Лекція № 6

Тема лекції:

Солітонна теорія збурень

План лекції

1. Методи теорії збурень для лінійної системи: осцилятор з тертям
   - Метод балансу енергії
   - Часове мультимасштабування
2. Солітонна теорія збурень
   - Енергетичний аналіз динаміки солітону
     - Солітони Кортвега–де–Вріза
     - Солітони рівняння синус Ґордон
   - Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння
     - Мультимасштабна теорія збурень для кінка

План лекції

1. Методи теорії збурень для лінійної системи: осцилятор з тертям
   - Метод балансу енергії
   - Часове мультимасштабування
2. Солітонна теорія збурень
   - Енергетичний аналіз динаміки солітону
     - Солітони Кортвега–де–Вріза
     - Солітони рівняння синус Ґордон
   - Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння
     - Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \dfrac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія $\mathscr{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t) \cos t \Rightarrow$ енергія $\mathscr{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \approx A \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon \dot{x}^2$
  $\dot{x}(t) \approx -A(t) \sin t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon A^2(t) \sin^2 t$
- $\langle \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} A^2(t) = A \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{2} A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin \omega t$$

- $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія $\mathscr{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t) \cos t \;\Rightarrow$ енергія $\mathscr{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \approx A \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon \dot{x}^2$
  $\dot{x}(t) \approx -A(t) \sin t \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon A^2(t) \sin^2 t$
- $\langle \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} A^2(t) = A \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{2} A \;\Rightarrow\; A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія $\mathscr{E} = \frac{\dot{x}^2+x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t)\cos t \ \Rightarrow$ енергія $\mathscr{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \approx A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\dot{x}^2$
  $\dot{x}(t) \approx -A(t)\sin t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon A^2(t)\sin^2 t$
- $\langle\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}\rangle = \frac{\varepsilon}{2}A^2(t) = A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{2}A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв’язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв’язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія $\mathscr{E} = \frac{\dot{x}^2+x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t)\cos t \Rightarrow$ енергія $\mathscr{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \approx A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\dot{x}^2$
  $\dot{x}(t) \approx -A(t)\sin t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon A^2(t)\sin^2 t$
- $\langle\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}\rangle = \frac{\varepsilon}{2}A^2(t) = A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{2}A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія $\mathscr{E} = \frac{\dot{x}^2+x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t)\cos t \Rightarrow$ енергія $\mathscr{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \approx A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\dot{x}^2$
  $\dot{x}(t) \approx -A(t)\sin t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon A^2(t)\sin^2 t$
- $\left\langle \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \frac{\varepsilon}{2}A^2(t) = A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{2}A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія $\mathscr{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t)\cos t \Rightarrow$ енергія $\mathscr{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \approx A \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon \dot{x}^2$ $\dot{x}(t) \approx -A(t)\sin t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon A^2(t)\sin^2 t$
- $\langle \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} A^2(t) = A \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{2} A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2} B(t) \sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія $\mathscr{E} = \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t)\cos t \Rightarrow$ енергія $\mathscr{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \approx A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\dot{x}^2$
  $\dot{x}(t) \approx -A(t)\sin t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon A^2(t)\sin^2 t$
- $\langle\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}\rangle = \frac{\varepsilon}{2}A^2(t) = A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{2}A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв’язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \tfrac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \tfrac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots$
- $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}t^2} + x_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + x_1 = \dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\[1ex] x_1(t) = \dfrac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t \end{cases}$$

Розбіжність при $t > 1/\varepsilon$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\frac{dx}{dt} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \tfrac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots$
- $$\begin{cases} \dfrac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = \dfrac{dx_0}{dt} \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \dfrac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t \end{cases}$$

Розбіжність при $t > 1/\varepsilon$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \tfrac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots$
- $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}t^2} + x_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + x_1 = \dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\[1ex] x_1(t) = \dfrac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t \end{cases}$$

Розбіжність при $t > 1/\varepsilon$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon\frac{dx}{dt}+x=0 \qquad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=0.$$

$$x(t)=A(t)\cos\omega t+\frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega=\sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t)=e^{-\varepsilon t/2},\ B(t)=\frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\cdots$
- $$\begin{cases}\dfrac{d^2x_0}{dt^2}+x_0=0\\[2ex] \dfrac{d^2x_1}{dt^2}+x_1=\dfrac{dx_0}{dt}\end{cases}$$
- $$\begin{cases}x_0(t)=\cos t\\[1ex] x_1(t)=\dfrac{1}{2}\sin t-\dfrac{t}{2}\cos t\end{cases}$$

Розбіжність при $t>1/\varepsilon$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \tfrac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots$
- $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}t^2} + x_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + x_1 = \dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} \end{cases}$
- $\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \dfrac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t \end{cases}$

