

Лекція № 3

Тема лекції:

Обернена задача розсіювання і суперсиметрична
квантова механіка

План лекції

- 1 Перетворення Беклунда для ґратки Тоди
- 2 Схема методу оберненої задачі теорії розсіяння
 - Перетворення Фур'є
 - Перетворення розсіяння та представлення Лакса
- 3 Суперсиметрична квантова механіка
 - Метод факторизації і перетворення Дарбу
 - Перетворення Беклунда
 - Оператори знищення та народження
 - Приклад: потенціал солітонного типу

План лекції

- 1 Перетворення Беклунда для ґратки Тоди
- 2 Схема методу оберненої задачі теорії розсіювання
 - Перетворення Фур'є
 - Перетворення розсіювання та представлення Лакса
- 3 Суперсиметрична квантова механіка
 - Метод факторизації і перетворення Дарбу
 - Перетворення Беклунда
 - Оператори знищення та народження
 - Приклад: потенціал солітонного типу

План лекції

- 1 Перетворення Беклунда для ґратки Тоди
- 2 Схема методу оберненої задачі теорії розсіювання
 - Перетворення Фур'є
 - Перетворення розсіювання та представлення Лакса
- 3 Суперсиметрична квантова механіка
 - Метод факторизації і перетворення Дарбу
 - Перетворення Беклунда
 - Оператори знищення та народження
 - Приклад: потенціал солітонного типу

Ґратка Тоди

Ґратка (ланцюг) Тоди

Одновимірна ґратка з потенціалом взаємодії (M. Toda, 1970):

$$U(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q}_n = e^{Q_n - Q_{n-1}} - e^{Q_n - Q_{n+1}}$$



Перетворення Беклунда для ґратки Тоди

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \quad \alpha = \text{const}$$

Нехай Q_n — розв'язок рівняння Тоди. Рівняння для q_n :

$$\ddot{q} = \left(\dot{Q}_n - \dot{q}_n \right) e^{Q_n - q_n} + \left(\dot{q}_n - \dot{Q}_{n+1} \right) e^{q_n - Q_{n+1}} = e^{q_n - q_{n-1}} - e^{q_n - q_{n+1}}$$

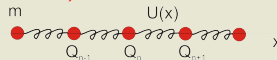
Отже q_n — також розв'язок рівняння Тоди.

Ґратка Тоди

Ґратка (ланцюг) Тоди

Одновимірна ґратка з потенціалом взаємодії (M. Toda, 1970):

$$U(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q}_n = e^{Q_n - Q_{n-1}} - e^{Q_n - Q_{n+1}}$$



Перетворення Беклунда для ґратки Тоди

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \quad \alpha = \text{const}$$

Нехай Q_n — розв'язок рівняння Тоди. Рівняння для q_n :

$$\ddot{q} = \left(\dot{Q}_n - \dot{q}_n \right) e^{Q_n - q_n} + \left(\dot{q}_n - \dot{Q}_{n+1} \right) e^{q_n - Q_{n+1}} = e^{q_n - q_{n-1}} - e^{q_n - q_{n+1}}$$

Отже q_n — також розв'язок рівняння Тоди.

Ґратка Тоди

Ґратка (ланцюг) Тоди

Одновимірна ґратка з потенціалом взаємодії (M. Toda, 1970):

$$U(x) = e^{-x} \Rightarrow \ddot{Q}_n = e^{Q_n - Q_{n-1}} - e^{Q_n - Q_{n+1}}$$



Перетворення Беклунда для ґратки Тоди

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \quad \alpha = \text{const}$$

Нехай Q_n — розв'язок рівняння Тоди. Рівняння для q_n :

$$\ddot{q} = (\dot{Q}_n - \dot{q}_n) e^{Q_n - q_n} + (\dot{q}_n - \dot{Q}_{n+1}) e^{q_n - Q_{n+1}} = e^{q_n - q_{n-1}} - e^{q_n - q_{n+1}}$$

Отже q_n — також розв'язок рівняння Тоди.

