

## Лекція № 7

Тема лекції:

Квантування солітонів

# План лекції

- 1 Квантові флуктуації вакууму
  - Механічний приклад
  - Ефект Казіміра в квантовій механіці
  - Теорія ефекту Казіміра
- 2 Квантування солітонних розв'язків
  - Кінк-фононна взаємодія
  - Енергія Казіміра для 1D солітонів
- 3 Солітонна термодинаміка

# План лекції

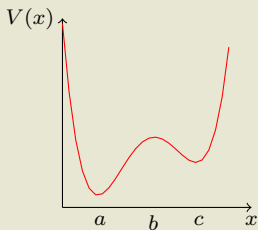
- 1 Квантові флуктуації вакууму
  - Механічний приклад
  - Ефект Казіміра в квантовій механіці
  - Теорія ефекту Казіміра
- 2 Квантування солітонних розв'язків
  - Кінк-фононна взаємодія
  - Енергія Казіміра для 1D солітонів
- 3 Солітонна термодинаміка

# План лекції

- 1 Квантові флуктуації вакууму
  - Механічний приклад
  - Ефект Казіміра в квантовій механіці
  - Теорія ефекту Казіміра
- 2 Квантування солітонних розв'язків
  - Кінк-фононна взаємодія
  - Енергія Казіміра для 1D солітонів
- 3 Солітонна термодинаміка

## Механічний приклад

### Приклад потенціалу для 1D частинки



### Класична частинка

• Рівняння руху  $\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$

• Класичні траєкторії розв'язують

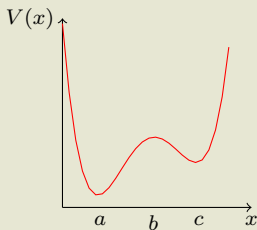
$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E \quad \text{або} \quad \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E$$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \quad \text{або} \quad \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

### Квантова частинка

# Механічний приклад

## Приклад потенціалу для 1D частинки



## Класична частинка

- Рівняння руху  $\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$
- Класичні статичні розв'язки:

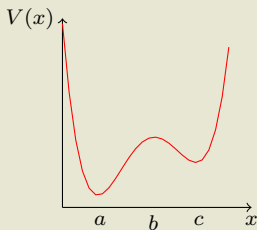
$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

- Класичний основний стан:  $\mathcal{E}_0^{clas} = V(a)$

## Квантова частинка

# Механічний приклад

## Приклад потенціалу для 1D частинки



## Класична частинка

● Рівняння руху  $\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$

● Класичні статичні розв'язки:

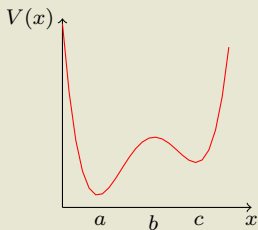
$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

● Класичний основний стан:  $\mathcal{E}_0^{clas} = V(a)$

## Квантова частинка

# Механічний приклад

## Приклад потенціалу для 1D частинки



## Класична частинка

- Рівняння руху  $\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$
- Класичні статичні розв'язки:

$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

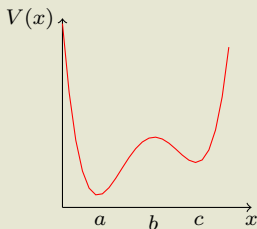
- Класичний основний стан:  $\mathcal{E}_0^{clas} = V(a)$

## Квантова частинка



# Механічний приклад

## Приклад потенціалу для 1D частинки



## Класична частинка

- Рівняння руху  $\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$
- Класичні статичні розв'язки:

$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

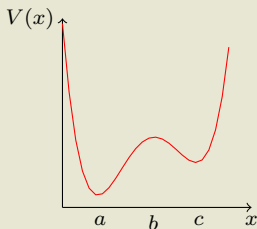
- Класичний основний стан:  $\mathcal{E}_0^{clas} = V(a)$

## Квантова частинка

$$\mathcal{E}_0^{quant} = \mathcal{E}_0^{clas} + \Delta\mathcal{E} = V(a) + \Delta\mathcal{E}$$

# Механічний приклад

## Приклад потенціалу для 1D частинки



## Класична частинка

- Рівняння руху  $\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$
- Класичні статичні розв'язки:

$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

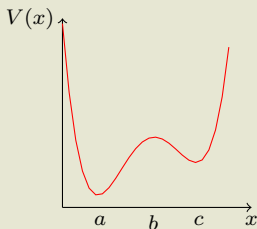
- Класичний основний стан:  $\mathcal{E}_0^{clas} = V(a)$

## Квантова частинка

- $\mathcal{E}_0^{quant} = \mathcal{E}_0^{clas} + \Delta\mathcal{E} = V(a) + \Delta\mathcal{E}.$
- Розклад за слабким зв'язком:  $V(x) = V(a) + \frac{\omega^2(x-a)^2}{2} + \frac{k_3(x-a)^3}{3!} + \dots$
- Квантовий основний стан:  $\mathcal{E}_0^{quant} = V(a) + \frac{\hbar\omega}{2}.$

# Механічний приклад

## Приклад потенціалу для 1D частинки



## Класична частинка

- Рівняння руху  $\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$
- Класичні статичні розв'язки:

$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

- Класичний основний стан:  $\mathcal{E}_0^{clas} = V(a)$

## Квантова частинка

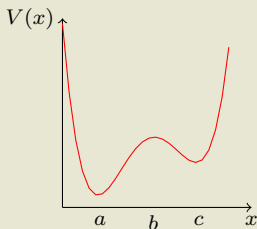
- $\mathcal{E}_0^{quant} = \mathcal{E}_0^{clas} + \Delta\mathcal{E} = V(a) + \Delta\mathcal{E}.$

- Розклад за слабким зв'язком:  $V(x) = V(a) + \frac{\omega^2(x-a)^2}{2} + \frac{k_3(x-a)^3}{3!} + \dots$

- Квантовий основний стан:  $\mathcal{E}_0^{quant} = V(a) + \frac{\hbar\omega}{2}.$

# Механічний приклад

## Приклад потенціалу для 1D частинки



## Класична частинка

- Рівняння руху  $\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$
- Класичні статичні розв'язки:

$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

- Класичний основний стан:  $\mathcal{E}_0^{clas} = V(a)$

## Квантова частинка

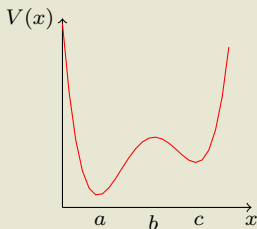
- $\mathcal{E}_0^{quant} = \mathcal{E}_0^{clas} + \Delta\mathcal{E} = V(a) + \Delta\mathcal{E}.$

