

## Тема лекції

Солітони: концепція солітону, основні солітонні рівняння, приклади солітонів

## Вступ до фізики солітонів

(курс «Додаткові розділи теоретичної фізики»)

# План лекції

## 1 Народження концепції солітону

- Досліди Рассела
- Рівняння Кортвега–де–Вріза
- Задача Фермі–Паста–Улама

## 2 Солітонні рівняння

- Модель Френкеля–Конторової
  - Рівняння синус–Гордон
- Нелінійне рівняння Шредінгера
- Задача про автомобільні затори

# План лекції

## 1 Народження концепції солітону

- Досліди Рассела
- Рівняння Кортвега–де–Вріза
- Задача Фермі–Паста–Улама

## 2 Солітонні рівняння

- Модель Френкеля–Конторової
  - Рівняння синус–Гордон
- Нелінійне рівняння Шредінгера
- Задача про автомобільні затори

# Солітони

## Поняття солітону

Солітон (soliton = **solitary** wave + **on**) — стійка уособлена хвиля, що поширюється в нелінійному середовищі.

Хвильове рівняння:  $\square \phi \equiv \phi_{xx} - \frac{1}{2} \phi_x^2 = 0$

$$\phi(x, t) = f(x - ct) = \int dk [a(k) \cos(kx - \omega t) + b(k) \sin(kx - \omega t)]$$

Основні властивості:

- Розв'язок  $\phi(x, t) = f(x - ct)$  поширюється без деформації: відсутність дисперсії  $\omega = ck$
- Асимптотичне збереження форми після зіткнення:  
 $\phi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$

# Солітони

## Поняття солітону

Солітон (soliton = **solitary** wave + **on**) — стійка уособлена хвиля, що поширюється в нелінійному середовищі.

Хвильове рівняння:  $\square\phi \equiv \phi_{xx} - \frac{1}{c^2}\phi_{tt} = 0$

$$\phi(x, t) = f(x - ct) = \int dk [a(k) \cos(kx - \omega t) + b(k) \sin(kx - \omega t)]$$

Основні властивості:

- Розв'язок  $\phi(x, t) = f(x - ct)$  поширюється без деформації: відсутність дисперсії  $\omega = ck$
- Асимптотичне збереження форми після зіткнення:  
 $\phi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$

# Солітони

## Поняття солітону

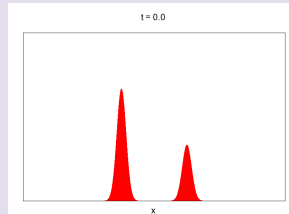
Солітон (soliton = **solitary** wave + **on**) — стійка уособлена хвиля, що поширюється в нелінійному середовищі.

Хвильове рівняння:  $\square\phi \equiv \phi_{xx} - \frac{1}{c^2}\phi_{tt} = 0$

$$\phi(x, t) = f(x - ct) = \int dk [a(k) \cos(kx - \omega t) + b(k) \sin(kx - \omega t)]$$

Основні властивості:

- Розв'язок  $\phi(x, t) = f(x - ct)$  поширюється без деформації: відсутність дисперсії  $\omega = ck$
- Асимптотичне збереження форми після зіткнення:  
 $\phi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$



Демонстрація

# Дисперсія хвиль

## Рівняння Клейна–Гордона

$$\square \phi(x, t) = m^2 c^2 \phi(x, t)$$

Основні властивості:

- Рівняння лінійне, повний набір функцій  $\cos(kx \pm \omega t)$ ,  $\sin(kx \pm \omega t)$
- Закон дисперсії хвиль:  $\omega^2 = c^2 k^2 + m^2 c^4$
- Завдяки **дисперсії** хвильовий пакет

$$\phi(x, t = 0) = \int dk [a(k) \cos(kx) + b(k) \sin(kx)]$$

з часом розпливається.



