

Лекція № 4

Тема лекції:

Метод оберненої задачі розсіювання

План лекції

- 1 Пряма задача розсіювання
 - Представлення Лакса для рівняння КдВ
 - Пряма задача розсіювання
 - Еволюція параметрів розсіювання
- 2 Обернена задача розсіювання
 - Аналітичні властивості даних розсіювання
 - Функції Йоста
 - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко
- 3 Дискретний спектр в методі оберненої задачі
 - Дискретний спектр
 - Безвідбивальний випадок
- 4 Інтеграли руху
 - Інтегровані системи
 - Приклад механічної гамільтонової системи
 - Рівняння КдВ як гамільтонова система
 - Інтеграли руху для рівняння КдВ

План лекції

- 1 Пряма задача розсіювання
 - Представлення Лакса для рівняння КдВ
 - Пряма задача розсіювання
 - Еволюція параметрів розсіювання
- 2 Обернена задача розсіювання
 - Аналітичні властивості даних розсіювання
 - Функції Йоста
 - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко
- 3 Дискретний спектр в методі оберненої задачі
 - Дискретний спектр
 - Безвідбивальний випадок
- 4 Інтеграли руху
 - Інтегровані системи
 - Приклад механічної гамільтонової системи
 - Рівняння КдВ як гамільтонова система
 - Інтеграли руху для рівняння КдВ

План лекції

- 1 Пряма задача розсіяння
 - Представлення Лакса для рівняння КдВ
 - Пряма задача розсіяння
 - Еволюція параметрів розсіяння
- 2 Обернена задача розсіяння
 - Аналітичні властивості даних розсіяння
 - Функції Йоста
 - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко
- 3 Дискретний спектр в методі оберненої задачі
 - Дискретний спектр
 - Безвідбивальний випадок
- 4 Інтеграли руху
 - Інтегровані системи
 - Приклад механічної гамільтонової системи
 - Рівняння КдВ як гамільтонова система
 - Інтеграли руху для рівняння КдВ

План лекції

- 1 Пряма задача розсіювання
 - Представлення Лакса для рівняння КдВ
 - Пряма задача розсіювання
 - Еволюція параметрів розсіювання
- 2 Обернена задача розсіювання
 - Аналітичні властивості даних розсіювання
 - Функції Йоста
 - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко
- 3 Дискретний спектр в методі оберненої задачі
 - Дискретний спектр
 - Безвідбивальний випадок
- 4 Інтеграли руху
 - Інтегровані системи
 - Приклад механічної гамільтонової системи
 - Рівняння КдВ як гамільтонова система
 - Інтеграли руху для рівняння КдВ

Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{I}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.
Спектральна задача $\Phi_{xx} + (\lambda^2 + u)\Phi$
— рівняння Шредінгера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{I}^{-1}

$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow$ «потенціал» $u(x, t)$

Дані розсіювання

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi &= A\Phi \\ \Rightarrow a(\lambda, t) &= a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t} \end{aligned}$$

Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{S}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.
Спектральна задача $\Phi_{xx} + (\lambda^2 + u)\Phi$
— рівняння Шредінгера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{S}^{-1}

$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow$ «потенціал» $u(x, t)$

Дані розсіювання

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi &= A\Phi \\ \Rightarrow a(\lambda, t) &= a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t} \end{aligned}$$

Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{S}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.
Спектральна задача $\Phi_{xx} + (\lambda^2 + u)\Phi$
— рівняння Шредінгера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{S}^{-1}

$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow$ «потенціал» $u(x, t)$

Дані розсіювання

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi &= A\Phi \\ \Rightarrow a(\lambda, t) &= a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t} \end{aligned}$$

Перетворення розсіяння

Перетворення розсіяння \mathcal{S}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.
Спектральна задача $\Phi_{xx} + (\lambda^2 + u)\Phi$
— рівняння Шредінгера

Обернене перетворення розсіяння \mathcal{S}^{-1}

$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow$ «потенціал» $u(x, t)$

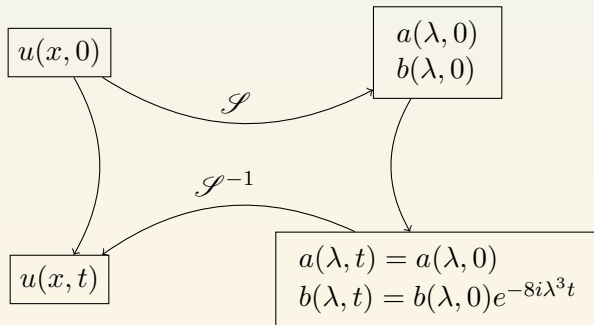
Дані розсіяння

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi &= A\Phi \\ \Rightarrow a(\lambda, t) &= a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t} \end{aligned}$$

Обернене перетворення розсіювання: діаграма



Представлення Лакса

Двійка Лакса

Рівняння двійки Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

$$\Psi = \Psi(x, t; \lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}, \quad L = L(x, t; \lambda), \quad A = A(x, t; \lambda)$$

Умова сумісності рівнянь двійки Лакса

$$\begin{aligned} \Psi_{xt} &= L_t \Psi + L \Psi_t = \Psi_{tx} = A_x \Psi + A \Psi_x \Rightarrow \\ &\Rightarrow L_t - A_x \stackrel{\text{Д.3.}}{=} [A, L] \end{aligned}$$

Представлення Лакса

Двійка Лакса

Рівняння двійки Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

$$\Psi = \Psi(x, t; \lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}, \quad L = L(x, t; \lambda), \quad A = A(x, t; \lambda)$$

Умова сумісності рівнянь двійки Лакса

$$\begin{aligned} \Psi_{xt} &= L_t \Psi + L \Psi_t = \Psi_{tx} = A_x \Psi + A \Psi_x \Rightarrow \\ &\Rightarrow L_t - A_x \stackrel{\text{Д.3.}}{=} [A, L] \end{aligned}$$

Оператори Лакса для КдВ

Оператори Лакса

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$A = -4\lambda^2 L - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}$$

Умова Лакса

$$L_t - A_x = [A, L] \stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} \lambda^0 : i \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{xx} & iu_{xxx} + 4iuu_x \\ 2iu_x & -u_{xx} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -iu_{xx} & -2uu_x \\ 2u_x & iu_{xx} \end{pmatrix} = 0$$

$$\stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} u_t - u_{xxx} - 6uu_x = 0.$$