- Розклад за слабким зв'язком:  $V(x) = V(a) + \frac{\omega^2(x-a)^2}{2} + \frac{k_3(x-a)^3}{3!} + \dots$

- Квантовий основний стан:  $\mathcal{E}_0^{quant} = V(a) + \frac{\hbar\omega}{2}.$

# Механічний приклад

## Приклад потенціалу для 1D частинки



## Класична частинка

- Рівняння руху  $\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$
- Класичні статичні розв'язки:

$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

- Класичний основний стан:  $\mathcal{E}_0^{clas} = V(a)$

## Квантова частинка

- $\mathcal{E}_0^{quant} = \mathcal{E}_0^{clas} + \Delta\mathcal{E} = V(a) + \Delta\mathcal{E}.$
- Розклад за слабким зв'язком:  $V(x) = V(a) + \frac{\omega^2(x-a)^2}{2} + \frac{k_3(x-a)^3}{3!} + \dots$
- Квантовий основний стан:  $\mathcal{E}_0^{quant} = V(a) + \frac{\hbar\omega}{2}.$

# Ефект Казіміра

## Ефект Казіміра

- Поява сили притягання між двома металевими пластинами у вакуумі, що зумовлена квантуванням нульових коливань електромагнітного поля.
- Сукупність фізичних явищ, зумовлених поляризацією вакууму завдяки змінам спектру квантових флуктуацій вакууму в обмеженому просторі.

## Hendrick Casimir



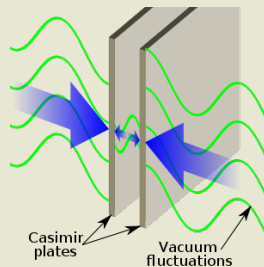
$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

# Ефект Казіміра

## Ефект Казіміра

- Поява сили притягання між двома металевими пластинами у вакуумі, що зумовлена квантуванням нульових коливань електромагнітного поля.
- Сукупність фізичних явищ, зумовлених поляризацією вакууму завдяки змінам спектру квантових флуктуацій вакууму в обмеженому просторі.

## Пластинки Казіміра



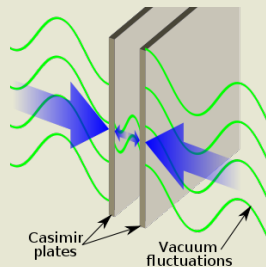
$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

# Ефект Казіміра

## Ефект Казіміра

- Поява сили притягання між двома металевими пластинами у вакуумі, що зумовлена квантуванням нульових коливань електромагнітного поля.
- Сукупність фізичних явищ, зумовлених поляризацією вакууму завдяки змінам спектру квантових флуктуацій вакууму в обмеженому просторі.

## Пластинки Казіміра



$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

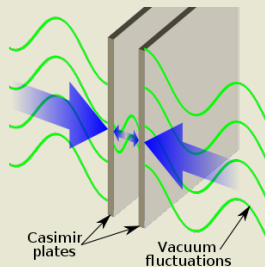


# Ефект Казіміра

## Ефект Казіміра

- Поява сили притягання між двома металевими пластинами у вакуумі, що зумовлена квантуванням нульових коливань електромагнітного поля.
- Сукупність фізичних явищ, зумовлених поляризацією вакууму завдяки змінам спектру квантових флуктуацій вакууму в обмеженому просторі.

## Пластинки Казіміра



$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

# Ефект Казіміра: розрахунок

## Ефект Казіміра

- **Передбачено ефект Казіміра (1948)**
- Загальна теорія для сил Казіміра та ван-дер-Ваальса: Є. Ліфшиць (1956)
- Перше експериментальне підтвердження: M. Sparnaay (Eindhoven, 1958)
- Сучасний експеримент: S. Lamoreaux (LANL, 1997)

## Експеримент

[S. Lamoreaux (LANL, 1997)]

# Ефект Казіміра: розрахунок

## Ефект Казіміра

- Передбачено ефект Казіміра (1948)
- Загальна теорія для сил Казіміра та ван-дер-Ваальса: Є. Ліфшиць (1956)
- Перше експериментальне підтвердження: M. Sparnaay (Eindhoven, 1958)
- Сучасний експеримент: S. Lamoreaux (LANL, 1997)

## Експеримент

[S. Lamoreaux (LANL, 1997)]

# Ефект Казіміра: розрахунок

## Ефект Казіміра

- Передбачено ефект Казіміра (1948)
- Загальна теорія для сил Казіміра та ван-дер-Ваальса: Є. Ліфшиць (1956)
- **Перше експериментальне підтвердження: M. Sparnaay (Eindhoven, 1958)**
- Сучасний експеримент: S. Lamoreaux (LANL, 1997)

## Експеримент

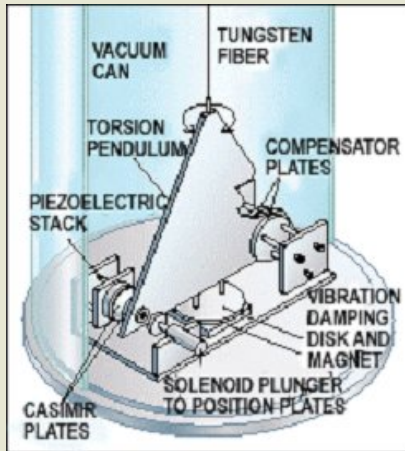
[S. Lamoreaux (LANL, 1997)]

# Ефект Казіміра: розрахунок

## Ефект Казіміра

- Передбачено ефект Казіміра (1948)
- Загальна теорія для сил Казіміра та ван-дер-Ваальса: Є. Ліфшиць (1956)
- Перше експериментальне підтвердження: М. Sparnaay (Eindhoven, 1958)
- Сучасний експеримент: S. Lamoreaux (LANL, 1997)

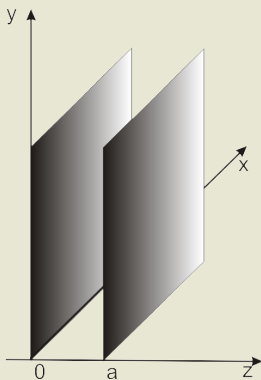
## Експеримент



[S. Lamoreaux (LANL, 1997)]

# Ефект Казіміра: розрахунок

## Позначення



## Теорія Казіміра

- Енергія нульових коливань без пластинок

$$\mathcal{E}_{vac} = \sum_{\vec{k}^{vac}} \frac{\hbar \omega(\vec{k}^{vac})}{2}$$

- Пластинки  $\Rightarrow$  стояча хвиля:

$$\psi_n(x, y, z, t) = \sin(k_n z) e^{ik_x x + ik_y y - i\omega_n t}$$

- Квантування станів:  $k_n = n\pi/a$

- Закон дисперсії:  $\omega_n = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$