- $x(t) = A(\varepsilon t)\cos\left(\omega(\varepsilon)t\right) + \varepsilon B(\varepsilon t)\sin\left(\omega(\varepsilon)t\right)$
- $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \cdots$
- $k_1 = 0,\ k_2 = -\frac{1}{8},\ A(\varepsilon t) = e^{-\varepsilon t/2},$ $B(\varepsilon t) = \frac{1}{2}e^{-\varepsilon t/2}$

$\Longrightarrow$ Розбіжність при $t > 1/\varepsilon$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\frac{dx}{dt} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots$
- $$\begin{cases} \dfrac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = \dfrac{dx_0}{dt} \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{t}{2}\cos t \end{cases}$$

Розбіжність при $t > 1/\varepsilon$

- $x(t) = A(\varepsilon t)\cos(\omega(\varepsilon)t) + \varepsilon B(\varepsilon t)\sin(\omega(\varepsilon)t)$
- $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \cdots$
- $k_1 = 0,\ k_2 = -\frac{1}{8},\ A(\varepsilon t) = e^{-\varepsilon t/2},$ $B(\varepsilon t) = \frac{1}{2}e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\frac{dx}{dt} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots$
- $$\begin{cases} \dfrac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = \dfrac{dx_0}{dt} \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{t}{2}\cos t \end{cases}$$

- $x(t) = A(\varepsilon t)\cos(\omega(\varepsilon)t) + \varepsilon B(\varepsilon t)\sin(\omega(\varepsilon)t)$
- $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \cdots$
- $k_1 = 0,\ k_2 = -\frac{1}{8},\ A(\varepsilon t) = e^{-\varepsilon t/2},$ $B(\varepsilon t) = \frac{1}{2}e^{-\varepsilon t/2}$

Розбіжність при $t > 1/\varepsilon$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\frac{dx}{dt} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \tfrac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots$
- $\begin{cases} \dfrac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = \dfrac{dx_0}{dt} \end{cases}$
- $\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \dfrac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t \end{cases}$

Розбіжність при $t > 1/\varepsilon$

- $x(t) = A(\varepsilon t)\cos(\omega(\varepsilon)t) + \varepsilon B(\varepsilon t)\sin(\omega(\varepsilon)t)$
- $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \cdots$
- $k_1 = 0,\ k_2 = -\frac{1}{8},\ A(\varepsilon t) = e^{-\varepsilon t/2},$ $B(\varepsilon t) = \frac{1}{2}e^{-\varepsilon t/2}$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

- $T_0 = t,\ T_1 = \varepsilon t,\ T_2 = \varepsilon^2 t,\ \ldots$
- Обмежимося другим порядком: $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \tfrac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

- $T_0 = t,\ T_1 = \varepsilon t,\ T_2 = \varepsilon^2 t,\ \ldots$
- Обмежимось другим порядком: $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\frac{dx}{dt} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \tfrac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

- $T_0 = t,\ T_1 = \varepsilon t,\ T_2 = \varepsilon^2 t,\ \dots$
- Обмежимось другим порядком: $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon\frac{dx}{dt}+x=0 \qquad x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=0.$$

$$x(t)=A(t)\cos\omega t+\tfrac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega=\sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t)=e^{-\varepsilon t/2},\ B(t)=\frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

- $T_0=t,\ T_1=\varepsilon t,\ T_2=\varepsilon^2 t,\ \dots$
- Обмежимось другим порядком: $x(t)=x(T_0,T_1,T_2)$
- $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x=x_0(T_0,T_1,T_2)+\varepsilon x_1(T_0,T_1,T_2)+\varepsilon^2 x_2(T_0,T_1,T_2)$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \tfrac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

- $T_0 = t,\ T_1 = \varepsilon t,\ T_2 = \varepsilon^2 t,\ \dots$
- Обмежимось другим порядком: $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

- $T_0 = t,\ T_1 = \varepsilon t,\ T_2 = \varepsilon^2 t,\ \ldots$
- Обмежимось другим порядком: $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\dfrac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\dfrac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \dfrac{\partial x_0}{\partial T_1} - \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$
- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i\left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{iT_0} + i\left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1}\right)e^{-iT_0}$
- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \quad B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2}\cos\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2}\sin\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + O(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\dfrac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\dfrac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \dfrac{\partial x_0}{\partial T_1} - \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right) t\right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2} \sin\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right) t\right] + O(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\dfrac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\dfrac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \dfrac{\partial x_0}{\partial T_1} - \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\dfrac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\dfrac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \dfrac{\partial x_0}{\partial T_1} - \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$
- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i\left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{iT_0} + i\left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1}\right)e^{-iT_0}$
- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:
$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \;\Rightarrow\; A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \; B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2}\cos\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2}\sin\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + O(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\dfrac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\dfrac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \dfrac{\partial x_0}{\partial T_1} - \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$
- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i\left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{iT_0} + i\left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1}\right)e^{-iT_0}$
- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:
$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \; B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2}\cos\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2}\sin\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + O(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\dfrac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\dfrac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \dfrac{\partial x_0}{\partial T_1} - \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$
- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i\left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{iT_0} + i\left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1}\right)e^{-iT_0}$
- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \ B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2}\cos\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2}\sin\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0 \qquad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=0.$
- $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2}+x_0=0\\[2mm] \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2}+x_1=-\dfrac{\partial x_0}{\partial T_0}-2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0\partial T_1}\\[2mm] \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2}+x_2=-\dfrac{\partial x_1}{\partial T_0}-2\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0\partial T_1}-\dfrac{\partial x_0}{\partial T_1}-\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2}-2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0\partial T_2}\end{cases}$$

