

Тема лекції

Обернена задача розсіювання і суперсиметрична квантова механіка

План лекції

- 1 Перетворення Беклунда для ґратки Тоди
- 2 Схема методу оберненої задачі теорії розсіювання
 - Перетворення Фур'є
 - Перетворення розсіювання та представлення Лакса
- 3 Суперсиметрична квантова механіка
 - Метод факторизації і перетворення Дарбу
 - Перетворення Беклунда
 - Оператори знищення та народження
 - Приклад: потенціал солітонного типу
- 4 Пряма задача розсіювання
 - Представлення Лакса для рівняння КдВ
 - Пряма задача розсіювання
 - Еволюція параметрів розсіювання

План лекції

- 1 Перетворення Беклунда для ґратки Тоди
- 2 Схема методу оберненої задачі теорії розсіювання
 - Перетворення Фур'є
 - Перетворення розсіювання та представлення Лакса
- 3 Суперсиметрична квантова механіка
 - Метод факторизації і перетворення Дарбу
 - Перетворення Беклунда
 - Оператори знищення та народження
 - Приклад: потенціал солітонного типу
- 4 Пряма задача розсіювання
 - Представлення Лакса для рівняння КдВ
 - Пряма задача розсіювання
 - Еволюція параметрів розсіювання

План лекції

- 1 Перетворення Беклунда для ґратки Тоди
- 2 Схема методу оберненої задачі теорії розсіювання
 - Перетворення Фур'є
 - Перетворення розсіювання та представлення Лакса
- 3 Суперсиметрична квантова механіка
 - Метод факторизації і перетворення Дарбу
 - Перетворення Беклунда
 - Оператори знищення та народження
 - Приклад: потенціал солітонного типу
- 4 Пряма задача розсіювання
 - Представлення Лакса для рівняння КдВ
 - Пряма задача розсіювання
 - Еволюція параметрів розсіювання

План лекції

- 1 Перетворення Беклунда для ґратки Тоди
- 2 Схема методу оберненої задачі теорії розсіювання
 - Перетворення Фур'є
 - Перетворення розсіювання та представлення Лакса
- 3 Суперсиметрична квантова механіка
 - Метод факторизації і перетворення Дарбу
 - Перетворення Беклунда
 - Оператори знищення та народження
 - Приклад: потенціал солітонного типу
- 4 Пряма задача розсіювання
 - Представлення Лакса для рівняння КдВ
 - Пряма задача розсіювання
 - Еволюція параметрів розсіювання

Ґратка Тоди

Ґратка (ланцюг) Тоди

Одновимірна ґратка з потенціалом взаємодії (M. Toda, 1970):

$$U(x) = e^{-x} \Rightarrow \ddot{Q}_n = e^{Q_n - Q_{n-1}} - e^{Q_n - Q_{n+1}}$$



Перетворення Беклунда для ґратки Тоди

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \quad \alpha = \text{const}$$

Нехай Q_n — розв'язок рівняння Тоди. Рівняння для q_n :

$$\ddot{q} = (\dot{Q}_n - \dot{q}_n) e^{Q_n - q_n} + (\dot{q}_n - \dot{Q}_{n+1}) e^{q_n - Q_{n+1}} = e^{q_n - q_{n-1}} - e^{q_n - q_{n+1}}$$

Отже q_n — також розв'язок рівняння Тоди.

Ґратка Тоди

Ґратка (ланцюг) Тоди

Одновимірна ґратка з потенціалом взаємодії (M. Toda, 1970):

$$U(x) = e^{-x} \Rightarrow \ddot{Q}_n = e^{Q_n - Q_{n-1}} - e^{Q_n - Q_{n+1}}$$



Перетворення Беклунда для ґратки Тоди

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \quad \alpha = \text{const}$$

Нехай Q_n — розв'язок рівняння Тоди. Рівняння для q_n :

$$\ddot{q} = (\dot{Q}_n - \dot{q}_n) e^{Q_n - q_n} + (\dot{q}_n - \dot{Q}_{n+1}) e^{q_n - Q_{n+1}} = e^{q_n - q_{n-1}} - e^{q_n - q_{n+1}}$$

Отже q_n — також розв'язок рівняння Тоди.

Ґратка Тоди

Ґратка (ланцюг) Тоди

Одновимірна ґратка з потенціалом взаємодії (M. Toda, 1970):

$$U(x) = e^{-x} \Rightarrow \ddot{Q}_n = e^{Q_n - Q_{n-1}} - e^{Q_n - Q_{n+1}}$$



Перетворення Беклунда для ґратки Тоди

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \quad \alpha = \text{const}$$

Нехай Q_n — розв'язок рівняння Тоди. Рівняння для q_n :

$$\ddot{q} = \left(\dot{Q}_n - \dot{q}_n \right) e^{Q_n - q_n} + \left(\dot{q}_n - \dot{Q}_{n+1} \right) e^{q_n - Q_{n+1}} = e^{q_n - q_{n-1}} - e^{q_n - q_{n+1}}$$

Отже q_n — також розв'язок рівняння Тоди.

