

Лекція № 2

Тема лекції:

Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь

План лекції

- 1 Основні солітонні системи
- 2 Елементарні ідеї в теорії нелінійних хвиль
- 3 Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь
 - Рівняння Бюргерса
 - Метод Хіרותи для рівняння КдВ
 - Перетворення Беклунда для рівняння КдВ

План лекції

- 1 Основні солітонні системи
- 2 Елементарні ідеї в теорії нелінійних хвиль
- 3 Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь
 - Рівняння Бюргерса
 - Метод Хіרותи для рівняння КдВ
 - Перетворення Беклунда для рівняння КдВ

План лекції

- 1 Основні солітонні системи
- 2 Елементарні ідеї в теорії нелінійних хвиль
- 3 Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь
 - Рівняння Бюргерса
 - Метод Хіרותи для рівняння КдВ
 - Перетворення Беклунда для рівняння КдВ

Основні солітонні системи

Три солітонні рівняння

- КдВ-рівняння (рівняння Кортвега-де Вріза)

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$

- СГ-рівняння (рівняння синус Гордон)

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin \phi$$

- НЛШ-рівняння (нелінійне рівняння Шредінгера)

$$i\phi_t + \phi_{xx} + 2|\phi|^2\phi = 0$$

Рівняння Кортвега–де Вріза: приклад

Нестислива рідина

 $u(x, t)$ — поле швидкостей

$$\frac{du(x, t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = u_t + uu_x = 0$$

Роль дисперсії

$$\begin{aligned} v_{ph} = c - \alpha k^2 &\Rightarrow & \omega(k) = ck - \alpha k^3 \\ &\Rightarrow & u_t = u_x + u_{xxx} \end{aligned}$$

Дисперсія+нелінійність

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

Рівняння Кортвега–де Вріза: приклад

Нестислива рідина

 $u(x, t)$ — поле швидкостей

$$\frac{du(x, t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = u_t + uu_x = 0$$

Роль дисперсії

$$v_{ph} = c - \alpha k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\omega(k) = ck - \alpha k^3$$

$$u_t = u_x + u_{xxx}$$

Дисперсія+нелінійність

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

Рівняння Кортвега–де Вріза: приклад

Нестислива рідина

 $u(x, t)$ — поле швидкостей

$$\frac{du(x, t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = u_t + uu_x = 0$$

Роль дисперсії

$$v_{ph} = c - \alpha k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\omega(k) = ck - \alpha k^3$$

$$u_t = u_x + u_{xxx}$$

Дисперсія+нелінійність

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

Рівняння Кортвега–де Вріза

КдВ–рівняння

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$

Застосування

- хвилі на неглибокій воді
- іон-акустичні хвиля в плазмі
- хвилі в ангармонічних ґратках

Однонапрямлена динаміка довгих хвиль в середовищі з дисперсією за умов збереження енергії

Рівняння Кортвега–де Вріза

КдВ–рівняння

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$

Застосування

- хвилі на неглибокій воді
- іон-акустичні хвиля в плазмі
- хвилі в ангармонічних ґратках

Однонапрямлена динаміка довгих хвиль в середовищі з дисперсією за умов збереження енергії

Рівняння Кортвега–де Вріза

КдВ–рівняння

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$

Застосування

- хвилі на неглибокій воді
- іон-акустичні хвиля в плазмі
- хвилі в ангармонічних ґратках

Однонапрямлена динаміка довгих хвиль в середовищі з дисперсією за умов збереження енергії

Рівняння синус Ґордон: приклад

Нелінійний маятник

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$$

Система пружно зв'язаних маятників — модель
Френкеля–Конторової

$$\ddot{x}_n + \omega_0^2 \sin x + k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) = 0$$

Континуальне наближення — СҐ-рівняння

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin \phi$$

Рівняння синус Ґордон: приклад

Нелінійний маятник

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$$

Система пружно зв'язаних маятників — модель Френкеля–Конторової

$$\ddot{x}_n + \omega_0^2 \sin x + k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) = 0$$

Континуальне наближення — СҐ-рівняння

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin \phi$$

Рівняння синус Ґордон: приклад

Нелінійний маятник

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$$

Система пружно зв'язаних маятників — модель Френкеля–Конторової

$$\ddot{x}_n + \omega_0^2 \sin x + k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) = 0$$

Континуальне наближення — СҐ-рівняння

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin \phi$$

Рівняння синус Ґордон

СҐ-рівняння

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin \phi$$

Застосування

- поширення дефектів в кристалах
- динаміка флюксонів в джозевсонових контактах
- динаміка доменних стінок в феромагнетиках
- скалярні моделі елементарних частинок
- поширення хвиль в ліпідних мембранах

Динаміка хвиль в полі періодичного потенціалу

Рівняння синус Ґордон

СҐ-рівняння

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin \phi$$

Застосування

- поширення дефектів в кристалах
- динаміка флюксонів в джозевсонових контактах
- динаміка доменних стінок в феромагнетиках
- скалярні моделі елементарних частинок
- поширення хвиль в ліпідних мембранах

Динаміка хвиль в полі періодичного потенціалу

Рівняння синус Ґордон

СҐ-рівняння

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin \phi$$

Застосування

- поширення дефектів в кристалах
- динаміка флюксонів в джозевсонових контактах
- динаміка доменних стінок в феромагнетиках
- скалярні моделі елементарних частинок
- поширення хвиль в ліпідних мембранах

