)$.

В предположении, что u_2 не тождественно равно u_1 и полагая $a_1 = a_2$, мы получаем $u_{12} = u_0 \pmod{2\pi}$. Таким образом, аналогично случаю КдВ-уравнения (см. (3.32)), мы можем получить два различных кинка, движущихся с равными скоростями. Формулы для столкновения кинка с антикинком могут быть получены при подстановке в (3.84) $u_0 = 0$ и

$$\begin{aligned} u_1 &= 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(+ \frac{x - v_1 t}{\sqrt{1 - v_1^2}} \right) \right] \\ u_2 &= 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(+ \frac{x - v_2 t}{\sqrt{1 - v_2^2}} \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$v_i = \frac{1 - a_i^2}{1 + a_i^2}, \quad i = 1, 2$$

или

$$a_i = \pm \sqrt{(1 + v_i)/(1 - v_i)}.$$

В частности, при $v_1 = -v_2 \equiv v$ и положительных a_1, a_2 мы получаем

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} = \frac{1}{v}$$

и решение для столкновения кинка с антикинком (3.83). Решение (3.82) для столкновения кинка с кинком может быть получено аналогичным образом.

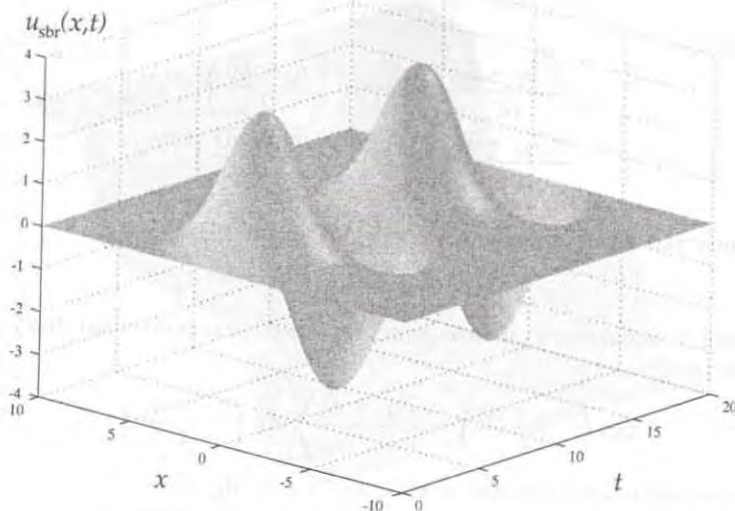


Рис. 3.8. График стационарного бризера (3.85) при $\omega = \pi/5$.

Выражение для симметричного кинк-антикинк решения принимает интересную форму, если предположить, что скорость v может принимать мнимые значения. Например, при

$$v = i\omega/\sqrt{1-\omega^2}, \quad \omega < 1$$

решение (3.83) становится стационарным бризером

$$u_{sbr}(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \frac{\sin \omega t}{\operatorname{ch} \sqrt{1-\omega^2} x} \right], \quad (3.85)$$

представляющим собой локализованное осциллирующее решение, которое было получено нами ранее (см. (3.79)). График этого решения изображен на рисунке 3.8. Стационарный бризер может быть приведен в движение при преобразовании Лоренца (3.52). В этом случае выражение

$$u_{mbr}(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \sin \left[\frac{\omega(t - v_e x)}{\sqrt{1-v_e^2}} \right] \operatorname{sech} \left[\frac{\sqrt{1-\omega^2}(x - v_e t)}{\sqrt{1-v_e^2}} \right] \right\} \quad (3.86)$$

соответствует точному решению СГ-уравнения при групповой скорости v_e , равной обратной величине скорости ее несущей волны.

Решения для N -солитонов СГ-уравнения приведены в Приложении В (см. (В.4) и (В.5)).¹⁾

3.2.6. Многомерные СГ-уравнения

Переходы Джозефсона, в которых обе трансверсальные размерности больше определенной равенством (3.48) характеристической длины, представляют собой двумерные структуры. Определяя вектор поверхностного тока равенством [58]

$$\mathbf{I} = I_x \mathbf{i} + I_y \mathbf{j},$$

где \mathbf{i} и \mathbf{j} — единичные векторы x - и y -направлений, мы можем получить более общую форму уравнений (3.43)

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} V &= -L \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{I} &= -C \frac{\partial V}{\partial t} - I_0 \sin \phi. \end{aligned} \quad (3.87)$$

В этих уравнения единицы измерения могут быть выбраны следующим образом: $V \sim$ вольты, $L \sim$ генри/квадрат, $\mathbf{I} \sim$ А/м, $C \sim$ фарад/м², $\phi \sim$ радианы и $I_0 \sim$ А/м. Равенство (3.45) принимает вид

$$\operatorname{grad} \phi = -(2eL\hbar)\mathbf{I}. \quad (3.88)$$

Тогда ненормализованное СГ-уравнение, описывающее изменение ϕ (изменение фазы сверхпроводящей волновой функции в поперечном сечении изолятора), принимает следующую двумерную форму:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \phi, \quad (3.89)$$

где c и λ_J определяются выражениями, которые формально идентичны равенствам (3.47) и (3.48). Пусть v — скорость наблюдателя, движущегося в x -направлении. Эти уравнения инвариантны относительно преобразования Лоренца

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = \gamma(x - vt) \\ t &\rightarrow t' = \gamma(t - vx/c^2), \end{aligned} \quad (3.90)$$

при котором

$$\begin{aligned} V &\rightarrow V' = \gamma(V - LvI_x) \\ I_x &\rightarrow I'_x = \gamma(I_x - CvV) \\ I_y &\rightarrow I'_y = I_y \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi, \end{aligned}$$

¹⁾ Результаты моделирования описанных в этом разделе кинк-кинк и кинк-антикинк столкновений можно посмотреть на сайте <http://homepages.tversu.ru/s000154/collision/main.html>.

где

$$\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2/c^2}. \quad (3.91)$$

Если величины поверхностного тока I_x и напряжения в поперечном сечении V были измерены неподвижным наблюдателем, то величины I'_x и V' , полученные движущимся наблюдателем, будут зависеть от I_x и V . Этот эффект аналогичен зависимости наблюдаемых величин напряженности электрического и магнитного полей в трехмерном пространстве от характеристик движения наблюдателя.

Имеет ли двухмерное СГ-уравнение устойчивые и локализованные в пространстве решения? Если бы такие решения существовали, можно было бы привести их в движение через преобразование Лоренца (подобно тому, как это было сделано выше для стационарного бризера (3.86)), что привело бы к открытию двумерных «элементарных частиц» в больших переходах Джозефсона. Одним из путей поиска подобных решений было предположение, что они не зависят от времени и имеют радиальную симметрию. Однако численные исследования показали, что в этом случае в начале координат должно быть выполнено граничное условие вида

$$\text{grad } \phi \sim -\alpha \mathbf{i}_r/r, \quad (3.92)$$

где α — положительная константа и \mathbf{i} — направленный наружу радиальный единичный вектор [2]. Это граничное условие могло бы быть выполнено вблизи короткого замыкания в переходе — экспериментатор может легко представить подобную ситуацию — но параллельная симметрия, необходимая для преобразования Лоренца, в этом случае была бы нарушена.

Тем не менее, можно поставить несколько исследовательских проблем, связанных с исследованием СГ-уравнения, пространственная переменная которого имеет размерность более единицы. Среди них следует отметить следующие.

1. *Токи смещения.* Двумерные электрические потоки в больших переходах Джозефсона стали вызывать в последнее время значительный интерес [12-14,62]. Цель этих исследований заключается в том, чтобы предсказать возникновение и осуществить управление токами смещения в структурах более сложных, чем одномерный полосковый волновод, изображенный на рисунке 3.4. В качестве примера таких структур могут служить экспоненциально затухающие колебания потока, в которых пакеты флаксонов направляются в направлении действия нагрузки путем изменения поперечных геометрических характеристик волновода [4,5].