Оператори Лакса для КдВ

Оператори Лакса

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$A = -4\lambda^2 L - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}$$

Умова Лакса

$$L_t - A_x = [A, L] \stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} \lambda^0 : i \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{xx} & iu_{xxx} + 4iuu_x \\ 2iu_x & -u_{xx} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -iu_{xx} & -2uu_x \\ 2u_x & iu_{xx} \end{pmatrix} = 0$$

$$\stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} u_t - u_{xxx} - 6uu_x = 0.$$

Оператори Лакса для КдВ

Перше рівняння Лакса

$$\Psi_x = L\Psi \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\lambda & iu \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}$$

Скалярний вигляд:

$$\begin{cases} \Psi'_{11} = i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21} \\ \Psi'_{21} = i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21} \end{cases} \quad \text{Д.3.} \Rightarrow \Psi''_{21} + (\lambda^2 + u)\Psi_{21} = 0$$

Оператори Лакса для КдВ

Перше рівняння Лакса

$$\Psi_x = L\Psi \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\lambda & iu \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}$$

Скалярний вигляд:

$$\begin{cases} \Psi'_{11} = i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21} \\ \Psi'_{21} = i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21} \end{cases} \xRightarrow{\text{Д.3.}} \Psi''_{21} + (\lambda^2 + u)\Psi_{21} = 0$$

Задача розсіювання і асимптотичний розв'язок

Постановка задачі розсіювання

Одновимірне рівняння Шредінгера для $\Phi = \Psi_{21}$

$$\Phi_{xx} + [\lambda^2 + u(x, t)] \Phi = 0$$

$u(x, t)$ відіграє роль потенціалу (вважаємо, що $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$)

λ — спектральний параметр

Асимптотичні стани

$$|x| \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0 \Rightarrow \Phi_{xx} + \lambda^2 \Phi = 0$$

$$\Rightarrow \Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$a(\lambda, t)$ — амплітуда проходження

$b(\lambda, t)$ — амплітуда відбиття

Задача розсіювання і асимптотичний розв'язок

Постановка задачі розсіювання

Одновимірне рівняння Шредінгера для $\Phi = \Psi_{21}$

$$\Phi_{xx} + [\lambda^2 + u(x, t)] \Phi = 0$$

$u(x, t)$ відіграє роль потенціалу (вважаємо, що $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$)

λ — спектральний параметр

Асимптотичні стани

$$|x| \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0 \Rightarrow \Phi_{xx} + \lambda^2 \Phi = 0$$

$$\Rightarrow \Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$a(\lambda, t)$ — амплітуда проходження

$b(\lambda, t)$ — амплітуда відбиття

Асимптотичні розв'язки

 Ψ_{21}

$$\Psi_{21} \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

 Ψ_{11}

$$\begin{cases} \Psi'_{11} = i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21} \\ \Psi'_{21} = i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21} \end{cases} \Rightarrow \Psi_{11} = \lambda\Psi_{21} - i\Psi'_{21} \Rightarrow \Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \rightarrow -\infty \\ 2\lambda b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Асимптотичні розв'язки

 Ψ_{21}

$$\Psi_{21} \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

 Ψ_{11}

$$\begin{cases} \Psi'_{11} = i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21} \\ \Psi'_{21} = i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21} \end{cases} \Rightarrow \Psi_{11} = \lambda\Psi_{21} - i\Psi'_{21} \Rightarrow \Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \rightarrow -\infty \\ 2\lambda b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Еволюція параметрів розсіювання

Часова еволюція: друге рівняння Лакса

$$\Psi_t = A\Psi$$

$$A = -4\lambda^2 \begin{pmatrix} i\lambda & u \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}$$

Еволюція даних розсіювання

$$\begin{aligned} |x| \rightarrow \infty &\Rightarrow u \sim u_x \sim u_{xx} \rightarrow 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = -4\lambda^2 \begin{pmatrix} i\lambda & 0 \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \dot{\Psi}_{11} = -4i\lambda^3 \Psi_{11} \\ \dot{\Psi}_{21} = -4i\lambda^2 \Psi_{11} + 4i\lambda^3 \Psi_{12} \end{cases} \end{aligned}$$

Еволюція параметрів розсіяння

Часова еволюція: друге рівняння Лакса

$$\Psi_t = A\Psi$$

$$A = -4\lambda^2 \begin{pmatrix} i\lambda & u \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}$$

Еволюція даних розсіяння

$$\begin{aligned} |x| \rightarrow \infty &\Rightarrow u \sim u_x \sim u_{xx} \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow A &= -4\lambda^2 \begin{pmatrix} i\lambda & 0 \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Psi}_{11} &= -4i\lambda^3 \Psi_{11} \\ \dot{\Psi}_{21} &= -4i\lambda^2 \Psi_{11} + 4i\lambda^3 \Psi_{12} \end{cases} \end{aligned}$$

Еволюція параметрів розсіювання

Асимптотика розв'язку для b

$$\Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \rightarrow -\infty \\ 2\lambda b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Рівняння для $b(\lambda, t)$

$$\dot{\Psi}_{11} = -4i\lambda^3 \Psi_{11}$$

$$\Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \rightarrow -\infty \\ e^{4it\lambda^3} 2\lambda b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$x \rightarrow +\infty: \quad \dot{b} = -8i\lambda^3 b \Rightarrow b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Рівняння для $a(\lambda, t)$

$$\dot{\Psi}_{21} = -4i\lambda^2 \Psi_{11} + 4i\lambda^3 \Psi_{12} \quad \Psi_{21} \sim \begin{cases} e^{4it\lambda^3} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ e^{4it\lambda^3} [a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x}] & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$x \rightarrow +\infty: \quad \dot{a} = 0 \Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0).$$

Еволюція параметрів розсіяння

Асимптотика розв'язку для b

$$\Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \rightarrow -\infty \\ 2\lambda b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Рівняння для $b(\lambda, t)$

$$\dot{\Psi}_{11} = -4i\lambda^3 \Psi_{11}$$

$$\Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \rightarrow -\infty \\ e^{4it\lambda^3} 2\lambda b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$x \rightarrow +\infty : \dot{b} = -8i\lambda^3 b \Rightarrow b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Рівняння для $a(\lambda, t)$

$$\dot{\Psi}_{21} = -4i\lambda^2 \Psi_{11} + 4i\lambda^3 \Psi_{12} \quad \Psi_{21} \sim \begin{cases} e^{4it\lambda^3} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ e^{4it\lambda^3} [a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x}] & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$x \rightarrow +\infty : \dot{a} = 0 \Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0).$$

