

Лекція № 6

Тема лекції:

Солітонна теорія збурень

План лекції

- 1 Методи теорії збурень для лінійної системи: осцилятор з тертям
 - Метод балансу енергії
 - Часове мультимасштабування
- 2 Солітонна теорія збурень
 - Енергетичний аналіз динаміки солітону
 - Солітони Кортвега–де–Вріза
 - Солітони рівняння синус Ґордон
 - Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння
 - Мультимасштабна теорія збурень для кінка

План лекції

- 1 Методи теорії збурень для лінійної системи: осцилятор з тертям
 - Метод балансу енергії
 - Часове мультимасштабування
- 2 Солітонна теорія збурень
 - Енергетичний аналіз динаміки солітону
 - Солітони Кортвега–де–Вріза
 - Солітони рівняння синус Ґордон
 - Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння
 - Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Лінійний приклад: осцилятор з третям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$,
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

● Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

● Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \omega &= \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \\ B(t) &= \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}} \end{aligned}$$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$,
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$,
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2$$

$$\dot{E} = \varepsilon \dot{x}^2$$

$$\dot{E} = \varepsilon \dot{x}^2$$

$$\dot{E} = \varepsilon \dot{x}^2$$

$$\dot{E} = \varepsilon \dot{x}^2$$

$$\dot{E} = \varepsilon \dot{x}^2$$

$$\dot{E} = \varepsilon \dot{x}^2$$

$$\dot{E} = \varepsilon \dot{x}^2$$

$$\dot{E} = \varepsilon \dot{x}^2$$

$$\dot{E} = \varepsilon \dot{x}^2$$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$,
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$,
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$,
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$

- $\varepsilon = 0$: енергія

$$\mathcal{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t) \cos t \Rightarrow$
енергія $\mathcal{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\varepsilon \dot{x}^2$
 $\dot{x}(t) \approx -A(t) \sin t \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} =$
 $-\varepsilon A^2(t) \sin^2 t$
- $\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} A^2(t) = A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$,
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$

- $\varepsilon = 0$: енергія

$$\mathcal{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

- $0 < \varepsilon \ll 1: x(t) = A(t) \cos t \Rightarrow$

$$\text{енергія } \mathcal{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx A \frac{dA}{dt}$$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$,
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія

$$\mathcal{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t) \cos t \Rightarrow$
енергія $\mathcal{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\varepsilon \dot{x}^2$
 $\dot{x}(t) \approx -A(t) \sin t \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} =$
 $-\varepsilon A^2(t) \sin^2 t$
- $\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} A^2(t) = A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$,
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія
 $\mathcal{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t) \cos t \Rightarrow$
енергія $\mathcal{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\varepsilon \dot{x}^2$
 $\dot{x}(t) \approx -A(t) \sin t \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} =$
 $-\varepsilon A^2(t) \sin^2 t$
- $\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} A^2(t) = A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$,
 $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія
 $\mathcal{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t) \cos t \Rightarrow$
енергія $\mathcal{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\varepsilon \dot{x}^2$
 $\dot{x}(t) \approx -A(t) \sin t \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} =$
 $-\varepsilon A^2(t) \sin^2 t$
- $\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} A^2(t) = A \frac{dA}{dt}$
- $\frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

Розв'язок залежить від ε

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

$$x_0(t) = \cos t, \quad x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t, \quad x_2(t) = \frac{1}{8} \cos t$$

$$x_3(t) = \frac{1}{16} \sin t, \quad x_4(t) = \frac{1}{128} \cos t$$

$$x_5(t) = \frac{1}{256} \sin t, \quad x_6(t) = \frac{1}{2048} \cos t$$

$$x_7(t) = \frac{1}{4096} \sin t, \quad x_8(t) = \frac{1}{32768} \cos t$$

$$x_9(t) = \frac{1}{65536} \sin t, \quad x_{10}(t) = \frac{1}{524288} \cos t$$

$$x_{11}(t) = \frac{1}{1048576} \sin t, \quad x_{12}(t) = \frac{1}{8388608} \cos t$$