- Енергія вакууму:  $\mathcal{E} = \sum_n \frac{\hbar \omega_n}{2}$

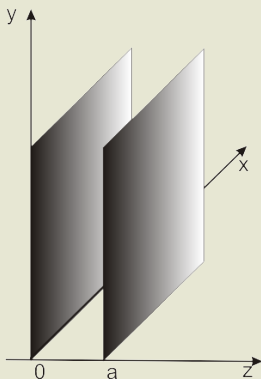
- Енергія Казіміра  $\mathcal{E}^{Casimir} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{vac}$

- Сила Казіміра  $F = - \frac{d\mathcal{E}^{Casimir}}{da}$

$$\frac{F}{S} = - \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

# Ефект Казіміра: розрахунок

## Позначення



## Теорія Казіміра

- Енергія нульових коливань без пластинок

$$\mathcal{E}_{vac} = \sum_{\vec{k}^{vac}} \frac{\hbar \omega(\vec{k}^{vac})}{2}$$

- Пластинки  $\Rightarrow$  стояча хвиля:

$$\psi_n(x, y, z, t) = \sin(k_n z) e^{ik_x x + ik_y y - i\omega_n t}$$

- Квантування станів:  $k_n = n\pi/a$

- Закон дисперсії:  $\omega_n = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$

- Енергія вакууму:  $\mathcal{E} = \sum_n \frac{\hbar \omega_n}{2}$

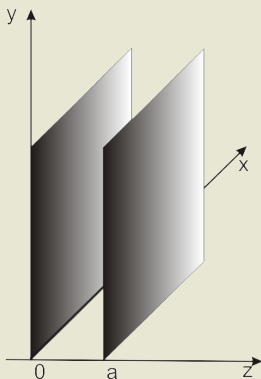
- Енергія Казіміра  $\mathcal{E}^{Casimir} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{vac}$

- Сила Казіміра  $F = - \frac{d\mathcal{E}^{Casimir}}{da}$

$$\frac{F}{S} = - \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

# Ефект Казіміра: розрахунок

## Позначення



## Теорія Казіміра

- Енергія нульових коливань без пластинок

$$\mathcal{E}_{vac} = \sum_{\vec{k}^{vac}} \frac{\hbar \omega(\vec{k}^{vac})}{2}$$

- Пластинки  $\Rightarrow$  стояча хвиля:

$$\psi_n(x, y, z, t) = \sin(k_n z) e^{ik_x x + ik_y y - i\omega_n t}$$

- Квантування станів:  $k_n = n\pi/a$

- Закон дисперсії:  $\omega_n = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$

- Енергія вакууму:  $\mathcal{E} = \sum_n \frac{\hbar \omega_n}{2}$

- Енергія Казіміра  $\mathcal{E}^{Casimir} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{vac}$

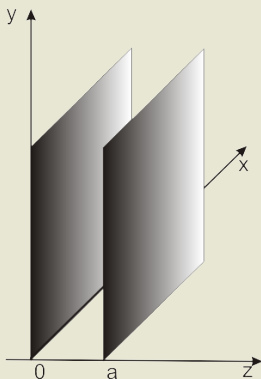
- Сила Казіміра  $F = - \frac{d\mathcal{E}^{Casimir}}{da}$

$$\frac{F}{S} = - \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$



# Ефект Казіміра: розрахунок

## Позначення



## Теорія Казіміра

- Енергія нульових коливань без пластинок

$$\mathcal{E}_{vac} = \sum_{\vec{k}^{vac}} \frac{\hbar \omega(\vec{k}^{vac})}{2}$$

- Пластинки  $\Rightarrow$  стояча хвиля:

$$\psi_n(x, y, z, t) = \sin(k_n z) e^{ik_x x + ik_y y - i\omega_n t}$$

- Квантування станів:  $k_n = n\pi/a$

- Закон дисперсії:  $\omega_n = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$**

- Енергія вакууму:  $\mathcal{E} = \sum_n \frac{\hbar \omega_n}{2}$

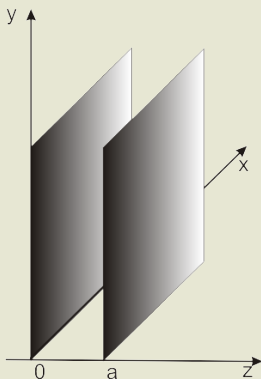
- Енергія Казіміра  $\mathcal{E}^{Casimir} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{vac}$

- Сила Казіміра  $F = - \frac{d\mathcal{E}^{Casimir}}{da}$

$$\frac{F}{S} = - \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

# Ефект Казіміра: розрахунок

## Позначення



## Теорія Казіміра

- Енергія нульових коливань без пластинок

$$\mathcal{E}_{vac} = \sum_{\vec{k}^{vac}} \frac{\hbar \omega(\vec{k}^{vac})}{2}$$

- Пластинки  $\Rightarrow$  стояча хвиля:

$$\psi_n(x, y, z, t) = \sin(k_n z) e^{ik_x x + ik_y y - i\omega_n t}$$

- Квантування станів:  $k_n = n\pi/a$

- Закон дисперсії:  $\omega_n = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$

- Енергія вакууму:  $\mathcal{E} = \sum_n \frac{\hbar \omega_n}{2}$

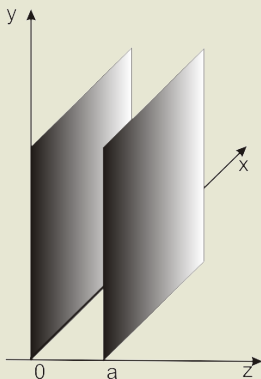
- Енергія Казіміра  $\mathcal{E}^{Casimir} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{vac}$

- Сила Казіміра  $F = - \frac{d\mathcal{E}^{Casimir}}{da}$

$$\frac{F}{S} = - \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

# Ефект Казіміра: розрахунок

## Позначення



## Теорія Казіміра

- Енергія нульових коливань без пластинок

$$\mathcal{E}_{vac} = \sum_{\vec{k}^{vac}} \frac{\hbar \omega(\vec{k}^{vac})}{2}$$

- Пластинки  $\Rightarrow$  стояча хвиля:

$$\psi_n(x, y, z, t) = \sin(k_n z) e^{ik_x x + ik_y y - i\omega_n t}$$

- Квантування станів:  $k_n = n\pi/a$

- Закон дисперсії:  $\omega_n = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$

