

Лекція № 5

Тема лекції:

Рівняння синус Гордон

План лекції

- 1 Рівняння синус Гордон
 - Симетрії та інтеграли руху для СГ-рівняння
- 2 Перетворення Беклунда для СГ-рівняння
 - Односолітонні розв'язки
 - Двосолітонні розв'язки
- 3 Метод оберненої задачі для СГ-рівняння
 - Двійка Лакса
 - Аналітичні властивості даних розсіювання
 - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко для СГ-рівняння
- 4 Багатосолітонні розв'язки для СГ-рівняння

План лекції

- 1 Рівняння синус Гордон
 - Симетрії та інтеграли руху для СГ-рівняння
- 2 Перетворення Беклунда для СГ-рівняння
 - Односолітонні розв'язки
 - Двосолітонні розв'язки
- 3 Метод оберненої задачі для СГ-рівняння
 - Двійка Лакса
 - Аналітичні властивості даних розсіювання
 - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко для СГ-рівняння
- 4 Багатосолітонні розв'язки для СГ-рівняння

План лекції

- 1 Рівняння синус Гордон
 - Симетрії та інтеграли руху для СГ-рівняння
- 2 Перетворення Беклунда для СГ-рівняння
 - Односолітонні розв'язки
 - Двосолітонні розв'язки
- 3 Метод оберненої задачі для СГ-рівняння
 - Двійка Лакса
 - Аналітичні властивості даних розсіяння
 - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко для СГ-рівняння
- 4 Багатосолітонні розв'язки для СГ-рівняння

План лекції

- 1 Рівняння синус Гордон
 - Симетрії та інтеграли руху для СГ-рівняння
- 2 Перетворення Беклунда для СГ-рівняння
 - Односолітонні розв'язки
 - Двосолітонні розв'язки
- 3 Метод оберненої задачі для СГ-рівняння
 - Двійка Лакса
 - Аналітичні властивості даних розсіяння
 - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко для СГ-рівняння
- 4 Багатосолітонні розв'язки для СГ-рівняння

Рівняння синус Гордон (СГ-рівняння)

СГ-рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

• Просторова трансляція $x \rightarrow x' = x - X$

• Часова трансляція $t \rightarrow t' = t - T$

• Просторова трансляція $u \rightarrow u' = u + 2\pi n$ (для $n \in \mathbb{Z}$)

Інтеграли руху

Нескінченна кількість інтегралів руху

• Інтеграл руху нульового порядку

Рівняння синус Гордон (СГ-рівняння)

СГ-рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \rightarrow x' = x - X$
- Часова трансляція $t \rightarrow t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \rightarrow x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}$, $t \rightarrow t' = \frac{t-xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеграли руху

Нескінченна кількість інтегралів руху

Рівняння синус Гордон (СГ-рівняння)

СГ-рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \rightarrow x' = x - X$
- Часова трансляція $t \rightarrow t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \rightarrow x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}$, $t \rightarrow t' = \frac{t-xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеграли руху

Нескінченна кількість інтегралів руху

Рівняння синус Гордон (СГ-рівняння)

СГ-рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \rightarrow x' = x - X$
- Часова трансляція $t \rightarrow t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \rightarrow x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}$, $t \rightarrow t' = \frac{t-xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеграли руху

Нескінчена кількість інтегралів руху

Рівняння синус Гордон (СГ-рівняння)

СГ-рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \rightarrow x' = x - X$
- Часова трансляція $t \rightarrow t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \rightarrow x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}$, $t \rightarrow t' = \frac{t-xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеграли руху

Нескінченна кількість інтегралів руху

● Енергія $H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + 1 - \cos u \right) dx$

Рівняння синус Гордон (СГ-рівняння)

СГ-рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \rightarrow x' = x - X$
- Часова трансляція $t \rightarrow t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \rightarrow x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}, t \rightarrow t' = \frac{t-xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеграли руху

Нескінченна кількість інтегралів руху

- Енергія $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) dx$
- Імпульс $P = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x dx$
- Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x dx$

Рівняння синус Гордон (СГ-рівняння)

СГ-рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \rightarrow x' = x - X$
- Часова трансляція $t \rightarrow t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \rightarrow x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}, t \rightarrow t' = \frac{t-xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеграли руху

Нескінченна кількість інтегралів руху

- Енергія $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) dx$
- Імпульс $P = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x dx$
- Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x dx$

Рівняння синус Гордон (СГ-рівняння)