Ґратка Тоди: солітонний розв'язок

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \quad \alpha = \text{const}$$

Застосуємо перетворення Беклунда для нульового розв'язку: $Q_n = 0, \dot{Q}_n = 0 \forall n$:

$$\begin{cases} e^{-q_n} + e^{q_{n-1}} - \alpha = 0 \\ \dot{q}_n = e^{-q_n} + e^{q_n} - \alpha \end{cases} \xRightarrow{\text{Д.3.}} \frac{d}{dt} e^{q_n} = e^{2q_n} - \alpha e^{q_n} + 1$$

Заміна $u = e^{q_n}$: $\dot{u} = u^2 - \alpha u + 1$

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{u^2 - \alpha u + 1} \xRightarrow{\text{Д.3.}} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{u - \alpha/2}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} = t - t_n$$

Солітонний розв'язок при $\alpha \geq 2$. Параметризація: $\alpha = 2 \operatorname{ch} \varkappa, \beta = -\operatorname{sh} \varkappa$

$$\begin{cases} e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n + \varkappa)}{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n)} \\ \beta t_n \xRightarrow{\text{Д.3.}} \varkappa(n+1) \end{cases} \Rightarrow e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \varkappa n)}{\operatorname{ch}(\beta t - \varkappa(n+1))}, \quad \beta = -\operatorname{sh} \varkappa$$

Ґратка Тоди: солітонний розв'язок

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \quad \alpha = \text{const}$$

Застосуємо перетворення Беклунда для нульового розв'язку: $Q_n = 0, \dot{Q}_n = 0 \forall n$:

$$\begin{cases} e^{-q_n} + e^{q_{n-1}} - \alpha = 0 \\ \dot{q}_n = e^{-q_n} + e^{q_n} - \alpha \end{cases} \xrightarrow{\text{Д.З.}} \frac{d}{dt} e^{q_n} = e^{2q_n} - \alpha e^{q_n} + 1$$

Заміна $u = e^{q_n}$: $\dot{u} = u^2 - \alpha u + 1$

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{u^2 - \alpha u + 1} \xrightarrow{\text{Д.З.}} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{u - \alpha/2}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} = t - t_n$$

Солітонний розв'язок при $\alpha \geq 2$. Параметризація: $\alpha = 2 \operatorname{ch} \varkappa, \beta = -\operatorname{sh} \varkappa$

$$\begin{cases} e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n + \varkappa)}{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n)} \\ \beta t_n \xrightarrow{\text{Д.З.}} \varkappa(n+1) \end{cases} \Rightarrow e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \varkappa n)}{\operatorname{ch}(\beta t - \varkappa(n+1))}, \quad \beta = -\operatorname{sh} \varkappa$$

Ґратка Тоди: солітонний розв'язок

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \quad \alpha = \text{const}$$

Застосуємо перетворення Беклунда для нульового розв'язку: $Q_n = 0, \dot{Q}_n = 0 \forall n$:

$$\begin{cases} e^{-q_n} + e^{q_{n-1}} - \alpha = 0 \\ \dot{q}_n = e^{-q_n} + e^{q_n} - \alpha \end{cases} \xrightarrow{\text{Д.3.}} \frac{d}{dt} e^{q_n} = e^{2q_n} - \alpha e^{q_n} + 1$$

Заміна $u = e^{q_n}$: $\dot{u} = u^2 - \alpha u + 1$

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{u^2 - \alpha u + 1} \xrightarrow{\text{Д.3.}} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{u - \alpha/2}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} = t - t_n$$

Солітонний розв'язок при $\alpha \geq 2$. Параметризація: $\alpha = 2 \operatorname{ch} \kappa, \beta = -\operatorname{sh} \kappa$

$$\begin{cases} e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n + \kappa)}{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n)} \\ \beta t_n \xrightarrow{\text{Д.3.}} \kappa(n+1) \end{cases} \Rightarrow e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \kappa n)}{\operatorname{ch}(\beta t - \kappa(n+1))}, \quad \beta = -\operatorname{sh} \kappa$$

Перетворення Фур'є

Просторове перетворення Фур'є \mathcal{F}

Лінеаризоване рівняння КдВ

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Обернене перетворення Фур'є \mathcal{F}^{-1}

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda) d\lambda$$

$$\tilde{u}(\lambda, t) \equiv \mathcal{F}_x[u] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, t) dx$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \tilde{u}(\lambda, t) d\lambda$$

$$\mathcal{F}_x[u_x] = -i\lambda \tilde{u}, \quad \mathcal{F}_x[u_{xxx}] = (-i\lambda)^3 \tilde{u}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\tilde{u}_t - i\lambda^3 \tilde{u} = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\lambda, t) = C(\lambda) e^{-i\lambda^3 t}$$

$$C(\lambda) = \tilde{u}(\lambda, 0) = \mathcal{F}_x[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, 0) dx$$