Еволюція параметрів розсіювання

Асимптотика розв'язку для b

$$\Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \rightarrow -\infty \\ 2\lambda b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Рівняння для $b(\lambda, t)$

$$\dot{\Psi}_{11} = -4i\lambda^3 \Psi_{11}$$

$$\Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \rightarrow -\infty \\ e^{4it\lambda^3} 2\lambda b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$x \rightarrow +\infty : \dot{b} = -8i\lambda^3 b \Rightarrow b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Рівняння для $a(\lambda, t)$

$$\dot{\Psi}_{21} = -4i\lambda^2 \Psi_{11} + 4i\lambda^3 \Psi_{12} \quad \Psi_{21} \sim \begin{cases} e^{4it\lambda^3} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ e^{4it\lambda^3} [a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x}] & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$x \rightarrow +\infty : \dot{a} = 0 \Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0).$$

Властивості даних розсіювання

Еволюція даних розсіювання

$$\begin{cases} a(\lambda, t) &= a(\lambda, 0) \\ b(\lambda, t) &= b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t} \end{cases}$$

Закон збереження

$$|a(\lambda, t)|^2 - |b(\lambda, t)|^2 = 1$$

Властивості даних розсіювання

Еволюція даних розсіювання

$$\begin{cases} a(\lambda, t) &= a(\lambda, 0) \\ b(\lambda, t) &= b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t} \end{cases}$$

Закон збереження

$$|a(\lambda, t)|^2 - |b(\lambda, t)|^2 = 1$$

Функції Йоста

Асимптотичні стани

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Функція Йоста

$$\chi(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda)e^{i\lambda x} \sim \begin{cases} 1 & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)1 + b(\lambda, t)e^{2i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Функції Йоста

Асимптотичні стани

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Функція Йоста

$$\chi(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda)e^{i\lambda x} \sim \begin{cases} 1 & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)1 + b(\lambda, t)e^{2i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Функції Йоста: інтегральне рівняння

Функція Йоста

$$\chi(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda) e^{i\lambda x}$$

Диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \Phi(x, \lambda) &\Rightarrow \Phi_{xx} + [\lambda^2 + u(x)] \Phi = 0 \\ \chi(x, \lambda) : \text{Д.З.} &\Rightarrow \chi_{xx} - 2i\lambda\chi_x + u(x)\chi = 0 \end{aligned}$$

Інтегральне рівняння

$$\chi(x, \lambda) \stackrel{\text{Д.З.}}{=} 1 - \int_{-\infty}^x \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)} - 1}{2i\lambda} u(\xi) \chi(\xi, \lambda) d\xi$$

Функції Йоста: інтегральне рівняння

Функція Йоста

$$\chi(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda) e^{i\lambda x}$$

Диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \Phi(x, \lambda) &\Rightarrow \Phi_{xx} + [\lambda^2 + u(x)] \Phi = 0 \\ \chi(x, \lambda) : \text{Д.3.} &\Rightarrow \chi_{xx} - 2i\lambda\chi_x + u(x)\chi = 0 \end{aligned}$$

Інтегральне рівняння

$$\chi(x, \lambda) \stackrel{\text{Д.3.}}{=} 1 - \int_{-\infty}^x \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)} - 1}{2i\lambda} u(\xi) \chi(\xi, \lambda) d\xi$$

Функції Йоста: інтегральне рівняння

Функція Йоста

$$\chi(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda) e^{i\lambda x}$$

Диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \Phi(x, \lambda) &\Rightarrow & \Phi_{xx} + [\lambda^2 + u(x)] \Phi &= 0 \\ \chi(x, \lambda) : \text{Д.3.} &\Rightarrow & \chi_{xx} - 2i\lambda\chi_x + u(x)\chi &= 0 \end{aligned}$$

Інтегральне рівняння

$$\chi(x, \lambda) \stackrel{\text{Д.3.}}{=} 1 - \int_{-\infty}^x \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)} - 1}{2i\lambda} u(\xi) \chi(\xi, \lambda) d\xi$$

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x, \lambda) = 1 - \int_{-\infty}^x \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)} - 1}{2i\lambda} u(\xi) \chi(\xi, \lambda) d\xi$
- $\chi(x, \lambda) \sim a(\lambda, t) 1 + b(\lambda, t) e^{2i\lambda x} \quad x \rightarrow +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda [\chi(x, \lambda) - 1]$

Аналітичні властивості

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x, \lambda) = 1 - \int_{-\infty}^x \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)} - 1}{2i\lambda} u(\xi) \chi(\xi, \lambda) d\xi$
- $\chi(x, \lambda) \sim a(\lambda, t) 1 + b(\lambda, t) e^{2i\lambda x} \quad x \rightarrow +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda [\chi(x, \lambda) - 1]$

Аналітичні властивості

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x, \lambda) = 1 - \int_{-\infty}^x \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)} - 1}{2i\lambda} u(\xi) \chi(\xi, \lambda) d\xi$
- $\chi(x, \lambda) \sim a(\lambda, t) 1 + b(\lambda, t) e^{2i\lambda x} \quad x \rightarrow +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda [\chi(x, \lambda) - 1]$

Аналітичні властивості

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x, \lambda) = 1 - \int_{-\infty}^x \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)} - 1}{2i\lambda} u(\xi) \chi(\xi, \lambda) d\xi$
- $\chi(x, \lambda) \sim a(\lambda, t) + b(\lambda, t)e^{2i\lambda x} \quad x \rightarrow +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda [\chi(x, \lambda) - 1]$

Аналітичні властивості

- $\chi(x, \lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}
- $\chi(x, \lambda) = \overline{\chi(x, \bar{\lambda})}$
- $\chi(x, \lambda) = \chi(x, \lambda + i0)$
- $\chi(x, \lambda) = \chi(x, \lambda - i0)$
- $\chi(x, \lambda) = \chi(x, \lambda + i0)$
- $\chi(x, \lambda) = \chi(x, \lambda - i0)$

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x, \lambda) = 1 - \int_{-\infty}^x \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)} - 1}{2i\lambda} u(\xi) \chi(\xi, \lambda) d\xi$
- $\chi(x, \lambda) \sim a(\lambda, t) 1 + b(\lambda, t) e^{2i\lambda x} \quad x \rightarrow +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda [\chi(x, \lambda) - 1]$