Динаміка хвиль в полі періодичного потенціалу

Нелінійне рівняння Шредінгера: приклад

Хвильовий пакет, дисперсія та рівняння огибаючої

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - i\omega t} \frac{dk}{2\pi}$$

$$\omega(k) \approx \omega_0 + \alpha(k - k_0)^2$$

$$u(x, t) = e^{ik_0 x - i\omega_0 t} \phi(x, t), \quad \phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa + k_0) e^{i\kappa x - i\alpha \kappa^2 t} \frac{d\kappa}{2\pi}$$

$$\phi_t = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha \kappa^2) F(\kappa + k_0) e^{i\kappa x - i\alpha \kappa^2 t} \frac{d\kappa}{2\pi} = i\alpha \phi_{xx}$$

$$i\phi_t + \alpha \phi_{xx} = 0$$

$$\omega = \alpha \kappa^2$$

Нелінійний хвильовий пакет

$a \sim |\phi|$ — амплітуда огибаючої хвилі

$$\Rightarrow \omega = \alpha \kappa^2 + \beta a^2$$

$$\Rightarrow i\phi_t + \alpha \phi_{xx} + \beta |\phi|^2 \phi = 0$$

Нелінійне рівняння Шредінгера: приклад

Хвильовий пакет, дисперсія та рівняння огибаючої

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - i\omega t} \frac{dk}{2\pi}$$

$$\omega(k) \approx \omega_0 + \alpha(k - k_0)^2$$

$$u(x, t) = e^{ik_0 x - i\omega_0 t} \phi(x, t), \quad \phi(x, t) = |\varkappa = k - k_0| = \int_{-\infty}^{\infty} F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha \varkappa^2 t} \frac{d\varkappa}{2\pi}$$

$$\phi_t = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha \varkappa^2) F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha \varkappa^2 t} \frac{d\varkappa}{2\pi} = i\alpha \phi_{xx}$$

$$i\phi_t + \alpha \phi_{xx} = 0$$

$$\omega = \alpha \varkappa^2$$

Нелінійний хвильовий пакет

$a \sim |\phi|$ — амплітуда огибаючої хвилі

$$\Rightarrow \omega = \alpha \varkappa^2 + \beta a^2$$

$$\Rightarrow i\phi_t + \alpha \phi_{xx} + \beta |\phi|^2 \phi = 0$$

Нелінійне рівняння Шредінгера

НЛШ-рівняння

$$i\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^2\phi = 0$$

Застосування

- гідродинамічні хвилі на глибині
- поширення нелінійних імпульсів в оптичних волокнах
- оптичне самофокусування
- хвилі Ленґмюра в плазмі
- поширення теплових імпульсів в твердих тілах

Нелінійна модель з найменшим ступенем нелінійності для опису однонапрямленої динаміки хвиль в середовищі з дисперсією за умов збереження енергії

Нелінійне рівняння Шредінгера

НЛШ-рівняння

$$i\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^2\phi = 0$$

Застосування

- гідродинамічні хвилі на глибині
- поширення нелінійних імпульсів в оптичних волокнах
- оптичне самофокусування
- хвилі Ленгмюра в плазмі
- поширення теплових імпульсів в твердих тілах

Нелінійна модель з найменшим ступенем нелінійності для опису однонапрямленої динаміки хвиль в середовищі з дисперсією за умов збереження енергії

Нелінійне рівняння Шредінгера

НЛШ-рівняння

$$i\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^2\phi = 0$$

Застосування

- гідродинамічні хвилі на глибині
- поширення нелінійних імпульсів в оптичних волокнах
- оптичне самофокусування
- хвилі Ленгмюра в плазмі
- поширення теплових імпульсів в твердих тілах

Нелінійна модель з найменшим ступенем нелінійності для опису однонапрямленої динаміки хвиль в середовищі з дисперсією за умов збереження енергії

Елементарні ідеї в теорії нелінійних хвиль

Рівняння КдВ

Рівняння КдВ: $\phi_t + \phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$

Підстановка:

$$\phi(x, t) = 1 + u(x, t) \Rightarrow u_t + (1 + u)u_x + u_{xxx} = 0:$$

Дисперсія

Лінеаризація в околі $u = 0$:

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0.$$

Плоска хвиля $u(x, t) = e^{ikx - i\omega t} \Rightarrow$ Дисперсія хвиль:

$$\omega(k) = k - k^3$$

Роль u_{xxx} — дисперсія в порівнянні з $u_t + u_x = 0$.

Елементарні ідеї в теорії нелінійних хвиль

Нелінійність

$$u_t + (u + 1)u_x = 0.$$

Початкова умова: $u(x, 0) = f(x)$

Лінійне рівняння

$$u_t + cu_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x, t) = f(x - ct)$$

Нелінійне рівняння

$$u_t + (u + 1)u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x, t) \stackrel{\text{Д.3.}}{=} f(x - (u + 1)t)$$

Елементарні ідеї в теорії нелінійних хвиль

Нелінійність

$$u_t + (u + 1)u_x = 0.$$

Початкова умова: $u(x, 0) = f(x)$

Лінійне рівняння

$$u_t + cu_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x, t) = f(x - ct)$$

Нелінійне рівняння

$$u_t + (u + 1)u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x, t) \stackrel{\text{Д.3.}}{=} f(x - (u + 1)t)$$

Елементарні ідеї в теорії нелінійних хвиль

Нелінійність

$$u_t + (u + 1)u_x = 0.$$

Початкова умова: $u(x, 0) = f(x)$

Лінійне рівняння

$$u_t + cu_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x, t) = f(x - ct)$$

Нелінійне рівняння

$$u_t + (u + 1)u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x, t) \stackrel{\text{Д.3.}}{=} f(x - (u + 1)t)$$

Бездисперсійний аналог КдВ

$$u_t + (u + 1)u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x, t) = f(x - (u + 1)t) = f(\xi - ut), \quad \xi \equiv x - t$$

Початкова умова

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq 1, \\ c(2 - x), & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x < 0, x > 2 \end{cases}$$



Функціональне рівняння

$$u = \begin{cases} c(\xi - ut), & 0 \leq \xi - ut \leq 1, \\ c(2 - \xi + ut), & 1 \leq \xi - ut \leq 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Розв'язок

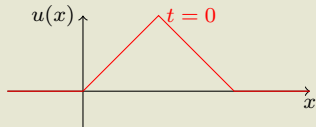
$$u \stackrel{\text{Д.З.}}{=} \begin{cases} c \frac{\xi}{1 + ct}, & 0 \leq \xi - ut \leq 1, \\ c \frac{2 - \xi}{1 - ct}, & 1 \leq \xi - ut \leq 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Бездисперсійний аналог КдВ

$$u_t + (u + 1)u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x, t) = f(x - (u + 1)t) = f(\xi - ut), \quad \xi \equiv x - t$$