Перетворення Фур'є

Лінеаризоване рівняння КдВ

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Обернене перетворення Фур'є \mathcal{F}^{-1}

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda) d\lambda$$

Просторове перетворення Фур'є \mathcal{F}

$$\tilde{u}(\lambda, t) \equiv \mathcal{F}_x[u] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, t) dx$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \tilde{u}(\lambda, t) d\lambda$$

$$\mathcal{F}_x[u_x] = -i\lambda \tilde{u}, \quad \mathcal{F}_x[u_{xxx}] = (-i\lambda)^3 \tilde{u}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\tilde{u}_t - i\lambda^3 \tilde{u} = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\lambda, t) = C(\lambda) e^{-i\lambda^3 t}$$

$$C(\lambda) = \tilde{u}(\lambda, 0) = \mathcal{F}_x[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, 0) dx$$

Перетворення Фур'є

Лінеаризоване рівняння КдВ

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Обернене перетворення Фур'є \mathcal{F}^{-1}

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda) d\lambda$$

Просторове перетворення Фур'є \mathcal{F}

$$\tilde{u}(\lambda, t) \equiv \mathcal{F}_x[u] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, t) dx$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \tilde{u}(\lambda, t) d\lambda$$

$$\mathcal{F}_x[u_x] = -i\lambda \tilde{u}, \quad \mathcal{F}_x[u_{xxx}] = (-i\lambda)^3 \tilde{u}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\tilde{u}_t - i\lambda^3 \tilde{u} = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\lambda, t) = C(\lambda) e^{-i\lambda^3 t}$$

$$C(\lambda) = \tilde{u}(\lambda, 0) = \mathcal{F}_x[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, 0) dx$$

Перетворення Фур'є

Лінеаризоване рівняння КдВ

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Обернене перетворення Фур'є \mathcal{F}^{-1}

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda) d\lambda$$

Просторове перетворення Фур'є \mathcal{F}

$$\tilde{u}(\lambda, t) \equiv \mathcal{F}_x[u] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, t) dx$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \tilde{u}(\lambda, t) d\lambda$$

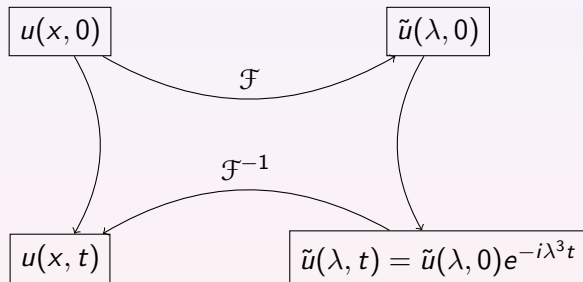
$$\mathcal{F}_x[u_x] = -i\lambda \tilde{u}, \quad \mathcal{F}_x[u_{xxx}] = (-i\lambda)^3 \tilde{u}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\tilde{u}_t - i\lambda^3 \tilde{u} = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\lambda, t) = C(\lambda) e^{-i\lambda^3 t}$$

$$C(\lambda) = \tilde{u}(\lambda, 0) = \mathcal{F}_x[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, 0) dx$$

Перетворення Фур'є: діаграма



Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{S}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t).$$

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ —
рівняння Шредінґера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{S}^{-1}

$$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow \text{«потенціал» } u(x, t)$$

Дані розсіювання

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{S}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t).$$

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ —
рівняння Шредінґера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{S}^{-1}

$$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow \text{«потенціал» } u(x, t)$$

Дані розсіювання

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{S}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t).$$

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ —
рівняння Шредінґера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{S}^{-1}

$$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow \text{«потенціал» } u(x, t)$$

Дані розсіювання

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{S}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t).$$

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ —
рівняння Шредінґера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{S}^{-1}

$$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow \text{«потенціал» } u(x, t)$$

Дані розсіювання

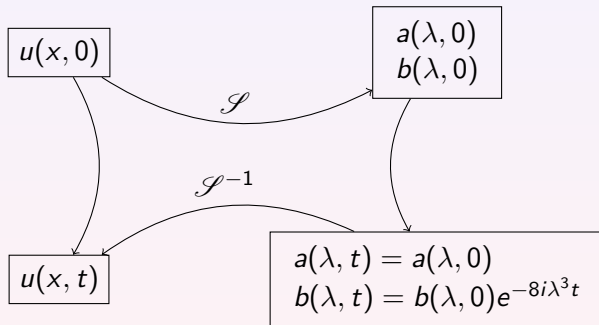
$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Обернене перетворення розсіювання: діаграма



Метод факторизації і перетворення Дарбу

Рівняння Шредінґера

$$H\psi = E\psi, \quad H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

Перетворення Дарбу

Факторизація Гамільтоніану: $H = A^\dagger A + E_0$:

$$A = -\frac{d}{dx} + W(x), \quad A^\dagger = \frac{d}{dx} + W(x)$$

Перетворення: $\tilde{\psi} = A\psi$

$$\begin{aligned} A^\dagger A\psi + E_0\psi = E\psi &\Rightarrow A A^\dagger \tilde{\psi} + E_0\tilde{\psi} = E\tilde{\psi} \\ \Rightarrow \tilde{H}\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}, \quad \tilde{H} = A A^\dagger + E_0 \end{aligned}$$

