Лекція № 5

Тема лекції:

Рівняння синус Ґордон

План лекції

1. Інтеґрали руху
   - Інтеґровані системи
   - Приклад механічної гамільтонової системи
   - Рівняння КдВ як гамільтонова система
   - Інтеґрали руху для рівняння КдВ
2. Рівняння синус Ґордон
   - Симетрії та інтеґрали руху для СҐ–рівняння
3. Перетворення Беклунда для СҐ–рівняння
   - Односолітонні розв'язки
   - Двосолітонні розв'язки
4. Метод оберненої задачі для СҐ–рівняння
   - Двійка Лакса
   - Аналітичні властивості даних розсіяння
   - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко для СҐ–рівняння
5. Багатосолітонні розв'язки для СҐ–рівняння

План лекції

1. Інтеграли руху
   - Інтеґровані системи
   - Приклад механічної гамільтонової системи
   - Рівняння КдВ як гамільтонова система
   - Інтеґрали руху для рівняння КдВ
2. Рівняння синус Ґордон
   - Симетрії та інтеґрали руху для СҐ–рівняння
3. Перетворення Беклунда для СҐ–рівняння
   - Односолітонні розв'язки
   - Двосолітонні розв'язки
4. Метод оберненої задачі для СҐ–рівняння
   - Двійка Лакса
   - Аналітичні властивості даних розсіяння
   - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко для СҐ–рівняння
5. Багатосолітонні розв'язки для СҐ–рівняння

План лекції

1. Інтеґрали руху
   - Інтеґровані системи
   - Приклад механічної гамільтонової системи
   - Рівняння КдВ як гамільтонова система
   - Інтеґрали руху для рівняння КдВ
2. Рівняння синус Ґордон
   - Симетрії та інтеґрали руху для СҐ–рівняння
3. Перетворення Беклунда для СҐ–рівняння
   - Односолітонні розв'язки
   - Двосолітонні розв'язки
4. Метод оберненої задачі для СҐ–рівняння
   - Двійка Лакса
   - Аналітичні властивості даних розсіяння
   - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко для СҐ–рівняння
5. Багатосолітонні розв'язки для СҐ–рівняння

План лекції

1. Інтеґрали руху
   - Інтеґровані системи
   - Приклад механічної гамільтонової системи
   - Рівняння КдВ як гамільтонова система
   - Інтеґрали руху для рівняння КдВ
2. Рівняння синус Ґордон
   - Симетрії та інтеґрали руху для СҐ–рівняння
3. Перетворення Беклунда для СҐ–рівняння
   - Односолітонні розв'язки
   - Двосолітонні розв'язки
4. Метод оберненої задачі для СҐ–рівняння
   - Двійка Лакса
   - Аналітичні властивості даних розсіяння
   - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко для СҐ–рівняння
5. Багатосолітонні розв'язки для СҐ–рівняння

План лекції

1. Інтеґрали руху
   - Інтеґровані системи
   - Приклад механічної гамільтонової системи
   - Рівняння КдВ як гамільтонова система
   - Інтеґрали руху для рівняння КдВ
2. Рівняння синус Ґордон
   - Симетрії та інтеґрали руху для СҐ–рівняння
3. Перетворення Беклунда для СҐ–рівняння
   - Односолітонні розв'язки
   - Двосолітонні розв'язки
4. Метод оберненої задачі для СҐ–рівняння
   - Двійка Лакса
   - Аналітичні властивості даних розсіяння
   - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко для СҐ–рівняння
5. Багатосолітонні розв'язки для СҐ–рівняння

Інтеґровані механічні системи

Звичайне диференціальне рівняння

Умова інтеґрованості рівняння N–го порядку: N перших інтегралів.