2. *Внутренние флаксон-петли.* Рассмотрим двумерный переход Джозефсона с независимыми переменными, принадлежащими области

$$-\infty < x < +\infty$$

$$-\infty < y < +\infty$$

$$0 \leq t < +\infty,$$

и начальными условиями, соответствующими месту расположения и начальной скорости замкнутой кривой, вдоль которой величина ϕ изменяется на 2π . Кинк-солитон располагается в направлении, перпендикулярном этой кривой и представляет собой флаксон-петлю. Если флаксон-петля имеет некоторую начальную скорость, вектор которой направлен наружу этой петли, то радиус петли увеличится до максимального значения, соответствующего состоянию, при котором вся начальная кинетическая энергия преобразовалась в энергию покоя более длинной петли [18]. После достижения этого состояния максимального радиуса кольцо сжимается обратно в направлении к его центру под воздействием сил, возникающих при уменьшении энергии петли в результате уменьшения ее радиуса. Механизм этого явления подобен тому, что был предложен для элементарных частиц Дерриком в 1964 году [20]. Интересно отметить, что коллапсирующая петля отражается от начала координат, что приводит к возникновению метаустойчивого «пульсона» [8,9,17]. Проведенные в последнее время численные исследования эллиптических колец показали, что время жизни пульсона может достигать нескольких циклов колебаний [16].

3. *Трехмерная динамика.* Рассмотренный выше двумерный случай был обобщен на трехмерное СГ-уравнение

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \sin \phi \quad (3.93)$$

с начальными условиями в виде сферической поверхности. В этом случае опять наблюдались пульсации [10]. С учетом результатов разделов 1.2 и 1.3.5 можно сказать, что уравнение (3.93) может использоваться для описания поведения элементарных частиц. Так же как и в двумерном случае, в центре сферически симметричного решения имеется сингулярность, но ее можно избежать с использованием более сложной структуры — замкнутой трехмерной кривой (клубка), вдоль которой располагаются сингулярности, аналогичные тем, что возникали при необходимости обеспечить условие (3.92). При численном исследовании подобных решений полезно сравнить динамику поверхностей, топологически эквивалентных сфере, с динамикой поверхностей, которые возникают из начальных условий типа различных торов и других замкнутых поверхностей большего порядка.

Перечисленные проблемы расположены в порядке увеличения их вычислительной трудоемкости. С учетом постоянного увеличения мощности компьютеров можно надеяться, что эти исследования будут продолжены энтузиастами нелинейной науки.

3.3. Нелинейное уравнение Шредингера

3.3.1. Нелинейные волновые пакеты

Как мы видели в главе 2, часто удобно записывать решение линейной волновой задачи в следующей форме:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i(kx - \omega t)} dk, \quad (3.94)$$

где $F(k)$ — преобразование Фурье $u(x, 0)$ и ω связана с k соотношением дисперсии $\omega = \omega(k)$. За исключением случая $\omega = k$, каждая компонента (3.94) движется с различной скоростью ω/k и волна диспергирует — отсюда название этого соотношения.

Волновой пакет представляет собой специальную форму равенства (3.94) с компонентами Фурье, движущимися со скоростями, близкими значению, соответствующему некоторому коэффициенту распространения k_0 и соответствующей частоте ω_0 . Другими словами, $F(k)$ принимает максимальное значение при $k = k_0$ и быстро уменьшается при увеличении $|k - k_0|$. Это обстоятельство позволяет разложить соотношение дисперсии в степенной ряд в окрестности k_0 .

Таким образом, при

$$\omega = \omega_0 + b_1(k - k_0) + b_2(k - k_0)^2 + \dots,$$

равенство (3.94) может быть переписано в следующем виде

$$u(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i[(k - k_0)x - b_1(k - k_0)t - b_2(k - k_0)^2 t]} dk,$$

где множитель

$$e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$$

представляет собой несущую волну со скоростью

$$v_c = \omega_0 / k_0.$$

Поверх несущей волны располагается огибающая волна

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k + k_0) e^{i(\kappa x - b_1 \kappa t - b_2 \kappa^2 t)} d\kappa. \quad (3.95)$$

(Переменная интегрирования была заменена с k на $\kappa = k - k_0$.)

Дифференцируя (3.95) по времени, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -i(b_1 \kappa + b_2 \kappa^2) F(\kappa + k_0) e^{i(\kappa x - b_1 \kappa t - b_2 \kappa^2 t)} d\kappa = \\ &= -b_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + i b_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Тогда ДУ в частных производных

$$i \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + b_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + b_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (3.96)$$

определяет эволюцию огибающей волны.

До этого момента наше обсуждение касалось лишь линейной теории. Далее мы покажем, как введение небольшой нелинейности может привести к изменению выражения (3.96). Если a — локальная величина амплитуды огибающей волны, то член наименьшего порядка в соотношении дисперсии будет пропорционален a^2 . Члены первого порядка по a в этом соотношении отсутствуют, т. к. в противном случае это повлекло бы зависимость динамики огибающей волны от знака несущей волны, изменяющегося на каждой половине ее цикла.¹⁾

Из уравнения (3.96) следует, что соотношение дисперсии для огибающей линейного волнового пакета имеет вид

$$\omega = b_1 \kappa + b_2 \kappa^2.$$

Поскольку квадрат амплитуды удовлетворяет равенству $a^2 = |\phi|^2$, дополненному нелинейностью уравнению (3.96)

$$i \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + b_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + b_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \alpha |\phi|^2 \phi = 0, \quad (3.97)$$

где α — вещественное число, соответствует нелинейное соотношение дисперсии

$$\omega = b_1 \kappa + b_2 \kappa^2 - \alpha a^2.$$

Уравнение (3.97) является нелинейным уравнением Шредингера (НУШ), которое обладает следующими основными свойствами:

1. НУШ описывает распространение огибающей волны (или модуляции), двигающейся поверх несущей волны.
2. Если огибающая достаточно медленно изменяется при изменении x и имеет достаточно малую амплитуду, то последние два члена

¹⁾ В случае малых колебаний плазмы (см. (3.77), а также задачу 32) соотношение дисперсии имеет следующий вид:

$$\omega^2 = 1 + k^2 - \tilde{\alpha} a^2,$$

где $\tilde{\alpha}$ — вещественная константа.

в левой части уравнения могут быть опущены и модуляция движется с групповой скоростью

$$v_g = b_1 = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0}.$$

3. Член $b_2(\partial^2 \phi / \partial x^2)$ позволяет учесть дисперсию волны при наименьшем уровне аппроксимации задачи. Аналогично, член $\alpha |\phi|^2 \phi$ позволяет при наименьшем уровне аппроксимации задачи ввести в рассмотрение нелинейность. Таким образом, НУШ следует использовать в случаях, когда необходимо рассмотреть эффекты наименьшего порядка, связанные с дисперсией и нелинейностью волнового пакета.

При соответствующей замене переменных уравнение (3.97) может быть приведено к стандартной форме (3.3), но при выполнении этого преобразования следует учитывать соотношение между знаками α и b_2 : при $\alpha b_2 > 0$ перед последним членом в уравнении (3.3) будет стоять знак плюс, а при $\alpha b_2 < 0$ — минус. Таким образом, более общей формой записи уравнения (3.3) будет следующая

$$i \frac{\partial u}{\partial t} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0. \quad (3.98)$$

Две версии этого уравнения будут обозначаться далее как НУШ(+) и НУШ(−). Иногда эти две версии называются соответственно «фокусирующее» и «дефокусирующее» нелинейное уравнение Шредингера.

Волновые решения НУШ(+) с постоянной амплитудой (плоские волны) демонстрируют неустойчивость Бенджамина–Фейера, упомянутую в разделе 3.2.3 в контексте периодических решений СГ-уравнения. Эта неустойчивость приводит, в свою очередь, к образованию устойчивых модулированных бегущих волн.

3.3.2. Решения модулированных бегущих волн для НУШ(+)

Рассмотрим задачу нахождения ограниченных решений НУШ(+) на бесконечной области $-\infty < x < +\infty$ и $-\infty < t < +\infty$. Очевидно, что стандартное предположение о том, что решение имеет вид бегущей волны $u(x, t) = \tilde{u}(x - vt)$ не может быть применено в рассматриваемом случае, т. к. для этого требуется, чтобы скорость имела мнимое значение. Поэтому следует рассмотреть решения более общего вида

$$u(x, t) = \phi(x, t) e^{i\theta(x, t)}, \quad (3.99)$$

где ϕ и θ — некоторые вещественные функции.