ґратка Тоди: солітонний розв'язок

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \quad \alpha = \text{const}$$

Застосуємо перетворення Беклунда для нульового розв'язку: $Q_n = 0, \dot{Q}_n = 0 \forall n$:

$$\begin{cases} e^{-q_n} + e^{q_{n-1}} - \alpha = 0 \\ \dot{q}_n = e^{-q_n} + e^{q_n} - \alpha \end{cases} \xRightarrow{\text{Д.З.}} \frac{d}{dt} e^{q_n} = e^{2q_n} - \alpha e^{q_n} + 1$$

Заміна $u = e^{q_n}$: $\dot{u} = u^2 - \alpha u + 1$

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{u^2 - \alpha u + 1} \xRightarrow{\text{Д.З.}} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{u - \alpha/2}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} \Big|_{u_0}^u = t - t_n$$

Солітонний розв'язок при $\alpha \geq 2$. Параметризація: $\alpha = 2 \operatorname{ch} \kappa, \beta = -\operatorname{sh} \kappa$

$$\begin{cases} e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n + \kappa)}{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n)} \\ \beta t_n \xRightarrow{\text{Д.З.}} \kappa(n+1) \end{cases} \Rightarrow e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \kappa n)}{\operatorname{ch}(\beta t - \kappa(n+1))}, \quad \beta = -\operatorname{sh} \kappa$$

Ґратка Тоди: солітонний розв'язок

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \quad \alpha = \text{const}$$

Застосуємо перетворення Беклунда для нульового розв'язку: $Q_n = 0, \dot{Q}_n = 0 \forall n$:

$$\begin{cases} e^{-q_n} + e^{q_{n-1}} - \alpha = 0 \\ \dot{q}_n = e^{-q_n} + e^{q_n} - \alpha \end{cases} \xRightarrow{\text{Д.3.}} \frac{d}{dt} e^{q_n} = e^{2q_n} - \alpha e^{q_n} + 1$$

Заміна $u = e^{q_n}$: $\dot{u} = u^2 - \alpha u + 1$

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{u^2 - \alpha u + 1} \stackrel{\text{Д.3.}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{u - \alpha/2}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} \Big|_{u_0}^u = t - t_n$$

Солітонний розв'язок при $\alpha \geq 2$. Параметризація: $\alpha = 2 \operatorname{ch} \varkappa, \beta = -\operatorname{sh} \varkappa$

$$\begin{cases} e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n + \varkappa)}{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n)} \\ \beta t_n \stackrel{\text{Д.3.}}{=} \varkappa(n+1) \end{cases} \Rightarrow e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \varkappa n)}{\operatorname{ch}(\beta t - \varkappa(n+1))}, \quad \beta = -\operatorname{sh} \varkappa$$

Ґратка Тоди: солітонний розв'язок

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \quad \alpha = \text{const}$$

Застосуємо перетворення Беклунда для нульового розв'язку: $Q_n = 0, \dot{Q}_n = 0 \forall n$:

$$\begin{cases} e^{-q_n} + e^{q_{n-1}} - \alpha = 0 \\ \dot{q}_n = e^{-q_n} + e^{q_n} - \alpha \end{cases} \xRightarrow{\text{Д.3.}} \frac{d}{dt} e^{q_n} = e^{2q_n} - \alpha e^{q_n} + 1$$

Заміна $u = e^{q_n}$: $\dot{u} = u^2 - \alpha u + 1$

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{u^2 - \alpha u + 1} \stackrel{\text{Д.3.}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{u - \alpha/2}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} \Big|_{u_0}^u = t - t_n$$

Солітонний розв'язок при $\alpha \geq 2$. Параметризація: $\alpha = 2 \operatorname{ch} \kappa, \beta = -\operatorname{sh} \kappa$

$$\begin{cases} e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n + \kappa)}{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n)} \\ \beta t_n \stackrel{\text{Д.3.}}{=} \kappa(n+1) \end{cases} \Rightarrow e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \kappa n)}{\operatorname{ch}(\beta t - \kappa(n+1))}, \quad \beta = -\operatorname{sh} \kappa$$

Перетворення Фур'є

Лінеаризоване рівняння КдВ

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Обернене перетворення Фур'є
 \mathcal{F}^{-1}