# Нелінійні хвилі

## Нелінійне рівняння

$$\square \phi(x, t) = \phi^3(x, t)$$

Основні властивості:

- Енергія системи

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{\phi_t^2}{2c^2} + \frac{\phi_x^2}{2} + \frac{\phi^4}{4} \right]$$

- Мінімум енергії:  $E = 0$  при  $\phi = 0$
- Шуканий локалізований розв'язок:  $\phi(x \rightarrow \pm\infty, t) \rightarrow 0$
- Завдяки **нелінійності** хвильовий пакет з часом розпливається

## Умови існування уособлених хвиль

- Лінійні рівняння без дисперсії: уособлені хвилі існують;
- Лінійні рівняння з дисперсією: уособлені хвилі **не** існують;
- Нелінійні рівняння без дисперсії: уособлені хвилі **не** існують;
- Нелінійні рівняння з дисперсією: уособлені хвилі **існують**;

Для існування уособлених хвиль потрібна  
нелінійність + дисперсія

## Умови існування уособлених хвиль

- Лінійні рівняння без дисперсії: уособлені хвилі існують;
- Лінійні рівняння з дисперсією: уособлені хвилі **не** існують;
- Нелінійні рівняння без дисперсії: уособлені хвилі **не** існують;
- Нелінійні рівняння з дисперсією: уособлені хвилі **існують**;

Для існування уособлених хвиль потрібна  
**нелінійність + дисперсія**

# Нелінійні хвилі з дисперсією

## Модель $\phi^4$

$$\square\phi = \phi^3 - \phi$$

Основні властивості:

- Енергія системи

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{\phi_t^2}{2c^2} + \frac{\phi_x^2}{2} + \frac{(\phi^2 - 1)^2}{4} \right]$$

- Мінімум енергії:  $E = 0$  при  $\phi(x, t) = \pm 1$
- Шуканий локалізований розв'язок:  $\phi(x \rightarrow \pm\infty, t) \rightarrow \pm 1$

# Статика моделі $\phi^4$

Модель  $\phi^4$  — релятивістська модель  $\Rightarrow \phi(x, t) = \phi(\gamma(x - vt))$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

Статичний розв'язок  $\phi = \phi(x)$

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{\phi_x^2}{2} + U(\phi) \right]$$

$$U(\phi) = \frac{(\phi^2 - 1)^2}{4}$$

Аналогія з лагранжевою механікою:

$$S = \int dt \left[ \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right]$$

$\phi$  — «координата»

$x$  — «час»

$-U(\phi)$  — «потенціал»

Потенціал



$$\phi(x) = \text{th} \left( \frac{x - vt}{\sqrt{2(1 - v^2/c^2)}} + \delta \right)$$



# Статика моделі $\phi^4$

Модель  $\phi^4$  — релятивістська модель  $\Rightarrow \phi(x, t) = \phi(\gamma(x - vt))$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

Статичний розв'язок  $\phi = \phi(x)$

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{\phi_x^2}{2} + U(\phi) \right]$$

$$U(\phi) = \frac{(\phi^2 - 1)^2}{4}$$

Аналогія з лагранжевою механікою:

$$S = \int dt \left[ \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right]$$

$\phi$  — «координата»

$x$  — «час»

$-U(\phi)$  — «потенціал»

Потенціал



$$\phi(x) = \text{th} \left( \frac{x-vt}{\sqrt{2(1-v^2/c^2)}} + \delta \right)$$



# Статика моделі $\phi^4$

Модель  $\phi^4$  — релятивістська модель  $\Rightarrow \phi(x, t) = \phi(\gamma(x - vt))$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

Статичний розв'язок  $\phi = \phi(x)$

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{\phi_x^2}{2} + U(\phi) \right]$$

$$U(\phi) = \frac{(\phi^2 - 1)^2}{4}$$

Аналогія з лагранжевою механікою:

$$S = \int dt \left[ \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right]$$

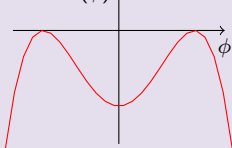
$\phi$  — «координата»

$x$  — «час»

$-U(\phi)$  — «потенціал»

Потенціал

$-U(\phi)$



$$\phi(x) = \text{th} \left( \frac{x-vt}{\sqrt{2(1-v^2/c^2)}} + \delta \right)$$



# Статика моделі $\phi^4$

Модель  $\phi^4$  — релятивістська модель  $\Rightarrow \phi(x, t) = \phi(\gamma(x - vt))$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

Статичний розв'язок  $\phi = \phi(x)$

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{\phi_x^2}{2} + U(\phi) \right]$$

$$U(\phi) = \frac{(\phi^2 - 1)^2}{4}$$

Аналогія з лагранжевою механікою:

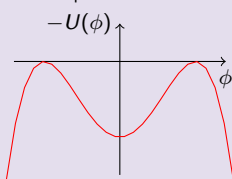
$$S = \int dt \left[ \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right]$$