Подставляя (3.99) в НУШ(−) и приравнявая соответствующие вещественные и мнимые части, получаем

$$\begin{aligned} \phi_{xx} - \phi \theta_x^2 - \phi \theta_t + 2\phi^3 &= 0 \\ \phi \theta_{xx} + 2\phi_x \theta_x + \phi_t &= 0. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Мы будем искать решения модулированных бегущих волн для НУШ в виде (3.99) с

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= \tilde{\theta}(x - v_e t) \\ \phi(x, t) &= \tilde{\phi}(x - v_e t). \end{aligned}$$

Тогда уравнения (3.100) принимают следующую форму:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{xx} - \tilde{\phi} \tilde{\theta}_x^2 + v_e \tilde{\phi} \tilde{\theta}_x + 2\tilde{\phi}^3 &= 0 \\ \tilde{\phi} \tilde{\theta}_{xx} + 2\tilde{\phi}_x \tilde{\theta}_x - v_e \tilde{\phi}_x &= 0. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Умножая второе из этих уравнений на $2\tilde{\phi}$ и интегрируя, получаем уравнение

$$\tilde{\phi}^2 (2\tilde{\theta}_x - v_e) = \text{const}, \quad (3.102)$$

которое может быть разрешено относительно $\tilde{\theta}_x$. Полученное выражение можно подставить в первое уравнение (3.101).

Для упрощения процедуры последующего интегрирования полезно выбрать в (3.102) нулевую постоянную интегрирования. Тогда $\theta_x = v_e/2$ и после интегрирования первого из уравнений (3.101) мы получаем

$$\int \frac{dy}{\sqrt{P(y)}} = \pm (x - v_e t), \quad (3.103)$$

где

$$P(y) \equiv C + \frac{1}{4}(v_e^2 - 2v_e v_c)y^2 - y^4. \quad (3.104)$$

В общем случае (3.103) представляет собой эллиптический интеграл, но если $C = 0$, то

$$\tilde{\phi} = a \operatorname{sech}[a(x - v_e t)],$$

где

$$4a^2 = v_e^2 - 2v_e v_c. \quad (3.105)$$

Таким образом могут быть независимо выбраны два из трех параметров волны (a , v_e и v_c). Поскольку наиболее важными параметрами являются амплитуда волны a и групповая скорость v_e , точное решение НУШ удобно записать в следующей форме:

$$u(x, t) = a \exp \left[i \frac{v_e}{2} x + i \left(a^2 - \frac{v_e^2}{v} \right) t \right] \operatorname{sech}[a(x - v_e t - x_0)]. \quad (3.106)$$

При $v_e = 0$ это решение сводится к стационарному бризеру

$$u(x, t) = a e^{ia^2 t} \operatorname{sech}[a(x - x_0)], \quad (3.107)$$

который локализуется вблизи $x = x_0$ и осциллирует с частотой a^2 .

Возможно, у кого-то может возникнуть опасение, что при $v_e = 0$ в (3.105) величина a^2 станет равной нулю, однако этого не случит-

ся, если допустить произвольно большую величину скорости несущей волны v_c . Это допущение не является странным, как это могло бы показаться с первого взгляда. В линейных дисперсных волновых системах очень часто фазовая скорость принимает бесконечное значение, в то время как групповая скорость волнового пакета стремится к нулю. С физической точки зрения бесконечная скорость несущей волны (фазовая скорость) соответствует ситуации, когда все части системы осциллируют синфазно (например, в случае стационарного бризера).

Если постоянная интегрирования в (3.104) отрицательна, то $P(y)$ может быть представлен в следующем виде:

$$P(y) = (a^2 - y^2)(y^2 - b^2).$$

Эта величина принимает вещественные значения при $a \geq y \geq b$. Тогда из равенства

$$\int \frac{\tilde{\phi}}{\sqrt{P(y)}} dy = \pm(x - v_e t)$$

следует, что

$$\tilde{\phi} = a \operatorname{dn}[a(x - v_e t); k],$$

т. е. $\tilde{\phi}$ имеет вид эллиптической функции Якоби с $k^2 = 1 - b^2/a^2$ (см. Приложение С). Как функция от x , $\tilde{\phi}$ осциллирует между максимальным a и минимальным значением b и имеет период $\lambda = (2/a)K(k)$, где

$$4(a^2 + b^2) = v_e^2 - 2v_e v_c.$$

Таким образом, соответствующее решение для (3.3) имеет следующий вид:

$$u(x, t) = a \exp \left[i \frac{v_e}{2} x + i \left(a^2 + b^2 - \frac{v_e^2}{4} \right) t \right] \operatorname{dn}[a(x - v_e t - x_0); k]. \quad (3.108)$$

3.3.3. Решение темного солитона для НУШ(-)

Вернемся к уравнению (3.98) со знаком минус перед вторым членом. Это уравнение называется дефокусирующей версией НУШ или НУШ(-). На первый взгляд, эта версия уравнения Шредингера не представляет интереса, поскольку волны постоянной амплитуды (плоские волны) устойчивы и, следовательно, солитоны (вида (3.106)) не образуются. Однако, решения НУШ(-) могут содержать области сравнительно малой амплитуды (в случае оптики — темные пятна), которые движутся на фоне устойчивой плоской волны сохраняя свою форму и с постоянной скоростью. Это семейство решений с пониженной амплитудой называется темными солитонами и задается следующим выражением [34]

$$u(x, t) = a \exp(2ia^2 t) \{ (\cos \theta) \operatorname{th}[a(\cos \theta)(x - vt)] - i \sin \theta \}, \quad (3.109)$$

где a — амплитуда плоской волны, на фоне которой движется темный солитон, величина $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ определяет минимальное значение поля и $v = a \sin \theta$. Подобные темные пятна, а также светлые пятна (стандартные решения НУШ), могут использоваться для переноса битов информации и служить основой для разработки оптических компьютеров.

3.3.4. Преобразование Бэклунда для НУШ(+)

Используя идеи, связанные с методом обратного преобразования рассеяния, Чен получил преобразование Бэклунда для нормализованной формы уравнения (3.3) [15]:

$$\begin{aligned} (u_n + u_{n-1})_x &= -2i\xi(u_n + u_{n-1}) + \\ &\quad + (u_n - u_{n-1})\sqrt{4\eta^2 - |u_n + u_{n-1}|^2} \\ (u_n + u_{n-1})_t &= -2\xi(u_n + u_{n-1})_x + \\ &\quad + i(u_n - u_{n-1})\sqrt{4\eta^2 - |u_n + u_{n-1}|^2} + \\ &\quad + i(u_n + u_{n-1})(|u_n|^2 + |u_{n-1}|^2). \end{aligned} \quad (3.110)$$

В этих равенствах $\lambda = \xi + i\eta$ представляет собой местоположение в верхней полуплоскости полюса соответствующего оператора рассеяния, указывающего на наличие дополнительного солитона в решении для N -солитона. Соответствующий результат для случая АКНС-формулировки метода обратной задачи рассеяния (см. главу 6) был получен Конно и Вадати [35]. Этот подход позволяет также получить преобразование Бэклунда для КдВ-уравнения, СГ-уравнения, уравнения Шредингера и других уравнений.

При $u_n = u_1$, $u_{n-1} = u_0 = 0$ и $\xi = 0$ равенства (3.110) сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} u_{1,x} &= u_1 \sqrt{4\eta^2 - |u_1|^2} \\ u_{1,t} &= 4i\eta^2 u_1, \end{aligned} \quad (3.111)$$

при интегрировании которых с $\eta = a/2$ можно получить решение для стационарного бризера (3.107). Решение движущегося бризера (3.106) может быть получено путем интегрирования (3.110) при $u_{n-1} = 0$ и $\xi = v_e/4$. Это решение может быть также получено из решения стационарного бризера с учетом того, что если $u(x, t)$ является решением НУШ, то

$$\exp \left[i \frac{v_e}{2} x - i \frac{v_e^2}{4} t \right] u(x - v_e t, t) \quad (3.112)$$

также является решением этого уравнения.

Интерес к нахождению решений для N -солитонов был мотивирован экспериментальными наблюдениями сужения высокочастотных импульсов в оптических волокнах, выполненными Молленером с

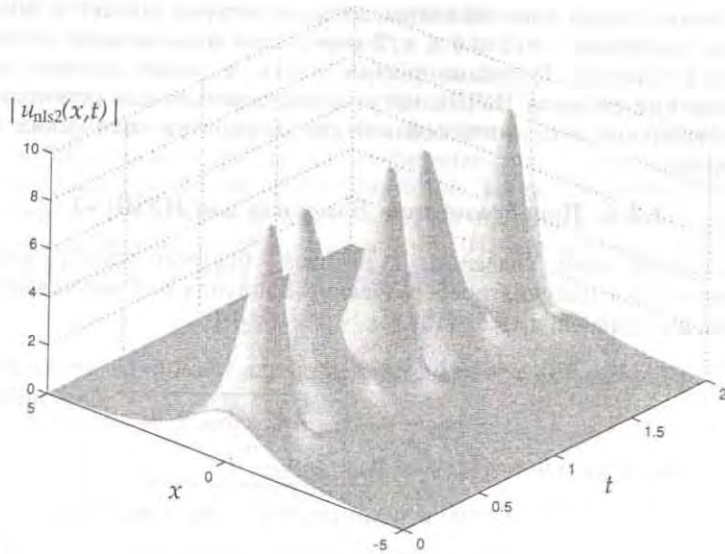


Рис. 3.9. График функции $|u_{nls2}(x, t)|$, задаваемой равенством (3.113).