СГ-рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \rightarrow x' = x - X$
- Часова трансляція $t \rightarrow t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \rightarrow x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}, t \rightarrow t' = \frac{t-xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеграли руху

Нескінченна кількість інтегралів руху

- Енергія $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) dx$
- Імпульс $P = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x dx$
- Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x dx$

Рівняння синус Гордон (СГ-рівняння)

СГ-рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \rightarrow x' = x - X$
- Часова трансляція $t \rightarrow t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \rightarrow x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}, t \rightarrow t' = \frac{t-xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеграли руху

Нескінченна кількість інтегралів руху

- Енергія $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) dx$
- Імпульс $P = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x dx$
- Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x dx$

Перетворення Беклунда для СГ-рівняння

Симетрична форма СГ-рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow x - t \\ t \rightarrow t + x \end{cases} \Rightarrow \\ u_{xt} = \sin u$$

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases} \xRightarrow{\text{Д.3.}} \begin{cases} u_{xt} = \sin u \\ v_{xt} = \sin v \end{cases}$$

Односолітонний розв'язок $N = 1$

$$u = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{v_x}{2} = \lambda \sin \frac{v}{2} \\ \frac{v_t}{2} = \frac{1}{\lambda} \sin \frac{v}{2} \end{cases} \Rightarrow \left| \omega = \frac{v}{2} \right| \Rightarrow \frac{d\omega}{\sin \omega} = \lambda dx \xRightarrow{\text{Д.3.}} \operatorname{tg} \frac{v}{4} = e^{-\frac{\lambda}{2}[x-c(t)]}$$

$$c(t) : \quad \frac{v_t}{2} = \frac{1}{\lambda} \sin \frac{v}{2} \xRightarrow{\text{Д.3.}} v(x, t) = 4 \operatorname{arctg} e^{-\frac{\lambda}{2}(x-x_0) - \frac{1}{2\lambda}(t-t_0)}$$

Перетворення Беклунда для СГ-рівняння

Симетрична форма СГ-рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow x - t \\ t \rightarrow t + x \end{cases} \Rightarrow \\ u_{xt} = \sin u$$

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases} \xRightarrow{\text{Д.3.}} \begin{cases} u_{xt} = \sin u \\ v_{xt} = \sin v \end{cases}$$

Односолітонний розв'язок $N = 1$

$$u = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{v_x}{2} = \lambda \sin \frac{v}{2} \\ \frac{v_t}{2} = \frac{1}{\lambda} \sin \frac{v}{2} \end{cases} \Rightarrow \left| \omega = \frac{v}{2} \right| \Rightarrow \frac{d\omega}{\sin \omega} = \lambda dx \xRightarrow{\text{Д.3.}} \operatorname{tg} \frac{v}{4} = e^{-\frac{\lambda}{2}[x-c(t)]}$$

$$c(t) : \quad \frac{v_t}{2} = \frac{1}{\lambda} \sin \frac{v}{2} \xRightarrow{\text{Д.3.}} v(x, t) = 4 \operatorname{arctg} e^{-\frac{\lambda}{2}(x-x_0) - \frac{1}{2\lambda}(t-t_0)}$$

Перетворення Беклунда для СГ-рівняння

Симетрична форма СГ-рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x \rightarrow x - t \\ t \rightarrow t + x \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$u_{xt} = \sin u$$

Перетворення Беклунда

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{array} \right. \xRightarrow{\text{Д.3.}} \left\{ \begin{array}{l} u_{xt} = \sin u \\ v_{xt} = \sin v \end{array} \right.$$

Односолітонний розв'язок $N = 1$

$$u = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{v_x}{2} = \lambda \sin \frac{v}{2} \\ \frac{v_t}{2} = \frac{1}{\lambda} \sin \frac{v}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \omega = \frac{v}{2} \right| \Rightarrow \frac{d\omega}{\sin \omega} = \lambda dx \xRightarrow{\text{Д.3.}} \operatorname{tg} \frac{v}{4} = e^{-\frac{\lambda}{2}[x-c(t)]}$$

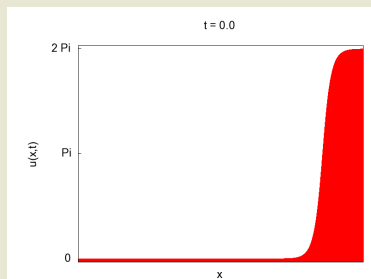
$$c(t) : \quad \frac{v_t}{2} = \frac{1}{\lambda} \sin \frac{v}{2} \xRightarrow{\text{Д.3.}} v(x, t) = 4 \operatorname{arctg} e^{-\frac{\lambda}{2}(x-x_0) - \frac{1}{2\lambda}(t-t_0)}$$