Початкова умова

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq 1, \\ c(2 - x), & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x < 0, x > 2 \end{cases}$$



Функціональне рівняння

$$u = \begin{cases} c(\xi - ut), & 0 \leq \xi - ut \leq 1, \\ c(2 - \xi + ut), & 1 \leq \xi - ut \leq 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Розв'язок

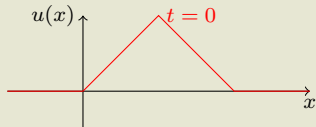
$$u \stackrel{\text{Д.З.}}{=} \begin{cases} c \frac{\xi}{1 + ct}, & 0 \leq \xi - ut \leq 1, \\ c \frac{2 - \xi}{1 - ct}, & 1 \leq \xi - ut \leq 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Бездисперсійний аналог КдВ

$$u_t + (u + 1)u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x, t) = f(x - (u + 1)t) = f(\xi - ut), \quad \xi \equiv x - t$$

Початкова умова

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq 1, \\ c(2 - x), & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x < 0, x > 2 \end{cases}$$



Функціональне рівняння

$$u = \begin{cases} c(\xi - ut), & 0 \leq \xi - ut \leq 1, \\ c(2 - \xi + ut), & 1 \leq \xi - ut \leq 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Розв'язок

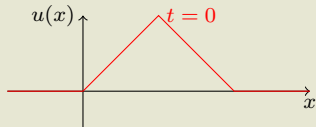
$$u \stackrel{\text{Д.З.}}{=} \begin{cases} c \frac{\xi}{1 + ct}, & 0 \leq \xi - ut \leq 1, \\ c \frac{2 - \xi}{1 - ct}, & 1 \leq \xi - ut \leq 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Бездисперсійний аналог КдВ

$$u_t + (u + 1)u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x, t) = f(x - (u + 1)t) = f(\xi - ut), \quad \xi \equiv x - t$$

Початкова умова

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq 1, \\ c(2 - x), & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x < 0, x > 2 \end{cases}$$



Функціональне рівняння

$$u = \begin{cases} c(\xi - ut), & 0 \leq \xi - ut \leq 1, \\ c(2 - \xi + ut), & 1 \leq \xi - ut \leq 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Розв'язок

$$u \stackrel{\text{Д.3.}}{=} \begin{cases} c \frac{\xi}{1 + ct}, & 0 \leq \xi - ut \leq 1, \\ c \frac{2 - \xi}{1 - ct}, & 1 \leq \xi - ut \leq 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Поява розривів в розв'язку $u = f(\xi - ut)$

Розв'язок

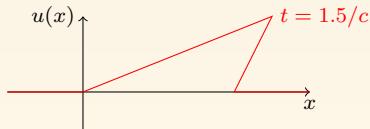
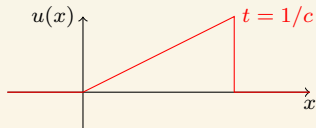
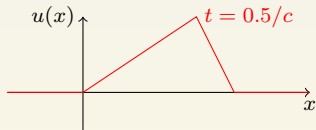
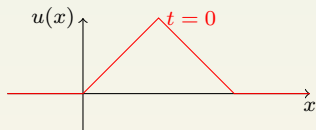
$$u = \begin{cases} c \frac{\xi}{1+ct}, & 0 \leq \xi - ut \leq 1, \\ c \frac{2-\xi}{1-ct}, & 1 \leq \xi - ut \leq 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Нахил

$$u' = \begin{cases} \frac{c}{1+ct}, & 0 \leq \xi - ut \leq 1, \\ -\frac{c}{1-ct}, & 1 \leq \xi - ut \leq 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Час розриву (час перевертання):

$$t_s = 1/c$$



Знов дисперсія

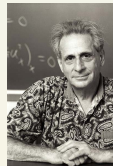
КдВ: Забускі і Крускал

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + (1 + u)u_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \\ u(x, t) = u(x + 2\pi, t) \\ u(x, 0) = \cos x \end{array} \right.$$

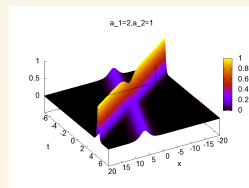
$$\delta = 0.022 \ll 1$$



Norman Zabusky

Martin David
Kruskal

Дисперсія протидіє тенденції утворення
розривів завдяки нелінійності



Дисипація замість дисперсії

Рівняння Бюргерса

$$u_t + uu_x = \delta u_{xx}$$

Лінеаризація рівняння Бюргерса — перетворення Коула—Хопфа

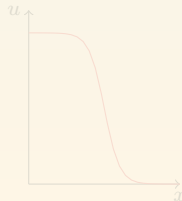
$$u(x, t) = \alpha \partial_x \ln f(x, t), \quad \alpha = \text{const}$$

$$\text{Д.3.} \Rightarrow \frac{f_t}{f} + \frac{f_x^2}{f^2} \left(\delta + \frac{\alpha}{2} \right) - \delta \frac{f_{xx}}{f} = c(t)$$

$$\alpha = -2\delta \quad \Rightarrow \quad f_t = \delta f_{xx} + c(t)f$$

Розв'язок Тейлора — ударна хвиля

$$u = A\delta \left(1 - \text{th} \frac{Ax - \delta A^2 t}{2} \right)$$



Дисипація замість дисперсії

Рівняння Бюргерса

$$u_t + uu_x = \delta u_{xx}$$

Лінеаризація рівняння Бюргерса — перетворення Коула—Хопфа

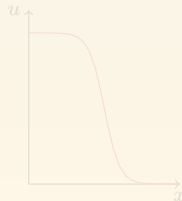
$$u(x, t) = \alpha \partial_x \ln f(x, t), \quad \alpha = \text{const}$$

$$\text{Д.3.} \Rightarrow \frac{f_t}{f} + \frac{f_x^2}{f^2} \left(\delta + \frac{\alpha}{2} \right) - \delta \frac{f_{xx}}{f} = c(t)$$