$$x_{13}(t) = \frac{1}{16777216} \sin t, \quad x_{14}(t) = \frac{1}{134217728} \cos t$$

$$x_{15}(t) = \frac{1}{268435328} \sin t, \quad x_{16}(t) = \frac{1}{2147483648} \cos t$$

$$x_{17}(t) = \frac{1}{4303006720} \sin t, \quad x_{18}(t) = \frac{1}{34424053760} \cos t$$

$$x_{19}(t) = \frac{1}{68848107520} \sin t, \quad x_{20}(t) = \frac{1}{550784860160} \cos t$$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

- $$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -\frac{dx_0}{dt} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε :
 $x(t, \varepsilon) =$
 $x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$

- $\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -\frac{dx_0}{dt} \end{cases}$

- $\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

$$\bullet \begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = \frac{dx_0}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

- $$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -\frac{dx_0}{dt} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

- $$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = \frac{dx_0}{dt} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$$

- $x(t) = A(\varepsilon t) \cos(\omega(\varepsilon)t) + \varepsilon B(\varepsilon t) \sin(\omega(\varepsilon)t)$
- $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots$
- $k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{1}{8}, \quad A(\varepsilon t) = e^{-\varepsilon t/2},$
 $B(\varepsilon t) = \frac{1}{2} e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -\frac{dx_0}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$$

$$\bullet \quad x(t) = A(\varepsilon t) \cos(\omega(\varepsilon)t) + \varepsilon B(\varepsilon t) \sin(\omega(\varepsilon)t)$$

$$\bullet \quad \omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots$$

$$\bullet \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{1}{8}, \quad A(\varepsilon t) = e^{-\varepsilon t/2}, \\ B(\varepsilon t) = \frac{1}{2} e^{-\varepsilon t/2}$$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

- $$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -\frac{dx_0}{dt} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$$

- $x(t) = A(\varepsilon t) \cos(\omega(\varepsilon)t) + \varepsilon B(\varepsilon t) \sin(\omega(\varepsilon)t)$

- $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots$

- $k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{1}{8}, \quad A(\varepsilon t) = e^{-\varepsilon t/2},$
 $B(\varepsilon t) = \frac{1}{2} e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε :

$$x(t, \varepsilon) =$$

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

- $$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = \frac{dx_0}{dt} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \end{cases}$$

- $x(t) = A(\varepsilon t) \cos(\omega(\varepsilon)t) + \varepsilon B(\varepsilon t) \sin(\omega(\varepsilon)t)$

- $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots$

- $k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{1}{8}, \quad A(\varepsilon t) = e^{-\varepsilon t/2},$
 $B(\varepsilon t) = \frac{1}{2} e^{-\varepsilon t/2}$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

- $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, \dots$
- Обмежимось другим порядком: $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

- $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, \dots$
- Обмежимось другим порядком: $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

- $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, \dots$
- Обмежимося другим порядком: $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}, \quad A(t) = e^{-\varepsilon t/2}, \quad B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

- $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, \dots$
- Обмежимося другим порядком: $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

Часове мультимасштабування

$$\bullet \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$\bullet \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[\left(1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2} \varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[\left(1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \right) t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[\left(1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2} \varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[\left(1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \right) t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

$$x_0 = A(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2} + B(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2}$$

$$x_1 = C(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2} + D(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2}$$

$$x_2 = E(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2} + F(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2}$$

$$x_3 = G(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2} + H(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2}$$

$$x_4 = I(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2} + J(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2}$$

$$x_5 = K(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2} + L(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2}$$

$$x_6 = M(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2} + N(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2}$$

$$x_7 = O(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2} + P(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2}$$

$$x_8 = Q(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2} + R(T_1, T_2)e^{-\varepsilon T_0/2}$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[\left(1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2} \varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[\left(1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \right) t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$

- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i \left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + i \left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1} \right) e^{-iT_0}$

- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \quad B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$

- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i \left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + i \left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1} \right) e^{-iT_0}$

- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \quad B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$

- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i \left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + i \left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1} \right) e^{-iT_0}$

- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \quad B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$

- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i \left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + i \left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1} \right) e^{-iT_0}$

- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \quad B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$

- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i \left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + i \left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1} \right) e^{-iT_0}$

- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \quad B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos \left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin \left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w_x^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2, \\ w_x \equiv u$$

- Гамільтоніан

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6}w_x^2 + \frac{1}{2}w_{xx}^2$$

Збурене рівняння КдВ

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt} + \epsilon^3 u_{xtt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt} + \epsilon^3 u_{xtt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt} + \epsilon^3 u_{xtt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt} + \epsilon^3 u_{xtt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt} + \epsilon^3 u_{xtt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt} + \epsilon^3 u_{xtt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt} + \epsilon^3 u_{xtt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt} + \epsilon^3 u_{xtt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt} + \epsilon^3 u_{xtt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt} + \epsilon^3 u_{xtt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt} + \epsilon^3 u_{xtt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt} + \epsilon^3 u_{xtt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt} + \epsilon^3 u_{xtt}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon u_{xxt} + \epsilon^2 u_{xtt} + \epsilon^3 u_{xtt}$$

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2,$
 $w_x \equiv u$
- Гамільтоніан
 $\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6}w^3 + \frac{1}{2}w_{xx}^2$

Збурене рівняння КдВ

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon \left(u_{xt} + u_{xx}u + u_x u_{xx} + u_{xxx} \right)$$

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжیان

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w_x^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2,$$

$$w_x \equiv u$$

- Гамільтоніан

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6}w_x^2 + \frac{1}{2}w_{xx}^2$$

Збурене рівняння КдВ

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w_x^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2,$$

$$w_x \equiv u$$

Гамільтоніан

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6}w_x^2 + \frac{1}{2}w_{xx}^2$$

Збурене рівняння КдВ

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w_x^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2,$$

$$w_x \equiv u$$

- Гамільтоніан

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6}w_x^3 + \frac{1}{2}w_{xx}^2$$

Збурене рівняння КдВ

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon \mathcal{L}(u, x, t)$$

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w_x^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2,$$

$$w_x \equiv u$$

- Гамільтоніан

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6} w_x^2 + \frac{1}{2} w_{xx}^2$$

Збурене рівняння КдВ

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w_x^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2,$$

$$w_x \equiv u$$
- Гамільтоніан

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6}w_x^2 + \frac{1}{2}w_{xx}^2$$

Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$.
Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{36}{5}v^{5/2}.$$
- $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} R w_t dx.$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx.$

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w_x^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2,$$

$$w_x \equiv u$$
- Гамільтоніан

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6}w_x^2 + \frac{1}{2}w_{xx}^2$$

Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$.
Структура солітонна на змінна,
але $v = v(\varepsilon, t)$.

- Повна енергія

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{36}{5}v^{5/2}.$$

- $\frac{d\mathcal{E}}{dt} \stackrel{\text{Д.3.}}{=} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} R w_t dx.$

- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx.$

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w_x^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2,$$

$$w_x \equiv u$$

- Гамільтоніан

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6}w_x^2 + \frac{1}{2}w_{xx}^2$$

Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$.
Структура солітонна на змінна,
але $v = v(\varepsilon, t)$.

- Повна енергія

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{36}{5} v^{5/2}.$$

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w_x^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2,$$

$$w_x \equiv u$$

- Гамільтоніан

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6} w_x^2 + \frac{1}{2} w_{xx}^2$$

Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$.
Структура солітонна на змінна,
але $v = v(\varepsilon, t)$.