Аналітичні властивості

- $\chi(x, \lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+
- $a(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+ та $a(\lambda) = 1 + O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$
- Нулі $a(\lambda)$ в \mathbb{C}_+ відповідають дискретному спектру оператора $-d^2/dx^2 + u(x, t)$

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x, \lambda) = 1 - \int_{-\infty}^x \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)} - 1}{2i\lambda} u(\xi) \chi(\xi, \lambda) d\xi$
- $\chi(x, \lambda) \sim a(\lambda, t) 1 + b(\lambda, t) e^{2i\lambda x} \quad x \rightarrow +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda [\chi(x, \lambda) - 1]$

Аналітичні властивості

- $\chi(x, \lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+
- $a(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+ та $a(\lambda) = 1 + O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$
- Нулі $a(\lambda)$ в \mathbb{C}_+ відповідають дискретному спектру оператора $-d^2/dx^2 + u(x, t)$

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x, \lambda) = 1 - \int_{-\infty}^x \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)} - 1}{2i\lambda} u(\xi) \chi(\xi, \lambda) d\xi$
- $\chi(x, \lambda) \sim a(\lambda, t) 1 + b(\lambda, t) e^{2i\lambda x} \quad x \rightarrow +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda [\chi(x, \lambda) - 1]$

Аналітичні властивості

- $\chi(x, \lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+
- $a(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+ та $a(\lambda) = 1 + O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$
- Нулі $a(\lambda)$ в \mathbb{C}_+ відповідають дискретному спектру оператора $-d^2/dx^2 + u(x, t)$

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x, \lambda) = 1 - \int_{-\infty}^x \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)} - 1}{2i\lambda} u(\xi) \chi(\xi, \lambda) d\xi$
- $\chi(x, \lambda) \sim a(\lambda, t) 1 + b(\lambda, t) e^{2i\lambda x} \quad x \rightarrow +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda [\chi(x, \lambda) - 1]$

Аналітичні властивості

- $\chi(x, \lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+
- $a(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+ та $a(\lambda) = 1 + O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$
- Нулі $a(\lambda)$ в \mathbb{C}_+ відповідають дискретному спектру оператора $-d^2/dx^2 + u(x, t)$

Канонічні розв'язки

Канонічні розв'язки

Асимптотичний розв'язок: $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$

1 канонічний розв'язок: $\Theta \sim e^{i\lambda x} \quad x \rightarrow +\infty$

2 канонічний розв'язок: $\bar{\Theta} \sim e^{-i\lambda x} \quad x \rightarrow +\infty$

Лінійна залежність

$$\begin{aligned} \Phi(x, \lambda) &= a(\lambda)\bar{\Theta}(x, \lambda) + b(\lambda)\Theta(x, \lambda) \quad \forall x, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} &= \bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) \end{aligned}$$

$r(\lambda) \equiv \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}$ — коефіцієнт відбиття

Канонічні розв'язки

Канонічні розв'язки

$$\text{Асимптотичний розв'язок: } \Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$1 \text{ канонічний розв'язок: } \Theta \sim e^{i\lambda x} \quad x \rightarrow +\infty$$

$$2 \text{ канонічний розв'язок: } \bar{\Theta} \sim e^{-i\lambda x} \quad x \rightarrow +\infty$$

Лінійна залежність

$$\begin{aligned} \Phi(x, \lambda) &= a(\lambda)\bar{\Theta}(x, \lambda) + b(\lambda)\Theta(x, \lambda) \quad \forall x, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} &= \bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) \end{aligned}$$

$$r(\lambda) \equiv \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \text{ — коефіцієнт відбиття}$$

Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко

$$\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} = \bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) \Rightarrow$$

$$\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} = \bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) - e^{-i\lambda x} \Rightarrow$$

$$e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = e^{i\lambda y} [\bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) - e^{-i\lambda x}] \Rightarrow$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} [\bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) - e^{-i\lambda x}]$$

$\Phi(x, \lambda)$, $a(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+

Вважаємо, що $a(\lambda) \neq 0$ на \mathbb{C}_+ Теорема Коші:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = 0$$

Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко

$$\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} = \bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) \Rightarrow$$

$$\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} = \bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) - e^{-i\lambda x} \Rightarrow$$

$$e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = e^{i\lambda y} [\bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) - e^{-i\lambda x}] \Rightarrow$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} [\bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) - e^{-i\lambda x}]$$

$\Phi(x, \lambda)$, $a(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+

Вважаємо, що $a(\lambda) \neq 0$ на \mathbb{C}_+ Теорема Коші:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = 0$$

Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко

$$\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} = \bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) \Rightarrow$$

$$\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} = \bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) - e^{-i\lambda x} \Rightarrow$$

$$e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = e^{i\lambda y} [\bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) - e^{-i\lambda x}] \Rightarrow$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} [\bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) - e^{-i\lambda x}]$$

$\Phi(x, \lambda)$, $a(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+

Вважаємо, що $a(\lambda) \neq 0$ на \mathbb{C}_+ Теорема Коші:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = 0$$

Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко

$$\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} = \bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) \Rightarrow$$

$$\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} = \bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) - e^{-i\lambda x} \Rightarrow$$

$$e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = e^{i\lambda y} [\bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) - e^{-i\lambda x}] \Rightarrow$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} [\bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) - e^{-i\lambda x}]$$

$\Phi(x, \lambda)$, $a(\lambda)$ — аналітична на \mathbb{C}_+

Вважаємо, що $a(\lambda) \neq 0$ на \mathbb{C}_+ Теорема Коші:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = 0$$

Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\bar{\Theta}(x, \lambda) - e^{-i\lambda x} + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) \right] = 0$$

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$\bar{\Theta}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_x^{\infty} K(x, y) e^{-i\lambda y} dy, \quad K(x, y) — \text{невідома функція}$$

Рівняння ГЛМ (Гельфанда–Левітана–Марченко)

$$K(x, y) + R(x + y) + \int_x^{\infty} K(x, \xi) R(\xi + y) d\xi = 0, \quad x < y$$

$$R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) e^{i\lambda z} d\lambda$$

$$u = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda [\chi(x, \lambda) - 1] \stackrel{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} u(x) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x)$$

Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\bar{\Theta}(x, \lambda) - e^{-i\lambda x} + r(\lambda)\Theta(x, \lambda) \right] = 0$$