соавторами [47]. Эти сугубо нелинейные эффекты были аналитически исследованы с использованием НУШ с начальными условиями [57]

$$u(x, 0) = N \operatorname{sech} x.$$

При $N = 1$ решение (3.107) принимает следующую форму:

$$u_{nls1}(x, t) = e^{it} \operatorname{sech} x.$$

Сатсума и Яджима показали, используя метод обратной задачи рассеяния, что при $N = 2$

$$u_{nls2}(x, t) = 4e^{it} \frac{\operatorname{ch} 3x + 3e^{8it} \operatorname{ch} x}{\cos 4x + 4 \operatorname{ch} 2x + 3 \cos 8t}. \quad (3.113)$$

Это решение изображено на рисунке 3.9. В ходе экспериментов с использованием оптических волокон было установлено, что определяемые этой функцией импульсы становятся более узкими при увеличении t .

Для получения решения (3.113) с использованием последовательно применяемых преобразований Бэклунда следует воспользоваться свойством перестановочности этих преобразований и получить формулу, аналогичную (3.32) для КдВ-уравнения или (3.84) для СГ-уравнения. Определяя преобразования диаграммами

$$u_0 \xrightarrow{a_1} u_1 \xrightarrow{a_2} u_{12} = u_{21}$$

$$u_0 \xrightarrow{a_2} u_2 \xrightarrow{a_1} u_{21} = u_{12}$$

и

и предполагая, что $\xi = 0$ и $4\eta^2 = a^2$, мы получаем

$$\begin{aligned} (u_{12} - u_2) \sqrt{a_1^2 - |u_{12}^2 + u_2|^2} - (u_{12} - u_1) \sqrt{a_2^2 - |u_{12}^2 + u_2|^2} = \\ = (u_2 - u_0) \sqrt{a_2^2 - |u_2^2 + u_0|^2} - (u_1 - u_0) \sqrt{a_1^2 - |u_1^2 + u_0|^2}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

При $a_1 = 1$, $a_2 = -3$ и

$$u_0 = 0 \quad u_1 = e^{it} \operatorname{sech} x \quad u_2 = -3e^{9it} \operatorname{sech} 3x$$

$u_{1,2}(x, t)$ равна $u_{nls2}(x, t)$ в равенстве (3.113).

Из этого результата следует, что НУШ имеет точные N -солитонные решения. Выражения для этих решений (В.6) приведены в Приложении В.

3.3.5. Трансверсальные явления

Среди множества приложений нелинейного уравнения Шредингера возможно наибольшее значение имеет его использование в области нелинейной оптики [49]. В этом контексте уравнение (3.97) представляет собой модель плоской электромагнитной волны, распространяющейся в x -направлении. Величина

$$\phi = |\mathbf{E}|$$

представляет собой амплитуду электрического поля, и она остается постоянной на поверхностях, перпендикулярных направлению распространения волны. Эта ситуация может быть создана в условиях эксперимента, но не представляет особого интереса. В этом разделе будут рассмотрены некоторые обобщения НУШ, которые связаны с вариациями в трансверсальной плоскости.

Векторное нелинейное уравнение Шредингера

В случае, когда плоская электромагнитная волна распространяется в x -направлении, огибающая электрического поля будет определяться перпендикулярным вектором

$$\mathbf{E} = E_y(x, t)\mathbf{j} + E_z(x, t)\mathbf{k},$$

где \mathbf{j} и \mathbf{k} — единичные вектора осей y и z . В общем случае волна имеет две поляризационные компоненты (E_y и E_z) и уравнение (3.97) принимает следующий вид:

$$i \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + b_1 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \right) + b_2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \alpha |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} = 0,$$

который после нормировки может быть приведен к виду (3.3) и записан в форме двух нелинейных уравнений Шредингера

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + 2(|u_y|^2 + |u_z|^2)u_y &= 0 \\ i \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + 2(|u_y|^2 + |u_z|^2)u_z &= 0, \end{aligned} \quad (3.115)$$

где $u_y(u_z)$ — поляризация в $y(z)$ -направлении.

Манаков показал, что эти два связанных НУШ представляют собой солитонную систему, для которой могут быть найдены соответствующие линейные операторы, используемые в вычислительной процедуре метода обратной задачи рассеяния (см. главу 6) [44]. С использованием вышеизложенных результатов о солитонах НУШ можно показать, что уравнения (3.115) имеют решения вида

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k} \\ &= a \mathbf{p} \exp \left[i \frac{v_e}{2} x + i \left(a^2 - \frac{v_e^2}{4} \right) t \right] \operatorname{sech}[a(x - v_e t - x_0)], \end{aligned}$$

где \mathbf{p} — единичный вектор в направлении поляризации волны. Манаков показал, что взаимодействие этих векторных солитонов может представлять больший интерес, чем взаимодействие скалярных солитонов. При столкновении двух векторных солитонов \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 наряду с ожидаемым смещением положений x_{01} и x_{02} изменяются также и соответствующие вектора поляризации \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 . Этот эффект оказывает влияние на взаимодействие между солитонами НУШ, которые переносят биты информации в оптических волокнах.

Система уравнений (3.115) может быть представлена в форме векторного нелинейного уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + 2(\mathbf{u}, \mathbf{u})\mathbf{u} = 0, \quad (3.116)$$

где $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, \dots, u_N)$ и $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \equiv |u_1|^2 + |u_2|^2 + \dots + |u_N|^2$.

При некоторых упрощающих предположениях эта формулировка (при $N = 3$) может использоваться при изучении инициирования и распространения солитонов вдоль трех ветвей альфа-спиральной молекулы протеина (см. рисунок 8.6) [60].

Нитеобразование

Явление нитеобразования можно наблюдать повсеместно — это образование ручьев и рек, атмосферных разрядов электричества (молний), гидродинамических струй и путей миграций диких животных. Во всех этих примерах имеет место некоторый нелинейный эффект, действующий трансверсально по отношению к направлению движения и собирающий возмущение в относительно узкий канал.

Конструкторы лазеров предпочитают, чтобы их изделия испускали однородную плоскую волну, однако очень часто случаются явления, по существу представляющие собой явления нитеобразования и проявляющиеся в том, что лазерный луч превращается в беспорядочную последовательность вспышек. Для управления этим эффектом и его устранения необходимо понять его природу и это служит мотивацией для исследования нитеобразования в нелинейной оптике. Простейшую модель этого явления можно получить, если предположить, что вариации процесса распространения в x -направлении происходят медленно, процесс не зависит от времени (устойчивое состояние) и поперечная нелинейность действует только в y -направлении. При этих предположениях огибающая электрического поля описывается уравнением, нормализованная форма которого имеет вид

$$i \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2|u|^2 u = 0, \quad (3.117)$$

где $u \propto |\mathbf{E}|$. Это уравнение формально идентично уравнению (3.3) и исследовалось в классической работе Захарова и Шабата [77]. Очевидно, что одним из решений этого уравнения является устойчивый (лентовидный) луч

$$u(x, y) = a e^{ia^2 x} \operatorname{sech}[a(y - y_0)].$$

Уравнение (3.117) можно легко решить, но к сожалению оно не реалистично, поскольку не допускает самофокусировки в z -направлении. Поэтому интересно рассмотреть другое уравнение

$$i \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2|u|^2 u = 0, \quad (3.118)$$

описывающее устойчивый процесс самофокусировки плоской волны в луче с круглым сечением.

Было установлено, что решения уравнения (3.118), полученные в предположении, что переменная x представляет собой время ($x \rightarrow t$) и что луч симметричен в yz -плоскости, сходятся к началу координат за конечный промежуток времени $t_0 < \infty$. Подобное поведение решений отличается от поведения осциллирующих решений СГ-уравнения [43]. Несмотря на то, что амплитуда в начале координат неограниченно возрастает в момент $t = t_0 < \infty$, получить точное аналитическое или численное описание этого явления оказалось невозможно [45].