Односолітонні розв'язки

$$v(x, t) = 4 \operatorname{arctg} e^{-\frac{\lambda}{2}(x-x_0) - \frac{1}{2\lambda}(t-t_0)}$$

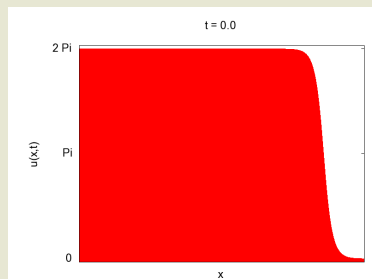
$$\text{Топологічний заряд } Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x dx = \frac{u(+\infty, t) - u(-\infty, t)}{2\pi} = \pm n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Кінк ($\lambda < 0$)



Демонстрація

Антикінк ($\lambda > 0$)



Демонстрація

Двосолітонні розв'язки

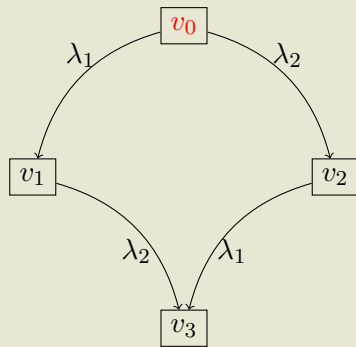
Низка перетворень

- v_0 — тривіальний розв'язок
- v_1, v_2 — односолітонні розв'язки
- v_3 — двосолітонний розв'язок

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема побудови двосолітонного розв'язку



Двосолітонні розв'язки

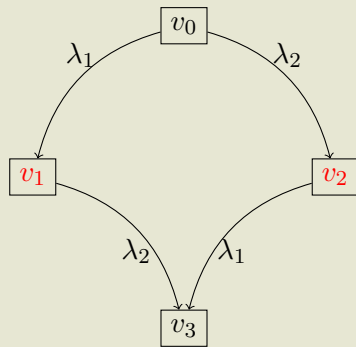
Низка перетворень

- v_0 — тривіальний розв'язок
- v_1, v_2 — односолітонні розв'язки
- v_3 — двосолітонний розв'язок

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема побудови двосолітонного розв'язку



Двосолітонні розв'язки

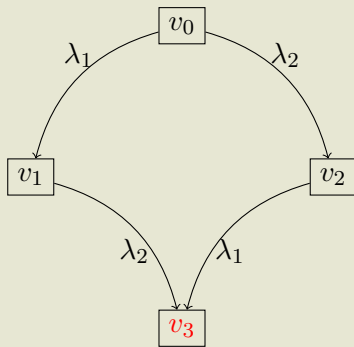
Низка перетворень

- v_0 — тривіальний розв'язок
- v_1, v_2 — односолітонні розв'язки
- v_3 — двосолітонний розв'язок

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема побудови двосолітонного розв'язку



Двосолітонні розв'язки

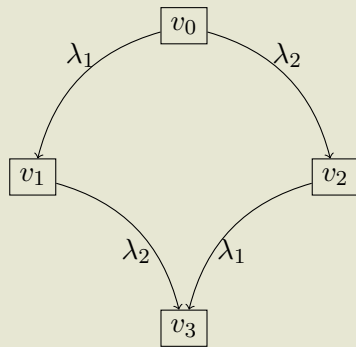
Низка перетворень

- v_0 — тривіальний розв'язок
- v_1, v_2 — односолітонні розв'язки
- v_3 — двосолітонний розв'язок

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема побудови двосолітонного розв'язку

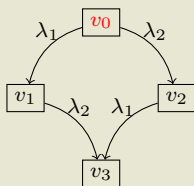


Двосолітонні розв'язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема



$N = 1$

$$\begin{cases} N = 0 & u = v_0 = 0 \\ N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \frac{v_1}{2} \\ \left(\frac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \frac{v_2}{2} \end{cases}$$

$N = 2$

$$\begin{cases} N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N = 2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \frac{v_3 + v_1}{2} \\ \left(\frac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \frac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв'язок

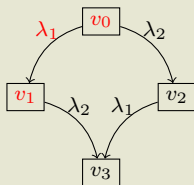
$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонні розв'язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема



$N = 1$

$$\begin{cases} N = 0 & u = v_0 = 0 \\ N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \frac{v_1}{2} \\ \left(\frac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \frac{v_2}{2} \end{cases}$$

$N = 2$

$$\begin{cases} N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N = 2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \frac{v_3 + v_1}{2} \\ \left(\frac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \frac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв'язок

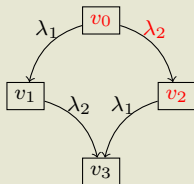
$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонні розв'язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема



$N = 1$

$$\begin{cases} N = 0 & u = v_0 = 0 \\ N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \frac{v_1}{2} \\ \left(\frac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \frac{v_2}{2} \end{cases}$$

$N = 2$

$$\begin{cases} N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N = 2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \frac{v_3 + v_1}{2} \\ \left(\frac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \frac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв'язок

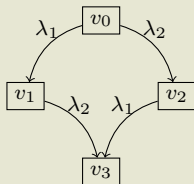
$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонні розв'язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема



$$N = 1$$

$$\begin{cases} N = 0 & u = v_0 = 0 \\ N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \frac{v_1}{2} \\ \left(\frac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \frac{v_2}{2} \end{cases}$$

$$N = 2$$

$$\begin{cases} N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N = 2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \frac{v_3 + v_1}{2} \\ \left(\frac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \frac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв'язок

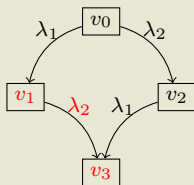
$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонні розв'язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема



$N = 1$

$$\begin{cases} N = 0 & u = v_0 = 0 \\ N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \frac{v_1}{2} \\ \left(\frac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \frac{v_2}{2} \end{cases}$$

$N = 2$

$$\begin{cases} N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N = 2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \frac{v_3 + v_1}{2} \\ \left(\frac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \frac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв'язок

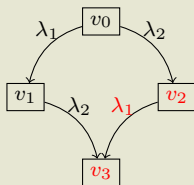
$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонні розв'язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема



$N = 1$

$$\begin{cases} N = 0 & u = v_0 = 0 \\ N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \frac{v_1}{2} \\ \left(\frac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \frac{v_2}{2} \end{cases}$$

$N = 2$

$$\begin{cases} N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N = 2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \frac{v_3 + v_1}{2} \\ \left(\frac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \frac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв'язок

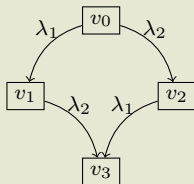
$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонні розв'язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема



$$N = 1$$

$$\begin{cases} N = 0 & u = v_0 = 0 \\ N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \frac{v_1}{2} \\ \left(\frac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \frac{v_2}{2} \end{cases}$$

$$N = 2$$

$$\begin{cases} N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N = 2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \frac{v_3 + v_1}{2} \\ \left(\frac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \frac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонний розв'язок: кінк-антикінк

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{v_j}{4} = e^{\theta_j}, \quad \theta_j = \frac{\lambda_j x}{2} + \frac{t}{2\lambda_j} + \delta_j, \quad j = 1, 2$$

$$u(x, t) = v_3 = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_2}} \right).$$

Двійка кінк-антикінк

$$\lambda_1, \lambda_2, \delta_1, \delta_2, \in \mathbb{R},$$

$$v = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}$$

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v \operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}$$

Двосолітонний розв'язок: кінк-антикінк

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{v_j}{4} = e^{\theta_j}, \quad \theta_j = \frac{\lambda_j x}{2} + \frac{t}{2\lambda_j} + \delta_j, \quad j = 1, 2$$

$$u(x, t) = v_3 = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_2}} \right).$$

Двійка кінк-антикінк

$$\lambda_1, \lambda_2, \delta_1, \delta_2, \in \mathbb{R},$$

$$v = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}$$

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v \operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}$$

Двосолітонний розв'язок: кінк-антикінк

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{v_j}{4} = e^{\theta_j}, \quad \theta_j = \frac{\lambda_j x}{2} + \frac{t}{2\lambda_j} + \delta_j, \quad j = 1, 2$$

$$u(x, t) = v_3 = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_2}} \right).$$

Двійка кінк-антикінк

$$\lambda_1, \lambda_2, \delta_1, \delta_2, \in \mathbb{R},$$

$$v = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}$$

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v \operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}$$