- Повна енергія

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{36}{5} v^{5/2}.$$

$$\bullet \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} \stackrel{\text{D.3.}}{=} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} R w_t dx.$$

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбудене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w_x^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2,$$

$$w_x \equiv u$$
- Гамільтоніан

$$\mathcal{H} = w_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\frac{1}{6}w_x^2 + \frac{1}{2}w_{xx}^2$$

Збудене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збудення $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$.
Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{36}{5}v^{5/2}.$$
- $\frac{d\mathcal{E}}{dt} \stackrel{\text{Д.3.}}{=} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} R w_t dx.$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx.$

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$

• $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$

$$\bullet \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$$

$$-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$$

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$

$$\bullet \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$$

$$-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$$

• $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$

$$\bullet \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$$

$$-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$$

● $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$

- $v(t) = v(0)e^{-4\epsilon t/3}$.

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$
 $-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$
- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} Rudx =$
 $-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$
- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-4\epsilon t/3}$.
- $Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2\epsilon v \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-2\epsilon t}$.
- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$

$$\bullet \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$$

- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$

- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}$.

Інші закони збереження

$$\bullet \quad Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx \quad \Rightarrow \quad v(t) = v(0)e^{-4\epsilon t/3}.$$

• $Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2\varepsilon v \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}$.

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$
 $-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$
- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2\varepsilon v \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$
 $-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$
- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2\varepsilon v \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$
 $-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$
- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2\varepsilon v \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} R u dx =$
 $-\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$
- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx \Rightarrow v(t) =$
 $v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2\varepsilon v \Rightarrow$
 $v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» —
виникнення шельфу турбулентного
сліду солітону — випромінювання
солітону завдяки збуренню

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіван
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$
- Гамільтоніан $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} =$
 $\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u)$

Збурене рівняння СГ

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$

- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжیان

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$$

- Гамільтоніан $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} =$

$$\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u)$$

Збурене рівняння СГ

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$

- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$$

- Гамільтоніан $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} =$

$$\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u)$$

Збурене рівняння СГ

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- **Лагранжیان**
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$
- Гамільтоніан $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} =$
 $\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u)$

Збурене рівняння СГ

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \cos u)$
- Гамільтоніан $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} =$
 $\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \cos u)$

Збурене рівняння СГ

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon f(x, t)$$

$$f(x, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \exp(i k_j x - i \omega_j t)$$

$$k_j = \frac{2\pi}{L} n_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}$$

$$\omega_j = \frac{2\pi}{T} m_j, \quad m_j \in \mathbb{Z}$$

$$L, T \gg 1, \quad \varepsilon \ll 1$$

$$x \in [0, L], \quad t \in [0, T]$$

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t) + \dots$$

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СГ'

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x,t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан $\mathcal{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1 - \cos u)$
- Гамільтоніан $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1 - \cos u)$

Збурене рівняння СГ

Незбурене рівняння СГ

- $$u(x,t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан $\mathcal{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1 - \cos u)$
- Гамільтоніан $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1 - \cos u)$

● $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u, x, t)$

Незбурене рівняння СГ

- $$u(x,t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан $\mathcal{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1 - \cos u)$
- Гамільтоніан $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1 - \cos u)$

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u, x, t)$

- Збурення $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$. Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Гордон

Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x,t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан $\mathcal{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1 - \cos u)$
- Гамільтоніан $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1 - \cos u)$

Збурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$.
Структура солітонна на
змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.

- Повна енергія

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{8}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Гордон

Незбурене рівняння СГ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x,t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

- Лагранжіан $\mathcal{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1 - \cos u)$
- Гамільтоніан $\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1 - \cos u)$

Збурене рівняння СГ

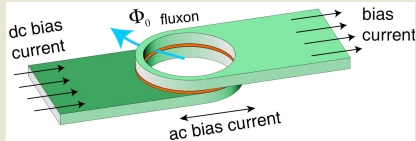
- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$.
Структура солітонна на
змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = -\frac{8}{\sqrt{1-v^2}}.$$

$$\bullet \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} \stackrel{\text{Д.З.}}{=} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} Ru_t dx.$$

