

## Тема лекції

## Солітонна теорія збурень

# План лекції

- 1 Методи теорії збурень для лінійної системи: осцилятор з тертям
  - Метод балансу енергії
  - Часове мультимасштабування
- 2 Солітонна теорія збурень
  - Енергетичний аналіз динаміки солітону
    - Солітони Кортвега–де–Вріза
    - Солітони рівняння синус Ґордон
  - Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння
    - Мультимасштабна теорія збурень для кінка

# План лекції

- 1 Методи теорії збурень для лінійної системи: осцилятор з тертям
  - Метод балансу енергії
  - Часове мультимасштабування
- 2 Солітонна теорія збурень
  - Енергетичний аналіз динаміки солітону
    - Солітони Кортвега–де–Вріза
    - Солітони рівняння синус Ґордон
  - Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння
    - Мультимасштабна теорія збурень для кінка

# Лінійний приклад: осцилятор з тертям

## Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ ,  $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$ ,  
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

## Осцилятор: Енергетичний аналіз

# Лінійний приклад: осцилятор з тертям

## Осцилятор: точний розв'язок

### ● Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

### ● Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \omega &= \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \\ B(t) &= \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}} \end{aligned}$$

## Осцилятор: Енергетичний аналіз

# Лінійний приклад: осцилятор з тертям

## Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ ,  $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$ ,  
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

## Осцилятор: Енергетичний аналіз

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) &= \dot{x} \ddot{x} + x \dot{x} = \dot{x} (-\varepsilon \dot{x} - x) + x \dot{x} = -\varepsilon \dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) &= -\varepsilon \dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) &= -\varepsilon \dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) &= -\varepsilon \dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) &= -\varepsilon \dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) &= -\varepsilon \dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) &= -\varepsilon \dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) &= -\varepsilon \dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) &= -\varepsilon \dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) &= -\varepsilon \dot{x}^2 \end{aligned}$$

# Лінійний приклад: осцилятор з третям

## Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ ,  $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$ ,  
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

## Осцилятор: Енергетичний аналіз

$$\begin{aligned} \dot{E} &= 0, \quad x(t) = \cos t \\ E &= \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 \\ E &= \frac{1}{2} \sin^2 t + \frac{1}{2} \cos^2 t \\ E &= \frac{1}{2} (\sin^2 t + \cos^2 t) \\ E &= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

# Лінійний приклад: осцилятор з тертям

## Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ ,  $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$ ,  
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

## Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$ :  $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$ : енергія  
 $\mathcal{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$ :  $x(t) = A(t) \cos t \Rightarrow$   
енергія  $\mathcal{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\varepsilon \dot{x}^2$   
 $\dot{x}(t) \approx -A(t) \sin t \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\varepsilon A^2(t) \sin^2 t$
- $\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} A^2(t) = A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$



# Лінійний приклад: осцилятор з тертям

## Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ ,  $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$ ,  
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

## Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$ :  $x(t) = \cos t$

- $\varepsilon = 0$ : енергія

$$\mathcal{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

- $0 < \varepsilon \ll 1$ :  $x(t) = A(t) \cos t \Rightarrow$

$$\text{енергія } \mathcal{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx A \frac{dA}{dt}$$

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\varepsilon \dot{x}^2$   
 $\dot{x}(t) \approx -A(t) \sin t \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} =$   
 $-\varepsilon A^2(t) \sin^2 t$

- $\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} A^2(t) = A \frac{dA}{dt}$

- $\frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

# Лінійний приклад: осцилятор з тертям

## Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ ,  $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$ ,  
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

## Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$ :  $x(t) = \cos t$

- $\varepsilon = 0$ : енергія

$$\mathcal{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

- $0 < \varepsilon \ll 1$ :  $x(t) = A(t) \cos t \Rightarrow$

$$\text{енергія } \mathcal{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx A \frac{dA}{dt}$$

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\varepsilon \dot{x}^2$   
 $\dot{x}(t) \approx -A(t) \sin t \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} =$   
 $-\varepsilon A^2(t) \sin^2 t$

- $\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} A^2(t) = A \frac{dA}{dt}$

- $\frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

# Лінійний приклад: осцилятор з тертям

## Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ ,  $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$ ,  
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

## Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$ :  $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$ : енергія  
 $\mathcal{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$ :  $x(t) = A(t) \cos t \Rightarrow$   
енергія  $\mathcal{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\varepsilon \dot{x}^2$   
 $\dot{x}(t) \approx -A(t) \sin t \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} =$   
 $-\varepsilon A^2(t) \sin^2 t$
- $\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} A^2(t) = A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