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda) d\lambda$$

Просторове перетворення Фур'є \mathcal{F}

$$\tilde{u}(\lambda, t) \equiv \mathcal{F}_x[u] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, t) dx$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \tilde{u}(\lambda, t) d\lambda$$

$$\mathcal{F}_x[u_x] = -i\lambda \tilde{u}, \quad \mathcal{F}_x[u_{xxx}] = (-i\lambda)^3 \tilde{u}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\tilde{u}_t - i\lambda^3 \tilde{u} = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\lambda, t) = C(\lambda) e^{-i\lambda^3 t}$$

$$C(\lambda) = \tilde{u}(\lambda, 0) = \mathcal{F}_x[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, 0) dx$$

Перетворення Фур'є

Лінеаризоване рівняння КдВ

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Обернене перетворення Фур'є \mathcal{F}^{-1}

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda) d\lambda$$

Просторове перетворення Фур'є \mathcal{F}

$$\tilde{u}(\lambda, t) \equiv \mathcal{F}_x[u] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, t) dx$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \tilde{u}(\lambda, t) d\lambda$$

$$\mathcal{F}_x[u_x] = -i\lambda \tilde{u}, \quad \mathcal{F}_x[u_{xxx}] = (-i\lambda)^3 \tilde{u}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\tilde{u}_t - i\lambda^3 \tilde{u} = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\lambda, t) = C(\lambda) e^{-i\lambda^3 t}$$

$$C(\lambda) = \tilde{u}(\lambda, 0) = \mathcal{F}_x[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, 0) dx$$

Перетворення Фур'є

Лінеаризоване рівняння КдВ

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Обернене перетворення Фур'є \mathcal{F}^{-1}

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda) d\lambda$$

Просторове перетворення Фур'є \mathcal{F}

$$\tilde{u}(\lambda, t) \equiv \mathcal{F}_x[u] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, t) dx$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \tilde{u}(\lambda, t) d\lambda$$

$$\mathcal{F}_x[u_x] = -i\lambda \tilde{u}, \quad \mathcal{F}_x[u_{xxx}] = (-i\lambda)^3 \tilde{u}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\tilde{u}_t - i\lambda^3 \tilde{u} = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\lambda, t) = C(\lambda) e^{-i\lambda^3 t}$$

$$C(\lambda) = \tilde{u}(\lambda, 0) = \mathcal{F}_x[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, 0) dx$$

Перетворення Фур'є

Лінеаризоване рівняння КдВ

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Обернене перетворення Фур'є \mathcal{F}^{-1}

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda) d\lambda$$

Просторове перетворення Фур'є \mathcal{F}

$$\tilde{u}(\lambda, t) \equiv \mathcal{F}_x[u] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, t) dx$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \tilde{u}(\lambda, t) d\lambda$$

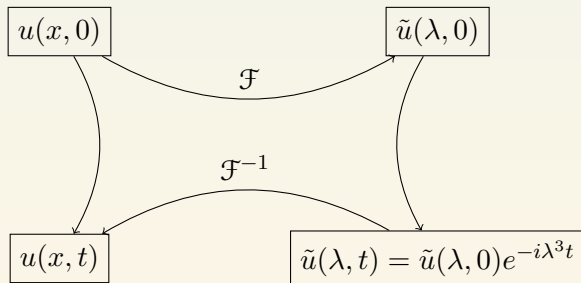
$$\mathcal{F}_x[u_x] = -i\lambda \tilde{u}, \quad \mathcal{F}_x[u_{xxx}] = (-i\lambda)^3 \tilde{u}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\tilde{u}_t - i\lambda^3 \tilde{u} = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\lambda, t) = C(\lambda) e^{-i\lambda^3 t}$$

$$C(\lambda) = \tilde{u}(\lambda, 0) = \mathcal{F}_x[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, 0) dx$$

Перетворення Фур'є: діаграма



Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{S}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t).$$

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ —
рівняння Шредінґера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{S}^{-1}

$$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow \text{«потенціал» } u(x, t)$$

Дані розсіювання

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{S}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t).$$

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ —
рівняння Шредінгера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{S}^{-1}

$$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow \text{«потенціал» } u(x, t)$$