- Енергія вакууму:  $\mathcal{E} = \sum_n \frac{\hbar \omega_n}{2}$

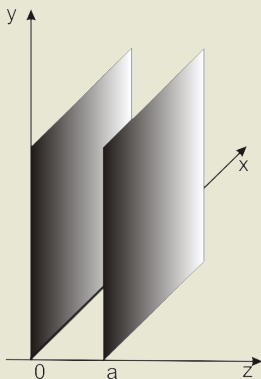
- Енергія Казіміра  $\mathcal{E}^{Casimir} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{vac}$

- Сила Казіміра  $F = - \frac{d\mathcal{E}^{Casimir}}{da}$

$$\frac{F}{S} = - \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

# Ефект Казіміра: розрахунок

## Позначення



## Теорія Казіміра

- Енергія нульових коливань без пластинок

$$\mathcal{E}_{vac} = \sum_{\vec{k}^{vac}} \frac{\hbar \omega(\vec{k}^{vac})}{2}$$

- Пластинки  $\Rightarrow$  стояча хвиля:

$$\psi_n(x, y, z, t) = \sin(k_n z) e^{ik_x x + ik_y y - i\omega_n t}$$

- Квантування станів:  $k_n = n\pi/a$

- Закон дисперсії:  $\omega_n = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$

- Енергія вакууму:  $\mathcal{E} = \sum_n \frac{\hbar \omega_n}{2}$

- Енергія Казіміра  $\mathcal{E}^{Casimir} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{vac}$

- Сила Казіміра  $F = - \frac{d\mathcal{E}^{Casimir}}{da}$

$$\frac{F}{S} = - \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

# Квантування солітонних розв'язків

## Кінк-фононна взаємодія

### Кінк в рівняння СГ

- Рівняння СГ:  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк  $u^K$  :  $\operatorname{tg} \frac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)$
- Фонон  $\Psi$  :  $\Psi(x,t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів:  $\omega(k) = \sqrt{1+k^2}$

### Взаємодія кінків і фононів: ідеї

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

# Квантування солітонних розв'язків

## Кінк-фононна взаємодія

### Кінк в рівняння СГ

- Рівняння СГ:  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк  $u^K$  :  $\operatorname{tg} \frac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон  $\Psi$  :  $\Psi(x, t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів:  $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

### Взаємодія кінків і фононів: ідеї

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

# Квантування солітонних розв'язків

## Кінк-фононна взаємодія

### Кінк в рівняння СГ

- Рівняння СГ:  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк  $u^K$  :  $\operatorname{tg} \frac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон  $\Psi$  :  $\Psi(x, t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів:  $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

### Взаємодія кінків і фононів: ідеї

Взаємодія кінків і фононів описується рівнянням СГ з потенціалом  $V(u) = 1 - \cos u$ . Для кінка  $u^K$  і фонона  $\Psi$  можна знайти розв'язок у вигляді  $u = u^K + \Psi$ , який задовольняє рівнянню СГ з потенціалом  $V(u) = 1 - \cos u$ .

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

# Квантування солітонних розв'язків

## Кінк-фононна взаємодія

### Кінк в рівняння СГ

- Рівняння СГ:  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк  $u^K$  :  $\operatorname{tg} \frac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон  $\Psi$  :  $\Psi(x, t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів:  $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

### Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- Кінк на змінює знак дисперсії фононів
- Кінк на змінює частоту фононів
- Кінк на змінює амплітуду фононів
- Кінк на змінює фазу фононів

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка



# Квантування солітонних розв'язків

## Кінк-фононна взаємодія

### Кінк в рівняння СГ

- Рівняння СГ:  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк  $u^K$  :  $\operatorname{tg} \frac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон  $\Psi$  :  $\Psi(x, t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів:  $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

### Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- Кінк не змінює закон дисперсії фононів
- Кінк зумовлює ефективний безвідбивальний потенціал для фононів
- Результат взаємодії — асимптотичний зсув фази фонону

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

# Квантування солітонних розв'язків

## Кінк-фононна взаємодія

### Кінк в рівняння СГ

- Рівняння СГ:  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк  $u^K$  :  $\operatorname{tg} \frac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон  $\Psi$  :  $\Psi(x, t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів:  $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

### Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- **Кінк не змінює закон дисперсії фононів**
- Кінк зумовлює ефективний безвідбивальний потенціал для фононів
- Результат взаємодії — асимптотичний зсув фази фонону

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

# Квантування солітонних розв'язків

## Кінк-фононна взаємодія

### Кінк в рівняння СГ

- Рівняння СГ:  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк  $u^K$  :  $\operatorname{tg} \frac{u^K}{4} = \exp \left( \pm \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right)$
- Фонон  $\Psi$  :  $\Psi(x, t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів:  $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

### Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- Кінк не змінює закон дисперсії фононів
- Кінк зумовлює ефективний безвідбивальний потенціал для фононів
- Результат взаємодії — асимптотичний зсув фази фонону

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

# Квантування солітонних розв'язків

## Кінк-фононна взаємодія

### Кінк в рівняння СГ

- Рівняння СГ:  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк  $u^K$  :  $\operatorname{tg} \frac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон  $\Psi$  :  $\Psi(x, t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів:  $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

### Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- Кінк не змінює закон дисперсії фононів
- Кінк зумовлює ефективний безвідбивальний потенціал для фононів
- **Результат взаємодії — асимптотичний зсув фази фонону**

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

# Квантування солітонних розв'язків

## Кінк-фононна взаємодія

### Кінк в рівняння СГ

- Рівняння СГ:  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк  $u^K$  :  $\operatorname{tg} \frac{u^K}{4} = \exp \left( \pm \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right)$
- Фонон  $\Psi$  :  $\Psi(x, t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів:  $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

### Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- Кінк не змінює закон дисперсії фононів
- Кінк зумовлює ефективний безвідбивальний потенціал для фононів
- Результат взаємодії — асимптотичний зсув фази фонону

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

## Кінк-фононна взаємодія: розрахунок

### Кінк + фонон в рівняння СГ

- Рівняння СГ:  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Розв'язок у вигляді:  $u(x, t) = u^K + \Psi(x, t)$
- Фонони  $\Psi = \sum_k \psi_k(x) e^{i\omega_k t}$
- Лінеаризація за  $\Psi$  :  $H\psi_k = \omega^2\psi$ ,  $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$
- Ефективний потенціал  $V(x) = 1 - \frac{2}{\text{ch}^2 x}$  — безвідбивальний

## Кінк-фононна взаємодія: розрахунок

### Кінк + фонон в рівняння СГ

- Рівняння СГ:  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Розв'язок у вигляді:  $u(x, t) = u^K + \Psi(x, t)$
- Фонони  $\Psi = \sum_k \psi_k(x) e^{i\omega_k t}$
- Лінеаризація за  $\Psi$  :  $H\psi_k = \omega^2\psi$ ,  $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$
- Ефективний потенціал  $V(x) = 1 - \frac{2}{\text{ch}^2 x}$  — безвідбивальний