Метод факторизації і перетворення Дарбу

Рівняння Шредінґера

$$H\psi = E\psi, \quad H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

Перетворення Дарбу

Факторизація Гамільтоніану: $H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0$:

$$\mathcal{A} = -\frac{d}{dx} + W(x), \quad \mathcal{A}^\dagger = \frac{d}{dx} + W(x)$$

Перетворення: $\tilde{\psi} = \mathcal{A}\psi$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}\psi + E_0\psi &= E\psi \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger \tilde{\psi} + E_0\tilde{\psi} = E\tilde{\psi} \\ \Rightarrow \tilde{H}\tilde{\psi} &= E\tilde{\psi}, \quad \tilde{H} = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger + E_0 \end{aligned}$$

Перетворення Беклунда

Зв'язок між V та \tilde{V}

$$\begin{cases} W^2 + W' + E_0 = V \\ W^2 - W' + E_0 = \tilde{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V - \tilde{V} = 2W' \\ V + \tilde{V} = 2(E_0 + W^2) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} V = 2\phi' \\ \tilde{V} = 2\tilde{\phi}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi - \tilde{\phi} = W \\ \phi' - \tilde{\phi}' = E_0 + W^2 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$\phi' + \tilde{\phi}' = E_0 + (\phi - \tilde{\phi})^2$$

Перетворення Беклунда

Зв'язок між V та \tilde{V}

$$\begin{cases} W^2 + W' + E_0 = V \\ W^2 - W' + E_0 = \tilde{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V - \tilde{V} = 2W' \\ V + \tilde{V} = 2(E_0 + W^2) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} V = 2\phi' \\ \tilde{V} = 2\tilde{\phi}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi - \tilde{\phi} = W \\ \phi' - \tilde{\phi}' = E_0 + W^2 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$\phi' + \tilde{\phi}' = E_0 + (\phi - \tilde{\phi})^2$$

Суперпотенціал, оператори знищення та народження

Факторизація

Факторизація: $H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0$

Нехай ψ_0 — власна функція: $H\psi_0 = E_0\psi_0$

Зв'язок між \mathcal{A} та ψ_0 : $\mathcal{A}\psi_0 = 0$

Доведення:

$$H\psi_0 = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}\psi_0 + E_0\psi_0 = E_0\psi_0$$

\mathcal{A} — оператор знищення

\mathcal{A}^\dagger — оператор народження

Суперпотенціал

Визначимо $W(x)$:

$$\mathcal{A}\psi_0 = \left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right)\psi_0 = 0 \Rightarrow W(x) = \frac{d}{dx} \ln \psi_0$$

Суперпотенціал, оператори знищення та народження

Факторизація

Факторизація: $H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0$

Нехай ψ_0 — власна функція: $H\psi_0 = E_0\psi_0$

Зв'язок між \mathcal{A} та ψ_0 : $\mathcal{A}\psi_0 = 0$

Доведення:

$$H\psi_0 = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}\psi_0 + E_0\psi_0 = E_0\psi_0$$

\mathcal{A} — оператор знищення

\mathcal{A}^\dagger — оператор народження

Суперпотенціал

Визначимо $W(x)$:

$$\mathcal{A}\psi_0 = \left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right)\psi_0 = 0 \Rightarrow W(x) = \frac{d}{dx} \ln \psi_0$$

Суперпотенціал, оператори знищення та народження

Факторизація

Факторизація: $H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0$

Нехай ψ_0 — власна функція: $H\psi_0 = E_0\psi_0$

Зв'язок між \mathcal{A} та ψ_0 : $\mathcal{A}\psi_0 = 0$

Доведення:

$$H\psi_0 = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}\psi_0 + E_0\psi_0 = E_0\psi_0$$

\mathcal{A} — оператор знищення

\mathcal{A}^\dagger — оператор народження

Суперпотенціал

Визначимо $W(x)$:

$$\mathcal{A}\psi_0 = \left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right)\psi_0 = 0 \Rightarrow W(x) = \frac{d}{dx} \ln \psi_0$$

Біографія суперсиметричної квантової механіки

- (1882) Перетворення Дарбу
- (1940) Ідеї методу факторизації (Шредінґер)
- (1951) Теорія методу факторизації (Інфельд і Халл)
- (1981) Суперсиметрична квантова механіка (Віттен)

Основна властивість перетворення Дарбу

$$H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{H} = \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger + E_0$$

Перетворення або знищує рівень основного стану (оператор \mathcal{A}), або породжує новий рівень (оператор \mathcal{A}^\dagger). При цьому решта рівнів не зсувається.