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$\bar{\Theta}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_x^{\infty} K(x, y) e^{-i\lambda y} dy, \quad K(x, y) — \text{невідома функція}$$

Рівняння ГЛМ (Гельфанда–Левітана–Марченко)

$$K(x, y) + R(x + y) + \int_x^{\infty} K(x, \xi) R(\xi + y) d\xi = 0, \quad x < y$$

$$R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) e^{i\lambda z} d\lambda$$

$$u = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda [\chi(x, \lambda) - 1] \stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} u(x) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x)$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ

- Знаходження пари Лакса L, M
- Пряма задача розсіяння для оператора Шредінгера: $a(\lambda, 0), b(\lambda, 0)$
- Еволюція даних розсіяння: $r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} = r(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ $R(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t)e^{i\lambda z}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x, y, t) + R(x + y, t) + \int_x^{\infty} K(x, \xi, t)R(\xi + y, t)d\xi = 0, \quad x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t).$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ

- Знаходження пари Лакса L, M
- Пряма задача розсіювання для оператора Шредінгера: $a(\lambda, 0), b(\lambda, 0)$
- Еволюція даних розсіювання: $r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} = r(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ $R(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t)e^{i\lambda z}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x, y, t) + R(x + y, t) + \int_x^{\infty} K(x, \xi, t)R(\xi + y, t)d\xi = 0, \quad x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t).$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ

- Знаходження пари Лакса L, M
- Пряма задача розсіювання для оператора Шредінгера: $a(\lambda, 0), b(\lambda, 0)$
- Еволюція даних розсіювання: $r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} = r(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ $R(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t)e^{i\lambda z}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x, y, t) + R(x + y, t) + \int_x^{\infty} K(x, \xi, t)R(\xi + y, t)d\xi = 0, \quad x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t).$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ

- Знаходження пари Лакса L, M
- Пряма задача розсіяння для оператора Шредінгера: $a(\lambda, 0), b(\lambda, 0)$
- Еволюція даних розсіяння: $r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} = r(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ $R(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t)e^{i\lambda z}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x, y, t) + R(x + y, t) + \int_x^{\infty} K(x, \xi, t)R(\xi + y, t)d\xi = 0, \quad x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t).$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ

- Знаходження пари Лакса L, M
- Пряма задача розсіяння для оператора Шредінгера: $a(\lambda, 0), b(\lambda, 0)$
- Еволюція даних розсіяння: $r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} = r(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ $R(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t)e^{i\lambda z}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x, y, t) + R(x + y, t) + \int_x^{\infty} K(x, \xi, t)R(\xi + y, t)d\xi = 0, \quad x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t).$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ

- Знаходження пари Лакса L, M
- Пряма задача розсіювання для оператора Шредінгера: $a(\lambda, 0), b(\lambda, 0)$
- Еволюція даних розсіювання: $r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} = r(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ $R(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t)e^{i\lambda z}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x, y, t) + R(x + y, t) + \int_x^{\infty} K(x, \xi, t)R(\xi + y, t)d\xi = 0, \quad x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t).$$

Дискретний спектр в методі оберненої задачі

- Власні числа уявні: $\lambda_n = i\kappa_n$, $\kappa_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$

- Еволюція b : $b_n(t) = b_n e^{-8\kappa_n^3 t}$, $b_n = \text{const}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ:

$$\text{Неперервний спектр } I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = 0$$

$$\text{Дискретний спектр } I = 2\pi i \sum \operatorname{res}_{\lambda=i\kappa_n} \frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y}$$

$$R(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t) e^{i\lambda z} + \sum_{n=1}^N \frac{b_n e^{-\kappa_n z}}{ia'(i\kappa_n)}$$

- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x, y, t) + R(x+y, t) + \int_x^{\infty} K(x, \xi, t) R(\xi+y, t) d\xi = 0, \quad x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t).$$

Дискретний спектр в методі оберненої задачі

- Власні числа уявні: $\lambda_n = i\kappa_n$, $\kappa_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$

- Еволюція b : $b_n(t) = b_n e^{-8\kappa_n^3 t}$, $b_n = \text{const}$

- Обчислення ядра рівняння ГЛМ:

$$\text{Неперервний спектр } I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = 0$$

$$\text{Дискретний спектр } I = 2\pi i \sum_{\lambda=i\kappa_n} \text{res} \frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y}$$

$$R(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t) e^{i\lambda z} + \sum_{n=1}^N \frac{b_n e^{-\kappa_n z}}{ia'(i\kappa_n)}$$

- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x, y, t) + R(x + y, t) + \int_x^{\infty} K(x, \xi, t) R(\xi + y, t) d\xi = 0, \quad x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t).$$

Дискретний спектр в методі оберненої задачі

- Власні числа уявні: $\lambda_n = i\kappa_n$, $\kappa_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$
- Еволюція b : $b_n(t) = b_n e^{-8\kappa_n^3 t}$, $b_n = \text{const}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ:

Неперервний спектр $I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = 0$

Дискретний спектр $I = 2\pi i \sum \text{res}_{\lambda=i\kappa_n} \frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y}$

$$R(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t) e^{i\lambda z} + \sum_{n=1}^N \frac{b_n e^{-\kappa_n z}}{ia'(i\kappa_n)}$$

- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x, y, t) + R(x + y, t) + \int_x^{\infty} K(x, \xi, t) R(\xi + y, t) d\xi = 0, \quad x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t).$$

Дискретний спектр в методі оберненої задачі

- Власні числа уявні: $\lambda_n = i\kappa_n$, $\kappa_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$
- Еволюція b : $b_n(t) = b_n e^{-8\kappa_n^3 t}$, $b_n = \text{const}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ:

$$\text{Неперервний спектр } I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = 0$$

$$\text{Дискретний спектр } I = 2\pi i \sum_{\lambda=i\kappa_n} \text{res} \frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y}$$

$$R(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t) e^{i\lambda z} + \sum_{n=1}^N \frac{b_n e^{-\kappa_n z}}{ia'(i\kappa_n)}$$

- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x, y, t) + R(x + y, t) + \int_x^{\infty} K(x, \xi, t) R(\xi + y, t) d\xi = 0, \quad x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t).$$