Двосолітонний розв'язок: кінк-антикінк

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{v_j}{4} = e^{\theta_j}, \quad \theta_j = \frac{\lambda_j x}{2} + \frac{t}{2\lambda_j} + \delta_j, \quad j = 1, 2$$

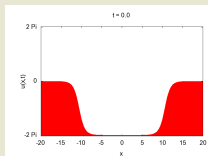
$$u(x, t) = v_3 = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_2}} \right).$$

Двійка кінк-антикінк

$$\lambda_1, \lambda_2, \delta_1, \delta_2, \in \mathbb{R},$$

$$v = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}$$

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v \operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}$$



Демонстрація

Двосолітонний розв'язок: кінк-антикінк

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{v_j}{4} = e^{\theta_j}, \quad \theta_j = \frac{\lambda_j x}{2} + \frac{t}{2\lambda_j} + \delta_j, \quad j = 1, 2$$

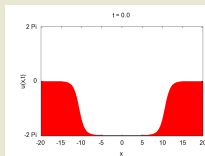
$$u(x, t) = v_3 = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_2}} \right).$$

Двійка кінк-антикінк

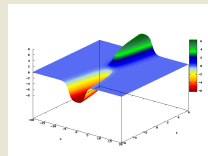
$$\lambda_1, \lambda_2, \delta_1, \delta_2, \in \mathbb{R},$$

$$v = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}$$

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v \operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}$$



Демонстрація



Двосолітонний розв'язок: брізер

Брізер

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v \operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}, \quad v = \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}, \quad \omega < 1$$
$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \frac{\operatorname{sh}(\omega(t-v_e x)/\sqrt{1-v_e^2})}{\operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2}(x-v_e t)/\sqrt{1-v_e^2})}$$

Стационарний брізер: $v_e = 0$

Рухомий брізер: $v_e > 0$

Двосолітонний розв'язок: брізер

Брізер

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v \operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}, \quad v = \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}, \quad \omega < 1$$
$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \frac{\operatorname{sh}(\omega(t-v_e x)/\sqrt{1-v_e^2})}{\operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2}(x-v_e t)/\sqrt{1-v_e^2})}$$

Стационарний брізер: $v_e = 0$

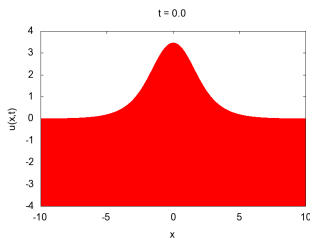
Рухомий брізер: $v_e > 0$

Двосолітонний розв'язок: брізер

Брізер

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v \operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}, \quad v = \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}, \quad \omega < 1$$
$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \frac{\operatorname{sh}(\omega(t-v_e x)/\sqrt{1-v_e^2})}{\operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2}(x-v_e t)/\sqrt{1-v_e^2})}$$

Стационарний брізер: $v_e = 0$



Демонстрація

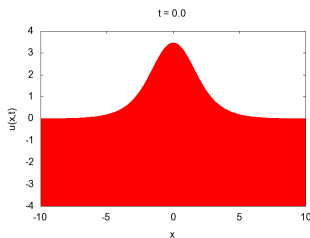
Рухомий брізер: $v_e > 0$

Двосолітонний розв'язок: брізер

Брізер

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v \operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}, \quad v = \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}, \quad \omega < 1$$
$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \frac{\operatorname{sh}(\omega(t-v_e x)/\sqrt{1-v_e^2})}{\operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2}(x-v_e t)/\sqrt{1-v_e^2})}$$

Стационарний брізер: $v_e = 0$



Демонстрація

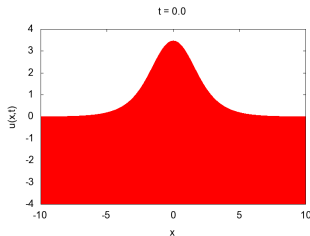
Рухомий брізер: $v_e > 0$

Двосолітонний розв'язок: брізер

Брізер

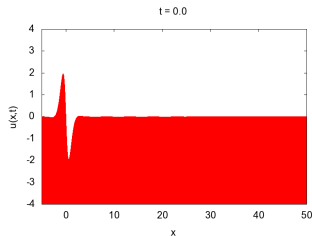
$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v \operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}, \quad v = \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}, \quad \omega < 1$$
$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \frac{\operatorname{sh}(\omega(t-v_e x)/\sqrt{1-v_e^2})}{\operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2}(x-v_e t)/\sqrt{1-v_e^2})}$$