$$\alpha = -2\delta \quad \Rightarrow \quad f_t = \delta f_{xx} + c(t)f$$

Розв'язок Тейлора — ударна хвиля

$$u = A\delta \left(1 - \text{th} \frac{Ax - \delta A^2 t}{2} \right)$$



Дисипація замість дисперсії

Рівняння Бюргерса

$$u_t + uu_x = \delta u_{xx}$$

Лінеаризація рівняння Бюргерса — перетворення Коула—Хопфа

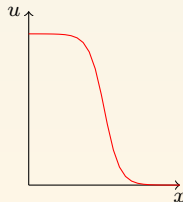
$$u(x, t) = \alpha \partial_x \ln f(x, t), \quad \alpha = \text{const}$$

$$\text{Д.3.} \Rightarrow \frac{f_t}{f} + \frac{f_x^2}{f^2} \left(\delta + \frac{\alpha}{2} \right) - \delta \frac{f_{xx}}{f} = c(t)$$

$$\alpha = -2\delta \quad \Rightarrow \quad f_t = \delta f_{xx} + c(t)f$$

Розв'язок Тейлора — ударна хвиля

$$u = A\delta \left(1 - \text{th} \frac{Ax - \delta A^2 t}{2} \right)$$



Метод Хіроти

КдВ-рівняння у вигляді $u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0$

- Перетворення $u = w_x \Rightarrow w_t + 6w_x^2 + w_{xxx} = 0$
- Перетворення Коула—Хопфа $w = \partial_x \ln f$
- Білінійне рівняння Хіроти (R.Hirota, 1971)

$$f f_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2 + f f_{xt} - f_x f_t = 0 \Leftarrow \text{Д.3.}$$

- Розв'язок — у вигляді ряду теорії збурень

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n f^{(n)}$$

Метод Хіроти

КдВ-рівняння у вигляді $u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0$

- Перетворення $u = w_x \Rightarrow w_t + 6w_x^2 + w_{xxx} = 0$
- Перетворення Коула—Хопфа $w = \partial_x \ln f$
- Білінійне рівняння Хіроти (R.Hirota, 1971)

$$f f_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2 + f f_{xt} - f_x f_t = 0 \Leftarrow \text{Д.3.}$$

- Розв'язок — у вигляді ряду теорії збурень

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)}$$

Метод Хіроти

КдВ-рівняння у вигляді $u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0$

- Перетворення $u = w_x \Rightarrow w_t + 6w_x^2 + w_{xxx} = 0$
- Перетворення Коула—Хопфа $w = \partial_x \ln f$
- Білінійне рівняння Хіроти (R.Hirota, 1971)

$$ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2 + ff_{xt} - f_x f_t = 0 \Leftarrow \text{Д.3.}$$

- Розв'язок — у вигляді ряду теорії збурень

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)}$$

Метод Хіроти

КдВ-рівняння у вигляді $u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0$

- Перетворення $u = w_x \Rightarrow w_t + 6w_x^2 + w_{xxx} = 0$
- Перетворення Коула—Хопфа $w = \partial_x \ln f$
- Білінійне рівняння Хіроти (R.Hirota, 1971)

$$ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2 + ff_{xt} - f_x f_t = 0 \Leftarrow \text{Д.3.}$$

- Розв'язок — у вигляді ряду теорії збурень

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)}$$

Метод Хіרותи

Рівняння Хіרותи

$$f[f_{xt} + f_{xxx}] - f_x[f_t + 4f_{xx}] + 3f_{xx}^2 = 0, \quad f = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon \left(1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots \right) \left[f_{xt}^{(1)} + \varepsilon f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(1)} + \varepsilon f_{xxxx}^{(2)} \right] - \\ &- \varepsilon^2 \left(f_x^{(1)} + \varepsilon f_x^{(2)} \right) \left[f_t^{(1)} + \varepsilon f_t^{(2)} + 4f_{xx}^{(1)} + \varepsilon 4f_{xx}^{(2)} \right] + 3\varepsilon^2 \left(f_{xx}^{(1)} + \varepsilon f_{xx}^{(2)} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Лінійні рівняння в кожному порядку ε : \Downarrow Д.3.

$$\varepsilon^1 : f_{xt}^{(1)} + f_{xxxx}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon^2 : f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} + 4f_x^{(1)} f_{xx}^{(1)} - 3 \left(f_{xx}^{(1)} \right)^2$$

...

Розв'язок рівняння в порядку ε^1 :

$$\varepsilon^1 : \partial_x \left(f_t^{(1)} + f_{xxx}^{(1)} \right) = 0, \Rightarrow f^{(1)} = \exp \theta_1, \quad \theta_1 \stackrel{\text{Д.3.}}{=} ax - a^3 t + \delta$$

$$\varepsilon^2 : f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} + 4f_x^{(1)} f_{xx}^{(1)} - 3 \left(f_{xx}^{(1)} \right)^2 \stackrel{\text{Д.3.}}{=} 0 \Rightarrow f_{xt}^{(3)} \equiv 0 \Rightarrow f_{xt}^{(N)} \equiv 0 \dots$$

Метод Хіרותи

Рівняння Хіרותи

$$f[f_{xt} + f_{xxx}] - f_x[f_t + 4f_{xx}] + 3f_{xx}^2 = 0, \quad f = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots$$

$$\varepsilon \left(1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots \right) \left[f_{xt}^{(1)} + \varepsilon f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(1)} + \varepsilon f_{xxxx}^{(2)} \right] -$$

$$- \varepsilon^2 \left(f_x^{(1)} + \varepsilon f_x^{(2)} \right) \left[f_t^{(1)} + \varepsilon f_t^{(2)} + 4f_{xx}^{(1)} + \varepsilon 4f_{xx}^{(2)} \right] + 3\varepsilon^2 \left(f_{xx}^{(1)} + \varepsilon f_{xx}^{(2)} \right)^2 = 0$$

Лінійні рівняння в кожному порядку ε : \Downarrow Д.3.

$$\varepsilon^1 : f_{xt}^{(1)} + f_{xxxx}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon^2 : f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} + 4f_x^{(1)} f_{xx}^{(1)} - 3 \left(f_{xx}^{(1)} \right)^2$$

...