- $x_0=A(T_1,T_2)e^{iT_0}+B(T_1,T_2)e^{-iT_0}$
- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2}+x_1=-i\left(A+2\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{iT_0}+i\left(B+2\frac{\partial B}{\partial T_1}\right)e^{-iT_0}$
- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0}\Rightarrow te^{\pm iT_0}$:

$$A+2\frac{\partial A}{\partial T_1}=0\ \Rightarrow\ A(T_1,T_2)=A_1(T_2)e^{-T_1/2},\ B(T_1,T_2)=B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t)=e^{-\varepsilon t/2}\cos\left[\left(1-\frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right]+\frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2}\sin\left[\left(1-\frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right]+\mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\dfrac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\dfrac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \dfrac{\partial x_0}{\partial T_1} - \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$
- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i\left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{iT_0} + i\left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1}\right)e^{-iT_0}$
- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:
$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \;\Rightarrow\; A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2}, \;B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2}\cos\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2}\sin\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x,t) = \frac{3v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан
  $\mathscr{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w_x^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2, \; w_x \equiv u$
- Гамільтоніан
  $\mathscr{H} = w_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial w_t} - \mathscr{L} = -\frac{1}{6}w_x^3 + \frac{1}{2}w_{xx}^2$

Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u,x,t)$
- Збурення $\varepsilon R(u,x,t) \ll 1$. Структура солітонна не змінна, але $v = v(\varepsilon,t)$
- Повна енергія

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x,t) = \frac{3v}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан
$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\varpi_x\varpi_t + \frac{1}{6}\varpi_x^3 - \frac{1}{2}\varpi_{xx}^2,\ \varpi_x \equiv u$
- Гамільтоніан
$\mathscr{H} = \varpi_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varpi_t} - \mathscr{L} = -\frac{1}{6}\varpi_x^3 + \frac{1}{2}\varpi_{xx}^2$

Збурене рівняння КдВ

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x,t) = \frac{3v}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан
$\mathscr{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w_x^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2$, $w_x \equiv u$
- Гамільтоніан
$\mathscr{H} = w_t \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_t} - \mathscr{L} = -\frac{1}{6}w_x^2 + \frac{1}{2}w_{xx}^2$

Збурене рівняння КдВ

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x,t) = \frac{3v}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан
  $\mathscr{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w_x^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2,\ w_x \equiv u$
- Гамільтоніан
  $\mathscr{H} = w_t \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_t} - \mathscr{L} = -\frac{1}{6}w_x^2 + \frac{1}{2}w_{xx}^2$

Збурене рівняння КдВ

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x,t) = \frac{3v}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан
  $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\varpi_x\varpi_t + \frac{1}{6}\varpi_x^3 - \frac{1}{2}\varpi_{xx}^2,\ \varpi_x \equiv u$
- Гамільтоніан
  $\mathscr{H} = \varpi_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varpi_t} - \mathscr{L} = -\frac{1}{6}\varpi_x^2 + \frac{1}{2}\varpi_{xx}^2$

Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon R(u, x, t)$
- Збурення $\epsilon R(u, x, t) \ll 1$. Структура солітонна не змінна, але $v = v(\epsilon, t)$.
- Повна енергія

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв’язок

$$u(x,t) = \frac{3v}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан
  $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\varpi_x\varpi_t + \frac{1}{6}\varpi_x^3 - \frac{1}{2}\varpi_{xx}^2$, $\varpi_x \equiv u$
- Гамільтоніан
  $\mathscr{H} = \varpi_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varpi_t} - \mathscr{L} = -\frac{1}{6}\varpi_x^2 + \frac{1}{2}\varpi_{xx}^2$

Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u,x,t)$
- Збурення $\varepsilon R(u,x,t) \ll 1$. Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon,t)$.
- Повна енергія

$$\mathscr{E} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{H}\,\mathrm{d}x = -\frac{36}{5}v^{5/2}.$$