Стационарный бризер: $v_e = 0$



Демонстрація

Рухомий бризер: $v_e > 0$



Демонстрація

Оператори Лакса для СГ-рівняння

Двійка Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

Оператори Лакса для СГ-рівняння

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} i\lambda & \frac{i u_x}{2} \\ \frac{i u_x}{2} & -i\lambda \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i \sin u \\ i \sin u & -\cos u \end{pmatrix}$$

$$L_t - A_x = [L, A] \stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} u_{xt} = \sin u$$

Перше рівняння Лакса

$$\Psi_x = L\Psi, \quad \Phi_1 \equiv \Psi_{21}, \quad \Phi_2 \equiv \Psi_{22}$$

$$\begin{cases} (\Phi_1)_x = i\lambda\Phi_1 + \frac{i u}{2}\Phi_2, \\ (\Phi_2)_x = \frac{i u}{2}\Phi_1 - i\lambda\Phi_2 \end{cases} \quad (\Phi_1, \Phi_2) \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, & x \rightarrow -\infty \\ \begin{pmatrix} b(\lambda, t)e^{i\lambda x} \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Оператори Лакса для СГ-рівняння

Двійка Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

Оператори Лакса для СГ-рівняння

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} i\lambda & \frac{i u_x}{2} \\ \frac{i u_x}{2} & -i\lambda \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i \sin u \\ i \sin u & -\cos u \end{pmatrix}$$

$$L_t - A_x = [L, A] \stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} u_{xt} = \sin u$$

Перше рівняння Лакса

$$\Psi_x = L\Psi, \quad \Phi_1 \equiv \Psi_{21}, \quad \Phi_2 \equiv \Psi_{22}$$

$$\begin{cases} (\Phi_1)_x = i\lambda\Phi_1 + \frac{i u}{2}\Phi_2, \\ (\Phi_2)_x = \frac{i u}{2}\Phi_1 - i\lambda\Phi_2 \end{cases} \quad (\Phi_1) \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, & x \rightarrow -\infty \\ \begin{pmatrix} b(\lambda, t)e^{i\lambda x} \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Оператори Лакса для СГ-рівняння

Двійка Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

Оператори Лакса для СГ-рівняння

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} i\lambda & \frac{i u_x}{2} \\ \frac{i u_x}{2} & -i\lambda \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i \sin u \\ i \sin u & -\cos u \end{pmatrix}$$

$$L_t - A_x = [L, A] \stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} u_{xt} = \sin u$$

Перше рівняння Лакса

$$\Psi_x = L\Psi, \quad \Phi_1 \equiv \Psi_{21}, \quad \Phi_2 \equiv \Psi_{22}$$

$$\begin{cases} (\Phi_1)_x = i\lambda\Phi_1 + \frac{i u}{2}\Phi_2, \\ (\Phi_2)_x = \frac{i u}{2}\Phi_1 - i\lambda\Phi_2 \end{cases} \quad (\Phi_1) \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, & x \rightarrow -\infty \\ \begin{pmatrix} b(\lambda, t)e^{i\lambda x} \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Аналітичні властивості даних розсіювання

- $|a|^2 + |b|^2 = 1$
- $a(\lambda, t) = a(\lambda)$, $b(\lambda, t) = b(\lambda)e^{-it/2\lambda}$ — часова еволюція даних розсіювання
- $a(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+ , $\bar{a}(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_-
- Нулі $a(\lambda_n)$ на \mathbb{C}_+ відповідають дискретному спектру при $n = \overline{1, N}$
- Для кожної точки дискретного спектру $\Phi_1(\lambda_j, x, t) = b_j(t)\Phi_2(\lambda_j, x, t)$, де $b_j(t) = b_j e^{-it/2\lambda_j}$

Аналітичні властивості даних розсіювання

- $|a|^2 + |b|^2 = 1$
- $a(\lambda, t) = a(\lambda)$, $b(\lambda, t) = b(\lambda)e^{-it/2\lambda}$ — часова еволюція даних розсіювання
- $a(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+ , $\bar{a}(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_-
- Нулі $a(\lambda_n)$ на \mathbb{C}_+ відповідають дискретному спектру при $n = \overline{1, N}$
- Для кожної точки дискретного спектру $\Phi_1(\lambda_j, x, t) = b_j(t)\Phi_2(\lambda_j, x, t)$, де $b_j(t) = b_j e^{-it/2\lambda_j}$