Дані розсіювання

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{S}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t).$$

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ —
рівняння Шредінґера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{S}^{-1}

$$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow \text{«потенціал» } u(x, t)$$

Дані розсіювання

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Перетворення розсіювання

Перетворення розсіювання \mathcal{S}

Нехай $u(x, t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t).$$

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ —
рівняння Шредінґера

Обернене перетворення розсіювання \mathcal{S}^{-1}

$$a(\lambda, t), b(\lambda, t) \Rightarrow \text{«потенціал» } u(x, t)$$

Дані розсіювання

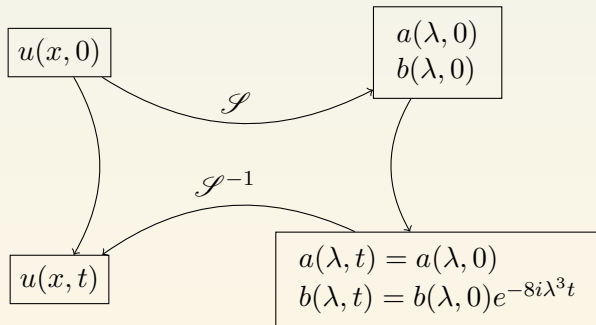
$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Обернене перетворення розсіювання: діаграма



Метод факторизації і перетворення Дарбу

Рівняння Шредінґера

$$H\psi = E\psi, \quad H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

Перетворення Дарбу

Факторизація Гамільтоніану: $H = A^\dagger A + E_0$:

$$A = -\frac{d}{dx} + W(x), \quad A^\dagger = \frac{d}{dx} + W(x)$$

Перетворення: $\tilde{\psi} = A\psi$

$$\begin{aligned} A^\dagger A\psi + E_0\psi = E\psi &\stackrel{A}{\Rightarrow} A A^\dagger \tilde{\psi} + E_0\tilde{\psi} = E\tilde{\psi} \\ \Rightarrow \tilde{H}\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}, \quad \tilde{H} &= A A^\dagger + E_0 \end{aligned}$$

Метод факторизації і перетворення Дарбу

Рівняння Шредінґера

$$H\psi = E\psi, \quad H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

Перетворення Дарбу

Факторизація Гамільтоніану: $H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0$:

$$\mathcal{A} = -\frac{d}{dx} + W(x), \quad \mathcal{A}^\dagger = \frac{d}{dx} + W(x)$$

Перетворення: $\tilde{\psi} = \mathcal{A}\psi$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}\psi + E_0\psi &= E\psi \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger \tilde{\psi} + E_0\tilde{\psi} = E\tilde{\psi} \\ \Rightarrow \tilde{H}\tilde{\psi} &= E\tilde{\psi}, \quad \tilde{H} = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger + E_0 \end{aligned}$$

Перетворення Беклунда

Зв'язок між V та \tilde{V}

$$\begin{cases} W^2 + W' + E_0 = V \\ W^2 - W' + E_0 = \tilde{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V - \tilde{V} = 2W' \\ V + \tilde{V} = 2(E_0 + W^2) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} V = 2\phi' \\ \tilde{V} = 2\tilde{\phi}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi - \tilde{\phi} = W \\ \phi' + \tilde{\phi}' = E_0 + W^2 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$\phi' + \tilde{\phi}' = E_0 + (\phi - \tilde{\phi})^2$$

Перетворення Беклунда

Зв'язок між V та \tilde{V}

$$\begin{cases} W^2 + W' + E_0 = V \\ W^2 - W' + E_0 = \tilde{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V - \tilde{V} = 2W' \\ V + \tilde{V} = 2(E_0 + W^2) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} V = 2\phi' \\ \tilde{V} = 2\tilde{\phi}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi - \tilde{\phi} = W \\ \phi' + \tilde{\phi}' = E_0 + W^2 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$\phi' + \tilde{\phi}' = E_0 + (\phi - \tilde{\phi})^2$$