Біографія суперсиметричної квантової механіки

- (1882) Перетворення Дарбу
- (1940) Ідеї методу факторизації (Шредінґер)
- (1951) Теорія методу факторизації (Інфельд і Халл)
- (1981) Суперсиметрична квантова механіка (Віттен)

Основна властивість перетворення Дарбу

$$H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{H} = \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger + E_0$$

Перетворення або знищує рівень основного стану (оператор \mathcal{A}), або породжує новий рівень (оператор \mathcal{A}^\dagger). При цьому решта рівнів не зсувається.

Чому суперсиметрія?

Спектри гамільтоніанів H та \tilde{H} співпадають, тому комбінований гамільтоніан $\mathcal{H} = H \oplus \tilde{H}$ вироджений, тобто має певну симетрію.

Супералгебри

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}; \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H - E_0 & 0 \\ 0 & \tilde{H} - E_0 \end{pmatrix}$$
$$\{Q^+, Q^-\} = \mathcal{H}, \quad [\mathcal{H}, Q^\pm] = 0, \quad (Q^\pm)^2 = 0$$

$[A, B] = AB - BA$ — комутатор

$\{A, B\} = AB + BA$ — антикомутатор

Чому суперсиметрія?

Спектри гамільтоніанів H та \tilde{H} співпадають, тому комбінований гамільтоніан $\mathcal{H} = H \oplus \tilde{H}$ вироджений, тобто має певну симетрію.

Супералгебри

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}; \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H - E_0 & 0 \\ 0 & \tilde{H} - E_0 \end{pmatrix}$$
$$\{Q^+, Q^-\} = \mathcal{H}, \quad [\mathcal{H}, Q^\pm] = 0, \quad (Q^\pm)^2 = 0$$

$[A, B] = AB - BA$ — комутатор

$\{A, B\} = AB + BA$ — антикомутатор

Чому суперсиметрія?

Спектри гамільтоніанів H та \tilde{H} співпадають, тому комбінований гамільтоніан $\mathcal{H} = H \oplus \tilde{H}$ вироджений, тобто має певну симетрію.

Супералгебри

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}; \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H - E_0 & 0 \\ 0 & \tilde{H} - E_0 \end{pmatrix}$$
$$\{Q^+, Q^-\} = \mathcal{H}, \quad [\mathcal{H}, Q^\pm] = 0, \quad (Q^\pm)^2 = 0$$

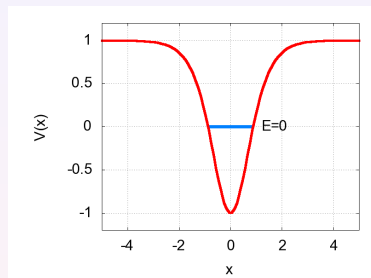
$[A, B] = AB - BA$ — комутатор

$\{A, B\} = AB + BA$ — антикомутатор

Приклад: потенціал солітонного типу $V(x) = 1 - 2/ch^2x$

Рівняння Шредінґера

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi = E\psi$$
$$V(x) = 1 - \frac{2}{ch^2x}$$



Суперпотенціал

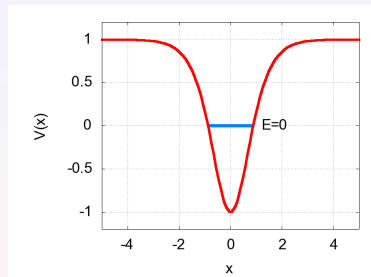
Основний стан: $\psi_0 = \frac{1}{ch^2x}$, $E_0 = 0$

Суперпотенціал: $W(x) = \frac{d}{dx} \ln \psi_0 = -thx$

Приклад: потенціал солітонного типу $V(x) = 1 - 2/ch^2 x$

Рівняння Шредінґера

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi = E\psi$$
$$V(x) = 1 - \frac{2}{ch^2 x}$$



Суперпотенціал

Основний стан: $\psi_0 = \frac{1}{ch^2 x}$, $E_0 = 0$

Суперпотенціал: $W(x) = \frac{d}{dx} \ln \psi_0 = -\text{th} x$

Перетворення Дарбу для потенціалу $V(x) = 1 - 2/ch^2x$

Потенціал суперсиметричного партнера

Суперпотенціал: $W(x) = -thx$

$$\mathcal{A} = -\frac{d}{dx} - thx, \quad \mathcal{A}^\dagger = \frac{d}{dx} - thx$$
$$\Rightarrow \tilde{V} = W^2 - W' + E_0 = 0$$

Розв'язок задачі для партнера

$$-\frac{d^2\tilde{\psi}}{dx^2} = k^2\tilde{\psi} \Rightarrow \tilde{\psi}_k(x) = a_k e^{ikx} + b_k e^{-ikx}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{\mathcal{A}^\dagger \tilde{\psi}}{E} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d}{dx} - thx \right) \tilde{\psi}_k$$

Перетворення Дарбу для потенціалу $V(x) = 1 - 2/ch^2x$

Потенціал суперсиметричного партнера

Суперпотенціал: $W(x) = -thx$

$$\mathcal{A} = -\frac{d}{dx} - thx, \quad \mathcal{A}^\dagger = \frac{d}{dx} - thx$$
$$\Rightarrow \tilde{V} = W^2 - W' + E_0 = 0$$