Аналітичні властивості даних розсіювання

- $|a|^2 + |b|^2 = 1$
- $a(\lambda, t) = a(\lambda)$, $b(\lambda, t) = b(\lambda)e^{-it/2\lambda}$ — часова еволюція даних розсіювання
- $a(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+ , $\bar{a}(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_-
- Нулі $a(\lambda_n)$ на \mathbb{C}_+ відповідають дискретному спектру при $n = \overline{1, N}$
- Для кожної точки дискретного спектру $\Phi_1(\lambda_j, x, t) = b_j(t)\Phi_2(\lambda_j, x, t)$, де $b_j(t) = b_j e^{-it/2\lambda_j}$

Аналітичні властивості даних розсіювання

- $|a|^2 + |b|^2 = 1$
- $a(\lambda, t) = a(\lambda)$, $b(\lambda, t) = b(\lambda)e^{-it/2\lambda}$ — часова еволюція даних розсіювання
- $a(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+ , $\bar{a}(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_-
- Нулі $a(\lambda_n)$ на \mathbb{C}_+ відповідають дискретному спектру при $n = \overline{1, N}$
- Для кожної точки дискретного спектру $\Phi_1(\lambda_j, x, t) = b_j(t)\Phi_2(\lambda_j, x, t)$, де $b_j(t) = b_j e^{-it/2\lambda_j}$

Аналітичні властивості даних розсіювання

- $|a|^2 + |b|^2 = 1$
- $a(\lambda, t) = a(\lambda)$, $b(\lambda, t) = b(\lambda)e^{-it/2\lambda}$ — часова еволюція даних розсіювання
- $a(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+ , $\bar{a}(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_-
- Нулі $a(\lambda_n)$ на \mathbb{C}_+ відповідають дискретному спектру при $n = 1, N$
- Для кожної точки дискретного спектру
 $\Phi_1(\lambda_j, x, t) = b_j(t)\Phi_2(\lambda_j, x, t)$, де $b_j(t) = b_j e^{-it/2\lambda_j}$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ для СГ-рівняння

$$\bullet \begin{cases} K_1(x, y, t) + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x, \xi, t) R(\xi + y, t) d\xi = 0, \\ K_2(x, y, t) + \int_x^{\infty} K_1(x, \xi, t) \bar{R}(\xi + y, t) d\xi = \bar{R}(x + y, t) \end{cases} \quad \text{— рівняння ГЛМ}$$

$$\bullet R(z, t) = \sum_{j=1}^N \beta_j e^{it/2\lambda_j} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t) e^{i\lambda z} d\lambda \quad \text{— інтегральне ядро}$$

$$\bullet r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{-it/2\lambda} \quad \text{— коефіцієнт відбиття}$$

$$\bullet \beta_j = \frac{b_j}{ia'(\lambda_j)}$$

$$\bullet u(x) = -2K_2(x, x, t) \quad \text{— розв'язок СГ-рівняння}$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ для СГ-рівняння

- $$\begin{cases} K_1(x, y, t) + \int_x^\infty K_2(x, \xi, t) R(\xi + y, t) d\xi = 0, \\ K_2(x, y, t) + \int_x^\infty K_1(x, \xi, t) \bar{R}(\xi + y, t) d\xi = \bar{R}(x + y, t) \end{cases} \quad \text{— рівняння ГЛМ}$$

- $$R(z, t) = \sum_{j=1}^N \beta_j e^{it/2\lambda_j} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t) e^{i\lambda z} d\lambda \quad \text{— інтегральне ядро}$$

- $$r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{-it/2\lambda} \quad \text{— коефіцієнт відбиття}$$

- $$\beta_j = \frac{b_j}{ia'(\lambda_j)}$$

- $$u(x) = -2K_2(x, x, t) \quad \text{— розв'язок СГ-рівняння}$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ для СГ-рівняння

- $$\begin{cases} K_1(x, y, t) + \int_x^\infty K_2(x, \xi, t) R(\xi + y, t) d\xi = 0, \\ K_2(x, y, t) + \int_x^\infty K_1(x, \xi, t) \bar{R}(\xi + y, t) d\xi = \bar{R}(x + y, t) \end{cases} \quad \text{— рівняння ГЛМ}$$

- $$R(z, t) = \sum_{j=1}^N \beta_j e^{it/2\lambda_j} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t) e^{i\lambda z} d\lambda \quad \text{— інтегральне ядро}$$