Взрыв и коллапс

Рассмотренные выше явления мотивировали исследование следующей нелинейной системы

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^2 u + |u|^{2\sigma} u = 0, \quad (3.119)$$

где оператор пространственной производной ∇^2 действует в пространствах размерности $D = 1, 2$ и 3 . Это уравнение было исследовано Расмуссеном и Рипдалем [53], которые показали, что для существования локализованных состояний необходимо выполнение следующих условий:

$$\sigma < 2/(D-2) \text{ при } D > 2 \text{ и } \sigma < \infty \text{ при } D \leq 2.$$

Если локализованные состояния существуют, то достаточным условием их устойчивости является следующее неравенство:

$$0 < \sigma < 2/D.$$

Случай $D = 3$ и $\sigma = 2$ представляет особый интерес, поскольку соответствует динамике ленгмюровских волн в плазме ¹⁾ [76].

Если условие устойчивости для локализованного решения не выполнено, решение становится неограниченным в некоторой точке пространства \mathbf{r}_0 в конечный момент времени t_0 . В качестве наименования этого явления часто взаимозаменяемым образом используют термины «взрыв» и «коллапс». Более точную характеристику решения можно дать с использованием терминов «масса» или «число»:

$$N(u) = \int |u|^2 d\tau, \quad (3.120)$$

где $d\tau$ — дифференциал элемента объема пространства размерности D . С учетом того, что

$$\dot{N} = 0,$$

можно сказать, что коллапс происходит в случаях, когда вся масса сосредотачивается в одной точке, а взрыв — при выполнении менее ограничительного требования $|u(\mathbf{r}_0)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_0 < \infty$. В обоих случаях полученное неограниченное решение не имеет физического смысла и свидетельствует о том, что некоторые используемые при выводе уравнения (3.119) предположения были нарушены.

Нелинейные уравнения Шредингера более общего вида

Комплексное уравнение Свифта–Хохенберга может быть приведено к НУШ при соответствующем выборе параметров и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au + b\nabla^2 u + c|u|^2 u + d(1 + \nabla^2)^2 u, \quad (3.121)$$

где a, b, c и d — комплексные параметры и

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

¹⁾ Эти волны исследовались американским химиком Ирвингом Ленгмюром (1881-1957).

Это уравнение представляет интерес для специалистов в области управления поперечной неустойчивостью полупроводниковых лазеров с большой апертурой [41]. Проведенные в последнее время исследования показали, что эта система имеет различные решения в виде локализованных стоячих волн, которые взаимодействуют друг с другом непредсказуемым образом [56].

При $d = 0$ уравнение (3.121) сводится к комплексному уравнению Гинзбурга–Ландау, представляющему собой нелинейную систему, которая демонстрирует в зависимости от выбора комплексных параметров либо нитеобразование, либо двумерный пространственно-временной хаос. Майкл Кросс, сотрудник физического отделения Калифорнийского Технологического Института, создал программу, позволяющую во время Интернет-сессии исследовать динамику решений этого уравнения (см. <http://www/cmp/caltech/edu/mcc/Patterns/index.html>). Читателю рекомендуется потратить несколько часов на проведение этих численных экспериментов. Например, при $d = 0$ и вещественных a, b, c уравнение (3.121) сводится к двумерной нелинейной диффузной системе, которая будет исследована в следующей главе. Таким образом, уравнение (3.121) является связующим звеном между солитонами НУШ и нелинейной диффузией. Эта связь является предметом современных исследований.

3.4. Заключение

В этой главе рассматривались три фундаментальные уравнения солитона (КдВ-уравнение Кортевега-де Вриза, синус-Гордон-уравнение и нелинейное уравнение Шредингера), которые возникают при исследовании различных прикладных проблем. Были рассмотрены наиболее важные физические приложения и представлены методы решения этих трех уравнений, включая анализ бегущих волн, анализ усредненного лагранжиана модулированных периодических волн, нелинейное разделение переменных, метод Хирота и преобразование Бэклунда. Кратко рассмотрены актуальные проблемы обобщения этих систем с использованием дополнительных зависимых переменных и повышенной размерности пространства.

3.5. Задачи

- (а) С использованием уравнения (1.1) оцените глубину Бургундского канала, в котором Рассел впервые наблюдал движение гидродинамического солитона.
- (б) Оцените погрешность ошибки вашего результата.
- (а) Опишите все ограниченные решения линейной аппроксимации (при малой амплитуде) КдВ-уравнения (3.1).
- (б) Решите аналогичную задачу для СГ-уравнения (3.2).

- (с) Решите аналогичную задачу для нелинейного уравнения Шредингера (3.3).
3. Определите единицы измерения для \tilde{u} , ζ и τ в (3.5), при которых КдВ-уравнение приводится к виду (3.1).
4. Выполните интегрирование (3.8) и получите решение бегущей волны (3.9) для КдВ-уравнения.
5. (а) Найдите предельные формы записи (при $k = 0$ и $k = 1$) всех двенадцати эллиптических функций Якоби, определенных в приложении С. Каковы периоды этих функций.
- (б) С использованием рисунков С.2 и С.3, нарисуйте графики двенадцати эллиптических функций при $k = 0.9$ и $0 \leq \zeta < K$.
6. (а) Используя тригонометрические формулы

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1, \quad d \sin y = \cos y dy \quad \text{и} \quad d \cos y = -\sin y dy,$$

покажите, что $\sin y$ и $\cos y$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(\psi')^2 = 1 - \psi^2.$$

- (б) Используя тождества для эллиптических функций [11]

$$\operatorname{sn}^2 y + \operatorname{cn}^2 y = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 y + \operatorname{dn}^2 y = 1 \quad \text{и} \quad d \operatorname{cn} y = -\operatorname{sn} y \operatorname{dn} y dy,$$

покажите, что $\operatorname{sn}(y; k)$ удовлетворяет уравнению

$$(\psi')^2 = (1 - \psi^2)(1 - k^2 + k^2 \psi^2)$$

и $\operatorname{sn}(y; k)$ удовлетворяет уравнению

$$(\psi')^2 = (1 - \psi^2)(1 - k^2 \psi^2).$$

- (с) Покажите, что результаты пункта (б) могут быть сведены к результатам (а) при $k \rightarrow 0$.
7. (а) Нарисуйте графики $\tilde{u}(\xi)$ (3.12) при $\xi_1 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и $a_3 = 1, 4$ и 25 .
- (б) Каковы скорости бегущей волны v в каждом из этих случаев?
- (с) Каковы значения периода бегущей волны λ в каждом из этих случаев?
8. Найдите общее решение КдВ-уравнения для периодического граничного условия $u(x, t) = u(x + l, t)$.
9. Рассмотрим плотность лагранжиана для волнового процесса $w(x, t)$ с функциональной зависимостью

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(w_{xx}, w_x, w_t)$$

и вариацию δw истинного решения с ограничениями $\delta w(x, t) = 0$ при $x = x_1, x_2$ и $t = t_1, t_2$.

- (а) Показать, что если для указанных вариаций траектории выполнено условие

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dx dt = 0,$$

то

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_x} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} = 0.$$

(Указание: см. Приложение А.)

- (б) Найдите дифференциальное уравнение в частных производных для $w(x, t)$, если

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} w_x w_t + w_x^3 + \frac{1}{2} w_{xx}^2.$$

Как этот результат связан с КдВ-уравнением?

10. В дифференциальном уравнении в частных производных из предыдущей задачи положите

$$w = \psi + \Phi(\theta),$$

где $\Phi(\theta)$ — периодическая функция (с нулевым средним значением) быстрой переменной $\theta = kx - \omega t$ и $\psi = \beta x - \gamma t$ — медленная вариация решения. В этой формулировке $u = w_x$ принимает следующий вид:

$$u = \beta + \Phi_\theta,$$

где β — среднее значение u [71].

- (а) Покажите, что величина \mathcal{L} , усредненная по периоду решения равна

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} \rangle &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L} d\theta = \\ &= kW(A, B, v) + \frac{1}{2}[B + (A + \gamma)\beta - v\beta^2], \end{aligned}$$

где

$$W(A, B, v) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2y^3 + vy^2 - Ay - B} dy,$$

A и B — определенные в (3.11) постоянные интегрирования и величина

$$v = \omega/k$$

представляет собой локальное значение скорости бегущей волны.