Дискретний спектр в методі оберненої задачі

- Власні числа уявні: $\lambda_n = i\kappa_n$, $\kappa_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$
- Еволюція b : $b_n(t) = b_n e^{-8\kappa_n^3 t}$, $b_n = \text{const}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ:

$$\text{Неперервний спектр } I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = 0$$

$$\text{Дискретний спектр } I = 2\pi i \sum_{\lambda=i\kappa_n} \text{res} \frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y}$$

$$R(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t) e^{i\lambda z} + \sum_{n=1}^N \frac{b_n e^{-\kappa_n z}}{ia'(i\kappa_n)}$$

- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x, y, t) + R(x + y, t) + \int_x^{\infty} K(x, \xi, t) R(\xi + y, t) d\xi = 0, \quad x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t).$$

Розв'язок рівняння ГЛМ для безвідбивального випадку

Безвідбивальний випадок

$$b(\lambda) \equiv 0 \Rightarrow r(\lambda) \equiv 0 \quad R(z, t) = \sum_{n=1}^N \frac{b_n e^{-\kappa_n z}}{i a'(i \kappa_n)} = \sum_{n=1}^N \beta_n e^{-\kappa_n z}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{i a'(i \kappa_n)}$$

Розв'язування

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^N K_n(x) e^{-\kappa_n y}$$

$$e^{-\kappa_n y} : K_n(z) + \sum_{m=1}^N K_m(x) \frac{\beta_m e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x}}{\kappa_n + \kappa_m} = -\beta_n e^{-\kappa_n x}$$

Матричний вигляд: $A(x) \begin{pmatrix} K_1(x) \\ K_2(x) \\ \dots \\ K_N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 e^{-\kappa_1 x} \\ -\beta_2 e^{-\kappa_2 x} \\ \dots \\ -\beta_N e^{-\kappa_N x} \end{pmatrix}$

Розв'язок рівняння ГЛМ для безвідбивального випадку

Безвідбивальний випадок

$$b(\lambda) \equiv 0 \Rightarrow r(\lambda) \equiv 0 \quad R(z, t) = \sum_{n=1}^N \frac{b_n e^{-\kappa_n z}}{i a'(i \kappa_n)} = \sum_{n=1}^N \beta_n e^{-\kappa_n z}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{i a'(i \kappa_n)}$$

Розв'язування

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^N K_n(x) e^{-\kappa_n y}$$

$$e^{-\kappa_n y} : K_n(z) + \sum_{m=1}^N K_m(x) \frac{\beta_m e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x}}{\kappa_n + \kappa_m} = -\beta_n e^{-\kappa_n x}$$

Матричний вигляд: $A(x) \begin{pmatrix} K_1(x) \\ K_2(x) \\ \dots \\ K_N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 e^{-\kappa_1 x} \\ -\beta_2 e^{-\kappa_2 x} \\ \dots \\ -\beta_N e^{-\kappa_N x} \end{pmatrix}$

Розв'язок рівняння ГЛМ для безвідбивального випадку

Безвідбивальний випадок

$$\text{Матричний вигляд: } A(x) \begin{pmatrix} K_1(x) \\ K_2(x) \\ \dots \\ K_N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 e^{-\kappa_1 x} \\ -\beta_2 e^{-\kappa_2 x} \\ \dots \\ -\beta_N e^{-\kappa_N x} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\beta_i e^{-x(\kappa_i + \kappa_j)}}{\kappa_i + \kappa_j}$$

$$u(x) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det A(x)$$

Залежність від часу

$$\beta_n = \frac{b_n}{ia'(i\kappa_n)} \Rightarrow \beta_n(t) = \beta_n e^{-8\kappa_n^3 t}$$

Розв'язок рівняння ГЛМ для безвідбивального випадку

Безвідбивальний випадок

Матричний вигляд:
$$A(x) \begin{pmatrix} K_1(x) \\ K_2(x) \\ \dots \\ K_N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 e^{-\kappa_1 x} \\ -\beta_2 e^{-\kappa_2 x} \\ \dots \\ -\beta_N e^{-\kappa_N x} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\beta_i e^{-x(\kappa_i + \kappa_j)}}{\kappa_i + \kappa_j}$$

$$u(x) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det A(x)$$

Залежність від часу

$$\beta_n = \frac{b_n}{ia'(i\kappa_n)} \Rightarrow \beta_n(t) = \beta_n e^{-8\kappa_n^3 t}$$

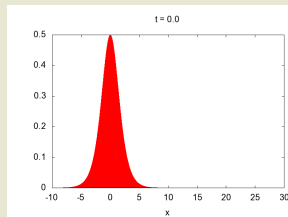
Приклад: $N = 1$

$$N = 1$$

$$A = 1 + \frac{\beta e^{2\kappa x - 8\kappa^3 t}}{2\kappa}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = -\frac{2\kappa^2}{\text{ch}^2(\kappa(x - 4\kappa^2 t - \delta))}$$

$$\delta = \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{\beta}{2\kappa}.$$



Демонстрація

Інтегровані механічні системи

Звичайне диференціальне рівняння

Умова інтегрованості рівняння N -го порядку: N перших інтегралів.

Гамільтонова система

Гамільтоніан $H(\vec{p}, \vec{q}, t)$: $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $i = \overline{1, n}$ ($2n$ ступенів вільності).

Необхідно знати лише n інтегралів руху в інволюції (теорема Ліувілля-Арнольда):

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} + \{I_i, H\} = 0, \quad \{F_i, F_k\} = 0, \quad I_i(\vec{p}, \vec{q}, t) = \text{const}.$$

Інтегрованість гамільтонової систем

Змінні дія-кут $(\vec{J}, \vec{\alpha})$: $\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H}{\partial J_i}$, $\dot{J}_i = 0$, $i = \overline{1, n}$

Інтегровані механічні системи

Звичайне диференціальне рівняння

Умова інтегрованості рівняння N -го порядку: N перших інтегралів.

Гамільтонова система

Гамільтоніан $H(\vec{p}, \vec{q}, t)$: $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $i = \overline{1, n}$ ($2n$ ступенів вільності).

Необхідно знати лише n інтегралів руху в інволюції (теорема Ліувілля-Арнольда):

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} + \{I_i, H\} = 0, \quad \{I_i, I_k\} = 0, \quad I_i(\vec{p}, \vec{q}, t) = \text{const.}$$

Інтегрованість гамільтонової систем

Змінні дія-кут $(\vec{J}, \vec{\alpha})$: $\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H}{\partial J_i}$, $\dot{J}_i = 0$, $i = \overline{1, n}$

$\vec{J} = \text{const.}$, $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_0 + \vec{\omega}t$

Інтегровані механічні системи

Звичайне диференціальне рівняння

Умова інтегрованості рівняння N -го порядку: N перших інтегралів.