Розв'язок рівняння в порядку ε^1 :

$$\varepsilon^1 : \partial_x \left(f_t^{(1)} + f_{xxx}^{(1)} \right) = 0, \Rightarrow f^{(1)} = \exp \theta_1, \quad \theta_1 \stackrel{\text{Д.3.}}{=} ax - a^3 t + \delta$$

$$\varepsilon^2 : f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} + 4f_x^{(1)} f_{xx}^{(1)} - 3 \left(f_{xx}^{(1)} \right)^2 \stackrel{\text{Д.3.}}{=} 0 \Rightarrow f_{xt}^{(3)} \equiv 0 \Rightarrow f_{xt}^{(N)} \equiv 0 \dots$$

Метод Хіרותи

Рівняння Хіרותи

$$f[f_{xt} + f_{xxx}] - f_x[f_t + 4f_{xx}] + 3f_{xx}^2 = 0, \quad f = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots$$

$$\varepsilon \left(1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots \right) \left[f_{xt}^{(1)} + \varepsilon f_{xt}^{(2)} + f_{xxx}^{(1)} + \varepsilon f_{xxx}^{(2)} \right] -$$

$$- \varepsilon^2 \left(f_x^{(1)} + \varepsilon f_x^{(2)} \right) \left[f_t^{(1)} + \varepsilon f_t^{(2)} + 4f_{xx}^{(1)} + \varepsilon 4f_{xx}^{(2)} \right] + 3\varepsilon^2 \left(f_{xx}^{(1)} + \varepsilon f_{xx}^{(2)} \right)^2 = 0$$

Лінійні рівняння в кожному порядку ε : \Downarrow Д.3.

$$\varepsilon^1 : f_{xt}^{(1)} + f_{xxx}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon^2 : f_{xt}^{(2)} + f_{xxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} + 4f_x^{(1)} f_{xx}^{(1)} - 3 \left(f_{xx}^{(1)} \right)^2$$

...

Розв'язок рівняння в порядку ε^1 :

$$\varepsilon^1 : \partial_x \left(f_t^{(1)} + f_{xxx}^{(1)} \right) = 0, \Rightarrow f^{(1)} = \exp \theta_1, \quad \theta_1 \stackrel{\text{Д.3.}}{=} ax - a^3 t + \delta$$

$$\varepsilon^2 : f_{xt}^{(2)} + f_{xxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} + 4f_x^{(1)} f_{xx}^{(1)} - 3 \left(f_{xx}^{(1)} \right)^2 \stackrel{\text{Д.3.}}{=} 0 \Rightarrow f_{xt}^{(3)} \equiv 0 \Rightarrow f_{xt}^{(N)} \equiv 0 \dots$$

Метод Хіроти

Рівняння Хіроти

$$f[f_{xt} + f_{xxx}] - f_x[f_t + 4f_{xx}] + 3f_{xx}^2 = 0, \quad f = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots$$

$$\varepsilon \left(1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots \right) \left[f_{xt}^{(1)} + \varepsilon f_{xt}^{(2)} + f_{xxx}^{(1)} + \varepsilon f_{xxx}^{(2)} \right] -$$

$$- \varepsilon^2 \left(f_x^{(1)} + \varepsilon f_x^{(2)} \right) \left[f_t^{(1)} + \varepsilon f_t^{(2)} + 4f_{xx}^{(1)} + \varepsilon 4f_{xx}^{(2)} \right] + 3\varepsilon^2 \left(f_{xx}^{(1)} + \varepsilon f_{xx}^{(2)} \right)^2 = 0$$

Лінійні рівняння в кожному порядку ε : \Downarrow Д.3.

$$\varepsilon^1 : f_{xt}^{(1)} + f_{xxx}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon^2 : f_{xt}^{(2)} + f_{xxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} + 4f_x^{(1)} f_{xx}^{(1)} - 3 \left(f_{xx}^{(1)} \right)^2$$

...

Розв'язок рівняння в порядку ε^1 :

$$\varepsilon^1 : \partial_x \left(f_t^{(1)} + f_{xxx}^{(1)} \right) = 0, \Rightarrow f^{(1)} = \exp \theta_1, \quad \theta_1 \stackrel{\text{Д.3.}}{=} ax - a^3 t + \delta$$

$$\varepsilon^2 : f_{xt}^{(2)} + f_{xxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} + 4f_x^{(1)} f_{xx}^{(1)} - 3 \left(f_{xx}^{(1)} \right)^2 \stackrel{\text{Д.3.}}{=} 0 \Rightarrow f_{xt}^{(3)} \equiv 0 \Rightarrow f_{xt}^{(N)} \equiv 0 \dots$$

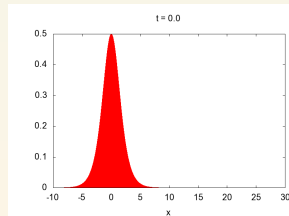
Метод Хіроті: $N = 1$

$N = 1$

$$f^{(N=1)} = e^{\theta_1}, \quad \theta_1 = a_1 x - a_1^3 t + \delta_1 \quad f^{(N>1)} \equiv 0 \Rightarrow f = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)} = 1 + e^{\theta_1}$$

Перетворення Коула–Хопфа: $u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f$
Односолітонний розв'язок

$$u = \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{f} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{a_1 e^{\theta_1}}{1 + e^{\theta_1}} \stackrel{\text{д.з.}}{=} \frac{a_1^2}{4} \frac{1}{\text{ch}^2(\theta_1/2)}$$



Демонстрація

Метод Хіроти: $N = 2$

$$\varepsilon^1 : f_{xt}^{(1)} + f_{xxxx}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon^2 : f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} + 4f_x^{(1)} f_{xxx}^{(1)} - 3 \left(f_{xx}^{(1)} \right)^2$$

...