- $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{Д.З.}}{=} \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} R\varpi_t\,\mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}}\int_{-\infty}^{+\infty} Ru\,\mathrm{d}x.$

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x,t) = \frac{3v}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан
  $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\varpi_x\varpi_t + \frac{1}{6}\varpi_x^3 - \frac{1}{2}\varpi_{xx}^2, \ \varpi_x \equiv u$
- Гамільтоніан
  $\mathscr{H} = \varpi_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varpi_t} - \mathscr{L} = -\frac{1}{6}\varpi_x^2 + \frac{1}{2}\varpi_{xx}^2$

Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u,x,t)$
- Збурення $\varepsilon R(u,x,t) \ll 1$. Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon,t)$.
- Повна енергія

$$\mathscr{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}\,\mathrm{d}x = -\frac{36}{5}v^{5/2}.$$

- $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{Д.З.}}{=} \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R\varpi_t\,\mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ru\,\mathrm{d}x.$

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x,t) = \frac{3v}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан
  $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\varpi_x\varpi_t + \frac{1}{6}\varpi_x^3 - \frac{1}{2}\varpi_{xx}^2, \quad \varpi_x \equiv u$
- Гамільтоніан
  $\mathscr{H} = \varpi_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varpi_t} - \mathscr{L} = -\frac{1}{6}\varpi_x^2 + \frac{1}{2}\varpi_{xx}^2$

Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u,x,t)$
- Збурення $\varepsilon R(u,x,t) \ll 1$. Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія

$$\mathscr{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}\,\mathrm{d}x = -\frac{36}{5}v^{5/2}.$$

- $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{Д.З.}}{=} \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R\varpi_t\,\mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ru\,\mathrm{d}x.$

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x,t) = \frac{3v}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан
$\mathscr{L} = \frac{1}{2}w_x w_t + \frac{1}{6}w_x^3 - \frac{1}{2}w_{xx}^2$, $w_x \equiv u$
- Гамільтоніан
$\mathscr{H} = w_t \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_t} - \mathscr{L} = -\frac{1}{6}w_x^2 + \frac{1}{2}w_{xx}^2$

Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u,x,t)$
- Збурення $\varepsilon R(u,x,t) \ll 1$. Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія
$\mathscr{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H} \mathrm{d}x = -\frac{36}{5}v^{5/2}$.
- $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{Д.З.}}{=} \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R w_t \mathrm{d}x$.
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R u \mathrm{d}x$.

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x,t) = \frac{3v}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right)}$$

- Лагранжіан
  $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\varpi_x\varpi_t + \frac{1}{6}\varpi_x^3 - \frac{1}{2}\varpi_{xx}^2,\ \varpi_x \equiv u$
- Гамільтоніан
  $\mathscr{H} = \varpi_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varpi_t} - \mathscr{L} = -\frac{1}{6}\varpi_x^2 + \frac{1}{2}\varpi_{xx}^2$

Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u,x,t)$
- Збурення $\varepsilon R(u,x,t) \ll 1$. Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія
  $$\mathscr{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{H}\mathrm{d}x = -\frac{36}{5}v^{5/2}.$$
- $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{Д.З.}}{=} \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R\varpi_t\mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Ru\mathrm{d}x.$

Енергетичний аналіз: солітони Кортвега–де–Вріза

Незбурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
- Односолітонний розв'язок

$$u(x,t) = \frac{3v}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x-vt)\right)}$$

- Лагранжіан
  $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\varpi_x\varpi_t + \frac{1}{6}\varpi_x^3 - \frac{1}{2}\varpi_{xx}^2$, $\varpi_x \equiv u$
- Гамільтоніан
  $\mathscr{H} = \varpi_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varpi_t} - \mathscr{L} = -\frac{1}{6}\varpi_x^2 + \frac{1}{2}\varpi_{xx}^2$

Збурене рівняння КдВ

- $u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R(u,x,t)$
- Збурення $\varepsilon R(u,x,t) \ll 1$. Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія
  $\mathscr{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}\mathrm{d}x = -\frac{36}{5}v^{5/2}$.
- $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{Д.З.}}{=} \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R\varpi_t\mathrm{d}x$.
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R u\mathrm{d}x$.