## Кінк-фононна взаємодія: розрахунок

### Кінк + фонон в рівняння СГ

- Рівняння СГ:  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Розв'язок у вигляді:  $u(x, t) = u^K + \Psi(x, t)$
- Фонони  $\Psi = \sum_k \psi_k(x) e^{i\omega_k t}$
- Лінеаризація за  $\Psi$  :  $H\psi_k = \omega^2\psi$ ,  $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$
- Ефективний потенціал  $V(x) = 1 - \frac{2}{\text{ch}^2 x}$  — безвідбивальний



## Кінк-фононна взаємодія: розрахунок

### Кінк + фонон в рівняння СГ

- Рівняння СГ:  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Розв'язок у вигляді:  $u(x, t) = u^K + \Psi(x, t)$
- Фонони  $\Psi = \sum_k \psi_k(x) e^{i\omega_k t}$
- Лінеаризація за  $\Psi$  :  $H\psi_k = \omega^2\psi$ ,  $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$
- Ефективний потенціал  $V(x) = 1 - \frac{2}{\text{ch}^2 x}$  — безвідбивальний

## Кінк-фононна взаємодія: розрахунок

### Кінк + фонон в рівняння СГ

- Рівняння СГ:  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Розв'язок у вигляді:  $u(x, t) = u^K + \Psi(x, t)$
- Фонони  $\Psi = \sum_k \psi_k(x) e^{i\omega_k t}$
- Лінеаризація за  $\Psi$  :  $H\psi_k = \omega^2\psi$ ,  $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$
- Ефективний потенціал  $V(x) = 1 - \frac{2}{\text{ch}^2 x}$  — безвідбивальний

## Фононні стани на солітоні: зв'язані стани

Ефективний потенціал  $V(x) = 1 - \frac{2}{\text{ch}^2 x}$

### Зв'язані стани

- Зв'язаний стан (локальна мода)  $\psi_{loc}(x) = \frac{2}{\text{ch} x}$ ,  $\omega_{loc} = 0$
- Зв'язок із солітонним розв'язком  $\psi_{loc}(x) = \frac{du^K(x)}{dx}$

- Трансляційна (голдстоунова) мода:

$$u^K(x) \rightarrow u^K(x - X_c) = u^K(x) \Big|_{X_c=0} + \frac{du^K(x)}{dx} \Big|_{X_c=0} X_c = u^K + \psi_{loc} e^{i\omega t}$$

## Фононні стани на солітоні: зв'язані стани

Ефективний потенціал  $V(x) = 1 - \frac{2}{\text{ch}^2 x}$

### Зв'язані стани

- Зв'язаний стан (локальна мода)  $\psi_{loc}(x) = \frac{2}{\text{ch} x}$ ,  $\omega_{loc} = 0$
- Зв'язок із солітонним розв'язком  $\psi_{loc}(x) = \frac{du^K(x)}{dx}$

- Трансляційна (голдстоунова) мода:

$$u^K(x) \rightarrow u^K(x - X_c) = u^K(x) \Big|_{X_c=0} + \frac{du^K(x)}{dx} \Big|_{X_c=0} X_c = u^K + \psi_{loc} e^{i\omega t}$$

## Фононні стани на солітоні: зв'язані стани

$$\text{Ефективний потенціал } V(x) = 1 - \frac{2}{\text{ch}^2 x}$$

### Зв'язані стани

- Зв'язаний стан (локальна мода)  $\psi_{loc}(x) = \frac{2}{\text{ch } x}$ ,  $\omega_{loc} = 0$
- Зв'язок із солітонним розв'язком  $\psi_{loc}(x) = \frac{du^K(x)}{dx}$

- Трансляційна (голдстоунова) мода:

$$u^K(x) \rightarrow u^K(x - X_c) = u^K(x) \Big|_{X_c=0} + \frac{du^K(x)}{dx} \Big|_{X_c=0} X_c = u^K + \psi_{loc} e^{i\omega t}$$

## Фононні стани на солітоні: стани розсіяння

$$\text{Ефективний потенціал } V(x) = 1 - \frac{2}{\text{ch}^2 x}$$

### Стани розсіяння

- Закон дисперсії фононів  $\omega_k = \sqrt{1 + k^2}$ .
- Стани розсіяння  $\psi_k(x) \sim e^{ikx} [k + i\text{th}(x)]$ .
- Наближенні розсіяння:

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} e^{ikx}(k - i) \sim e^{ikx + \delta_1}, & x \rightarrow -\infty \quad \text{tg } \delta_1 = -1/k \\ e^{ikx}(k + i) \sim e^{ikx + \delta_2}, & x \rightarrow +\infty \quad \text{tg } \delta_2 = +1/k \end{cases}$$

- Фаза розсіяння  $\delta = \delta_2 - \delta_1 = -2 \arctg k$

## Фононні стани на солітоні: стани розсіяння

$$\text{Ефективний потенціал } V(x) = 1 - \frac{2}{\text{ch}^2 x}$$

### Стани розсіяння

- Закон дисперсії фононів  $\omega_k = \sqrt{1 + k^2}$ .
- Стани розсіяння  $\psi_k(x) \sim e^{ikx} [k + i\text{th}(x)]$ .
- Наближенні розсіяння:

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} e^{ikx}(k - i) \sim e^{ikx + \delta_1}, & x \rightarrow -\infty \quad \text{tg } \delta_1 = -1/k \\ e^{ikx}(k + i) \sim e^{ikx + \delta_2}, & x \rightarrow +\infty \quad \text{tg } \delta_2 = +1/k \end{cases}$$

- Фаза розсіяння  $\delta = \delta_2 - \delta_1 = -2 \arctg k$

## Фононні стани на солітоні: стани розсіяння

$$\text{Ефективний потенціал } V(x) = 1 - \frac{2}{\text{ch}^2 x}$$

### Стани розсіяння

- Закон дисперсії фононів  $\omega_k = \sqrt{1 + k^2}$ .
- Стани розсіяння  $\psi_k(x) \sim e^{ikx} [k + i\text{th}(x)]$ .
- **Наближенні розсіяння:**

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} e^{ikx}(k - i) \sim e^{ikx+\delta_1}, & x \rightarrow -\infty \quad \text{tg } \delta_1 = -1/k \\ e^{ikx}(k + i) \sim e^{ikx+\delta_2}, & x \rightarrow +\infty \quad \text{tg } \delta_2 = +1/k \end{cases}$$