$N = 2$

$$f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, \quad \theta_n = a_n x - a_n^3 t + \delta_n$$

$$f^{(N>2)} \equiv 0 \Rightarrow f = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)} = 1 + f^{(1)} + f^{(2)}$$

Для знаходження $f^{(2)}$:

$$f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = 3a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}$$

$$\Rightarrow f^{(2)} \stackrel{\text{Д.3.}}{=} A e^{\theta_1 + \theta_2}, \quad A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2$$

Метод Хіроти: $N = 2$

$$\varepsilon^1 : f_{xt}^{(1)} + f_{xxxx}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon^2 : f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} + 4f_x^{(1)} f_{xxx}^{(1)} - 3 \left(f_{xx}^{(1)} \right)^2$$

...

$N = 2$

$$f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, \quad \theta_n = a_n x - a_n^3 t + \delta_n$$

$$f^{(N>2)} \equiv 0 \Rightarrow f = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)} = 1 + f^{(1)} + f^{(2)}$$

Для знаходження $f^{(2)}$:

$$f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = 3a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}$$

$$\Rightarrow f^{(2)} \stackrel{\text{Д.3.}}{=} A e^{\theta_1 + \theta_2}, \quad A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2$$

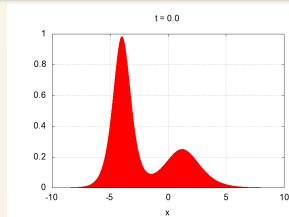
Метод Хіроти: $N = 2$

Двосолітонний розв'язок $N = 2$

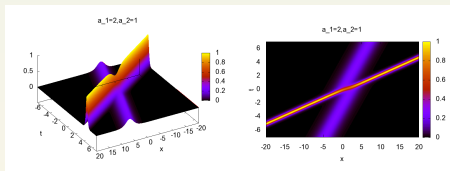
$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A e^{\theta_1 + \theta_2} \right), \quad A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2, \quad \theta_n = a_n x - a_n^3 t + \delta_n$$

Приклад: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$

$$u = \frac{9e^{t+x} \left(9e^{16t} + e^{4x} + 36e^{9t+x} + 18e^{8t+2x} + 4e^{7t+3x} \right)}{\left(9e^{9t} + e^{3x} + 9e^{8t+x} + 9e^{t+2x} \right)^2}$$



Демонстрація

Метод Хіроїти: $N = 2$ Нехай $a_1 > a_2 > 0$ Еволюція першого солітону: $\theta_1 \sim 0$,
тобто $x \approx a_1^2 t \Rightarrow \theta_2 \approx (a_1^2 - a_2^2)t \Rightarrow$
 $\theta_2 \rightarrow \pm\infty$, коли $t \rightarrow \pm\infty$ Еволюція другого солітону: $\theta_2 \sim 0$,
тобто $x \approx a_2^2 t \Rightarrow \theta_1 \rightarrow \pm\infty$, коли
 $t \rightarrow \pm\infty$

Фазовий зсув

$$u \approx \sum_{i=1}^2 \frac{a_i^2}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta_i + \Delta_i^{(\pm)}}{2}}, \quad t \rightarrow \pm\infty$$

$$\Delta_1^{(+)} = \ln A, \quad \Delta_1^{(-)} = 0,$$

$$\Delta_2^{(+)} = 0, \quad \Delta_2^{(-)} = \ln A$$

$$\delta x_1 = (\Delta_1^{(+)} - \Delta_1^{(-)})/a_1 = \ln A/a_1 < 0$$

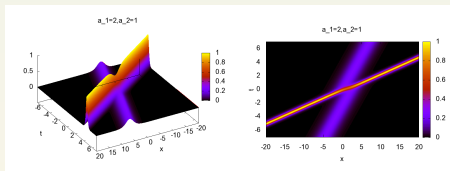
$$\delta x_2 = (\Delta_2^{(+)} - \Delta_2^{(-)})/a_2 = -\ln A/a_2 > 0.$$

$$\text{Маса } m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 dx}{4 \operatorname{ch}^2 \theta/2} = a$$

Закон збереження імпульсу

$$a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 = 0$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0.$$

Метод Хіроїти: $N = 2$ Нехай $a_1 > a_2 > 0$ Еволюція першого солітону: $\theta_1 \sim 0$,
тобто $x \approx a_1^2 t \Rightarrow \theta_2 \approx (a_1^2 - a_2^2)t \Rightarrow$
 $\theta_2 \rightarrow \pm\infty$, коли $t \rightarrow \pm\infty$ Еволюція другого солітону: $\theta_2 \sim 0$,
тобто $x \approx a_2^2 t \Rightarrow \theta_1 \rightarrow \pm\infty$, коли
 $t \rightarrow \pm\infty$

Фазовий зсув

$$u \approx \sum_{i=1}^2 \frac{a_i^2}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta_i + \Delta_i^{(\pm)}}{2}}, \quad t \rightarrow \pm\infty$$

$$\Delta_1^{(+)} = \ln A, \quad \Delta_1^{(-)} = 0,$$

$$\Delta_2^{(+)} = 0, \quad \Delta_2^{(-)} = \ln A$$

$$\delta x_1 = (\Delta_1^{(+)} - \Delta_1^{(-)})/a_1 = \ln A/a_1 < 0$$

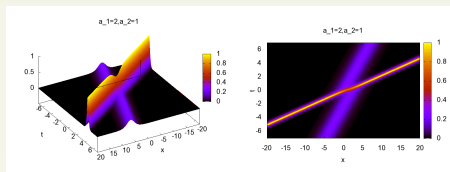
$$\delta x_2 = (\Delta_2^{(+)} - \Delta_2^{(-)})/a_2 = -\ln A/a_2 > 0.$$

$$\text{Маса } m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 dx}{4 \operatorname{ch}^2 \theta/2} = a$$

Закон збереження імпульсу

$$a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 = 0$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0.$$

Метод Хіроті: $N = 2$ Нехай $a_1 > a_2 > 0$ Еволюція першого солітону: $\theta_1 \sim 0$,
тобто $x \approx a_1^2 t \Rightarrow \theta_2 \approx (a_1^2 - a_2^2)t \Rightarrow$
 $\theta_2 \rightarrow \pm\infty$, коли $t \rightarrow \pm\infty$ Еволюція другого солітону: $\theta_2 \sim 0$,
тобто $x \approx a_2^2 t \Rightarrow \theta_1 \rightarrow \pm\infty$, коли
 $t \rightarrow \pm\infty$