- $$r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{-it/2\lambda} \quad \text{— коефіцієнт відбиття}$$

- $$\beta_j = \frac{b_j}{ia'(\lambda_j)}$$

- $$u(x) = -2K_2(x, x, t) \quad \text{— розв'язок СГ-рівняння}$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ для СГ-рівняння

- $$\begin{cases} K_1(x, y, t) + \int_x^\infty K_2(x, \xi, t) R(\xi + y, t) d\xi = 0, \\ K_2(x, y, t) + \int_x^\infty K_1(x, \xi, t) \bar{R}(\xi + y, t) d\xi = \bar{R}(x + y, t) \end{cases} \quad \text{— рівняння ГЛМ}$$

- $$R(z, t) = \sum_{j=1}^N \beta_j e^{it/2\lambda_j} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t) e^{i\lambda z} d\lambda \quad \text{— інтегральне ядро}$$

- $$r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{-it/2\lambda} \quad \text{— коефіцієнт відбиття}$$

- $$\beta_j = \frac{b_j}{ia'(\lambda_j)}$$

- $$u(x) = -2K_2(x, x, t) \quad \text{— розв'язок СГ-рівняння}$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ для СГ-рівняння

- $$\begin{cases} K_1(x, y, t) + \int_x^\infty K_2(x, \xi, t) R(\xi + y, t) d\xi = 0, \\ K_2(x, y, t) + \int_x^\infty K_1(x, \xi, t) \bar{R}(\xi + y, t) d\xi = \bar{R}(x + y, t) \end{cases} \quad \text{— рівняння ГЛМ}$$

- $$R(z, t) = \sum_{j=1}^N \beta_j e^{it/2\lambda_j} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t) e^{i\lambda z} d\lambda \quad \text{— інтегральне ядро}$$

- $$r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{-it/2\lambda} \quad \text{— коефіцієнт відбиття}$$

- $$\beta_j = \frac{b_j}{ia'(\lambda_j)}$$

- $$u(x) = -2K_2(x, x, t) \quad \text{— розв'язок СГ-рівняння}$$

Багатосолітонні розв'язки для SG -рівняння

Безвідбивальний випадок

$$b(\lambda) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad r(\lambda) \equiv 0$$

N -солітонний розв'язок SG -рівняння

$$\psi = \Lambda_{N+1} = \frac{b_N}{\lambda + \lambda_N^*} \exp\left(\lambda_N x - \frac{t}{\lambda_N}\right), \quad b, i = \overline{1, N}$$

$$u(x, t) = -2 \ln \left| \frac{\psi}{\psi_0} \right| = -2 \ln \left| \frac{\Lambda_{N+1}}{\Lambda_0} \right|$$

Багатосолітонні розв'язки для СГ-рівняння

Безвідбивальний випадок

$$b(\lambda) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad r(\lambda) \equiv 0$$

N -солітонний розв'язок СГ-рівняння

- $A_{kj} = \frac{\beta_j}{\lambda_k + \lambda_j} \exp\left(i\lambda_j x - \frac{it}{\lambda_j}\right), \quad k, j = \overline{1, N}$
- $u(x, t) = -\frac{i}{2} \ln \left(\frac{\det [I + A(x, t)]}{\det [I - A(x, t)]} \right)$

Багатосолітонні розв'язки для СГ-рівняння

Безвідбивальний випадок

$$b(\lambda) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad r(\lambda) \equiv 0$$

N -солітонний розв'язок СГ-рівняння

- $A_{kj} = \frac{\beta_j}{\lambda_k + \lambda_j} \exp\left(i\lambda_j x - \frac{it}{\lambda_j}\right), \quad k, j = \overline{1, N}$
- $u(x, t) = -\frac{i}{2} \ln \left(\frac{\det [I + A(x, t)]}{\det [I - A(x, t)]} \right)$

Багатосолітонні розв'язки для SG -рівняння

Безвідбивальний випадок

$$b(\lambda) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad r(\lambda) \equiv 0$$

N -солітонний розв'язок SG -рівняння

- $A_{kj} = \frac{\beta_j}{\lambda_k + \lambda_j} \exp\left(i\lambda_j x - \frac{it}{\lambda_j}\right), \quad k, j = \overline{1, N}$
- $u(x, t) = -\frac{i}{2} \ln \left(\frac{\det [I + A(x, t)]}{\det [I - A(x, t)]} \right)$