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R \mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 \mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R\mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 \mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 \mathrm{d}x \implies v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u \mathrm{d}x$

- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону внаслідок збурення.
- Висота шельфу $\sim \varepsilon$, довжина $\sim 1/\varepsilon$, тобто втрачену масу абсорбує шлейф

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R u \mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 \mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 \mathrm{d}x \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}$
- $Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u \mathrm{d}x$
- Парадокс «втраченої» маси — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню.
- Висота шельфу $\sim \varepsilon$, довжина $\sim$ ..., тобто втрачену масу забирає шельф

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R u \mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 \mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 \mathrm{d}x \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}$
- $Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u \mathrm{d}x$

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R\mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2\mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R\mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2\mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u\mathrm{d}x$

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R\mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2\mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2\varepsilon v \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню
- Висота шельфу $\sim \epsilon$, довжина $\sim t$, тобто втрачену масу абсорбує шлейф

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R \mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 \mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2\varepsilon v \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню
- Висота шельфу $\sim \epsilon$, довжина $\sim t$, тобто втрачену масу абсорбує шлейф

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R u \mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 \mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2\varepsilon v \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню
- Висота шельфу $\sim \epsilon$, довжина $\sim t$, тобто втрачену масу абсорбує шлейф

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R u \mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 \mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2\varepsilon v \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню
- Висота шельфу $\sim \epsilon$, довжина $\sim t$, тобто втрачену масу абсорбує шлейф

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R u dx = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$
- $\frac{dv}{dt} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 dx \quad \Rightarrow \quad v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u dx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2\varepsilon v \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню
- Висота шельфу $\sim \epsilon$, довжина $\sim t$, тобто втрачену масу абсорбує шлейф

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R u \mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 \mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2\varepsilon v \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню
- Висота шельфу $\sim \epsilon$, довжина $\sim t$, тобто втрачену масу абсорбує шлейф

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R u \mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 \mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad v(t) = v(0)e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2\varepsilon v \Rightarrow v(t) = v(0)e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню
- Висота шельфу $\sim \epsilon$, довжина $\sim t$, тобто втрачену масу абсорбує шлейф

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Збурене рівняння КдВ: приклад

Збереження енергії

- $R = -u$
- $u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon u$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R u \mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 \mathrm{d}x.$
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{4}{3}\varepsilon v.$
- $v(t) = v(0) e^{-4\varepsilon t/3}.$

Інші закони збереження

- $Q_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad v(t) = v(0) e^{-4\varepsilon t/3}.$
- $Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2\varepsilon v \Rightarrow v(t) = v(0) e^{-2\varepsilon t}.$
- Парадокс «втраченої маси» — виникнення шельфу турбулентного сліду солітону — випромінювання солітону завдяки збуренню
- Висота шельфу $\sim \epsilon$, довжина $\sim t$, тобто втрачену масу абсорбує шлейф

Висновок

Енергетичний аналіз необхідно підтверджувати чисельним моделюванням

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x,t) = 4 \operatorname{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right]$$

- Лагранжіан $\mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1 - \cos u)$
- Гамільтоніан $\mathscr{H} = u_t \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_t} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1 - \cos u)$

Збурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u, x, t)$
- Збурення $\varepsilon R(u, x, t) \ll 1$.
- Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H} dx = \frac{8}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} R u_t dx$$

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right]$$

- Лагранжіан $\mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1-\cos u)$
- Гамільтоніан $\mathscr{H} = u_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1-\cos u)$

Збурене рівняння СҐ

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right]$$

- Лагранжіан $\mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1-\cos u)$
- Гамільтоніан $\mathscr{H} = u_t \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_t} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1-\cos u)$

Збурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u,x,t)$
- Збурення $\varepsilon R(u,x,t) \ll 1$. Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія

$$\mathscr{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H} dx = \frac{8}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} R u_t dx$$

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right]$$

- Лагранжіан $\mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1-\cos u)$
- Гамільтоніан $\mathscr{H} = u_t\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_t} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1-\cos u)$

Збурене рівняння СҐ

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right]$$

- Лагранжіан $\mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1-\cos u)$
- Гамільтоніан
  $\mathscr{H} = u_t \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_t} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1-\cos u)$

Збурене рівняння СҐ

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right]$$

- Лагранжіан $\mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1-\cos u)$
- Гамільтоніан
  $\mathscr{H} = u_t \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_t} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1-\cos u)$

Збурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u,x,t)$
- Збурення $\varepsilon R(u,x,t) \ll 1$.
  Структура солітонна на змінна,
  але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія

$$\mathscr{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}\,\mathrm{d}x = -\frac{8}{\sqrt{1-v^2}}.$$

- $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{Д.З.}}{=} \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R u_t \mathrm{d}x.$

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right]$$

- Лагранжіан $\mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1-\cos u)$
- Гамільтоніан
  $\mathscr{H} = u_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1-\cos u)$

Збурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u,x,t)$
- Збурення $\varepsilon R(u,x,t) \ll 1$.
  Структура солітонна на змінна,
  але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія

  $$\mathscr{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}\,\mathrm{d}x = -\frac{8}{\sqrt{1-v^2}}.$$

- $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{Д.З.}}{=} \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R u_t \mathrm{d}x.$

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x,t) = 4\operatorname{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right]$$

- Лагранжіан $\mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1-\cos u)$
- Гамільтоніан
  $\mathscr{H} = u_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1-\cos u)$

Збурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u,x,t)$
- Збурення $\varepsilon R(u,x,t) \ll 1$.
  Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія

$$\mathscr{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}\,\mathrm{d}x = -\frac{8}{\sqrt{1-v^2}}.$$

- $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{Д.З.}}{=} \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ru_t\,\mathrm{d}x.$

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right]$$

- Лагранжіан $\mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1-\cos u)$
- Гамільтоніан $\mathscr{H} = u_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1-\cos u)$

Збурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u,x,t)$
- Збурення $\varepsilon R(u,x,t) \ll 1$. Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія $\mathscr{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}\,\mathrm{d}x = -\frac{8}{\sqrt{1-v^2}}.$
- $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{Д.З.}}{=} \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ru_t\mathrm{d}x.$

Енергетичний аналіз: солітони рівняння синус Ґордон

Незбурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Один кінк:

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right]$$

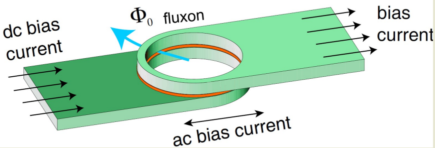
- Лагранжіан $\mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - (1-\cos u)$
- Гамільтоніан
$\mathscr{H} = u_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + (1-\cos u)$

Збурене рівняння СҐ

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R(u,x,t)$
- Збурення $\varepsilon R(u,x,t) \ll 1$.
Структура солітонна на змінна, але $v = v(\varepsilon, t)$.
- Повна енергія
$\mathscr{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}\,\mathrm{d}x = -\frac{8}{\sqrt{1-v^2}}.$
- $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{Д.З.}}{=} \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ru_t\,\mathrm{d}x.$

Збурене рівняння синус Ґордон: приклад

Зразок кільцевого контакту Джозефсона



Довгий джозефсонів контакт

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \epsilon R$

$\epsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma$

α — втрати енергії при тунелюванні нормальних електронів на переході

β — втрати завдяки скінченій довжині проникнення електромагнітного поля в надпровідник

γ — струм зсуву

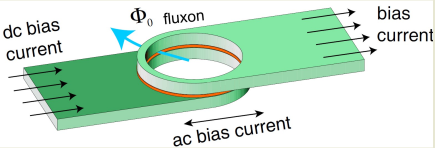
Швидкість флюксона

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi\gamma}{4}(1-v^2)^{3/2} - \alpha v(1-v^2) - \frac{\beta}{3}v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при $\beta = 0$: $v_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(2\alpha/\pi\gamma)^2}}$

Збурене рівняння синус Ґордон: приклад

Зразок кільцевого контакту Джозефсона



Довгий джозефсонів контакт

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R$
- $\varepsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma$

  α — втрати енергії при тунелюванні нормальних електронів на переході

  β — втрати завдяки скінченій довжині проникнення електромагнітного поля в надпровідник

  γ — струм зсуву

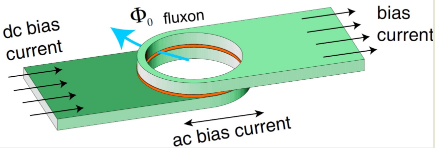
Швидкість флюксона

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi\gamma}{4}(1-v^2)^{3/2} - \alpha v(1-v^2) - \frac{\beta}{3}v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при $\beta = 0$: $v_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(2\alpha/\pi\gamma)^2}}$

Збурене рівняння синус Ґордон: приклад

Зразок кільцевого контакту Джозефсона



Довгий джозефсонів контакт

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R$
- $\varepsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma$
  α — втрати енергії при тунелюванні нормальних електронів на переході
  β — втрати завдяки скінченій довжині проникнення електромагнітного поля в надпровідник
  γ — струм зсуву

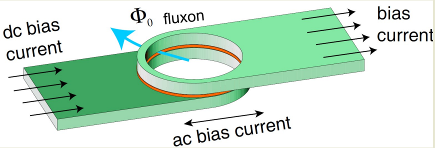
Швидкість флюксона

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi\gamma}{4}(1-v^2)^{3/2} - \alpha v(1-v^2) - \frac{\beta}{3}v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при $\beta = 0$: $v_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(2\alpha/\pi\gamma)^2}}$

Збурене рівняння синус Ґордон: приклад

Зразок кільцевого контакту Джозефсона



Довгий джозефсонів контакт

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R$
- $\varepsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma$
  α — втрати енергії при тунелюванні нормальних електронів на переході
  β — втрати завдяки скінченій довжині проникнення електромагнітного поля в надпровідник
  γ — струм зсуву