Фазовий зсув

$$u \approx \sum_{i=1}^2 \frac{a_i^2}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta_i + \Delta_i^{(\pm)}}{2}}, \quad t \rightarrow \pm\infty$$

$$\Delta_1^{(+)} = \ln A, \quad \Delta_1^{(-)} = 0,$$

$$\Delta_2^{(+)} = 0, \quad \Delta_2^{(-)} = \ln A$$

$$\delta x_1 = (\Delta_1^{(+)} - \Delta_1^{(-)})/a_1 = \ln A/a_1 < 0$$

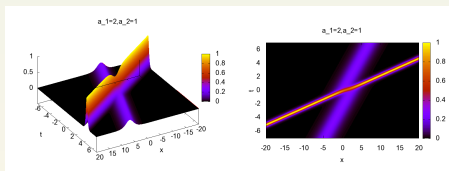
$$\delta x_2 = (\Delta_2^{(+)} - \Delta_2^{(-)})/a_2 = -\ln A/a_2 > 0.$$

$$\text{Маса } m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 dx}{4 \operatorname{ch}^2 \theta/2} = a$$

Закон збереження імпульсу

$$a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 = 0$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0.$$

Метод Хіроїти: $N = 2$ Нехай $a_1 > a_2 > 0$ Еволюція першого солітону: $\theta_1 \sim 0$,
тобто $x \approx a_1^2 t \Rightarrow \theta_2 \approx (a_1^2 - a_2^2)t \Rightarrow$
 $\theta_2 \rightarrow \pm\infty$, коли $t \rightarrow \pm\infty$ Еволюція другого солітону: $\theta_2 \sim 0$,
тобто $x \approx a_2^2 t \Rightarrow \theta_1 \rightarrow \pm\infty$, коли
 $t \rightarrow \pm\infty$

Фазовий зсув

$$u \approx \sum_{i=1}^2 \frac{a_i^2}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta_i + \Delta_i^{(\pm)}}{2}}, \quad t \rightarrow \pm\infty$$

$$\Delta_1^{(+)} = \ln A, \quad \Delta_1^{(-)} = 0,$$

$$\Delta_2^{(+)} = 0, \quad \Delta_2^{(-)} = \ln A$$

$$\delta x_1 = (\Delta_1^{(+)} - \Delta_1^{(-)})/a_1 = \ln A/a_1 < 0$$

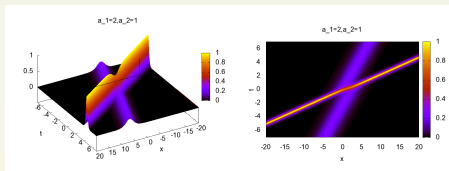
$$\delta x_2 = (\Delta_2^{(+)} - \Delta_2^{(-)})/a_2 = -\ln A/a_2 > 0.$$

$$\text{Маса } m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 dx}{4 \operatorname{ch}^2 \theta/2} = a$$

Закон збереження імпульсу

$$a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 = 0$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0.$$

Метод Хіроїти: $N = 2$ Нехай $a_1 > a_2 > 0$ Еволюція першого солітону: $\theta_1 \sim 0$,
тобто $x \approx a_1^2 t \Rightarrow \theta_2 \approx (a_1^2 - a_2^2)t \Rightarrow$
 $\theta_2 \rightarrow \pm\infty$, коли $t \rightarrow \pm\infty$ Еволюція другого солітону: $\theta_2 \sim 0$,
тобто $x \approx a_2^2 t \Rightarrow \theta_1 \rightarrow \pm\infty$, коли
 $t \rightarrow \pm\infty$

Фазовий зсув

$$u \approx \sum_{i=1}^2 \frac{a_i^2}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta_i + \Delta_i^{(\pm)}}{2}}, \quad t \rightarrow \pm\infty$$

$$\Delta_1^{(+)} = \ln A, \quad \Delta_1^{(-)} = 0,$$

$$\Delta_2^{(+)} = 0, \quad \Delta_2^{(-)} = \ln A$$

$$\delta x_1 = (\Delta_1^{(+)} - \Delta_1^{(-)})/a_1 = \ln A/a_1 < 0$$

$$\delta x_2 = (\Delta_2^{(+)} - \Delta_2^{(-)})/a_2 = -\ln A/a_2 > 0.$$

$$\text{Маса } m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 dx}{4 \operatorname{ch}^2 \theta/2} = a$$

Закон збереження імпульсу

$$a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 = 0$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0.$$

Метод Хіרותи: N –солітонний розв'язок

$$f^{(1)} = 1 + \sum_{n=0}^N e^{\theta_n}, \quad \theta_n = a_n x - a_n^3 t + \delta_n$$

$$\Rightarrow f^{(N+1)} = f^{(N+2)} = \dots = 0$$

N –солітонний розв'язок

$$u_N(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t),$$

$$f(x, t) = \det(M), \quad M = ||m_{ij}||$$

$$m_{ij} = \frac{2\sqrt{\kappa_i \kappa_j}}{\kappa_i + \kappa_j} \exp \left[\frac{\kappa_i + \kappa_j}{2} x - \frac{\kappa_i^2 + \kappa_j^2}{2} t + \alpha_{ij} \right] + \delta_{ij}$$

Метод Хіרותи: N –солітонний розв'язок

$$f^{(1)} = 1 + \sum_{n=0}^N e^{\theta_n}, \quad \theta_n = a_n x - a_n^3 t + \delta_n$$

$$\Rightarrow f^{(N+1)} = f^{(N+2)} = \dots = 0$$

N –солітонний розв'язок

$$u_N(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t),$$

$$f(x, t) = \det(M), \quad M = ||m_{ij}||$$

$$m_{ij} = \frac{2\sqrt{\kappa_i \kappa_j}}{\kappa_i + \kappa_j} \exp \left[\frac{\kappa_i + \kappa_j}{2} x - \frac{\kappa_i^2 + \kappa_j^2}{2} t + \alpha_{ij} \right] + \delta_{ij}$$