- (б) Используя вариацию $\langle \mathcal{L} \rangle$ по A , покажите что

$$\beta = -2kW_A.$$

- (c) Используя вариацию
- $\langle \mathcal{L} \rangle$
- по
- ψ
- , покажите, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\beta}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v\beta - \frac{A+\gamma}{2} \right) = 0.$$

- (d) Покажите, что для
- ψ
- , определенной как функция от
- x
- и
- t
- , выполнено равенство

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0.$$

- (e) Используя результаты (c) и (d), покажите, что из равенства

$$\gamma = v\beta - \frac{A}{2}$$

следует

$$\langle \mathcal{L} \rangle = kW(A, B, v) + \frac{1}{2} \left(B + \frac{A}{2} \beta \right).$$

- (f) Покажите, что полученное в пункте (e) выражение для
- $\langle \mathcal{L} \rangle$
- представляет собой функцию только параметров
- a_1, a_2
- и
- a_3
- , определенных в (3.11) (см. также рисунок 3.2).

11. При каких условиях на
- P
- и
- Q
- дифференциальная форма

$$du = P(x, t) dx + Q(x, t) dt$$

имеет полный дифференциал? (Указание: предположите, что u является хорошо определенной функцией x и t .)

12. (a) Найдите нетривиальное преобразование Бэклунда для дифференциального уравнения в частных производных

$$u_{xx} - u_{tt} = u,$$

определенного при $-\infty < x < +\infty$ и ограниченном u при $x \rightarrow \pm\infty$.

- (b) Покажите, что при каждом применении очередного шага найденного в пункте (a) преобразования Бэклунда вводится новая собственная функция.

13. Покажите, что для класса нелинейных уравнений, имеющих решения бегущей волны, всегда существует преобразование Бэклунда, при помощи которого из вакуум-решения генерируются решения бегущей волны.

14. (a) Выполните интегрирование преобразования Бэклунда для КдВ-уравнения, определенного равенствами (3.22) и (3.23) при
- $w_1 = 0$
- и получите сингулярное решение

$$w_2(x, t) = -2\kappa \operatorname{cth}[\kappa(x - 4\kappa^2 t - x_0)],$$

где $\lambda \equiv -\kappa^2$.

- (b) Используя (3.8), покажите, что
- $w_{2,x}$
- является решением (3.6).

15. (a) Покажите, что 2-солитонное решение (3.28) для КдВ-уравнения имеет асимптотические формы, определенные равенствами (3.29) и (3.30).

(b) Докажите это с использованием численных экспериментов.

16. Представьте преобразование Бэклунда (3.22) и (3.23) для КдВ-уравнения в форме (3.14).

17. Покажите, что производная (3.33) по
- x
- является 2-солитонным решением (3.28) для КдВ-уравнения.

18. Используя (3.28), получите общее 2-солитонное решение для КдВ-уравнения.

19. Покажите, что

$$(i) D_t D_x(a \cdot b) = a_{xt}b + ab_{xt} - a_t b_x - a_x b_t,$$

$$(ii) D_t D_x(a \cdot a) = 2(aa_{xt} - a_x a_t),$$

$$(iii) D_x^m(a \cdot a) = 0 \text{ при нечетном } m,$$

$$(iv) D_x^2(a \cdot a) = 2(aa_{xx} - a_x^2),$$

$$(v) D_x^4(a \cdot a) = 2(aa_{xxxx} - 4a_x a_{xxx} + 3a_{xx}^2),$$

$$(vi) D_t^m D_x^n (\exp \theta_1 \cdot \exp \theta_2) = (\omega_2 - \omega_1)^m (k_1 - k_2)^n \exp(\theta_1 + \theta_2), \text{ где } \theta_i = k_i x - \omega_i t + \alpha_i, i = 1, 2.$$

20. Покажите, что правая часть уравнения Хирота (3.42) равна нулю.

21. Используя (B.1), (B.2) и (B.3), найдите решения КдВ-уравнения для
- $N = 1, 2$
- и 3.

22. (a) Используя уравнение Максвелла, покажите, что напряжение
- V
- (см. рисунок 3.4) связано с напряженностью электрического поля
- E_y
- поперечной электромагнитной волны равенством

$$V = bE_y.$$

- (b) Аналогичным образом покажите, что сила тока
- I
- связана с напряженностью магнитного поля
- H_z
- равенством

$$I = aH_z.$$

- (c) Какова мощность тока, протекающего в
- x
- направлении?

23. В общем случае равенство (3.45) имеет вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{2eL}{\hbar} I + \text{const.}$$

Каков физический смысл постоянной интегрирования?

24. Параметр
- I_0
- в (3.43) характеризует интенсивность туннелирования Джозефсона между двумя сверхпроводящими металлическими пластинами.

- (a) Как величина
- I_0
- зависит от толщины
- b
- изолятора? (Указание: рассмотрите затухание квантовой волновой функции в потенциальном барьере.)

- (b) Что произойдет с нормализованной формой уравнения (3.46) при $I_0 \rightarrow 0$?
- (c) Используя уравнение Максвелла и учитывая тот факт, что магнитное поле проникает в материал сверхпроводников на глубину λ_L (называемую «глубиной проникновения Лондона») покажите, что предельное значение скорости флаксона в полосковом волноводе Джозефсона определяется равенством

$$c = \sqrt{\frac{b}{\mu_0 \varepsilon (b + 2\lambda_L)}},$$

где μ_0 — магнитная проницаемость пространства и ε — диэлектрическая проницаемость изолятора. (Это предельное значение скорости называется скоростью Суихарта [65].)

25. (a) Покажите, что нормализованное СГ-уравнение инвариантно относительно замены независимой переменной $(x, t) \rightarrow (\xi, \tau)$, где

$$\xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

- (b) Как изменится зависимая переменная в (3.43) при преобразовании Лоренца?

26. (a) Представьте (3.49) в виде системы первого порядка

$$\partial \tilde{u} / \partial \xi = w \quad \partial w / \partial \xi = \sin \tilde{u} / (1 - v^2)$$

и обсудите траектории решений этой системы на (\tilde{u}, w) -фазовой плоскости.

- (b) Определите траектории решений, соответствующих кинкам и антикинкам (3.51).
- (c) Определите траектории решений, соответствующих тахионам (3.53).
- (d) Определите траектории решений, соответствующих четырем бегущим волнам общего вида, описанным в разделе 3.2.3.
27. (a) Найдите эллиптическую функцию для кинк-решения СГ-уравнения в первом случае, рассмотренном в разделе 3.2.3.
- (b) Найдите эллиптическую функцию для кинк-решения СГ-уравнения в третьем случае, рассмотренном в разделе 3.2.3.
28. (a) С использованием гибкой ленты и нескольких портновских булавок постройте механическую модель СГ-уравнения (см. рисунок 3.5).
- (b) Используя второй закон Ньютона в континуальном пределе покажите, что ваша модель аппроксимирует СГ-уравнение.
- (c) Продемонстрируйте возникновение волн, соответствующих случаям 1 и 3 в разделе 3.2.3.

- (d) Опишите, что происходит при столкновении кинка с антикинком в вашей модели.
- (e) Можно ли наблюдать с использованием вашей модели сжатие Лоренца?
29. (a) Найдите выражение для эллиптической функции, описывающей распространение кинка при $|v| < 1$ в системе с периодическими граничными условиями $u(x, t) = u(x + l, t)$.
- (b) Опишите это решение в контексте механической модели, рассмотренной в предыдущей задаче.
30. Покажите, что равенство (3.57) определяет лагранжеву плотность для СГ-уравнения.
31. (a) Покажите, что для определяемых равенством (3.56) периодических решений третьего типа, выполнено

$$\tilde{u}(\theta) = \arccos[1 - (1 - A) \operatorname{sn}^2(2\theta K(k)/\pi; k)],$$

где $k^2 = (1 - A)/2$. (Указание: см. Приложение С.)

- (b) Покажите, что нелинейное дисперсионное соотношение (3.60) может быть представлено в виде

$$\omega^2 - \beta^2 = [\pi/2K(k)]^2,$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, определяемый равенством (С.8).