# Лінійний приклад: осцилятор з тертям

## Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ ,  $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$ ,  
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

## Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$ :  $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$ : енергія  
 $\mathcal{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$ :  $x(t) = A(t) \cos t \Rightarrow$   
енергія  $\mathcal{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\varepsilon \dot{x}^2$   
 $\dot{x}(t) \approx -A(t) \sin t \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} =$   
 $-\varepsilon A^2(t) \sin^2 t$
- $\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} A^2(t) = A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

# Лінійний приклад: осцилятор з тертям

## Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ ,  $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$ ,  
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

## Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$ :  $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$ : енергія  
 $\mathcal{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$ :  $x(t) = A(t) \cos t \Rightarrow$   
енергія  $\mathcal{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\varepsilon \dot{x}^2$   
 $\dot{x}(t) \approx -A(t) \sin t \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} =$   
 $-\varepsilon A^2(t) \sin^2 t$
- $\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} A^2(t) = A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

# Лінійний приклад: осцилятор з тертям

## Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ ,  $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$ ,  
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

## Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$ :  $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$ : енергія  
 $\mathcal{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$ :  $x(t) = A(t) \cos t \Rightarrow$   
енергія  $\mathcal{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\varepsilon \dot{x}^2$   
 $\dot{x}(t) \approx -A(t) \sin t \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} =$   
 $-\varepsilon A^2(t) \sin^2 t$
- $\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} A^2(t) = A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

# Лінійний приклад: Послідовні наближення

## Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

## Осцилятор: Секулярне рівняння

Розв'язок зложити від  $\varepsilon$ :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

$$x_0(t) = \cos \omega t$$

$$x_1(t) = \dots$$

$$x_2(t) = \dots$$

$$x_3(t) = \dots$$

$$x_4(t) = \dots$$

$$x_5(t) = \dots$$

$$x_6(t) = \dots$$

$$x_7(t) = \dots$$

$$x_8(t) = \dots$$

$$x_9(t) = \dots$$

$$x_{10}(t) = \dots$$

# Лінійний приклад: Послідовні наближення

## Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

## Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від  $\varepsilon$ :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

- $$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -\frac{dx_0}{dt} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$$



# Лінійний приклад: Послідовні наближення

## Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

## Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від  $\varepsilon$ :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

- $\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -\frac{dx_0}{dt} \end{cases}$

- $\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$

# Лінійний приклад: Послідовні наближення

## Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

## Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від  $\varepsilon$ :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

$$\bullet \begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = \frac{dx_0}{dt} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$$

# Лінійний приклад: Послідовні наближення

## Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

## Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від  $\varepsilon$ :

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

- $$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -\frac{dx_0}{dt} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$$

$$x(t) = A(t) \cos(\omega(t)t) + \varepsilon B(t) \sin(\omega(t)t)$$

## Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

## Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від  $\varepsilon$ :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

$$\int \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = \frac{dx_0}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$$

## Лінійний приклад: Послідовні наближення

## Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

## Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від  $\varepsilon$ :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

$$\int \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = \frac{dx_0}{dt} \end{cases}$$

$$\int x_0(t) = \cos t$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$$

- $x(t) = A(\varepsilon t) \cos(\omega(\varepsilon)t) + \varepsilon B(\varepsilon t) \sin(\omega(\varepsilon)t)$

## Лінійний приклад: Послідовні наближення

## Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

## Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від  $\varepsilon$ :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

$$\int \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = \frac{dx_0}{dt} \end{cases}$$

$$\int x_0(t) = \cos t$$

$$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$$

- $x(t) = A(\varepsilon t) \cos(\omega(\varepsilon)t) + \varepsilon B(\varepsilon t) \sin(\omega(\varepsilon)t)$

- $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots$

# Лінійний приклад: Послідовні наближення

## Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

## Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від  $\varepsilon$ :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

- $$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -\frac{dx_0}{dt} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$$

- $x(t) = A(\varepsilon t) \cos(\omega(\varepsilon)t) + \varepsilon B(\varepsilon t) \sin(\omega(\varepsilon)t)$
- $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots$
- $k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{1}{8}, \quad A(\varepsilon t) = e^{-\varepsilon t/2},$   
 $B(\varepsilon t) = \frac{1}{2} e^{-\varepsilon t/2}$

# Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t, \dots$$

Осцилятор з частотою збурення  $\omega = 1$  та  $\varepsilon \ll 1$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0$$

$$x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$$



## Часове мультимасштабування

## Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

## Часове мультимасштабування

## Часове мультимасштабування

## Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

## Часове мультимасштабування

- $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, \dots$
- Обмежимось другим порядком:  $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