Збурене рівняння синус Гордон: приклад

Зразок кільцевого контакту Джозефсона



Довгий джозефсонів контакт

$$\Phi_{ext} = \Phi_{ext,0} + \sin \psi = cR$$

$$\Phi_{ext,0} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-d/2}^{d/2} dy \int_{-d/2}^{d/2} dz$$

$$\Phi_{ext,0} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-d/2}^{d/2} dy \int_{-d/2}^{d/2} dz$$

$$\Phi_{ext,0} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-d/2}^{d/2} dy \int_{-d/2}^{d/2} dz$$

$$\Phi_{ext,0} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-d/2}^{d/2} dy \int_{-d/2}^{d/2} dz$$

$$\Phi_{ext,0} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-d/2}^{d/2} dy \int_{-d/2}^{d/2} dz$$

$$\Phi_{ext,0} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-d/2}^{d/2} dy \int_{-d/2}^{d/2} dz$$

$$\Phi_{ext,0} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-d/2}^{d/2} dy \int_{-d/2}^{d/2} dz$$

$$\Phi_{ext,0} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-d/2}^{d/2} dy \int_{-d/2}^{d/2} dz$$

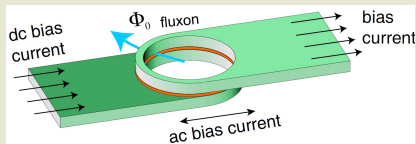
Швидкість флюксона

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi\gamma}{4} (1-v^2)^{3/2} - \alpha v (1-v^2) - \frac{\beta}{3} v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при $\beta = 0$: $v_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(2\alpha/\pi\gamma)^2}}$

Збурене рівняння синус Ґордон: приклад

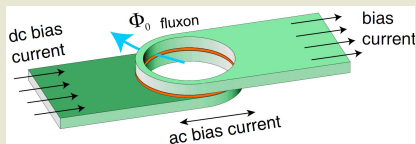
Зразок кільцевого контакту Джозефсона



Довгий джозефсонів контакт

Збурене рівняння синус Гордон: приклад

Зразок кільцевого контакту Джозефсона



Довгий джозефсонів контакт

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R$
- $\varepsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma$
 - α — втрати енергії при тунелюванні нормальних електронів на переході
 - β — втрати завдяки скінченній довжині проникнення електромагнітного поля в надпровідник
 - γ — струм зсуву

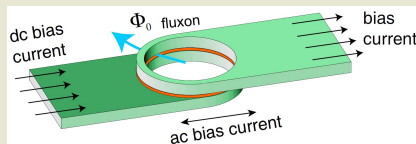
Швидкість флюксона

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi\gamma}{4}(1-v^2)^{3/2} - \alpha v(1-v^2) - \frac{\beta}{3}v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при $\beta = 0$: $v_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(2\alpha/\pi\gamma)^2}}$

Збурене рівняння синус Гордон: приклад

Зразок кільцевого контакту Джозефсона



Довгий джозефсонів контакт

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R$
- $\varepsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma$
 α — втрати енергії при тунелюванні нормальних електронів на переході
 β — втрати завдяки скінченній довжині проникнення електромагнітного поля в надпровідник
 γ — струм зсуву

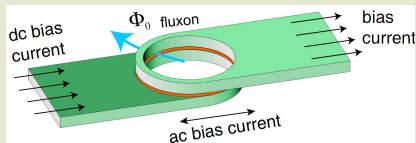
Швидкість флюксона

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi\gamma}{4}(1-v^2)^{3/2} - \alpha v(1-v^2) - \frac{\beta}{3}v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при $\beta = 0$: $v_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(2\alpha/\pi\gamma)^2}}$

Збурене рівняння синус Гордон: приклад

Зразок кільцевого контакту Джозефсона



Довгий джозефсонів контакт

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R$
- $\varepsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma$
 α — втрати енергії при тунелюванні нормальних електронів на переході
 β — втрати завдяки скінченній довжині проникнення електромагнітного поля в надпровідник
 γ — струм зсуву

Швидкість флюксона

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi\gamma}{4}(1-v^2)^{3/2} - \alpha v(1-v^2) - \frac{\beta}{3}v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при $\beta = 0$: $v_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(2\alpha/\pi\gamma)^2}}$

Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

Мультимасштабування

- Швидкі змінні: $T_0 = t$, $X_0 = x$
- Повільні змінні: $T_1 = \varepsilon t$, $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x, t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$.
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$
 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:
 $u(x, t) = u(X_0, T_0, T_1)$.

Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

Мультимасштабування

- Швидкі змінні: $T_0 = t$, $X_0 = x$
- Повільні змінні: $T_1 = \varepsilon t$, $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x, t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$.
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$
 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:
 $u(x, t) = u(X_0, T_0, T_1)$.

Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

Мультимасштабування

- Швидкі змінні: $T_0 = t$, $X_0 = x$
- Повільні змінні: $T_1 = \varepsilon t$, $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x, t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$.
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$
 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:
 $u(x, t) = u(X_0, T_0, T_1)$.

Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

Мультимасштабування

- Швидкі змінні: $T_0 = t, X_0 = x$
- Повільні змінні: $T_1 = \varepsilon t, X_1 = \varepsilon x$
- $u(x, t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$.
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$
 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:
 $u(x, t) = u(X_0, T_0, T_1)$.

Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

Мультимасштабування

- Швидкі змінні: $T_0 = t$, $X_0 = x$
- Повільні змінні: $T_1 = \varepsilon t$, $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x, t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$.
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$
 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:
 $u(x, t) = u(X_0, T_0, T_1)$.

Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

Мультимасштабування

- Швидкі змінні: $T_0 = t$, $X_0 = x$
- Повільні змінні: $T_1 = \varepsilon t$, $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x, t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$.
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$
 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:
 $u(x, t) = u(X_0, T_0, T_1)$.

Мультимасштабна теорія збурень для S^1 -рівняння

Збурене рівняння СГ

Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

Збурене рівняння СГ



$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}.$$

- Перший крок теорії збурень: $u = u_0 + \varepsilon u_1$
- Другий крок теорії збурень — система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial X_0^2} + \sin u_0 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial T_0} \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{X_0} X_0 + \cos u_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{\partial u_0}{\partial T_1} \\ R - \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

- Третій крок теорії збурень — розв'язування рівнянь:

u_0 — незбурений розв'язок, але $u_0 = u_0(X_0, T_0, T_1)$

u_1 — збурений розв'язок, $u_1 = u_1(X_0, T_0, T_1)$

Мультимасштабна теорія збурень для $S\Gamma$ -рівняння

Збурене рівняння СГ

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}.$$

- Перший крок теорії збурень: $u = u_0 + \varepsilon u_1$
- Другий крок теорії збурень — система рівнянь:

Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

Збурене рівняння СГ



$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}.$$



Перший крок теорії збурень: $u = u_0 + \varepsilon u_1$



Другий крок теорії збурень — система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial X_0^2} + \sin u_0 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial T_0} \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{X_0} X_0 + \cos u_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{\partial u_0}{\partial T_1} \\ R - \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \end{bmatrix}. \end{cases}$$



Третій крок теорії збурень — розв'язування рівнянь:

u_0 — незбурений розв'язок, але $u_0 = u_0(X_0, T_0, T_1)$

u_1 — збурений розв'язок, $u_1 = u_1(X_0, T_0, T_1)$

Мультимасштабна теорія збурень для СГ-рівняння

Збурене рівняння СГ



$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}.$$

- Перший крок теорії збурень: $u = u_0 + \varepsilon u_1$
- Другий крок теорії збурень — система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial X_0^2} + \sin u_0 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial T_0} \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{X_0} X_0 + \cos u_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{\partial u_0}{\partial T_1} \\ R - \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

- Третій крок теорії збурень — розв'язування рівнянь:

u_0 — незбурений розв'язок, але $u_0 = u_0(X_0, T_0, T_1)$

u_1 — збурений розв'язок, $u_1 = u_1(X_0, T_0, T_1)$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Приклад: кінк

- Уособлений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp \left[\frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}} \right], \quad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