- (c) Определите алгебраический знак $I(A) d^2 I / dA^2$, где $I(A)$ определяется равенством (3.63).
32. Рассмотрим решения из предыдущей задачи для случая малой амплитуды и

$$1 - A \equiv \varepsilon \rightarrow 0.$$

- (a) Покажите, что

$$\tilde{u}(\theta) \sim \sqrt{2\varepsilon} \sin \theta.$$

- (b) Покажите, что нелинейное дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2 - \beta^2 = 1 - \varepsilon/4 + O(\varepsilon^2).$$

- (c) Обсудите динамику волновой системы с этим нелинейным дисперсионным уравнением для $O(\varepsilon)$ (См. [50].)

33. (a) Найдите значения a_1, a_2 и a_3 в (3.71) и (3.72), соответствующие решению колебания плазмы (3.76).
- (b) Найдите значения a_1, a_2 и a_3 в (3.71) и (3.72), соответствующие решению бризера (3.78).
- (c) Найдите значения a_1, a_2 и a_3 в (3.71) и (3.72), соответствующие осциллирующему кинк-антикинк решению (3.80).

34. (a) Пусть преобразование Бэклунда для СГ-уравнения выбрано в виде (1.9). Покажите, что если $u_0(\xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению (1.8), то $u_1(\xi, \tau)$ также удовлетворяет этому уравнению.
 (b) Получите (1.10) из (1.9) при $u_0 = 0$.
 (c) Покажите, что (1.8) преобразуется в (1.11) при замене переменных (1.12).
 (d) Проверьте, что (1.13) является решением уравнения (1.11).
 35. Получите (3.82) с использованием преобразования Бэклунда для СГ-уравнения.
 36. (a) Найдите выражение для сдвига фазы, имеющего место при столкновении кинка с кинком (3.82).
 (b) Найдите выражение для сдвига фазы, имеющего место при столкновении кинка с антикинком (3.83).
 37. Найдите (3.82) и (3.83) используя нелинейный метод разделения переменных для СГ-уравнения, представленный в разделе 3.2.4.
 38. Детально опишите последовательность преобразований Бэклунда, обеспечивающих получение решения стационарного бризера (3.85).
 39. (a) Определите преобразование (3.97) в (3.3) для случая, когда $\alpha b_2 > 0$.
 (b) Определите преобразование (3.97) в НУШ(-)

$$iu_t - u_{xx} + 2|u|^2u = 0$$

в случае, когда $\alpha b_2 < 0$.

40. Рассмотрим линейную волновую систему

$$iu_t + u_{xx} + u = 0.$$

- (a) Найдите соотношение дисперсии этой системы для решений вида

$$u(x, t) \sim e^{i(kx - \omega t)}.$$

- (b) Покажите, что фазовая скорость волнового пакета стремится к бесконечности при стремлении групповой скорости к нулю.
 (c) Какова связь результата (a) с (3.105)?
 41. (a) Получите выражение (3.108) для периодического решения НУШ(+) и покажите, что оно сводится к (3.106) при $b \rightarrow 0$.
 (b) Обсудите ограничения на выбор скоростей несущей и огибающей волн в решении (3.108).
 42. Используя представленный в разделе 3.3.2 метод покажите, что (3.109) является решением НУШ(-)

$$iu_t - u_{xx} + 2|u|^2u = 0.$$

43. Покажите, что если $u(x, t)$ является решением НУШ(+), то

$$\exp \left[i \frac{v_e}{2} x - i \frac{v_e^2}{4} t \right] u(x - v_e t, t)$$

также является решением этого уравнения.

44. Проинтегрируйте преобразование Бэклунда (3.110) при $u_{n-1} = 0$, $4\eta^2 = a^2$ и $4\xi = -v_e$ и получите решение подвижного бризера (3.106).
 45. (a) Покажите, что $u(x, t)$ в (3.113) равно $2 \operatorname{sech} x$ при $t = 0$.
 (b) Нарисуйте график $|u(x, t)|$ как функции от x при $t = 0, 0.2$ и 0.4 .
 (c) Найдите решение НУШ, которое равно $2 \operatorname{sech} x$ при $t = 0$ и движется со скоростью огибающей волны v_e .
 46. Проверьте, что если $u_0 = 0$, $u_1 = e^{it} \operatorname{sech} x$ и $u_2 = -3e^{9it} \operatorname{sech} 3x$ в (3.114), то u_{12} определяется равенством (3.113).
 47. (a) Найдите решение уравнения (3.117), удовлетворяющее граничному условию

$$u(0, y) = 2 \operatorname{sech} y.$$

- (b) Обсудите поведение найденного решения при различных значениях $x > 0$.

48. Покажите, что определенная равенством (3.120) величина не зависит от времени.
 49. Обсудите физические причины, которые ограничивают проявление эффекта взрыва в решениях уравнения (3.119).

Литература

- [1] T.Barnard. 2NTV ultrashort pulses. *Phys. Rev. A* 7 (1973) 373-376.
 [2] A.Barone, F.Esposito, C.J.Magee, and A.C.Scott. Theory and applications of the SG equation. *Riv. Nuovo Cimento* 1 (1971) 227-267.
 [3] A.Barone and G.Paterno. *Physics and Applications of the Josephson Effect*. John Wiley, New York, 1982.
 [4] A.Benabdallah, J.G.Caputo, and A.C.Scott. Exponentially tapered Josephson flux flow oscillator. *Phys. Rev. B* 54 (1996) 16139-16146.
 [5] A.Benabdallah, J.G.Caputo, and A.C.Scott. Laminar phase flow for an exponentially tapered Josephson oscillator. *J. Appl. Phys.* (6) 88 (2000) 3527-3540.
 [6] T.Brooke Benjamin and J.E.Feir. The disintegration of wave trains in deep water. *J. Fluid Mech.* 27 (1967) 417-430.
 [7] D.J.Benney and A.C.Newell. The propagation of nonlinear wave envelopes. *J. Math. Phys.* 46 (1967) 133-139.
 [8] I.L.Bogolyubskii. Oscillating particle-like solutions of the non-linear Klein-Gordon equation. *JETP.Lett.* 24 (1976) 535-538.

- [9] I.L.Bogolyubskii and V.G.Makhankov. Lifetime of pulsating solitons in certain classical models. *JETP.Lett.* 24 (1976) 12-14.
- [10] I.L.Bogolyubskii and V.G.Makhankov. Dynamics of spherically symmetrical pulson of large amplitude. *JETP.Lett.* 25 (1977) 107-110.
- [11] P.F.Byrd and M.D.Friedman. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*. Springer-Verlag, New York, 1954.
- [12] J.G.Caputo, N.Flytzanis, Y.Gaididei, and M.Vavalis. Two-dimensional effects in Josephson junctions: I. Static properties. *Phys. Rev. E* 54 (1996) 2092-2101.
- [13] J.G.Caputo, N.Flytzanis, and M.Vavalis. A semi-linear elliptic pde model for the static solution of Josephson junctions. *Int. J. Mod. Phys. C* 6 (1995) 241-262.
- [14] J.G.Caputo, N.Flytzanis, and M.Vavalis. Effect of geometry on fluxon width in a Josephson junction. *Int. J. Mod. Phys. C* 7 (1996) 191-216.
- [15] H.H.Chen. General derivation of Bäcklund transformations from inverse scattering problem. *Phys. Rev. Lett.* 33 (1974) 925-928.
- [16] P.L.Christiansen, N.G.Jensen, P.S.Lomdahl, and B.A.Malomed. Oscillations of eccentric pulsons. *Phys. Scr.* 55 (1997) 131-134.
- [17] P.L.Christiansen and P.S.Lomdahl. Numerical study of 2 + 1 dimensional SG solitons. *Physica D* 2 (1981) 482-494.
- [18] P.L.Christiansen and O.H.Olsen. Return effect for rotationally symmetric solitary wave solutions of the SG equation. *Phys. Lett. A* 68 (1978) 185-188.
- [19] G.Costabile, R.D.Parmenier, B.Savo, D.W.McLaughlin, and A.C.Scott. Exact solutions of the SG equation describing oscillations in a long (but finite) Josephson junction. *Appl. Phys. Lett.* 32 (1978) 587-589.
- [20] G.H.Derrick. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. *J. Math. Phys.* 5 (1964) 1252-1254.
- [21] P.G.Drazin and R.S.Johnson. *Solitons: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [22] W.Döring. Über die Tragheit der Wände zwischen weisschen Bezirken. *Z. Naturforsch.* 31 (1948) 373-379.
- [23] L.P.Eisenhart. *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Dover, New York, 1909/1960.
- [24] U.Enz. Discrete mass, elementary length, and a topological invariant as a consequence of a relativistic invariant variational principle. *Phys. Rev.* 131 (1963) 1392-1394.
- [25] J.L.Ferguson and G.H.Brown. Liquid crystals and living systems. *J. Am. Oil Chem. Soc.* 45 (1968) 120-127.
- [26] H.Flaschka and D.W.McLaughlin. Some comments on Bäcklund transformations and inverse scattering problems. In *Bäcklund Transformations*, R.M.Miura, ed., Springer-Verlag, Berlin, 1976.