Розв'язок задачі для партнера

$$-\frac{d^2\tilde{\psi}}{dx^2} = k^2\tilde{\psi} \Rightarrow \tilde{\psi}_k(x) = a_k e^{ikx} + b_k e^{-ikx}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{\mathcal{A}^\dagger \tilde{\psi}}{E} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d}{dx} - thx \right) \tilde{\psi}_k$$

Перетворення Дарбу для потенціалу $V(x) = 1 - 2/ch^2x$

Потенціал суперсиметричного партнера

Суперпотенціал: $W(x) = -thx$

$$\mathcal{A} = -\frac{d}{dx} - thx, \quad \mathcal{A}^\dagger = \frac{d}{dx} - thx$$
$$\Rightarrow \tilde{V} = W^2 - W' + E_0 = 0$$

Розв'язок задачі для партнера

$$-\frac{d^2\tilde{\psi}}{dx^2} = k^2\tilde{\psi} \Rightarrow \tilde{\psi}_k(x) = a_k e^{ikx} + b_k e^{-ikx}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{\mathcal{A}^\dagger \tilde{\psi}}{E} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d}{dx} - thx \right) \tilde{\psi}_k$$

Задача розсіювання для потенціалу $V(x) = 1 - 2/ch^2x$

Умови розсіювання

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d}{dx} - \text{th}x \right) \tilde{\psi}_k = \frac{\text{th}x - ik}{1 - ik} e^{ikx}$$

Асимптотики:

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} \frac{-1-ik}{1-ik} e^{ikx} & x \rightarrow -\infty \\ e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Потенціал $V(x) = 1 - 2/ch^2x$ — безвідбивальний

Задача розсіювання для потенціалу $V(x) = 1 - 2/ch^2x$

Умови розсіювання

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d}{dx} - \text{th}x \right) \tilde{\psi}_k = \frac{\text{th}x - ik}{1 - ik} e^{ikx}$$

Асимптотики:

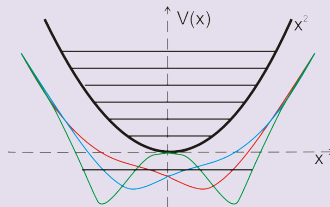
$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} \frac{-1-ik}{1-ik} e^{ikx} & x \rightarrow -\infty \\ e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Потенціал $V(x) = 1 - 2/ch^2x$ — безвідбивальний

Суперсиметричні перетворення

$$A\psi_0 = 0, \quad W = \frac{d}{dx} \ln \psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати **ізоспектральні** потенціали.



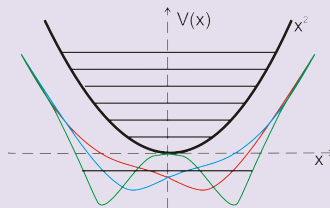
Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Народження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Зсув основного рівня

Суперсиметричні перетворення

$$A\psi_0 = 0, \quad W = \frac{d}{dx} \ln \psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати **ізоспектральні** потенціали.



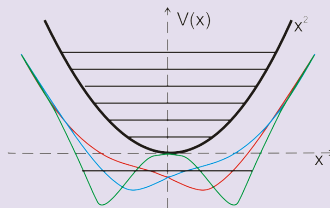
Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Породження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Зсув певного рівня:
 - Перший крок: факторизація на стані $\psi(x, E_n)$, де E_n — певний рівень енергії (не основний)
 - Другий крок: $\tilde{\psi} = A\psi(x, E)$, де $E = E_n + \Delta$

Суперсиметричні перетворення

$$A\psi_0 = 0, \quad W = \frac{d}{dx} \ln \psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати **ізоспектральні** потенціали.



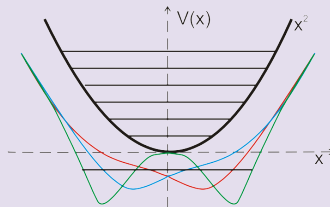
Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Породження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Зсув певного рівня:
 - Перший крок: факторизація на стані $\psi(x, E_n)$, де E_n — певний рівень енергії (не основний)
 - Другий крок: $\tilde{\psi} = A\psi(x, E)$, де $E = E_n + \Delta$

Суперсиметричні перетворення

$$A\psi_0 = 0, \quad W = \frac{d}{dx} \ln \psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати **ізоспектральні** потенціали.



Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Породження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Зсув певного рівня:
 - Перший крок: факторизація на стані $\psi(x, E_n)$, де E_n — певний рівень енергії (не основний)
 - Другий крок: $\tilde{\psi} = A\psi(x, E)$, де $E = E_n + \Delta$

Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{I}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.
Спектральна задача $\Phi_{xx} + (\lambda^2 + u)\Phi =$
рівняння Шредінґера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{I}^{-1}

$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow$ «потенціал» $u(x, t)$

Дані розсіювання

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi &= A\Phi \\ \Rightarrow a(\lambda, t) &= a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t} \end{aligned}$$

Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{S}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.
 Спектральна задача $\Phi_{xx} + (\lambda^2 + u)\Phi =$
 рівняння Шредінґера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{S}^{-1}

$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow$ «потенціал» $u(x, t)$

Дані розсіювання

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi &= A\Phi \\ \Rightarrow a(\lambda, t) &= a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t} \end{aligned}$$

Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{S}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.
 Спектральна задача $\Phi_{xx} + (\lambda^2 + u)\Phi =$
 рівняння Шредінґера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{S}^{-1}

$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow$ «потенціал» $u(x, t)$

Дані розсіювання

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \Phi = A\Phi$$

$$\Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{S}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.
 Спектральна задача $\Phi_{xx} + (\lambda^2 + u)\Phi =$
 рівняння Шредінґера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{S}^{-1}

$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow$ «потенціал» $u(x, t)$

Дані розсіювання

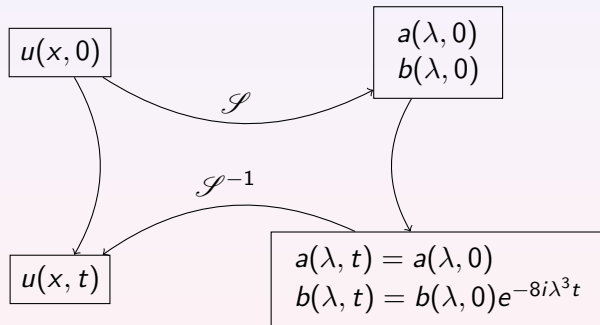
$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \Phi = A\Phi$$

$$\Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Обернене перетворення розсіювання: діаграма



Представлення Лакса

Двійка Лакса

Рівняння двійки Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

$$\Psi = \Psi(x, t; \lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}, \quad L = L(x, t; \lambda), \quad A = A(x, t; \lambda)$$

Умова сумісності рівнянь двійки Лакса

$$\begin{aligned} \Psi_{xt} &= L_t \Psi + L \Psi_t = \Psi_{tx} = A_x \Psi + A \Psi_x \Rightarrow \\ &\Rightarrow L_t - A_x \stackrel{\text{д.з.}}{=} [L, A] \end{aligned}$$

Представлення Лакса

Двійка Лакса

Рівняння двійки Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

$$\Psi = \Psi(x, t; \lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}, \quad L = L(x, t; \lambda), \quad A = A(x, t; \lambda)$$

Умова сумісності рівнянь двійки Лакса

$$\begin{aligned} \Psi_{xt} &= L_t \Psi + L \Psi_t = \Psi_{tx} = A_x \Psi + A \Psi_x \Rightarrow \\ &\Rightarrow L_t - A_x \stackrel{\text{Д.3.}}{=} [L, A] \end{aligned}$$

Оператори Лакса для КдВ

Оператори Лакса

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$A = -4\lambda^2 L - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}$$

Умова Лакса

$$L_t - A_x = [L, A] \stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} \lambda^0 : i \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{xx} & iu_{xxx} + 4iuu_x \\ 2iu_x & -u_{xx} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -iu_{xx} & -2uu_x \\ 2u_x & iu_{xx} \end{pmatrix} = 0$$

$$\stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} u_t - u_{xxx} - 6uu_x = 0.$$

Оператори Лакса для КдВ

Оператори Лакса

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$A = -4\lambda^2 L - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}$$

Умова Лакса

$$L_t - A_x = [L, A] \stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} \lambda^0 : i \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{xx} & iu_{xxx} + 4iuu_x \\ 2iu_x & -u_{xx} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -iu_{xx} & -2uu_x \\ 2u_x & iu_{xx} \end{pmatrix} = 0$$

$$\stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} u_t - u_{xxx} - 6uu_x = 0.$$

Оператори Лакса для КдВ

Перше рівняння Лакса

$$\Psi_x = L\Psi \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\lambda & iu \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}$$

Скалярний вигляд:

$$\begin{cases} \Psi'_{11} = i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21} \\ \Psi'_{21} = i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21} \end{cases} \quad \text{Д.3.} \Rightarrow \Psi''_{21} + (\lambda^2 + u)\Psi_{21} = 0$$

Оператори Лакса для КдВ

Перше рівняння Лакса

$$\Psi_x = L\Psi \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\lambda & iu \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}$$

Скалярний вигляд:

$$\begin{cases} \Psi'_{11} = i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21} \\ \Psi'_{21} = i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21} \end{cases} \quad \text{Д.3.} \Rightarrow \Psi''_{21} + (\lambda^2 + u)\Psi_{21} = 0$$

Задача розсіювання і асимптотичний розв'язок

Постановка задачі розсіювання

Одновимірне рівняння Шредінґера для $\Phi = \Psi_{21}$

$$\Phi_{xx} + [\lambda^2 + u(x, t)] \Phi = 0$$

$u(x, t)$ відіграє роль потенціалу (вважаємо, що $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$)