Гамільтонова система

Гамільтоніан $H(\vec{p}, \vec{q}, t)$: $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $i = \overline{1, n}$ ($2n$ ступенів вільності).

Необхідно знати лише n інтегралів руху в інволюції (теорема Ліувілля-Арнольда):

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} + \{I_i, H\} = 0, \quad \{I_i, I_k\} = 0, \quad I_i(\vec{p}, \vec{q}, t) = \text{const}.$$

Інтегрованість гамільтонової систем

Змінні дія-кут $(\vec{J}, \vec{\alpha})$: $\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H}{\partial J_i}$, $\dot{J}_i = 0$, $i = \overline{1, n}$

$\vec{J} = \text{const}$, $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_0 + \vec{\omega}t$

Інтегровані механічні системи

Звичайне диференціальне рівняння

Умова інтегрованості рівняння N -го порядку: N перших інтегралів.

Гамільтонова система

Гамільтоніан $H(\vec{p}, \vec{q}, t)$: $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $i = \overline{1, n}$ ($2n$ ступенів вільності).

Необхідно знати лише n інтегралів руху в інволюції (теорема Ліувілля-Арнольда):

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} + \{I_i, H\} = 0, \quad \{F_i, F_k\} = 0, \quad I_i(\vec{p}, \vec{q}, t) = \text{const}.$$

Інтегрованість гамільтонової систем

Змінні дія-кут $(\vec{J}, \vec{\alpha})$: $\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H}{\partial J_i}$, $\dot{J}_i = 0$, $i = \overline{1, n}$

$\vec{J} = \text{const}$, $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_0 + \vec{\omega}t$

Приклад інтегрованої механічної системи

Система двох осциляторів

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2}{2}, \quad \dot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = -\omega_i^2 q_i, \quad i = 1, 2.$$

Канонічне перетворення: дія-кут

$$p_i = \sqrt{2\omega_i J_i} \cos \alpha, \quad q_i = -\sqrt{2J_i/\omega_i} \sin \alpha, \quad i = 1, 2$$

Розв'язок

$$H' = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2,$$

$$J_1 = J_1^{(0)}, \quad J_2 = J_2^{(0)},$$

$$\alpha_1 = \omega_1 t + \alpha_1^{(0)}, \quad \alpha_2 = \omega_2 t + \alpha_2^{(0)}$$

Приклад інтегрованої механічної системи

Система двох осциляторів

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2}{2}, \quad \dot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = -\omega_i^2 q_i, \quad i = 1, 2.$$

Канонічне перетворення: дія-кут

$$p_i = \sqrt{2\omega_i J_i} \cos \alpha, \quad q_i = -\sqrt{2J_i/\omega_i} \sin \alpha, \quad i = 1, 2$$

Розв'язок

$$H' = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2,$$

$$J_1 = J_1^{(0)}, \quad J_2 = J_2^{(0)},$$

$$\alpha_1 = \omega_1 t + \alpha_1^{(0)}, \quad \alpha_2 = \omega_2 t + \alpha_2^{(0)}$$

Приклад інтегрованої механічної системи

Система двох осциляторів

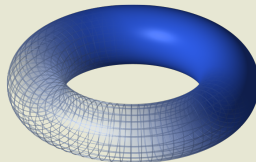
$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2}{2}, \quad \dot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = -\omega_i^2 q_i, \quad i = 1, 2.$$

Канонічне перетворення: дія-кут

$$p_i = \sqrt{2\omega_i J_i} \cos \alpha, \quad q_i = -\sqrt{2J_i/\omega_i} \sin \alpha, \quad i = 1, 2$$

Розв'язок

$$\begin{aligned} H' &= \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2, \\ J_1 &= J_1^{(0)}, \quad J_2 = J_2^{(0)}, \\ \alpha_1 &= \omega_1 t + \alpha_1^{(0)}, \quad \alpha_2 = \omega_2 t + \alpha_2^{(0)} \end{aligned}$$



Рівняння КдВ як гамільтонова система

Рівняння КдВ

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

Гамільтонів вигляд для КдВ

Гамільтоніан $H = \int_{-\infty}^{\infty} h(q) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} q^2 - q^3 \right) dx$

Гамільтонові рівняння $\frac{dq}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta q} = -q^2 + q_x$

Гамільтонові рівняння $\frac{dx}{dt} = \frac{\delta H}{\delta p} = 0$

Рівняння КдВ як гамільтонова система

Рівняння КдВ

$$q_t + 6qqq_x + q_{xxx} = 0$$

Гамільтонів вигляд для КдВ

- Гамільтоніан $H = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{q_x^2}{2} - q^3 \right) dx$
- Варіаційна похідна $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_x} = -3q^2 - q_{xx}$
- Гамільтонова форма рівнянь КдВ:

$$q_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q}$$

Рівняння КдВ як гамільтонова система

Рівняння КдВ

$$q_t + 6qqq_x + q_{xxx} = 0$$

Гамільтонів вигляд для КдВ

- Гамільтоніан $H = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{q_x^2}{2} - q^3 \right) dx$
- Варіаційна похідна $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_x} = -3q^2 - q_{xx}$
- Гамільтонова форма рівнянь КдВ:

$$q_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q}$$

Рівняння КдВ як гамільтонова система

Рівняння КдВ

$$q_t + 6qqq_x + q_{xxx} = 0$$

Гамільтонів вигляд для КдВ

- Гамільтоніан $H = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{q_x^2}{2} - q^3 \right) dx$
- Варіаційна похідна $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_x} = -3q^2 - q_{xx}$
- Гамільтонова форма рівнянь КдВ:

$$q_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q}$$

Рівняння КдВ як гамільтонова система

Рівняння КдВ

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

Гамільтонів вигляд для КдВ

- Гамільтоніан $H = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{q_x^2}{2} - q^3 \right) dx$
- Варіаційна похідна $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_x} = -3q^2 - q_{xx}$
- Гамільтонова форма рівнянь КдВ:

$$q_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q}$$

Інтеграли руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтегрує КдВ: $\Phi_{xx} + [\lambda^2 + u(x, t)] \Phi = 0$
- Данні розсіювання $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$

Рівняння Рікатті

Інтеграли руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтегрує КдВ: $\Phi_{xx} + [\lambda^2 + u(x, t)] \Phi = 0$
- Данні розсіювання $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$