Суперпотенціал, оператори знищення та народження

Факторизація

Факторизація: $H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0$

Нехай ψ_0 — власна функція: $H\psi_0 = E_0\psi_0$

Зв'язок між \mathcal{A} та ψ_0 : $\mathcal{A}\psi_0 = 0$

Доведення:

$$H\psi_0 = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}\psi_0 + E_0\psi_0 = E_0\psi_0$$

\mathcal{A} — оператор знищення

\mathcal{A}^\dagger — оператор народження

Суперпотенціал

Визначимо $W(x)$:

$$\mathcal{A}\psi_0 = \left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right)\psi_0 = 0 \Rightarrow W(x) = \frac{d}{dx} \ln \psi_0$$

Суперпотенціал, оператори знищення та народження

Факторизація

Факторизація: $H = A^\dagger A + E_0$

Нехай ψ_0 — власна функція: $H\psi_0 = E_0\psi_0$

Зв'язок між A та ψ_0 : $A\psi_0 = 0$

Доведення:

$$H\psi_0 = A^\dagger A\psi_0 + E_0\psi_0 = E_0\psi_0$$

A — оператор знищення

A^\dagger — оператор народження

Суперпотенціал

Визначимо $W(x)$:

$$A\psi_0 = \left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right)\psi_0 = 0 \Rightarrow W(x) = \frac{d}{dx} \ln \psi_0$$

Суперпотенціал, оператори знищення та народження

Факторизація

Факторизація: $H = A^\dagger A + E_0$

Нехай ψ_0 — власна функція: $H\psi_0 = E_0\psi_0$

Зв'язок між A та ψ_0 : $A\psi_0 = 0$

Доведення:

$$H\psi_0 = A^\dagger A\psi_0 + E_0\psi_0 = E_0\psi_0$$

A — оператор знищення

A^\dagger — оператор народження

Суперпотенціал

Визначимо $W(x)$:

$$A\psi_0 = \left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right)\psi_0 = 0 \Rightarrow W(x) = \frac{d}{dx} \ln \psi_0$$

Біографія суперсиметричної квантової механіки

- (1882) Перетворення Дарбу
- (1940) Ідеї методу факторизації (Шредінґер)
- (1951) Теорія методу факторизації (Інфельд і Халл)
- (1981) Суперсиметрична квантова механіка (Віттен)

Основна властивість перетворення Дарбу

$$H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{H} = \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger + E_0$$

Перетворення або знищує рівень основного стану (оператор \mathcal{A}), або породжує новий рівень (оператор \mathcal{A}^\dagger). При цьому решта рівнів не зсувається.

Біографія суперсиметричної квантової механіки

- (1882) Перетворення Дарбу
- (1940) Ідеї методу факторизації (Шредінґер)
- (1951) Теорія методу факторизації (Інфельд і Халл)
- (1981) Суперсиметрична квантова механіка (Віттен)

Основна властивість перетворення Дарбу

$$H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{H} = \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger + E_0$$

Перетворення або знищує рівень основного стану (оператор \mathcal{A}), або породжує новий рівень (оператор \mathcal{A}^\dagger). При цьому решта рівнів не зсувається.

Чому суперсиметрія?

Спектри гамільтоніанів H та \tilde{H} співпадають, тому комбінований гамільтоніан $\mathcal{H} = H \oplus \tilde{H}$ вироджений, тобто має певну симетрію.

Супералгебри

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}; \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H - E_0 & 0 \\ 0 & \tilde{H} - E_0 \end{pmatrix}$$
$$\{Q^+, Q^-\} = \mathcal{H}, \quad [\mathcal{H}, Q^\pm] = 0, \quad (Q^\pm)^2 = 0$$

$[A, B] = AB - BA$ — комутатор

$\{A, B\} = AB + BA$ — антикомутатор

Чому суперсиметрія?

Спектри гамільтоніанів H та \tilde{H} співпадають, тому комбінований гамільтоніан $\mathcal{H} = H \oplus \tilde{H}$ вироджений, тобто має певну симетрію.

Супералгебри

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}; \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H - E_0 & 0 \\ 0 & \tilde{H} - E_0 \end{pmatrix}$$
$$\{Q^+, Q^-\} = \mathcal{H}, \quad [\mathcal{H}, Q^\pm] = 0, \quad (Q^\pm)^2 = 0$$

$[A, B] = AB - BA$ — комутатор

$\{A, B\} = AB + BA$ — антикомутатор

Чому суперсиметрія?