# Часове мультимасштабування

## Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

## Часове мультимасштабування

- $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, \dots$
- Обмежимося другим порядком:  $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

# Часове мультимасштабування

## Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

## Часове мультимасштабування

- $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, \dots$
- Обмежимося другим порядком:  $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

# Часове мультимасштабування

## Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

## Часове мультимасштабування

- $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, \dots$
- Обмежимося другим порядком:  $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

# Часове мультимасштабування

$$\bullet \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$\bullet \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[ \left( 1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2} \varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[ \left( 1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \right) t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

# Часове мультимасштабування

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

$$x_0 = A(T_1, T_2)e^{i\omega T_0} + \bar{A}(T_1, T_2)e^{-i\omega T_0}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + \omega^2 = -i\left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{i\omega T_0} + i\left(\bar{A} + 2\frac{\partial \bar{A}}{\partial T_1}\right)e^{-i\omega T_0}$$

$$\text{Рівняння не збурено: } \bar{A} + 2\frac{\partial \bar{A}}{\partial T_1} = 0, \quad A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0$$

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_0(T_2)e^{-i\omega T_1/2}, \quad \bar{A}(T_1, T_2) = \bar{A}_0(T_2)e^{i\omega T_1/2}$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[ \left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right) t \right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[ \left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right) t \right] + O(\varepsilon^3).$$

# Часове мультимасштабування

$$\bullet \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$\bullet \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

$$\bullet \quad x_0 = A(T_1, T_2)e^{i\omega T_0} + B(T_1, T_2)e^{-i\omega T_0}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} e^{\pm i\omega T_0} = -(\omega^2 \pm 2\omega \frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2}) e^{\pm i\omega T_0} = -\omega^2 e^{\pm i\omega T_0}$$

$$\bullet \quad \text{Розв'язок системи рівнянь за умови } \omega = 1, \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 1$$

$$\bullet \quad \text{Використовуючи умови } \omega = 1, \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 1$$

$$\bullet \quad A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-2iT_1}, \quad B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-2iT_1}$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[ \left( 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[ \left( 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + O(\varepsilon^3).$$



# Часове мультимасштабування

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$

- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i \left( A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + i \left( B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1} \right) e^{-iT_0}$

- Відсутність секулярних доданків:  $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$ :

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \quad B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[ \left( 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[ \left( 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

# Часове мультимасштабування

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$

- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i \left( A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + i \left( B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1} \right) e^{-iT_0}$

- Відсутність секулярних доданків:  $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$ :

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \quad B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[ \left( 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[ \left( 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

# Часове мультимасштабування

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$

- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i \left( A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + i \left( B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1} \right) e^{-iT_0}$

- Відсутність секулярних доданків:  $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$ :

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \quad B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[ \left( 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[ \left( 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

# Часове мультимасштабування

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$

- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i \left( A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + i \left( B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1} \right) e^{-iT_0}$

- Відсутність секулярних доданків:  $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$ :

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \quad B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[ \left( 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[ \left( 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

# Часове мультимасштабування

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$

- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i \left( A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + i \left( B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1} \right) e^{-iT_0}$

- Відсутність секулярних доданків:  $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$ :

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \quad B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[ \left( 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[ \left( 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

# Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

## Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан  
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} w_x w_t + \frac{1}{6} w_x^3 - \frac{1}{2} w_{xx}^2, \quad w_x \equiv u$
- Гамільтоніан  
 $\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6} w_x^2 + \frac{1}{2} w_{xx}^2$

## Збурене рівняння КдВ

# Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

## Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан  
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} w_x w_t + \frac{1}{6} w_x^3 - \frac{1}{2} w_{xx}^2, \quad w_x \equiv u$
- Гамільтоніан  
 $\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6} w_x^2 + \frac{1}{2} w_{xx}^2$

## Збурене рівняння КдВ

# Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

## Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан  
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} w_x w_t + \frac{1}{6} w_x^3 - \frac{1}{2} w_{xx}^2, \quad w_x \equiv u$
- Гамільтоніан  
 $\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6} w_x^2 + \frac{1}{2} w_{xx}^2$

## Збурене рівняння КдВ



# Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

## Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- **Лагранжіан**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} w_x w_t + \frac{1}{6} w_x^3 - \frac{1}{2} w_{xx}^2, \quad w_x \equiv u$$

- **Гамільтоніан**

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6} w_x^2 + \frac{1}{2} w_{xx}^2$$