λ — спектральний параметр

Асимптотичні стани

$$\begin{aligned} |x| \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0 \Rightarrow \Phi_{xx} + \lambda^2 \Phi &= 0 \\ \Rightarrow \Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

$a(\lambda, t)$ — амплітуда проходження

$b(\lambda, t)$ — амплітуда відбиття

Задача розсіювання і асимптотичний розв'язок

Постановка задачі розсіювання

Одновимірне рівняння Шредінґера для $\Phi = \Psi_{21}$

$$\Phi_{xx} + [\lambda^2 + u(x, t)] \Phi = 0$$

$u(x, t)$ відіграє роль потенціалу (вважаємо, що $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$)

λ — спектральний параметр

Асимптотичні стани

$$|x| \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0 \Rightarrow \Phi_{xx} + \lambda^2 \Phi = 0$$

$$\Rightarrow \Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$a(\lambda, t)$ — амплітуда проходження

$b(\lambda, t)$ — амплітуда відбиття

Асимптотичні розв'язки

Ψ_{21}

$$\Psi_{21} \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Ψ_{11}

$$\begin{cases} \Psi'_{11} = i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21} \\ \Psi'_{21} = i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21} \end{cases} \Rightarrow \Psi_{11} = \lambda\Psi_{21} - i\Psi'_{21} \Rightarrow \Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \rightarrow -\infty \\ 2\lambda b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Асимптотичні розв'язки

Ψ_{21}

$$\Psi_{21} \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Ψ_{11}

$$\begin{cases} \Psi'_{11} = i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21} \\ \Psi'_{21} = i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21} \end{cases} \Rightarrow \Psi_{11} = \lambda\Psi_{21} - i\Psi'_{21} \Rightarrow \Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \rightarrow -\infty \\ 2\lambda b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Еволюція параметрів розсіювання

Часова еволюція: друге рівняння Лакса

$$\Psi_t = A\Psi$$

$$A = -4\lambda^2 \begin{pmatrix} i\lambda & u \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}$$

Еволюція даних розсіювання

$$\begin{aligned} |x| \rightarrow \infty &\Rightarrow u \sim u_x \sim u_{xx} \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow A &= -4\lambda^2 \begin{pmatrix} i\lambda & 0 \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Psi}_{11} &= -4i\lambda^3 \Psi_{11} \\ \dot{\Psi}_{21} &= -4i\lambda^2 \Psi_{11} + 4i\lambda^3 \Psi_{12} \end{cases} \end{aligned}$$

Еволюція параметрів розсіювання

Часова еволюція: друге рівняння Лакса

$$\Psi_t = A\Psi$$

$$A = -4\lambda^2 \begin{pmatrix} i\lambda & u \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}$$

Еволюція даних розсіювання

$$\begin{aligned} |x| \rightarrow \infty &\Rightarrow u \sim u_x \sim u_{xx} \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow A &= -4\lambda^2 \begin{pmatrix} i\lambda & 0 \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Psi}_{11} &= -4i\lambda^3 \Psi_{11} \\ \dot{\Psi}_{21} &= -4i\lambda^2 \Psi_{11} + 4i\lambda^3 \Psi_{12} \end{cases} \end{aligned}$$

Еволюція параметрів розсіювання

Рівняння для $b(\lambda, t)$

$$\dot{\psi}_{11} = -4i\lambda^3 \psi_{11}$$

$$\psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \rightarrow -\infty \\ e^{4it\lambda^3} 2\lambda b(\lambda, t) e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$x \rightarrow +\infty : \dot{b} = -8i\lambda^3 b \Rightarrow b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) e^{-8i\lambda^3 t}$$

Рівняння для $a(\lambda, t)$

$$\dot{\psi}_{21} = -4i\lambda^2 \psi_{11} + 4i\lambda^3 \psi_{12} \quad \psi_{21} \sim \begin{cases} e^{4it\lambda^3} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ e^{4it\lambda^3} [a(\lambda, t) e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t) e^{i\lambda x}] & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$x \rightarrow +\infty : \dot{a} = 0 \Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0).$$

Еволюція параметрів розсіювання

Рівняння для $b(\lambda, t)$

$$\dot{\psi}_{11} = -4i\lambda^3\psi_{11}$$

$$\psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \rightarrow -\infty \\ e^{4it\lambda^3} 2\lambda b(\lambda, t) e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$x \rightarrow +\infty : \dot{b} = -8i\lambda^3 b \Rightarrow b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) e^{-8i\lambda^3 t}$$

Рівняння для $a(\lambda, t)$

$$\dot{\psi}_{21} = -4i\lambda^2\psi_{11} + 4i\lambda^3\psi_{12} \quad \psi_{21} \sim \begin{cases} e^{4it\lambda^3} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ e^{4it\lambda^3} [a(\lambda, t) e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t) e^{i\lambda x}] & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$x \rightarrow +\infty : \dot{a} = 0 \Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0).$$