$\phi$  — «координата»

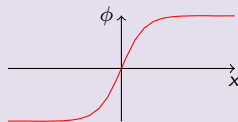
$x$  — «час»

$-U(\phi)$  — «потенціал»

Потенціал



$$\phi(x) = \text{th} \left( \frac{x-vt}{\sqrt{2(1-v^2/c^2)}} + \delta \right)$$





# Солітони

Солітон — хвильове збудження  $\phi(x, t)$  в нелінійному середовищі, яке задовольняє наступним вимогам:

- воно поширюється з постійною швидкістю, не змінюючи при цьому форми:  $\phi(x - vt)$
- воно локалізоване у просторі:  $\phi'(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$
- воно не змінюється при зіткненні з іншим таким збудженням (окрім можливого зсуву фаз)

$$\phi(x, t) \sim \sum_i \phi_s(x - v_i t) \quad \text{при } t \rightarrow -\infty, v_i = \text{const},$$

$$\phi(x, t) \sim \sum_i \phi_s(x - v_i t + \delta_i) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \delta_i = \text{const}$$

# Народження концепції солітону

Скотт Рассел



Емпірична формула Рассела

$$v = \sqrt{g(d + h)}$$

$v$  — швидкість хвилі,  $d$  — глибина каналу,  $h$  — висота хвилі

# Народження концепції солітону

Скотт Рассел



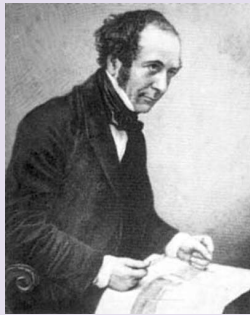
Емпірична формула Рассела

$$v = \sqrt{g(d + h)}$$

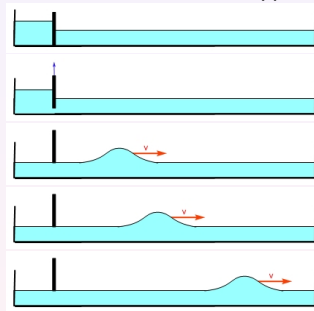
$v$  — швидкість хвилі,  $d$  — глибина каналу,  $h$  — висота хвилі

# Народження концепції солітону

Скотт Рассел



Спостереження Рассела (1834) —  
солітон на мілкій воді



Емпірична формула Рассела

$$v = \sqrt{g(d + h)}$$

$v$  — швидкість хвилі,  $d$  — глибина каналу,  $h$  — висота хвилі

## Біографія солітону

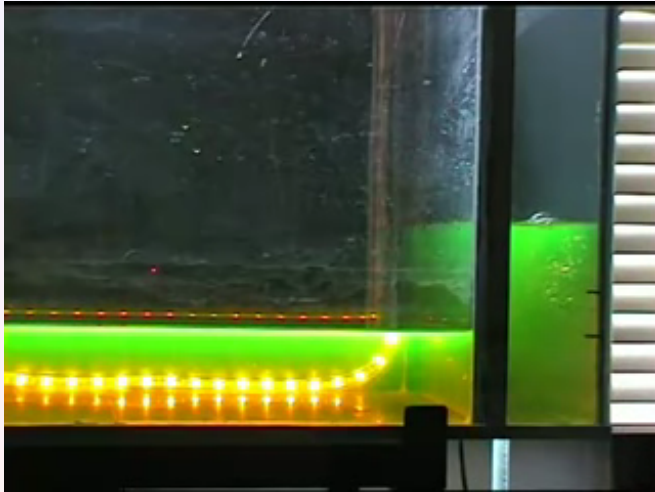
- 1834 Рассел: відкриття «великої первинної хвилі»
- 1845 Рассел: «Доповідь про хвилі»
- 1845 Ейрі: «Ми не схильні вважати цю хвилю Великою або первинною»
- 1847 Стокс: «Хвиля не може зберігати форму»
- 1895 Кортвег і де Вріз: Математичне рівняння для опису хвилі Рассела  
Рівняння КдВ:  $u_t = uu_x - u_{xxx}$
- 1954 Парадокс Фермі–Паста–Улама
- 1965 Крускал і Забускі: народження поняття «солітон»
- 1967 Крускал та ін: метод оберненої задачі розсіювання
- Солітонний бум

## Відтворення експерименту Рассела



Експеримент  
Рассела було  
відтворено в 1995  
році на  
конференції по  
теорії солітонів в  
Шотландії