- Фаза розсіяння  $\delta = \delta_2 - \delta_1 = -2 \arctg k$



## Фононні стани на солітоні: стани розсіяння

$$\text{Ефективний потенціал } V(x) = 1 - \frac{2}{\text{ch}^2 x}$$

### Стани розсіяння

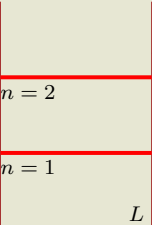
- Закон дисперсії фононів  $\omega_k = \sqrt{1 + k^2}$ .
- Стани розсіяння  $\psi_k(x) \sim e^{ikx} [k + i\text{th}(x)]$ .
- Наближенні розсіяння:

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} e^{ikx}(k - i) \sim e^{ikx+\delta_1}, & x \rightarrow -\infty & \text{tg } \delta_1 = -1/k \\ e^{ikx}(k + i) \sim e^{ikx+\delta_2}, & x \rightarrow +\infty & \text{tg } \delta_2 = +1/k \end{cases}$$

- Фаза розсіяння  $\delta = \delta_2 - \delta_1 = -2 \arctg k$

# Зсув енергії в присутності 1D солітона

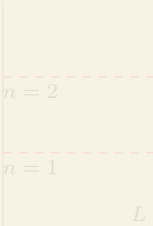
## Вільні квазічастинки



$$\mathcal{E}^{vac} = \frac{\hbar}{2} \sum_n \omega(k_n^{vac})$$

$$k_n^{vac} L = 2\pi n$$

## Квазічастинки на фоні солітону



$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{vac} + \mathcal{E}_{loc}$$

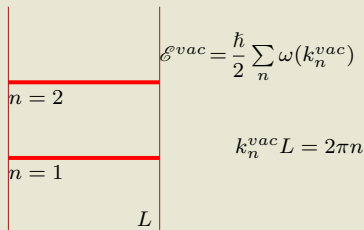
$$\mathcal{E}_{loc} = \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$$

## Зсув енергії

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}^{vac} = \frac{\hbar}{2} \sum_n \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$$

# Зсув енергії в присутності 1D солітона

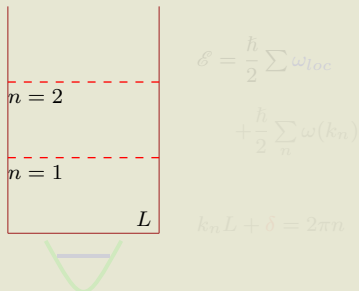
## Вільні квазічастинки



$$\mathcal{E}^{vac} = \frac{\hbar}{2} \sum_n \omega(k_n^{vac})$$

$$k_n^{vac} L = 2\pi n$$

## Квазічастинки на фоні солітону



$$\mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \sum_n \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n \omega(k_n)$$

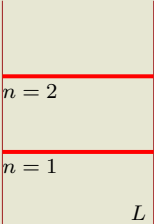
$$k_n L + \delta = 2\pi n$$

## Зсув енергії

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}^{vac} = \frac{\hbar}{2} \sum_n \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$$

## Зсув енергії в присутності 1D солітона

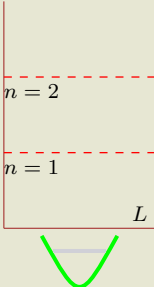
### Вільні квазічастинки



$$\mathcal{E}^{vac} = \frac{\hbar}{2} \sum_n \omega(k_n^{vac})$$

$$k_n^{vac} L = 2\pi n$$

### Квазічастинки на фоні солітону



$$\mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n \omega(k_n)$$

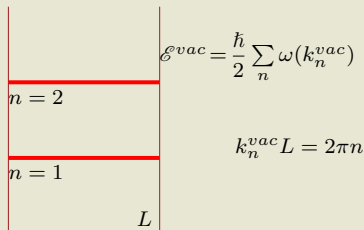
$$k_n L + \delta = 2\pi n$$

### Зсув енергії

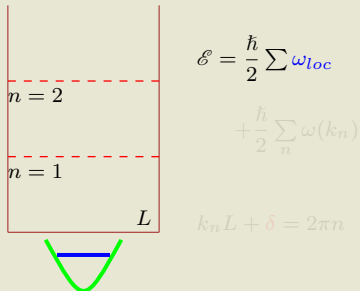
$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}^{vac} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$$

# Зсув енергії в присутності 1D солітона

## Вільні квазічастинки



## Квазічастинки на фоні солітону

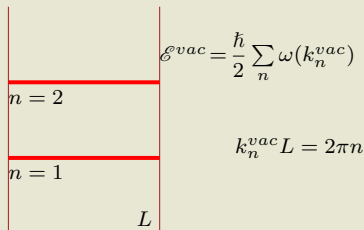


## Зсув енергії

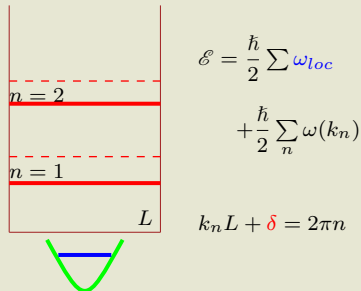
$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}^{vac} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$$

# Зсув енергії в присутності 1D солітона

## Вільні квазічастинки



## Квазічастинки на фоні солітону



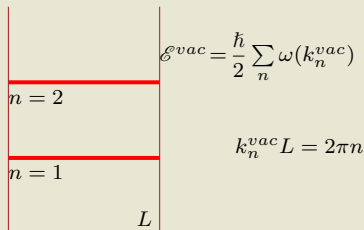
## Зсув енергії

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}^{vac} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$$

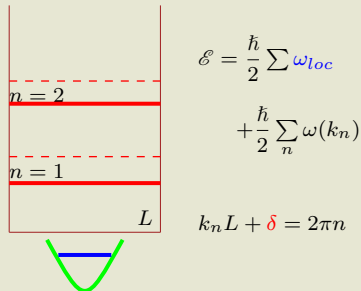
Потрібно визначити  $\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})$

# Зсув енергії в присутності 1D солітона

## Вільні квазічастинки



## Квазічастинки на фоні солітону



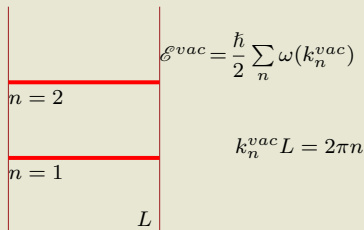
## Зсув енергії

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}^{vac} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$$

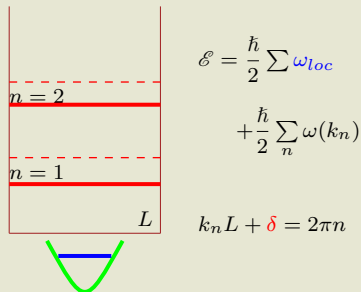
Потрібно визначити  $\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})$