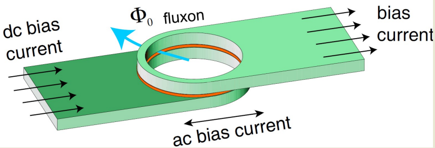
Швидкість флюксона

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi\gamma}{4}(1-v^2)^{3/2} - \alpha v(1-v^2) - \frac{\beta}{3}v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при $\beta = 0$: $v_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(2\alpha/\pi\gamma)^2}}$

Збурене рівняння синус Ґордон: приклад

Зразок кільцевого контакту Джозефсона



Довгий джозефсонів контакт

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R$
- $\varepsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma$
  α — втрати енергії при тунелюванні нормальних електронів на переході
  β — втрати завдяки скінченій довжині проникнення електромагнітного поля в надпровідник
  γ — струм зсуву

Швидкість флюксона

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi\gamma}{4}(1-v^2)^{3/2} - \alpha v(1-v^2) - \frac{\beta}{3}v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при $\beta = 0$: $v_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(2\alpha/\pi\gamma)^2}}$

Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння

Мультимасштабування

- Швидкі змінні: $T_0 = t$, $X_0 = x$
- Повільні змінні: $T_1 = \varepsilon t$, $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x,t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$.
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$
  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:
  $u(x,t) = u(X_0, T_0, T_1)$.

Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння

Мультимасштабування

- Швидкі змінні: $T_0 = t$, $X_0 = x$
- Повільні змінні: $T_1 = \varepsilon t$, $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x,t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$.
- $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial T_1}$
  $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:
  $u(x,t) = u(X_0, T_0, T_1)$.

Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння

Мультимасштабування

- Швидкі змінні: $T_0 = t$, $X_0 = x$
- Повільні змінні: $T_1 = \varepsilon t$, $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x,t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$.
- $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial T_1}$

  $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:

  $u(x,t) = u(X_0, T_0, T_1)$.

Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння

Мультимасштабування

- Швидкі змінні: $T_0 = t$, $X_0 = x$
- Повільні змінні: $T_1 = \varepsilon t$, $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x,t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$.
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$
  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:
  $u(x,t) = u(X_0, T_0, T_1)$.

Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння

Мультимасштабування

- Швидкі змінні: $T_0 = t$, $X_0 = x$
- Повільні змінні: $T_1 = \varepsilon t$, $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x,t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$.
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$
  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:
  $u(x,t) = u(X_0, T_0, T_1)$.

Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння

Мультимасштабування

- Швидкі змінні: $T_0 = t$, $X_0 = x$
- Повільні змінні: $T_1 = \varepsilon t$, $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x,t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$.
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$
  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:
  $u(x,t) = u(X_0, T_0, T_1)$.

Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння

Збурене рівняння СҐ

- $$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}.$$
- Перший крок теорії збурень: $u = u_0 + \varepsilon u_1$
- Другий крок теорії збурень — система рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial X_0^2} + \sin u_0 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial T_0}\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{X_0 X_0} + \cos u_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{\partial u_0}{\partial T_1} \\ R - \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

- Третій крок теорії збурень — розв'язування рівнянь:

u_0 — незбурений розв'язок, але $u_0 = u_0(X_0, T_0, T_1)$

u_1 — збурений розв'язок, $u_1 = u_1(X_0, T_0, T_1)$

Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння

Збурене рівняння СҐ

- $$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}.$$
- Перший крок теорії збурень: $u = u_0 + \varepsilon u_1$
- Другий крок теорії збурень — система рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial X_0^2} + \sin u_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial T_0}\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{X_0 X_0} + \cos u_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{\partial u_0}{\partial T_1} \\ R - \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

- Третій крок теорії збурень — розв'язування рівнянь:

u_0 — незбурений розв'язок, але $u_0 = u_0(X_0, T_0, T_1)$

u_1 — збурений розв'язок, $u_1 = u_1(X_0, T_0, T_1)$

Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння

Збурене рівняння СҐ

- $$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}.$$
- Перший крок теорії збурень: $u = u_0 + \varepsilon u_1$
- Другий крок теорії збурень — система рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial X_0^2} + \sin u_0 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial T_0}\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{X_0 X_0} + \cos u_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{\partial u_0}{\partial T_1} \\ R - \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

- Третій крок теорії збурень — розв'язування рівнянь:

u_0 — незбурений розв'язок, але $u_0 = u_0(X_0, T_0, T_1)$

u_1 — збурений розв'язок, $u_1 = u_1(X_0, T_0, T_1)$

Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння

Збурене рівняння СҐ

- $$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}.$$
- Перший крок теорії збурень: $u = u_0 + \varepsilon u_1$
- Другий крок теорії збурень — система рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial X_0^2} + \sin u_0 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial T_0}\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{X_0 X_0} + \cos u_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{\partial u_0}{\partial T_1} \\ R - \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