- [27] Конторова Т. А., Френкель Я. И. К теории пластической деформации и двойникования. *ЖЭТФ.* 8, с. 89 (I часть), с.1340 (II часть), с 1349 (III часть), 1938.
- [28] B.D.Fried and Y.H.Ichikawa. On the nonlinear Schrödinger equation for Langmuir waves. *J. Phys. Soc. Jpn.* 34 (1973) 1073-1082.
- [29] A.Hasegawa and F.Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. *Appl. Phys. Lett.* 23 (1973) 142-144.
- [30] R.Hirota. Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Phys. Rev. Lett.* 27 (1971) 1192-1194.
- [31] Y.H.Ichikawa, T.Imamura, and T.Taniuti. Nonlinear wave modulation in collisionless plasma. *J. Phys. Soc. Jpn.* 34 (1972) 189-197.
- [32] V.I.Karpman and E.M.Kruskal. Modulated waves in nonlinear dispersive medium. *Sov. Phys. JETP* 28 (1969) 277-281.
- [33] P.L.Kelley. Self-focusing of optic beams. *Phys. Rev. Lett.* 15 (1965) 1005-1008.
- [34] Y.S.Kivshar and B.Luther-Davies. Dark optical solitons: physics and applications. *Physics Reports* 298 (1998) 81-197.
- [35] K.Konno and M.Wadati. Simple derivation of Bäcklund transformation from Riccati form of the inverse method. *Prog. Theor. Phys.* 53 (1975) 1652-1656.
- [36] D.J.Korteweg and H. de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag.* 39 (1895) 422-443.
- [37] G.L.Lamb, Jr. Propagation of ultrashort optical pulses. *Phys. Lett. A* 25 (1967) 181-182.
- [38] G.L.Lamb, Jr. Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium. *Rev. Mod. Phys.* 43 (1971) 99-124.
- [39] G.L.Lamb, Jr. *Elements of Soliton Theory*. John Wiley, New York, 1980. (Дж.Лэм. Введение в теорию солитонов. Мир, М. 1983. Дж.Л.Лэм Введение в теорию солитонов. Меркурий - Пресс, М. 2000.)
- [40] D.F.Lawden. *Elliptic Functions and Applications*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [41] J.Lega, J.V.Moloney, and A.C.Newell. Swift-Hohenberg equation for lasers. *Phys. Rev. Lett.* 73 (1994) 2978-2981.
- [42] S.Leibovich. Weakly nonlinear waves in rotating fluids. *J. Fluid Mech.* 42 (1970) 803-822.
- [43] P.S.Lomdahl, O.H.Olsen, and P.L.Christiansen. Return and collapse of solutions to the nonlinear Schrödinger equation in cylindrical symmetry. *Phys. Lett. A* 78 (1980) 125-128.
- [44] S.V.Manakov. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves. *Sov. Phys. JETP* 38 (1974) 248-253.

- [45] D.W.McLaughlin, G.C.Papanicolaou, C.Sulem, and P.L.Sulem. Focus ing singularity of the cubic Schrödinger equation. *Phys. Rev. A* 34 (1986) 1200-1210.
- [46] R.M.Miura. Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation. *J. Math. Phys.* 9 (1968) 1202-1204.
- [47] L.F.Mollenauer, R.H.Stolen, and J.P.Gordon. Experimental observation of pico second pulse narrowing and solitons in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980) 1095-1098.
- [48] K.Naugolnykh and L.Ostrovsky. *Nonlinear Wave Processes in Acoustics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. (Нагольных К. А., Островский Л.А. *Нелинейные волновые процессы в акустике*. М.: Наука. 1990.)
- [49] A.C.Newell and J.V.Moloney. *Nonlinear Optics*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.
- [50] L.A.Ostrovsky. Propagation of wave packets and space-time self-focusing in a nonlinear medium. *Sov. Phys. JETP* 24 (1967) 797-800.
- [51] N.F.Pedersen. Solitons on Josephson transmission lines. In *Solitons*, S.E.Trullinger, V.E.Zakharov, and V.L.Pokrovsky, eds., Elsevier, Amsterdam, 1986.
- [52] J.K.Perring and T.H.R.Skyrme. A model unified field equation. *Nucl. Phys.* 31 (1962) 550-555.
- [53] J.Juul Rasmussen and K.Rypdal. Blow-up in nonlinear Schroedinger Equations -I. A general review. *Phys. Scr.* 33 (1986) 481-497.
- [54] M.Remoissenet. *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments*. 2nd edition. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [55] N.Rosen and H.B.Rostenstock. The force between particles in a nonlinear field theory. *Phys. Rev.* 85 (1952) 257-259.
- [56] H.Sakaguchi and H.R.Brand. Localized patterns for the quintic complex Swift-Hohenberg equation. *Physica D* 117 (1998) 95-105.
- [57] J.Satsuma and N.Yajima. Initial value problems of one-dimensional self-modulation of nonlinear waves in dispersive media. *Supp. Prog. Theor. Phys.* 55 (1974) 284-306.
- [58] A.C.Scott, A nonlinear Klein-Gordon equation. *Am. J. Phys.* 37 (1969) 52-61.
- [59] A.C.Scott. *Active and Nonlinear- Wave Propagation in Electronics*. John Wiley, New York. 1970. (Э.Скотт. *Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике*. М.: Сов. радио, 1977.)
- [60] A.C.Scott. Launching a Davydov soliton: I. Soliton analysis. *Phys. Scr.* 29 (1984) 279-283.
- [61] A.C.Scott, F.Y.F.Chu, and D.W.McLaughlin. The soliton: A new concept in applied science. *Proc. IEEE* 61 (1973) 1443-1483.
- [62] A.C.Scott and W.J.Johnson. Internal flux motion in large Josephson junctions. *Appl. Phys. Lett.*, 14 (1969) 316-318.

- [63] A.Seeger, H.Donth, and A.Kochendorfer. Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen. *Z. Phys.* 134 (1953) 173-193.
- [64] T.H.R.Skyrme. A nonlinear theory of strong interactions. *Proc. R. Soc. (London)* A247 (1958) 260-278.
- [65] J.C.Swihart. Field solutions for a thin-film superconducting strip transmission line. *J. Appl. Phys.* 32 (1961) 461-469.
- [66] V.I.Talanov. Self-focusing of wave beams in nonlinear media. *JETP. Lett.* 2 (1965) 138-141.
- [67] T.Taniuti and H.Washimi. Self-trapping and instability of hydromagnetic waves along the magnetic field in a cold plasma. *Phys. Rev. Lett.* 21 (1968) 209-212.
- [68] F.Tappert and C.M.Varma. Asymptotic theory of self trapping of heat pulses in solids. *Phys. Rev. Lett.* 25 (1970) 1108-1111.
- [69] H.D.Wahlquist and F.B.Estabrook. Bäcklund transformation for solutions of the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.* 31 (1973) 1386-1390.
- [70] H.Washimi and T.Taniuti. Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude. *Phys. Rev. Lett.* 17 (1966) 399-403.
- [71] G.B.Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons, New York, 1974. (Дж.Уизем, *Линейные и нелинейные волны*. М.: Мир, 1977.)
- [72] L. van Wijngaarden. On the equation of motion for mixtures of liquid and gas bubbles. *J. Fluid Mech.* 33 (1968) 465-474.
- [73] N.J.Zabusky. Solitons and bound states of the time independent Schrödinger equation. *Phys Rev.* 168 (1968) 124-128.
- [74] N.J.Zabusky. Solitons and energy transport in nonlinear lattices. *Comput. Phys. Commun.* 5 (1973) 1-10.
- [75] N.J.Zabusky and M.D.Kruskal. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.* 15 (1965) 240-243.
- [76] В.Е. Захаров. Коллапс волн Лагмюра. *ЖЭТФ*, 35 (1972) 908-914.
- [77] В.Е. Захаров, А.Б. Шабат. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерная автомодуляция волн в нелинейных средах. *ЖЭТФ*, 1971, т.74., с. 118-134.