# Зсув енергії в присутності 1D солітона

## Вільні квазічастинки



## Квазічастинки на фоні солітону



## Зсув енергії

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}^{vac} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$$

Потрібно визначити  $\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})$



# Енергія Казіміра для 1D солітонів

## Квантування спектру фононів

- вільні фонони:  $k_n^{vac} L = 2\pi n$
- фонони на фоні солітону:  $k_n L + \delta(k) = 2\pi n$
- зсув:  $\Delta k = -\frac{\delta(k)}{L}$

Зсув енергії  $\Delta \mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$

Енергія Казіміра [Dashen (1974)]

$$\mathcal{E}^{Casimir} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \int \omega(k) \mathcal{R}(k) dk, \quad \mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk} \text{ — густина станів}$$

# Енергія Казіміра для 1D солітонів

## Квантування спектру фононів

- вільні фонони:  $k_n^{vac} L = 2\pi n$
- фонони на фоні солітону:  $k_n L + \delta(k) = 2\pi n$
- зсув:  $\Delta k = -\frac{\delta(k)}{L}$

Зсув енергії  $\Delta \mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$

Енергія Казіміра [Casimir (1948)]

$$\mathcal{E}^{Casimir} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \int \omega(k) \mathcal{R}(k) dk, \quad \mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk} \text{ — густина станів}$$

# Енергія Казіміра для 1D солітонів

## Квантування спектру фононів

- вільні фонони:  $k_n^{vac} L = 2\pi n$
- фонони на фоні солітону:  $k_n L + \delta(k) = 2\pi n$
- зсув:  $\Delta k = -\frac{\delta(k)}{L}$

Зсув енергії  $\Delta \mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$

● Нобілізовані слабкої взаємодії  $\delta \ll 1 \Rightarrow k_n \sim k_n^{vac} \Rightarrow \omega_n \sim \omega_n^{vac}$

## Енергія Казіміра [Lashin (1974)]

$$\mathcal{E}^{Casimir} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \int \omega(k) \mathcal{R}(k) dk, \quad \mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk} \text{ — густина станів}$$

# Енергія Казіміра для 1D солітонів

## Квантування спектру фононів

- вільні фонони:  $k_n^{vac} L = 2\pi n$
- фонони на фоні солітону:  $k_n L + \delta(k) = 2\pi n$
- зсув:  $\Delta k = -\frac{\delta(k)}{L}$

## Зсув енергії $\Delta \mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$

- Наближення слабкої взаємодії  $\delta \ll 1 \Rightarrow k_n \sim k_n^{vac} \Rightarrow \omega_n \sim \omega_n^{vac}$
- $\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac}) \approx \frac{d\omega}{dk} \Delta k = -\frac{d\omega}{dk} \frac{\delta}{L}$
- $\sum_n \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk$
- $\Delta \mathcal{E} \approx \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} - \frac{\hbar}{4\pi} \int \frac{d\omega}{dk} \delta(k) dk$

## Енергія Казіміра [Lashin (1974)]

$$\mathcal{E}^{Casimir} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \int \omega(k) \mathcal{R}(k) dk, \quad \mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk} \text{ — густина станів}$$

# Енергія Казіміра для 1D солітонів

## Квантування спектру фононів

- вільні фонони:  $k_n^{vac} L = 2\pi n$
- фонони на фоні солітону:  $k_n L + \delta(k) = 2\pi n$
- зсув:  $\Delta k = -\frac{\delta(k)}{L}$

$$\text{Зсув енергії } \Delta \mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$$

- Наближення слабкої взаємодії  $\delta \ll 1 \Rightarrow k_n \sim k_n^{vac} \Rightarrow \omega_n \sim \omega_n^{vac}$
- $\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac}) \approx \frac{d\omega}{dk} \Delta k = -\frac{d\omega}{dk} \frac{\delta}{L}$
- $\sum_n \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk$
- $\Delta \mathcal{E} \approx \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} - \frac{\hbar}{4\pi} \int \frac{d\omega}{dk} \delta(k) dk$

## Енергія Казіміра [Lifshitz (1981)]

$$\mathcal{E}^{Casimir} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \int \omega(k) \mathcal{R}(k) dk, \quad \mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk} \text{ — густина станів}$$

# Енергія Казіміра для 1D солітонів

## Квантування спектру фононів

- вільні фонони:  $k_n^{vac} L = 2\pi n$
- фонони на фоні солітону:  $k_n L + \delta(k) = 2\pi n$
- зсув:  $\Delta k = -\frac{\delta(k)}{L}$

## Зсув енергії $\Delta \mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$

- Наближення слабкої взаємодії  $\delta \ll 1 \Rightarrow k_n \sim k_n^{vac} \Rightarrow \omega_n \sim \omega_n^{vac}$
- $\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac}) \approx \frac{d\omega}{dk} \Delta k = -\frac{d\omega}{dk} \frac{\delta}{L}$
- $\sum_n \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk$
- $\Delta \mathcal{E} \approx \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} - \frac{\hbar}{4\pi} \int \frac{d\omega}{dk} \delta(k) dk$

## Енергія Казіміра [Casimir (1948)]

$$\mathcal{E}^{Casimir} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \int \omega(k) \mathcal{R}(k) dk, \quad \mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk} \text{ — густина станів}$$

# Енергія Казіміра для 1D солітонів

## Квантування спектру фононів

- вільні фонони:  $k_n^{vac} L = 2\pi n$
- фонони на фоні солітону:  $k_n L + \delta(k) = 2\pi n$
- зсув:  $\Delta k = -\frac{\delta(k)}{L}$

## Зсув енергії $\Delta \mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$

- Наближення слабкої взаємодії  $\delta \ll 1 \Rightarrow k_n \sim k_n^{vac} \Rightarrow \omega_n \sim \omega_n^{vac}$
- $\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac}) \approx \frac{d\omega}{dk} \Delta k = -\frac{d\omega}{dk} \frac{\delta}{L}$
- $\sum_n \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk$
- $\Delta \mathcal{E} \approx \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} - \frac{\hbar}{4\pi} \int \frac{d\omega}{dk} \delta(k) dk$

## Енергія Казіміра [Dashen (1974)]

$$\mathcal{E}^{Casimir} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \int \omega(k) \mathcal{R}(k) dk, \quad \mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk} \text{ — густина станів}$$

# Енергія Казіміра для 1D солітонів

## Квантування спектру фононів

- вільні фонони:  $k_n^{vac} L = 2\pi n$
- фонони на фоні солітону:  $k_n L + \delta(k) = 2\pi n$
- зсув:  $\Delta k = -\frac{\delta(k)}{L}$