Рівняння Рікатті

Інтеграли руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтегрує КдВ: $\Phi_{xx} + [\lambda^2 + u(x, t)] \Phi = 0$
- Данні розсіяння $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$

Рівняння Рікатті

Інтеграл руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтегрує КдВ: $\Phi_{xx} + [\lambda^2 + u(x, t)] \Phi = 0$
- Данні розсіяння $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$

Інтеграли руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтегрує КдВ: $\Phi_{xx} + [\lambda^2 + u(x, t)] \Phi = 0$
- Данні розсіяння $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$

Рівняння Рікатті

- Розв'язок $\Phi = e^{-i\lambda x} \exp \int_{-\infty}^x \chi(\lambda, t, \xi) d\xi \Rightarrow a(\lambda) = \exp \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, t, \xi) d\xi$
- Рівняння для χ : $\text{Д.3.} \Rightarrow \chi_x - 2i\lambda\chi + \chi^2 + u = 0$
- $\chi(\lambda, t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x, t)}{(2i\lambda)^2} = \frac{\chi_1}{2i\lambda} + \frac{\chi_2}{(2i\lambda)^2} + \dots$

Інтеграли руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтегрує КдВ: $\Phi_{xx} + [\lambda^2 + u(x, t)] \Phi = 0$
- Данні розсіяння $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$

Рівняння Рікатті

- Розв'язок $\Phi = e^{-i\lambda x} \exp \int_{-\infty}^x \chi(\lambda, t, \xi) d\xi \Rightarrow a(\lambda) = \exp \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, t, \xi) d\xi$
- Рівняння для χ : $\stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} \chi_x - 2i\lambda\chi + \chi^2 + u = 0$
- $\chi(\lambda, t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x, t)}{(2i\lambda)^2} = \frac{\chi_1}{2i\lambda} + \frac{\chi_2}{(2i\lambda)^2} + \dots$

Інтеграли руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтегрує КдВ: $\Phi_{xx} + [\lambda^2 + u(x, t)] \Phi = 0$
- Данні розсіяння $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$

Рівняння Рікатті

- Розв'язок $\Phi = e^{-i\lambda x} \exp \int_{-\infty}^x \chi(\lambda, t, \xi) d\xi \Rightarrow a(\lambda) = \exp \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, t, \xi) d\xi$
- Рівняння для χ : $\stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} \chi_x - 2i\lambda\chi + \chi^2 + u = 0$
- $\chi(\lambda, t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x, t)}{(2i\lambda)^2} = \frac{\chi_1}{2i\lambda} + \frac{\chi_2}{(2i\lambda)^2} + \dots$

Закони збереження для КдВ

Інтеграли руху

- $a(\lambda) = \exp \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, t, \xi) d\xi, \quad \chi(\lambda, t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x, t)}{(2i\lambda)^2}$
- $\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt} \ln a(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2i\lambda)^n} \left(\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) d\xi \right)$
- $\Rightarrow \quad I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) d\xi = \text{const}$

Для знаходження інтегралів руху потрібно знайти $\chi_n(\xi, t)$

Закони збереження для КдВ

Інтеграли руху

- $a(\lambda) = \exp \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, t, \xi) d\xi, \quad \chi(\lambda, t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x, t)}{(2i\lambda)^2}$

- $\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt} \ln a(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2i\lambda)^n} \left(\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) d\xi \right)$

- $\Rightarrow \quad I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) d\xi = \text{const}$

Для знаходження інтегралів руху потрібно знайти $\chi_n(\xi, t)$

Закони збереження для КдВ

Інтеграли руху

- $a(\lambda) = \exp \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, t, \xi) d\xi, \quad \chi(\lambda, t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x, t)}{(2i\lambda)^2}$
- $\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt} \ln a(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2i\lambda)^n} \left(\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) d\xi \right)$
- $\Rightarrow \quad I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) d\xi = \text{const}$

Для знаходження інтегралів руху потрібно знайти $\chi_n(\xi, t)$

Закони збереження для КдВ

Інтеграли руху

- $a(\lambda) = \exp \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, t, \xi) d\xi, \quad \chi(\lambda, t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x, t)}{(2i\lambda)^2}$
- $\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt} \ln a(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2i\lambda)^n} \left(\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) d\xi \right)$
- $\Rightarrow \quad I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) d\xi = \text{const}$

Для знаходження інтегралів руху потрібно знайти $\chi_n(\xi, t)$

Функції $\chi_n(x, t)$

Рівняння Рікатті:

$$\chi_x - 2i\lambda\chi + \chi^2 + u = 0, \quad \chi(\lambda, t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x, t)}{(2i\lambda)^2}$$

Розв'язок рівняння Рікатті:

$$(2i\lambda)^0 : -\chi_1 + u = 0$$

$$(2i\lambda)^{-1} : \chi_{1x} - \chi_2 = 0$$

$$(2i\lambda)^{-2} : \chi_{2x} - \chi_3 + \chi_1^2 = 0$$

...

$$(2i\lambda)^{-k} : \chi_{kx} - \chi_{k+1} + \sum_{i+j=k+1} \chi_i \chi_j = 0$$

...

Закони збереження

Функції $\chi_n(x, t)$

$$\chi_1 = u$$

$$\chi_2 = u_x$$

$$\chi_4 = -u_{xxx} + 2(u^2)_x$$

$$\chi_5 = -u_{xxx} + (u^2)_{xx} + u_x^2 + 2u_{xx}u - 2u^3$$

Закони збереження

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx \quad \text{— закон збереження маси}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u_x dx = 0$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (u_{xx} + u^2) dx \quad \text{— закон збереження імпульсу}$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_4 dx = 0$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_5 dx \quad \text{— закон збереження енергії}$$

Закони збереження

Функції $\chi_n(x, t)$

$$\chi_1 = u$$

$$\chi_2 = u_x$$

$$\chi_4 = -u_{xxx} + 2(u^2)_x$$

$$\chi_5 = -u_{xxx} + (u^2)_{xx} + u_x^2 + 2u_{xx}u - 2u^3$$

Закони збереження

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx \quad \text{— закон збереження маси}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u_x dx = 0$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (u_{xx} + u^2) dx \quad \text{— закон збереження імпульсу}$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_4 dx = 0$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_5 dx \quad \text{— закон збереження енергії}$$