Перетворення Беклунда

Рівняння КдВ: $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$

Рівняння мКдВ: $v_t - 6(v^2 + 6\lambda)v_x + v_{xxx} = 0$ (модифіковане рівняння КдВ)

Міура (1968)

Якщо v — розв'язок мКдВ, то $u = v_x + v^2 + \lambda$ — розв'язок КдВ (λ — стала)

Два розв'язки КдВ-рівняння

Якщо v є розв'язком мКдВ, то $-v$ також є розв'язком мКдВ

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + v^2 + v_x \\ u_1 = \lambda + v^2 - v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 - u_1 = 2v_x \\ u_0 + u_1 = 2(\lambda + v^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 2\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ u_1 = 2\frac{\partial w_1}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 - w_1 = v \\ (w_1 + w_0)_x = \lambda + v^2 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} (w_1 + w_0)_x = (w_1 - w_0)^2 + \lambda \\ (w_1 - w_0)_t - 6(w_1 + w_0)_x(w_1 - w_0)_x + (w_1 - w_0)_{xxx} = 0 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

Рівняння КдВ: $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$

Рівняння мКдВ: $v_t - 6(v^2 + 6\lambda)v_x + v_{xxx} = 0$ (модифіковане рівняння КдВ)

Міура (1968)

Якщо v — розв'язок мКдВ, то $u = v_x + v^2 + \lambda$ — розв'язок КдВ (λ — стала)

Два розв'язки КдВ-рівняння

Якщо v є розв'язком мКдВ, то $-v$ також є розв'язком мКдВ

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + v^2 + v_x \\ u_1 = \lambda + v^2 - v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 - u_1 = 2v_x \\ u_0 + u_1 = 2(\lambda + v^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 2\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ u_1 = 2\frac{\partial w_1}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 - w_1 = v \\ (w_1 + w_0)_x = \lambda + v^2 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} (w_1 + w_0)_x = (w_1 - w_0)^2 + \lambda \\ (w_1 - w_0)_t - 6(w_1 + w_0)_x(w_1 - w_0)_x + (w_1 - w_0)_{xxx} = 0 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

Рівняння КдВ: $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$

Рівняння мКдВ: $v_t - 6(v^2 + 6\lambda)v_x + v_{xxx} = 0$ (модифіковане рівняння КдВ)

Міура (1968)

Якщо v — розв'язок мКдВ, то $u = v_x + v^2 + \lambda$ — розв'язок КдВ (λ — стала)

Два розв'язки КдВ-рівняння

Якщо v є розв'язком мКдВ, то $-v$ також є розв'язком мКдВ

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + v^2 + v_x \\ u_1 = \lambda + v^2 - v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 - u_1 = 2v_x \\ u_0 + u_1 = 2(\lambda + v^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 2\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ u_1 = 2\frac{\partial w_1}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 - w_1 = v \\ (w_1 + w_0)_x = \lambda + v^2 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} (w_1 + w_0)_x = (w_1 - w_0)^2 + \lambda \\ (w_1 - w_0)_t - 6(w_1 + w_0)_x(w_1 - w_0)_x + (w_1 - w_0)_{xxx} = 0 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$u_0 = w_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} w_{1x} = \lambda + w_1^2 \\ -w_{1t} + 6(w_{1x})^2 - (w_1)_{xxx} = 0 \end{cases}$$

$$w_1 = -\frac{f_x}{f} \quad \text{Д.3.} \quad f_{xx} + \lambda f = 0 \Rightarrow f = e^{a(x+c)} + e^{-a(x+c)}, \lambda = -a^2, c = c(t)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= -a\theta\theta, & \theta &= a(x+c) \\ c_t + 4a^2 &= 0 \Rightarrow c(t) &= -4a^2t + \delta \end{aligned}$$

Односолітонний розв'язок $N = 1$

$$u_1 = 2w_{1x} = \frac{2a^2}{\operatorname{ch}^2(a(x - 4a^2t + \delta))}$$

N -солітонний розв'язок

$$0 \mapsto u_1 \mapsto u_2 \mapsto u_1 \mapsto \cdots \mapsto u_N$$

Перетворення Беклунда

$$u_0 = w_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} w_{1x} = \lambda + w_1^2 \\ -w_{1t} + 6(w_{1x})^2 - (w_1)_{xxx} = 0 \end{cases}$$

$$w_1 = -\frac{f_x}{f} \quad \stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} \quad f_{xx} + \lambda f = 0 \Rightarrow f = e^{a(x+c)} + e^{-a(x+c)}, \lambda = -a^2, c = c(t)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= -ath\theta, & \theta &= a(x+c) \\ c_t + 4a^2 &= 0 \Rightarrow c(t) &= -4a^2t + \delta \end{aligned}$$

Односолітонний розв'язок $N = 1$

$$u_1 = 2w_{1x} = \frac{2a^2}{\text{ch}^2(a(x - 4a^2t + \delta))}$$

N -солітонний розв'язок

$$0 \mapsto u_1 \mapsto u_2 \mapsto u_1 \mapsto \cdots \mapsto u_N$$

Перетворення Беклунда

$$u_0 = w_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} w_{1x} = \lambda + w_1^2 \\ -w_{1t} + 6(w_{1x})^2 - (w_1)_{xxx} = 0 \end{cases}$$

$$w_1 = -\frac{f_x}{f} \quad \stackrel{\text{Д.3.}}{\Rightarrow} \quad f_{xx} + \lambda f = 0 \Rightarrow f = e^{a(x+c)} + e^{-a(x+c)}, \lambda = -a^2, c = c(t)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= -ath\theta, & \theta &= a(x+c) \\ c_t + 4a^2 &= 0 \Rightarrow c(t) &= -4a^2t + \delta \end{aligned}$$

Односолітонний розв'язок $N = 1$

$$u_1 = 2w_{1x} = \frac{2a^2}{\text{ch}^2(a(x - 4a^2t + \delta))}$$

N -солітонний розв'язок

$$0 \mapsto u_1 \mapsto u_2 \mapsto u_1 \mapsto \cdots \mapsto u_N$$