Гамільтонова система

Гамільтоніан $H(\vec{p},\vec{q},t)$: $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $i=\overline{1,n}$ ($2n$ ступенів вільності).
Необхідно знати лише n інтегралів руху в інволюції (теорема Ліувілля-Арнольда):

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} + \{I_i, H\} = 0, \quad \{I_i, I_k\} = 0, \quad I_i(\vec{p},\vec{q},t) = const.$$

Інтеґрованість гамільтонової систем

Змінні дія–кут $(\vec{J},\vec{\alpha})$: $\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H}{\partial J_i}$, $\quad \dot{J}_i = 0, \quad i=\overline{1,n}$

$\vec{J} = \text{const}, \quad \vec{\alpha} = \vec{\alpha}_0 + \vec{\omega}t$

Інтеґровані механічні системи

Звичайне диференціальне рівняння

Умова інтеґрованості рівняння N–го порядку: N перших інтегралів.

Гамільтонова система

Гамільтоніан $H(\vec{p}, \vec{q}, t)$: $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $i = \overline{1, n}$ ($2n$ ступенів вільності).
Необхідно знати лише n інтегралів руху в інволюції (теорема Ліувілля-Арнольда):

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} + \{I_i, H\} = 0, \quad \{I_i, I_k\} = 0, \quad I_i(\vec{p}, \vec{q}, t) = const.$$

Інтеґрованість гамільтонової систем

Змінні дія–кут $(\vec{J}, \vec{\alpha})$: $\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H}{\partial J_i}, \quad \dot{J}_i = 0, \quad i = \overline{1, n}$

$\vec{J} = \text{const}, \ \vec{\alpha} = \vec{\alpha}_0 + \vec{\omega} t$

Інтеґровані механічні системи

Звичайне диференціальне рівняння

Умова інтеґрованості рівняння N–го порядку: N перших інтегралів.

Гамільтонова система

Гамільтоніан $H(\vec{p},\vec{q},t)$: $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $i=\overline{1,n}$ ($2n$ ступенів вільності).
Необхідно знати лише n інтегралів руху в інволюції (теорема Ліувілля-Арнольда):

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} + \{I_i, H\} = 0, \quad \{I_i, I_k\} = 0, \quad I_i(\vec{p},\vec{q},t) = const.$$

Інтеґрованість гамільтонової систем

Змінні дія–кут $(\vec{J},\vec{\alpha})$: $\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H}{\partial J_i}, \quad \dot{J}_i = 0, \quad i=\overline{1,n}$

$\vec{J} = \text{const}$, $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_0 + \vec{\omega} t$

Інтеґровані механічні системи

Звичайне диференціальне рівняння

Умова інтеґрованості рівняння N–го порядку: N перших інтегралів.

Гамільтонова система

Гамільтоніан $H(\vec{p},\vec{q},t)$: $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $i = \overline{1,n}$ ($2n$ ступенів вільності).
Необхідно знати лише n інтегралів руху в інволюції (теорема Ліувілля-Арнольда):

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} + \{I_i, H\} = 0, \quad \{I_i, I_k\} = 0, \quad I_i(\vec{p},\vec{q},t) = const.$$

Інтеґрованість гамільтонової систем

Змінні дія–кут $(\vec{J},\vec{\alpha})$: $\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H}{\partial J_i}, \quad \dot{J}_i = 0, \quad i = \overline{1,n}$
$\vec{J} =$ const, $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_0 + \vec{\omega} t$

Приклад інтеґрованої механічної системи

Система двох осциляторів

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2}{2}, \quad \dot{q}_i = p_i,\ \dot{p}_i = -\omega^2 q_i,\ i = 1, 2.$$

Канонічне перетворення: дія–кут

$$p_i = \sqrt{2\omega_i J_i}\cos\alpha, \quad q_i = -\sqrt{2J_i/\omega_i}\sin\alpha,\ i = 1, 2$$

Розв'язок

$$H' = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2,$$

$$J_1 = J_1^{(0)},\ J_2 = J_2^{(0)},$$

$$\alpha_1 = \omega_1 t + \alpha_1^{(0)},\ \alpha_2 = \omega_2 t + \alpha_2^{(0)}$$