Спектри гамільтоніанів H та \tilde{H} співпадають, тому комбінований гамільтоніан $\mathcal{H} = H \oplus \tilde{H}$ вироджений, тобто має певну симетрію.

Супералгебри

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}; \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H - E_0 & 0 \\ 0 & \tilde{H} - E_0 \end{pmatrix}$$
$$\{Q^+, Q^-\} = \mathcal{H}, \quad [\mathcal{H}, Q^\pm] = 0, \quad (Q^\pm)^2 = 0$$

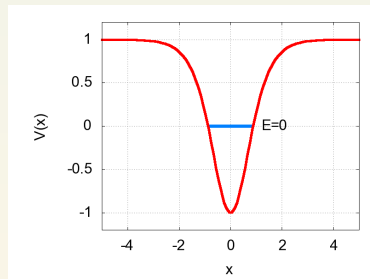
$[A, B] = AB - BA$ — комутатор

$\{A, B\} = AB + BA$ — антикомутатор

Приклад: потенціал солітонного типу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Рівняння Шредінґера

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi = E\psi$$
$$V(x) = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}$$



Суперпотенціал

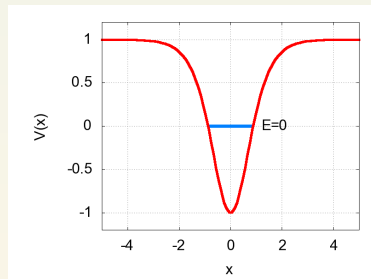
Основний стан: $\psi_0 = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$, $E_0 = 0$

Суперпотенціал: $W(x) = \frac{d}{dx} \ln \psi_0 = -\operatorname{th} x$

Приклад: потенціал солітонного типу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Рівняння Шредінґера

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi = E\psi$$
$$V(x) = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}$$



Суперпотенціал

Основний стан: $\psi_0 = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$, $E_0 = 0$

Суперпотенціал: $W(x) = \frac{d}{dx} \ln \psi_0 = -\operatorname{th} x$

Перетворення Дарбу для потенціалу $V(x) = 1 - 2/\text{ch}^2 x$

Потенціал суперсиметричного партнера

Суперпотенціал: $W(x) = -\text{th}x$

$$\mathcal{A} = -\frac{d}{dx} - \text{th}x, \quad \mathcal{A}^\dagger = \frac{d}{dx} - \text{th}x$$
$$\Rightarrow \tilde{V} = W^2 - W' + E_0 = 0$$

Розв'язок задачі для партнера

$$-\frac{d^2 \tilde{\psi}}{dx^2} = k^2 \tilde{\psi} \Rightarrow \tilde{\psi}_k(x) = a_k e^{ikx} + b_k e^{-ikx}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{\mathcal{A}^\dagger \tilde{\psi}}{E} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d}{dx} - \text{th}x \right) \tilde{\psi}_k$$

Перетворення Дарбу для потенціалу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Потенціал суперсиметричного партнера

Суперпотенціал: $W(x) = -\operatorname{th} x$

$$\mathcal{A} = -\frac{d}{dx} - \operatorname{th} x, \quad \mathcal{A}^\dagger = \frac{d}{dx} - \operatorname{th} x$$
$$\Rightarrow \tilde{V} = W^2 - W' + E_0 = 0$$

Розв'язок задачі для партнера

$$-\frac{d^2 \tilde{\psi}}{dx^2} = k^2 \tilde{\psi} \Rightarrow \tilde{\psi}_k(x) = a_k e^{ikx} + b_k e^{-ikx}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{\mathcal{A}^\dagger \tilde{\psi}}{E} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d}{dx} - \operatorname{th} x \right) \tilde{\psi}_k$$