## Відтворення експерименту Рассела



Демонстрація

# Рівняння Кортвега–де–Вріза (1895)

## Рівняння КдВ

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$



Kortweges



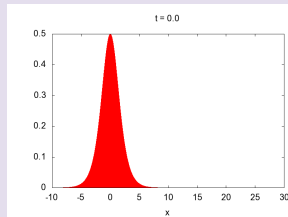
de Vries

## Односолітонний розв'язок рівняння КдВ

Біжуча хвиля  $\phi(x, t) = u(x - vt)$

$$\Rightarrow (v + 6u)u' - u''' = 0 \Rightarrow$$

$$\phi(x, t) = -\frac{v}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \left[ \frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt - x_0) \right]}$$



Демонстрація



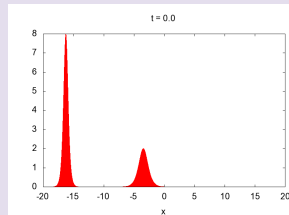
# Рівняння Кортвега–де–Вріза

## Рівняння КдВ

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$

## Двохсолітонний розв'язок рівняння КдВ

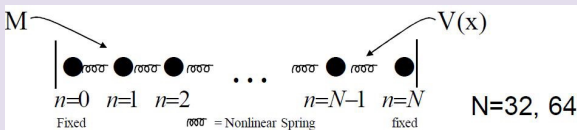
$$\phi(x, t) = 12 \frac{3 + 4 \operatorname{ch}(2x - 8t) + \operatorname{ch}(4x - 64t)}{[3 \operatorname{ch}(2x - 8t) + \operatorname{ch}(3x - 36t)]^2}$$



Демонстрація

# Задача Фермі-Паста-Улама

## Модель ФПУ



Fermi, Ulam, Pasta

## Рівняння ФПУ:

$$M\ddot{\phi}_n = U'(\phi_{n+1} - \phi_n) - U'(\phi_n - \phi_{n-1})$$

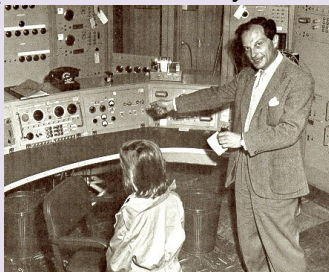
$$F(\phi) = -U'(\phi), \quad U(\phi) = \frac{k\phi^2}{2} + \frac{\alpha\phi^3}{3} + \frac{\beta\phi^4}{4}$$

# Задача Фермі–Паста–Улама (моделювання)

## Чисельне розв'язання проблеми

Моделювання на суперкомп'ютері MANIAC

(Mathematical Analyzer, Numerical Integrator, and Computer)

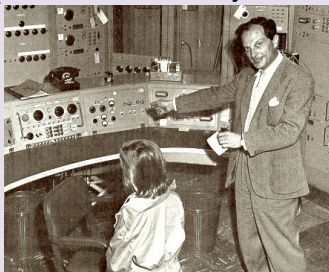


1954 — перший чисельний  
експеримент  
(Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou)

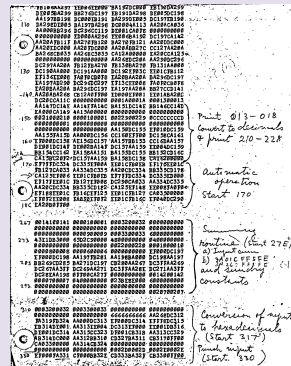
# Задача Фермі-Паста-Улама (модельовання)

## Чисельне розв'язання проблеми

Модельовання на суперкомп'ютері MANIAC  
(Mathematical Analyzer, Numerical Integrator, and Computer)



1954 — перший чисельний експеримент  
(Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou)



# Парадокс Фермі-Паста-Улама

$$M\ddot{\phi}_n = U'(\phi_{n+1} - \phi_n) - U'(\phi_n - \phi_{n-1}), \quad U(\phi) = \frac{k\phi^2}{2} + \frac{\alpha\phi^3}{3}$$

## Просторова картина розподілу

FPU-alpha model :  $U(x) = \sum (x_{i+1} - x_i)^2 + \alpha(x_{i+1} - x_i)^3/3$ ; size=31 time/T\_1= 0.00



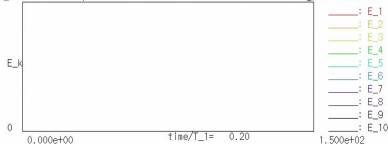
Початок

Середина

Кінець

## Часова картина розподілу енергії

E\_total FPU-alpha model : size=31 : time evolution of energy of each mode



Демонстрація

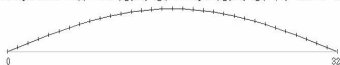
Парадокс: термолізація **не** відбувається!