## Збурене рівняння КдВ

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + u_{xxx} &= \epsilon \left( u_{xt} + u_x u_t + u_{xtx} + u_{xtx} + u_{xtx} + u_{xtx} + u_{xtx} + u_{xtx} + u_{xtx} + u_{xtx} \right) \\ &+ \epsilon^2 \left( u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} + u_{xtt} \right) \\ &+ \epsilon^3 \left( u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} + u_{xttt} \right) \\ &+ \epsilon^4 \left( u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} + u_{xtttt} \right) \end{aligned}$$

# Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

## Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\text{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан  

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} w_x w_t + \frac{1}{6} w_x^3 - \frac{1}{2} w_{xx}^2, \quad w_x \equiv u$$
- Гамільтоніан  

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6} w_x^2 + \frac{1}{2} w_{xx}^2$$

## Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

## Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\text{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан  

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} w_x w_t + \frac{1}{6} w_x^3 - \frac{1}{2} w_{xx}^2, \quad w_x \equiv u$$
- Гамільтоніан  

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6} w_x^2 + \frac{1}{2} w_{xx}^2$$

## Збурене рівняння КдВ

## Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

## Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\text{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан  

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} w_x w_t + \frac{1}{6} w_x^3 - \frac{1}{2} w_{xx}^2, \quad w_x \equiv u$$
- Гамільтоніан  

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6} w_x^2 + \frac{1}{2} w_{xx}^2$$

## Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення  $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$ .  
Структура солітонна на змінна,  
але  $v = v(\varepsilon, t)$ .

# Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

## Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\text{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан  
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} w_x w_t + \frac{1}{6} w_x^3 - \frac{1}{2} w_{xx}^2, w_x \equiv u$
- Гамільтоніан  
 $\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6} w_x^2 + \frac{1}{2} w_{xx}^2$

## Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення  $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$ .  
Структура солітонна на змінна,  
але  $v = v(\varepsilon, t)$ .

- Повна енергія

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{36}{5} v^{5/2}.$$

- $\frac{d\mathcal{E}}{dt} \stackrel{\text{Д.3.}}{=} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} R w_t dx.$

- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx.$

## Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

## Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\text{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан  

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} w_x w_t + \frac{1}{6} w_x^3 - \frac{1}{2} w_{xx}^2, \quad w_x \equiv u$$
- Гамільтоніан  

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6} w_x^2 + \frac{1}{2} w_{xx}^2$$

## Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення  $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$ .  
Структура солітонна на змінна,  
але  $v = v(\varepsilon, t)$ .

- Повна енергія
 
$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{36}{5} v^{5/2}.$$

# Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

## Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\text{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан  
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} w_x w_t + \frac{1}{6} w_x^3 - \frac{1}{2} w_{xx}^2, w_x \equiv u$
- Гамільтоніан  
 $\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6} w_x^2 + \frac{1}{2} w_{xx}^2$

## Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення  $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$ .  
Структура солітонна на змінна,  
але  $v = v(\varepsilon, t)$ .

- Повна енергія

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{36}{5} v^{5/2}.$$

$$\bullet \frac{d\mathcal{E}}{dt} \stackrel{\text{Д.3.}}{=} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} R w_t dx.$$

$$\bullet \frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx.$$

# Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

## Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\text{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан  
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} w_x w_t + \frac{1}{6} w_x^3 - \frac{1}{2} w_{xx}^2, w_x \equiv u$
- Гамільтоніан  
 $\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6} w_x^2 + \frac{1}{2} w_{xx}^2$

## Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення  $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$ .  
Структура солітонна на змінна,  
але  $v = v(\varepsilon, t)$ .

- Повна енергія

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{36}{5} v^{5/2}.$$

- $\frac{d\mathcal{E}}{dt} \stackrel{\text{Д.3.}}{=} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} R w_t dx.$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx.$$



## Збурене рівняння КдВ: приклад

## Збереження енергії

# Збурене рівняння КдВ: приклад

## Збереження енергії

- $R = -u$

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$

- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$   
 $-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$

- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$

- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

## Інші закони збереження

## Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

# Збурене рівняння КдВ: приклад

## Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$   
 $-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$
- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

## Інші закони збереження

## Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

# Збурене рівняння КдВ: приклад

## Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$   
 $-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$
- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

## Інші закони збереження

## Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням











# Збурене рівняння КдВ: приклад

## Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$   
 $-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$
- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

## Інші закони збереження

- $Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx \Rightarrow v(t) =$   
 $v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2\varepsilon v \Rightarrow$   
 $v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» —  
 виникнення шельфа турбулентного  
 сліду солітону — випромінювання  
 солітону завдяки збуденню

## Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

# Збурене рівняння КдВ: приклад

## Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$   
 $-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$
- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

## Інші закони збереження

- $Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx \Rightarrow v(t) =$   
 $v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2\varepsilon v \Rightarrow$   
 $v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» —  
 виникнення шельфа турбулентного  
 сліду солітону — випромінювання  
 солітону завдяки збуденню

## Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

## Збурене рівняння КдВ: приклад

## Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$
- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

## Інші закони збереження

- $Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2\varepsilon v \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфа турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню

# Збурене рівняння КдВ: приклад

## Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$   
 $-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$
- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

## Інші закони збереження

- $Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx \Rightarrow v(t) =$   
 $v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2\varepsilon v \Rightarrow$   
 $v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» —  
 виникнення шельфа турбулентного  
 сліду солітону — випромінювання  
 солітону завдяки збуденню

## Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

# Збурене рівняння КдВ: приклад

## Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$   
 $-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$
- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

## Інші закони збереження

- $Q_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx \Rightarrow v(t) =$   
 $v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u dx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2\varepsilon v \Rightarrow$   
 $v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» —  
 виникнення шельфа турбулентного  
 сліду солітону — випромінювання  
 солітону завдяки збуренню

## Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

# Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

## Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан  
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$
- Гамільтоніан  
 $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u)$

## Збурене рівняння СГ

# Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

## Незбурене рівняння СГ

●  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$

- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$$

- Гамільтоніан

$$\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u)$$

## Збурене рівняння СГ

# Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

## Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$

- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$$

- Гамільтоніан

$$\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u)$$

## Збурене рівняння СГ



## Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$$

# Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

## Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$$

- Гамільтоніан

$$\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u)$$

## Збурене рівняння СГ

$$\partial_t u_x - u_{xx} + \sin u = \epsilon F(u, x, t)$$

$$F(u, x, t) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{2} \partial_x^2 u + \frac{1}{2} \partial_x^2 v_j + \frac{1}{2} \partial_x^2 w_j \right)$$

$$F(u, x, t) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{2} \partial_x^2 u + \frac{1}{2} \partial_x^2 v_j + \frac{1}{2} \partial_x^2 w_j \right)$$

$$F(u, x, t) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{2} \partial_x^2 u + \frac{1}{2} \partial_x^2 v_j + \frac{1}{2} \partial_x^2 w_j \right)$$

$$F(u, x, t) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{2} \partial_x^2 u + \frac{1}{2} \partial_x^2 v_j + \frac{1}{2} \partial_x^2 w_j \right)$$

$$F(u, x, t) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{2} \partial_x^2 u + \frac{1}{2} \partial_x^2 v_j + \frac{1}{2} \partial_x^2 w_j \right)$$

$$F(u, x, t) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{2} \partial_x^2 u + \frac{1}{2} \partial_x^2 v_j + \frac{1}{2} \partial_x^2 w_j \right)$$

$$F(u, x, t) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{2} \partial_x^2 u + \frac{1}{2} \partial_x^2 v_j + \frac{1}{2} \partial_x^2 w_j \right)$$

$$F(u, x, t) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{2} \partial_x^2 u + \frac{1}{2} \partial_x^2 v_j + \frac{1}{2} \partial_x^2 w_j \right)$$

$$F(u, x, t) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{2} \partial_x^2 u + \frac{1}{2} \partial_x^2 v_j + \frac{1}{2} \partial_x^2 w_j \right)$$

## Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан  

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$$
- Гамільтоніан  

$$\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u)$$

## Збурене рівняння СГ

# Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

## Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан  
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$
- Гамільтоніан  
 $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u)$

## Збурене рівняння СГ

•  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u, x, t)$

- Збурення  $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$ .  
Структура солітонна на  
змінна, але  $v = v(\varepsilon, t)$ .
- Повна енергія

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{8}{\sqrt{1-v^2}}.$$

•  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} \stackrel{\text{ДЗ.}}{=} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} R u_t dx.$

# Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

## Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан  
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$
- Гамільтоніан  
 $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u)$

## Збурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u, x, t)$

- Збурення  $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$ .  
Структура солітонна на  
змінна, але  $v = v(\varepsilon, t)$ .

- Повна енергія

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{8}{\sqrt{1-v^2}}.$$

- $\frac{d\mathcal{E}}{dt} \stackrel{\text{Д.3.}}{=} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} R u_t dx.$

# Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

## Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжیان  
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$
- Гамільтоніан  
 $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u)$

## Збурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення  $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$ .  
Структура солітонна на  
змінна, але  $v = v(\varepsilon, t)$ .