- Третій крок теорії збурень — розв'язування рівнянь:

u_0 — незбурений розв'язок, але $u_0 = u_0(X_0, T_0, T_1)$

u_1 — збурений розв'язок, $u_1 = u_1(X_0, T_0, T_1)$

Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння

Збурене рівняння СҐ

- $$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}.$$
- Перший крок теорії збурень: $u = u_0 + \varepsilon u_1$
- Другий крок теорії збурень — система рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial X_0^2} + \sin u_0 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial T_0}\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{X_0 X_0} + \cos u_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{\partial u_0}{\partial T_1} \\ R - \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

- Третій крок теорії збурень — розв'язування рівнянь:

u_0 — незбурений розв'язок, але $u_0 = u_0(X_0, T_0, T_1)$

u_1 — збурений розв'язок, $u_1 = u_1(X_0, T_0, T_1)$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Приклад: кінк

- Усосблений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp\left[\frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}}\right], \qquad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

- Рівняння для u_1:

$$L\begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1\,T_0} \end{bmatrix} = \mathscr{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0,X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v}, \dot{v} - u_{0,X}\dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v}\dot{v} - u_{0\,T_0,X}\dot{X} \end{bmatrix}$$

- $L^\dagger\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \perp \mathscr{F}$
- Умова ортогональності: $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} R u_t \mathrm{d}x$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Приклад: кінк

- Усоблений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp\left[\frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}}\right], \qquad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

- Рівняння для u_1:

$$L\begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1\,T_0} \end{bmatrix} = \mathscr{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0,X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v}, \dot{v} - u_{0,X}\dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v}\dot{v} - u_{0\,T_0,X}\dot{X} \end{bmatrix}$$

- $L^\dagger \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \perp \mathscr{F}$
- Умова ортогональності: $\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} R u_t \mathrm{d}x$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Приклад: кінк

- Усоблений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp\left[\frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}}\right], \qquad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

- Рівняння для u_1:

$$L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1\,T_0} \end{bmatrix} = \mathscr{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0,X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v}, \dot{v} - u_{0,X}\dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v}\dot{v} - u_{0\,T_0,X}\dot{X} \end{bmatrix}$$

- $L^\dagger \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \perp \mathscr{F}$
- Умова ортогональності: $\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} R u_t dx$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Приклад: кінк

- Усоблений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp\left[\frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}}\right], \qquad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

- Рівняння для u_1:

$$L\begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1\,T_0} \end{bmatrix} = \mathscr{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0,X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v},\dot{v} - u_{0,X}\dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v}\dot{v} - u_{0\,T_0,X}\dot{X} \end{bmatrix}$$

- $L^\dagger \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \perp \mathscr{F}$

- Умова ортогональності: $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} R u_t \mathrm{d}x$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Приклад: кінк

- Усоблений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp\left[\frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}}\right], \qquad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

- Рівняння для u_1:

$$L\begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1\,T_0} \end{bmatrix} = \mathscr{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0,X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v},\dot{v} - u_{0,X}\dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v}\dot{v} - u_{0\,T_0,X}\dot{X} \end{bmatrix}$$

- $L^\dagger \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \perp \mathscr{F}$
- Умова ортогональності: $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} R u_t \mathrm{d}x$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Умова ортогональності $L^\dagger\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \perp \mathscr{F}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}T_1} = \frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2} I_1, \qquad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}T_1} = -\frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2} I_2$$

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R\left[u_0(\theta)\right]}{\operatorname{ch}\theta}\mathrm{d}\theta, \qquad I_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta R\left[u_0(\theta)\right]}{\operatorname{ch}\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$u_0(\theta) = \pm\operatorname{arctg}\left(e^{\theta}\right), \qquad \theta = \frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}}$$

Розв'язок

$$u_0(x,t) = 4\operatorname{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - \int\limits_0^t v(t')\mathrm{d}t' - x_0(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}}\right)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{4}(1-v^2)^{3/2} I_1, \qquad \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{4} v(1-v^2) I_2.$$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Умова ортогональності $L^\dagger\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \perp \mathscr{F}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}T_1} = \frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2}I_1, \qquad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}T_1} = -\frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2}I_2$$

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{R\left[u_0(\theta)\right]}{\operatorname{ch}\theta}\mathrm{d}\theta, \qquad I_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta R\left[u_0(\theta)\right]}{\operatorname{ch}\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$u_0(\theta) = \pm\operatorname{arctg}\left(e^\theta\right), \qquad \theta = \frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1-v^2(T_1)}}$$

Розв'язок

$$u_0(x,t) = 4\operatorname{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - \int\limits_0^t v(t')\mathrm{d}t' - x_0(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}}\right)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{4}(1-v^2)^{3/2}I_1, \qquad \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{4}v(1-v^2)I_2.$$