# Парадокс Фермі-Паста-Улама

$$M\ddot{\phi}_n = U'(\phi_{n+1} - \phi_n) - U'(\phi_n - \phi_{n-1}), \quad U(\phi) = \frac{k\phi^2}{2} + \frac{\alpha\phi^3}{3}$$

## Просторова картина розподілу

FPU-alpha model :  $U(x) = \sum (x_{i+1} - x_i)^2 + \alpha(x_{i+1} - x_i)^3/3$ ; size=31 time/T\_1= 0.00



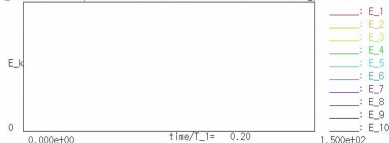
Початок

Середина

Кінець

## Часова картина розподілу енергії

E\_total FPU-alpha model : size=31 : time evolution of energy of each mode



Демонстрація

Парадокс: термолізація **не** відбувається!

# Теоретичне пояснення ФПУ: Крускал і Забускі (1965)

## Рівняння ФПУ

$$M\ddot{\phi}_n = U'(\phi_{n+1} - \phi_n) - U'(\phi_n - \phi_{n-1}), \quad U(\phi) = \frac{k\phi^2}{2} + \frac{\alpha\phi^3}{3}$$



Перехід до неперервного розподілу:  $\phi_n(t) = ap(x, t)$ ,  $x = an$



$$u(x, t) = p_x(x, t)$$

## Рівняння Буссінеска

$$u_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{l^2}{12} u_{xx} + \alpha l^4 u^2 + l^2 k u \right)$$

$$u(x, t) = \frac{c^2}{8\alpha} \frac{1}{\text{ch}^2 \left( \frac{cx - \omega t + \delta}{2} \right)}, \quad \omega^2 = kc^2 a^2 + c^4 a^4 / 12.$$

## Модель Френкеля–Конторової (ФК)

Найпростіша модель, що описує динаміку ланцюжка частинок, що взаємодіють з найближчими сусідами в присутності зовнішнього періодичного потенціала

$$\ddot{x}_n + \sin x_n - g(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) = 0$$

Приклади:

- Перше застосування моделі ФК: динаміка дислокацій
- В фізиці поверхні модель ФК використовується для опису динаміки адатомів
- Біофізика: нелінійна модель динаміки ДНК



# Механічна модель ФК



Демонстрація

# Рівняння синус–Гордон (СГ)

Континуальне наближення моделі ФК  $\Rightarrow$  рівняння синус–Гордон

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi = 0$$

Приклади:

- Надпровідність (джозевсонові контакти): солітон — флюксон
- Магнетизм: солітон — доменна стінка

# Солітони рівняння СГ

Кінки — топологічні солітони СГ

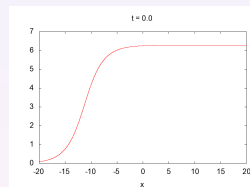
$$\operatorname{tg} \phi(x, t)/4 = \exp[-\sigma\gamma(x - vt)]$$

$\sigma = \pm 1$  — топологічний заряд,

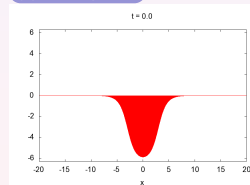
$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Брізери — динамічні солітони СГ

$$\operatorname{tg} \phi(x, t)/4 = \left( \frac{\sqrt{1 - \Omega^2}}{\Omega} \right) \frac{\sin \Omega t}{\operatorname{ch}(x\sqrt{1 - \Omega^2})}$$



Демонстрація



Демонстрація

# Нелінійне рівняння Шредінгера

$$i\phi_t + \phi_{xx} + \phi|\phi|^2 = 0$$

Приклади:

- Оптична самофокусування
- Ленгмюрівські хвилі в плазмі
- Ниткоутворення (утворення річок, гідродинамічних струменів, шляхів міграцій)
- нелінійні оптичні хвилі

# Задача про автомобільні затори



Демонстрація