### Повна енергія

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{8}{\sqrt{1-v^2}}.$$

$$\bullet \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} \stackrel{\text{Д.3.}}{=} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} R u_t dx.$$

# Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

## Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжیان  
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$
- Гамільтоніан  
 $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u)$

## Збурене рівняння СГ

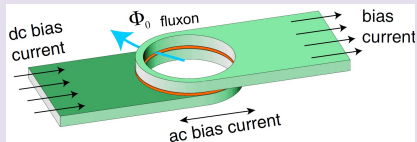
- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення  $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$ .  
Структура солітонна на  
змінна, але  $v = v(\varepsilon, t)$ .
- Повна енергія

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{8}{\sqrt{1-v^2}}.$$

$$\bullet \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} \stackrel{\text{Д.З.}}{=} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} R u_t dx.$$

# Збурене рівняння синус Гордон: приклад

## Зразок кільцевого контакту Джозефсона



## Довгий джозефсонів контакт

$$\begin{aligned} & \Psi = \Psi_0 + \alpha \sin \Psi \\ & \Psi_0 = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi dx = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0 dx \\ & \text{Величина швидкості руху солітону} \\ & \text{визначається параметром} \\ & \beta = \frac{4\pi}{\Phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi dx \\ & \text{Величина швидкості руху солітону} \\ & \text{визначається параметром} \\ & \beta = \frac{4\pi}{\Phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi dx \end{aligned}$$

## Швидкість флюксона

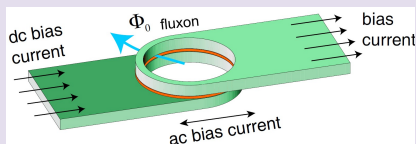
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi\gamma}{4} (1 - v^2)^{3/2} - \alpha v (1 - v^2) - \frac{\beta}{3} v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при  $\beta = 0$ :  $v_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\alpha/\pi\gamma)^2}}$



# Збурене рівняння синус Гордон: приклад

## Зразок кільцевого контакту Джозефсона



## Довгий джозефсонів контакт

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R$
- $\varepsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma$   
 $\alpha$  — втрати енергії при тунелюванні нормальних електронів на переході  
 $\beta$  — втрати завдяки скінченній довжині проникнення електромагнітного поля в надпровідник  
 $\gamma$  — струм зсуву

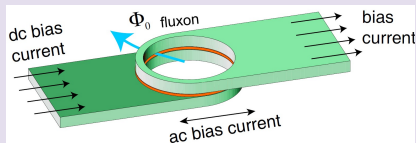
## Швидкість флюксона

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi\gamma}{4}(1-v^2)^{3/2} - \alpha v(1-v^2) - \frac{\beta}{3}v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при  $\beta = 0$ :  $v_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(2\alpha/\pi\gamma)^2}}$

# Збурене рівняння синус Гордон: приклад

## Зразок кільцевого контакту Джозефсона



## Довгий джозефсонів контакт

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R$
- $\varepsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma$ 
  - $\alpha$  — втрати енергії при тунелюванні нормальних електронів на переході
  - $\beta$  — втрати завдяки скінченній довжині проникнення електромагнітного поля в надпровідник
  - $\gamma$  — струм зсуву

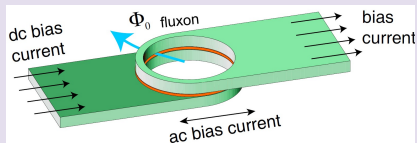
## Швидкість флюксона

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi\gamma}{4}(1-v^2)^{3/2} - \alpha v(1-v^2) - \frac{\beta}{3}v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при  $\beta = 0$ :  $v_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(2\alpha/\pi\gamma)^2}}$

# Збурене рівняння синус Гордон: приклад

## Зразок кільцевого контакту Джозефсона



## Довгий джозефсонів контакт

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R$
- $\varepsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma$ 
  - $\alpha$  — втрати енергії при тунелюванні нормальних електронів на переході
  - $\beta$  — втрати завдяки скінченній довжині проникнення електромагнітного поля в надпровідник
  - $\gamma$  — струм зсуву

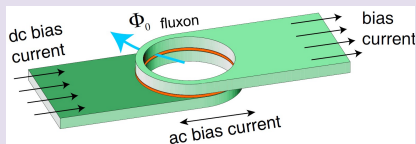
## Швидкість флюксона

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi\gamma}{4}(1-v^2)^{3/2} - \alpha v(1-v^2) - \frac{\beta}{3}v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при  $\beta = 0$ :  $v_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(2\alpha/\pi\gamma)^2}}$