## Зсув енергії $\Delta \mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$

- Наближення слабкої взаємодії  $\delta \ll 1 \Rightarrow k_n \sim k_n^{vac} \Rightarrow \omega_n \sim \omega_n^{vac}$
- $\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac}) \approx \frac{d\omega}{dk} \Delta k = -\frac{d\omega}{dk} \frac{\delta}{L}$
- $\sum_n \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk$
- $\Delta \mathcal{E} \approx \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} - \frac{\hbar}{4\pi} \int \frac{d\omega}{dk} \delta(k) dk$

## Енергія Казіміра [Dashen (1974)]

$$\mathcal{E}^{Casimir} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \int \omega(k) \mathcal{R}(k) dk, \quad \mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk} \text{ — густина станів}$$



# Енергія Казіміра для 1D солітонів

## Квантування спектру фононів

- вільні фонони:  $k_n^{vac} L = 2\pi n$
- фонони на фоні солітону:  $k_n L + \delta(k) = 2\pi n$
- зсув:  $\Delta k = -\frac{\delta(k)}{L}$

## Зсув енергії $\Delta \mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \sum_n [\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac})]$

- Наближення слабкої взаємодії  $\delta \ll 1 \Rightarrow k_n \sim k_n^{vac} \Rightarrow \omega_n \sim \omega_n^{vac}$
- $\omega(k_n) - \omega(k_n^{vac}) \approx \frac{d\omega}{dk} \Delta k = -\frac{d\omega}{dk} \frac{\delta}{L}$
- $\sum_n \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk$
- $\Delta \mathcal{E} \approx \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} - \frac{\hbar}{4\pi} \int \frac{d\omega}{dk} \delta(k) dk$

## Енергія Казіміра [Dashen (1974)]

$$\mathcal{E}^{Casimir} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega_{loc} + \frac{\hbar}{2} \int \omega(k) \mathcal{R}(k) dk, \quad \mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk} - \text{густина станів}$$

# Солітонна термодинаміка

## Солітонна феноменологія

- Солітони — елементарні збудження разом із фононами [Krumhansl, Schriffer (1975)]
- Ідеальний газ солітонів і фононів [Currie, Krumhansl (1980)]
- Результат взаємодії солітонів і фононів — фазовий зсув  $\delta(k)$
- Зміна густини станів фононів за рахунок взаємодії із солітоном  $\mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk}$
- Зміна вільної енергії фононів
$$\Delta F = T \int dk \mathcal{R}(k) \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hbar \omega(k)}{T} \right) \right] - T \ln Z_{loc}$$
- Зміну вільної енергії фононів можна розглядати як внесок до енергії солітона

# Солітонна термодинаміка

## Солітонна феноменологія

- Солітони — елементарні збудження разом із фононами [Krumhansl, Schriffer (1975)]
- Ідеальний газ солітонів і фононів [Currie, Krumhansl (1980)]
- Результат взаємодії солітонів і фононів — фазовий зсув  $\delta(k)$
- Зміна густини станів фононів за рахунок взаємодії із солітоном  $\mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk}$
- Зміна вільної енергії фононів
$$\Delta F = T \int dk \mathcal{R}(k) \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hbar \omega(k)}{T} \right) \right] - T \ln Z_{loc}$$
- Зміну вільної енергії фононів можна розглядати як внесок до енергії солітона

# Солітонна термодинаміка

## Солітонна феноменологія

- Солітони — елементарні збудження разом із фононами [Krumhansl, Schriffer (1975)]
- Ідеальний газ солітонів і фононів [Currie, Krumhansl (1980)]
- Результат взаємодії солітонів і фононів — фазовий зсув  $\delta(k)$
- Зміна густини станів фононів за рахунок взаємодії із солітоном  $\mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk}$
- Зміна вільної енергії фононів
$$\Delta F = T \int dk \mathcal{R}(k) \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hbar \omega(k)}{T} \right) \right] - T \ln Z_{loc}$$
- Зміну вільної енергії фононів можна розглядати як внесок до енергії солітона

# Солітонна термодинаміка

## Солітонна феноменологія

- Солітони — елементарні збудження разом із фононами [Krumhansl, Schriffer (1975)]
- Ідеальний газ солітонів і фононів [Currie, Krumhansl (1980)]
- Результат взаємодії солітонів і фононів — фазовий зсув  $\delta(k)$
- Зміна густини станів фононів за рахунок взаємодії із солітоном  $\mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk}$
- Зміна вільної енергії фононів
$$\Delta F = T \int dk \mathcal{R}(k) \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hbar \omega(k)}{T} \right) \right] - T \ln Z_{loc}$$
- Зміну вільної енергії фононів можна розглядати як внесок до енергії солітона

# Солітонна термодинаміка

## Солітонна феноменологія

- Солітони — елементарні збудження разом із фононами [Krumhansl, Schriffer (1975)]
- Ідеальний газ солітонів і фононів [Currie, Krumhansl (1980)]
- Результат взаємодії солітонів і фононів — фазовий зсув  $\delta(k)$
- Зміна густини станів фононів за рахунок взаємодії із солітоном  $\mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk}$
- Зміна вільної енергії фононів
$$\Delta F = T \int dk \mathcal{R}(k) \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hbar \omega(k)}{T} \right) \right] - T \ln Z_{loc}$$
- Зміну вільної енергії фононів можна розглядати як внесок до енергії солітона

# Солітонна термодинаміка

## Солітонна феноменологія

- Солітони — елементарні збудження разом із фононами [Krumhansl, Schriffer (1975)]
- Ідеальний газ солітонів і фононів [Currie, Krumhansl (1980)]
- Результат взаємодії солітонів і фононів — фазовий зсув  $\delta(k)$
- Зміна густини станів фононів за рахунок взаємодії із солітоном  $\mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk}$
- Зміна вільної енергії фононів
$$\Delta F = T \int dk \mathcal{R}(k) \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hbar \omega(k)}{T} \right) \right] - T \ln Z_{loc}$$
- Зміну вільної енергії фононів можна розглядати як внесок до енергії солітона

# Солітонна термодинаміка

## Солітонна феноменологія

- Солітони — елементарні збудження разом із фононами [Krumhansl, Schriffer (1975)]
- Ідеальний газ солітонів і фононів [Currie, Krumhansl (1980)]
- Результат взаємодії солітонів і фононів — фазовий зсув  $\delta(k)$
- Зміна густини станів фононів за рахунок взаємодії із солітоном  $\mathcal{R}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dk}$
- Зміна вільної енергії фононів
$$\Delta F = T \int dk \mathcal{R}(k) \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hbar \omega(k)}{T} \right) \right] - T \ln Z_{loc}$$
- Зміну вільної енергії фононів можна розглядати як внесок до енергії солітона