Перетворення Дарбу для потенціалу $V(x) = 1 - 2/\text{ch}^2 x$

Потенціал суперсиметричного партнера

Суперпотенціал: $W(x) = -\text{th}x$

$$\mathcal{A} = -\frac{d}{dx} - \text{th}x, \quad \mathcal{A}^\dagger = \frac{d}{dx} - \text{th}x$$
$$\Rightarrow \tilde{V} = W^2 - W' + E_0 = 0$$

Розв'язок задачі для партнера

$$-\frac{d^2 \tilde{\psi}}{dx^2} = k^2 \tilde{\psi} \Rightarrow \tilde{\psi}_k(x) = a_k e^{ikx} + b_k e^{-ikx}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{\mathcal{A}^\dagger \tilde{\psi}}{E} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d}{dx} - \text{th}x \right) \tilde{\psi}_k$$

Задача розсіювання для потенціалу $V(x) = 1 - 2/ch^2 x$

Умови розсіювання

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d}{dx} - \text{th} x \right) \tilde{\psi}_k = \frac{\text{th} x - ik}{1 - ik} e^{ikx}$$

Асимптотики:

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} \frac{-1-ik}{1-ik} e^{ikx} & x \rightarrow -\infty \\ e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Потенціал $V(x) = 1 - 2/ch^2 x$ — безвідбивальний

Задача розсіювання для потенціалу $V(x) = 1 - 2/ch^2 x$

Умови розсіювання

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d}{dx} - \operatorname{th} x \right) \tilde{\psi}_k = \frac{\operatorname{th} x - ik}{1 - ik} e^{ikx}$$

Асимптотики:

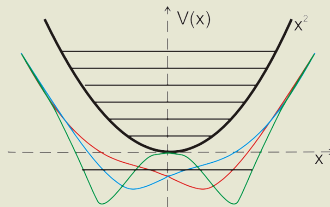
$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} \frac{-1-ik}{1-ik} e^{ikx} & x \rightarrow -\infty \\ e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Потенціал $V(x) = 1 - 2/ch^2 x$ — безвідбивальний

Суперсиметричні перетворення

$$A\psi_0 = 0, \quad W = \frac{d}{dx} \ln \psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати **ізоспекральні** потенціали.



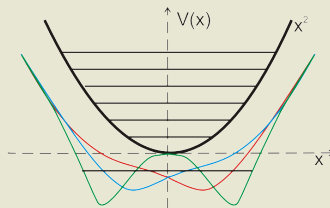
Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Народження нових рівнів (одягаючи новий перетворень)

Суперсиметричні перетворення

$$A\psi_0 = 0, \quad W = \frac{d}{dx} \ln \psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати **ізоспекральні** потенціали.



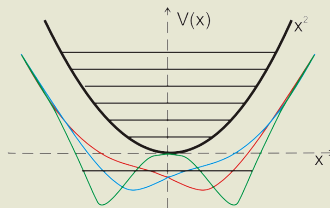
Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Породження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Зсув певного рівня:
 - Перший крок: факторизація на стані $\psi(x, E_n)$, де E_n — певний рівень енергії (не основний)
 - Другий крок: $\tilde{\psi} = A\psi(x, E)$, де $E = E_n + \Delta$

Суперсиметричні перетворення

$$A\psi_0 = 0, \quad W = \frac{d}{dx} \ln \psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати **ізоспекральні** потенціали.



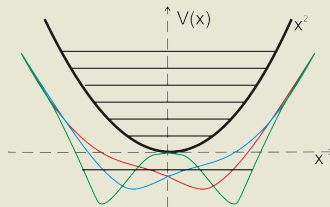
Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Породження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Зсув певного рівня:
 - Перший крок: факторизація на стані $\psi(x, E_n)$, де E_n — певний рівень енергії (не основний)
 - Другий крок: $\tilde{\psi} = A\psi(x, E)$, де $E = E_n + \Delta$

Суперсиметричні перетворення

$$A\psi_0 = 0, \quad W = \frac{d}{dx} \ln \psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати **ізоспектральні** потенціали.



Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Породження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Зсув певного рівня:
 - Перший крок: факторизація на стані $\psi(x, E_n)$, де E_n — певний рівень енергії (не основний)
 - Другий крок: $\tilde{\psi} = A\psi(x, E)$, де $E = E_n + \Delta$