# Збурене рівняння синус Гордон: приклад

## Зразок кільцевого контакту Джозефсона



## Довгий джозефсонів контакт

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R$
- $\varepsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma$   
 $\alpha$  — втрати енергії при тунелюванні нормальних електронів на переході  
 $\beta$  — втрати завдяки скінченній довжині проникнення електромагнітного поля в надпровідник  
 $\gamma$  — струм зсуву

## Швидкість флюксона

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi\gamma}{4}(1-v^2)^{3/2} - \alpha v(1-v^2) - \frac{\beta}{3}v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при  $\beta = 0$ :  $v_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(2\alpha/\pi\gamma)^2}}$

# Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

## Мультимасштабування

- Швидкі змінні:  $T_0 = t$ ,  $X_0 = x$
- Повільні змінні:  $T_1 = \varepsilon t$ ,  $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x, t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$ .
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$   
 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:  
 $u(x, t) = u(X_0, T_0, T_1)$ .

# Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

## Мультимасштабування

- Швидкі змінні:  $T_0 = t$ ,  $X_0 = x$
- Повільні змінні:  $T_1 = \varepsilon t$ ,  $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x, t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$ .
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$   
 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:  
 $u(x, t) = u(X_0, T_0, T_1)$ .

# Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

## Мультимасштабування

- Швидкі змінні:  $T_0 = t$ ,  $X_0 = x$
- Повільні змінні:  $T_1 = \varepsilon t$ ,  $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x, t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$ .
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$   
 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:  
 $u(x, t) = u(X_0, T_0, T_1)$ .

# Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

## Мультимасштабування

- Швидкі змінні:  $T_0 = t$ ,  $X_0 = x$
- Повільні змінні:  $T_1 = \varepsilon t$ ,  $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x, t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$ .
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$   
 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:  
 $u(x, t) = u(X_0, T_0, T_1)$ .



# Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

## Мультимасштабування

- Швидкі змінні:  $T_0 = t, X_0 = x$
- Повільні змінні:  $T_1 = \varepsilon t, X_1 = \varepsilon x$
- $u(x, t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$ .
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$   
 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:  
 $u(x, t) = u(X_0, T_0, T_1)$ .

# Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

## Мультимасштабування

- Швидкі змінні:  $T_0 = t$ ,  $X_0 = x$
- Повільні змінні:  $T_1 = \varepsilon t$ ,  $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x, t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$ .
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$   
 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:  
 $u(x, t) = u(X_0, T_0, T_1)$ .

# Мультимасштабна теорія збурень для $S\Gamma$ -рівняння

## Збурене рівняння СГ

# Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

## Збурене рівняння СГ



$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}.$$

- Перший крок теорії збурень:  $u = u_0 + \varepsilon u_1$
- Другий крок теорії збурень — система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial X_0^2} + \sin u_0 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial T_0} \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{X_0 X_0} + \cos u_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{\partial u_0}{\partial T_1} \\ R - \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

- Третій крок теорії збурень — розв'язування рівнянь:

$u_0$  — незбурений розв'язок, але  $u_0 = u_0(X_0, T_0, T_1)$

$u_1$  — збурений розв'язок,  $u_1 = u_1(X_0, T_0, T_1)$

# Мультимасштабна теорія збурень для $S^1$ -рівняння

## Збурене рівняння СГ

- 

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}.$$

- Перший крок теорії збурень:  $u = u_0 + \varepsilon u_1$
- Другий крок теорії збурень — система рівнянь:

# Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

## Збурене рівняння СГ



$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}.$$

- Перший крок теорії збурень:  $u = u_0 + \varepsilon u_1$
- Другий крок теорії збурень — система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial X_0^2} + \sin u_0 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial T_0} \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{X_0 X_0} + \cos u_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{\partial u_0}{\partial T_1} \\ R - \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

- Третій крок теорії збурень — розв'язування рівнянь:

$u_0$  — незбурений розв'язок, але  $u_0 = u_0(X_0, T_0, T_1)$

$u_1$  — збурений розв'язок,  $u_1 = u_1(X_0, T_0, T_1)$

# Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

## Збурене рівняння СГ



$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}.$$

- Перший крок теорії збурень:  $u = u_0 + \varepsilon u_1$
- Другий крок теорії збурень — система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial X_0^2} + \sin u_0 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial T_0} \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{X_0 X_0} + \cos u_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{\partial u_0}{\partial T_1} \\ R - \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

- Третій крок теорії збурень — розв'язування рівнянь:

$u_0$  — незбурений розв'язок, але  $u_0 = u_0(X_0, T_0, T_1)$

$u_1$  — збурений розв'язок,  $u_1 = u_1(X_0, T_0, T_1)$

# Мультимасштабна теорія збурень для кінка

## Приклад: кінк

- Уособлений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp \left[ \frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}} \right], \quad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

- Рівняння для  $u_1$ :

$$L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1T_0} \end{bmatrix} = \mathcal{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0, X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v} \dot{v} - u_{0,X} \dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v} \dot{v} - u_{0,T_0,X} \dot{X} \end{bmatrix}$$

- $L^\dagger \psi = 0 \Rightarrow \psi \perp \mathcal{F}$

- Умова ортогональності:  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} R u_t dx$



# Мультимасштабна теорія збурень для кінка

## Приклад: кінк

### ● Уособлений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp \left[ \frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}} \right], \quad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

### ● Рівняння для $u_1$ :

$$L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1T_0} \end{bmatrix} = \mathcal{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0, X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v}, \dot{v} - u_{0,X} \dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v} \dot{v} - u_{0T_0,X} \dot{X} \end{bmatrix}$$

●  $L^\dagger \psi = 0 \Rightarrow \psi \perp \mathcal{F}$

● Умова ортогональності:  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} R u_t dx$

# Мультимасштабна теорія збурень для кінка

## Приклад: кінк

- Уособлений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp \left[ \frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}} \right], \quad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

- Рівняння для  $u_1$ :

$$L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1T_0} \end{bmatrix} = \mathcal{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0, X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v} \dot{v} - u_{0,X} \dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v} \dot{v} - u_{0,T_0,X} \dot{X} \end{bmatrix}$$

- $L^\dagger \psi = 0 \Rightarrow \psi \perp \mathcal{F}$

- Умова ортогональності:  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} R u_t dx$

# Мультимасштабна теорія збурень для кінка

## Приклад: кінк

- Уособлений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp \left[ \frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}} \right], \quad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

- Рівняння для  $u_1$ :

$$L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1T_0} \end{bmatrix} = \mathcal{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0, X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v}, \dot{v} - u_{0,X} \dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v} \dot{v} - u_{0T_0,X} \dot{X} \end{bmatrix}$$

•  $L^\dagger \psi = 0 \Rightarrow \psi \perp \mathcal{F}$

• Умова ортогональності:  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} Ru_t dx$

# Мультимасштабна теорія збурень для кінка

## Приклад: кінк

- Уособлений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp \left[ \frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}} \right], \quad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

- Рівняння для  $u_1$ :

$$L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1T_0} \end{bmatrix} = \mathcal{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0, X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v}, \dot{v} - u_{0,X} \dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v} \dot{v} - u_{0T_0,X} \dot{X} \end{bmatrix}$$

- $L^\dagger \psi = 0 \Rightarrow \psi \perp \mathcal{F}$

- Умова ортогональності:  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} Ru_t dx$

# Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Умова ортогональності  $L^\dagger \psi = 0 \Rightarrow \psi \perp \mathcal{F}$

$$\frac{dv}{dT_1} = \frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2}I_1, \quad \frac{dX}{dT_1} = -\frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2}I_2$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R[u_0(\theta)]}{\operatorname{ch} \theta} d\theta, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta R[u_0(\theta)]}{\operatorname{ch} \theta} d\theta$$

$$u_0(\theta) = \pm \operatorname{arctg}(e^\theta), \quad \theta = \frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1-v^2(T_1)}}$$

Розв'язок

$$u_0(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - \int_0^t v(t') dt' - x_0(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} \right) \right]$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{4}(1-v^2)^{3/2}I_1, \quad \frac{dx_0}{dt} = -\frac{\varepsilon}{4}v(1-v^2)I_2.$$

# Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Умова ортогональності  $L^\dagger \psi = 0 \Rightarrow \psi \perp \mathcal{F}$

$$\frac{dv}{dT_1} = \frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2}I_1, \quad \frac{dX}{dT_1} = -\frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2}I_2$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R[u_0(\theta)]}{\operatorname{ch} \theta} d\theta, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta R[u_0(\theta)]}{\operatorname{ch} \theta} d\theta$$

$$u_0(\theta) = \pm \operatorname{arctg}(e^\theta), \quad \theta = \frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1-v^2(T_1)}}$$

Розв'язок

$$u_0(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - \int_0^t v(t') dt' - x_0(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} \right) \right]$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{4}(1-v^2)^{3/2}I_1, \quad \frac{dx_0}{dt} = -\frac{\varepsilon}{4}v(1-v^2)I_2.$$