- Рівняння для u_1 :

$$L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1T_0} \end{bmatrix} = \mathcal{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0, X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v}, \dot{v} - u_{0,X} \dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v} \dot{v} - u_{0T_0,X} \dot{X} \end{bmatrix}$$

- $L^\dagger \psi = 0 \Rightarrow \psi \perp \mathcal{F}$

- Умова ортогональності: $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} R u_t dx$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Приклад: кінк

● Уособлений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp \left[\frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}} \right], \quad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

● Рівняння для u_1 :

$$L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1T_0} \end{bmatrix} = \mathcal{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0, X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v}, \dot{v} - u_{0,X} \dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v} \dot{v} - u_{0T_0,X} \dot{X} \end{bmatrix}$$

● $L^\dagger \psi = 0 \Rightarrow \psi \perp \mathcal{F}$

● Умова ортогональності: $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} R u_t dx$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Приклад: кінк

- Уособлений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp \left[\frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}} \right], \quad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

- Рівняння для u_1 :

$$L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1T_0} \end{bmatrix} = \mathcal{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0, X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v}, \dot{v} - u_{0,X} \dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v} \dot{v} - u_{0T_0,X} \dot{X} \end{bmatrix}$$

- $L^\dagger \psi = 0 \Rightarrow \psi \perp \mathcal{F}$

- Умова ортогональності: $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} R u_t dx$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Приклад: кінк

- Уособлений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp \left[\frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}} \right], \quad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

- Рівняння для u_1 :

$$L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1T_0} \end{bmatrix} = \mathcal{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0, X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v}, \dot{v} - u_{0,X} \dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v} \dot{v} - u_{0T_0,X} \dot{X} \end{bmatrix}$$

• $L^\dagger \psi = 0 \Rightarrow \psi \perp \mathcal{F}$

• Умова ортогональності: $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} R u_t dx$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Приклад: кінк

- Уособлений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp \left[\frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}} \right], \quad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

- Рівняння для u_1 :

$$L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1T_0} \end{bmatrix} = \mathcal{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0, X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v}, \dot{v} - u_{0,X} \dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v} \dot{v} - u_{0T_0,X} \dot{X} \end{bmatrix}$$

- $L^\dagger \psi = 0 \Rightarrow \psi \perp \mathcal{F}$

- Умова ортогональності: $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} R u_t dx$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Умова ортогональності $L^\dagger \psi = 0 \Rightarrow \psi \perp \mathcal{F}$

$$\frac{dv}{dT_1} = \frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2}I_1, \quad \frac{dX}{dT_1} = -\frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2}I_2$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R[u_0(\theta)]}{\operatorname{ch} \theta} d\theta, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta R[u_0(\theta)]}{\operatorname{ch} \theta} d\theta$$

$$u_0(\theta) = \pm \operatorname{arctg}(e^\theta), \quad \theta = \frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1-v^2(T_1)}}$$

Розв'язок

$$u_0(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x - \int_0^t v(t') dt' - x_0(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} \right) \right]$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{4}(1-v^2)^{3/2}I_1, \quad \frac{dx_0}{dt} = -\frac{\varepsilon}{4}v(1-v^2)I_2.$$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Умова ортогональності $L^\dagger \psi = 0 \Rightarrow \psi \perp \mathcal{F}$

$$\frac{dv}{dT_1} = \frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2}I_1, \quad \frac{dX}{dT_1} = -\frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2}I_2$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R[u_0(\theta)]}{\operatorname{ch} \theta} d\theta, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta R[u_0(\theta)]}{\operatorname{ch} \theta} d\theta$$

$$u_0(\theta) = \pm \operatorname{arctg}(e^\theta), \quad \theta = \frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1-v^2(T_1)}}$$

Розв'язок

$$u_0(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x - \int_0^t v(t') dt' - x_0(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} \right) \right]$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{4}(1-v^2)^{3/2}I_1, \quad \frac{dx_0}{dt} = -\frac{\varepsilon}{4}v(1-v^2)I_2.$$