Приклад інтеґрованої механічної системи

Система двох осциляторів

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2}{2}, \quad \dot{q}_i = p_i,\ \dot{p}_i = -\omega^2 q_i,\ i = 1, 2.$$

Канонічне перетворення: дія–кут

$$p_i = \sqrt{2\omega_i J_i}\cos\alpha, \quad q_i = -\sqrt{2J_i/\omega_i}\sin\alpha,\ i = 1, 2$$

Розв'язок

$$H' = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2,$$

$$J_1 = J_1^{(0)},\ J_2 = J_2^{(0)},$$

$$\alpha_1 = \omega_1 t + \alpha_1^{(0)},\ \alpha_2 = \omega_2 t + \alpha_2^{(0)}$$

Приклад інтеґрованої механічної системи

Система двох осциляторів

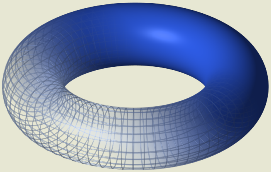
$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2}{2}, \quad \dot{q}_i = p_i,\ \dot{p}_i = -\omega^2 q_i,\ i = 1, 2.$$

Канонічне перетворення: дія–кут

$$p_i = \sqrt{2\omega_i J_i}\cos\alpha, \quad q_i = -\sqrt{2J_i/\omega_i}\sin\alpha,\ i = 1, 2$$

Розв'язок

$$H' = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2,$$
$$J_1 = J_1^{(0)},\ J_2 = J_2^{(0)},$$
$$\alpha_1 = \omega_1 t + \alpha_1^{(0)},\ \alpha_2 = \omega_2 t + \alpha_2^{(0)}$$



Рівняння КдВ як гамільтонова система

Рівняння КдВ

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

Гамільтонів вигляд для КдВ

- Гамільтоніан $H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{q_x^2}{2} - q^3 \right) \mathrm{d}x$
- Варіаційна похідна $\frac{\delta H}{\delta q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_x} = -3q^2 - q_{xx}$
- Гамільтонова форма рівнянь КдВ:

$$q_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q}$$

Рівняння КдВ як гамільтонова система

Рівняння КдВ

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

Гамільтонів вигляд для КдВ

- Гамільтоніан $H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{q_x^2}{2} - q^3 \right) \mathrm{d}x$
- Варіаційна похідна $\frac{\delta H}{\delta q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_x} = -3q^2 - q_{xx}$
- Гамільтонова форма рівнянь КдВ:

$$q_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta q}$$

Рівняння КдВ як гамільтонова система

Рівняння КдВ

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

Гамільтонів вигляд для КдВ

- Гамільтоніан $H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{q_x^2}{2} - q^3 \right) \mathrm{d}x$
- Варіаційна похідна $\frac{\delta H}{\delta q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_x} = -3q^2 - q_{xx}$
- Гамільтонова форма рівнянь КдВ:

$$q_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q}$$

Рівняння КдВ як гамільтонова система

Рівняння КдВ

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

Гамільтонів вигляд для КдВ

- Гамільтоніан $H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{q_x^2}{2} - q^3 \right) \mathrm{d}x$
- Варіаційна похідна $\frac{\delta H}{\delta q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_x} = -3q^2 - q_{xx}$
- Гамільтонова форма рівнянь КдВ:

$$q_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q}$$

Рівняння КдВ як гамільтонова система

Рівняння КдВ

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

Гамільтонів вигляд для КдВ

- Гамільтоніан $H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{q_x^2}{2} - q^3 \right) \mathrm{d}x$
- Варіаційна похідна $\frac{\delta H}{\delta q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_x} = -3q^2 - q_{xx}$
- Гамільтонова форма рівнянь КдВ:

$$q_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q}$$

Інтеґрали руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтеґрує КдВ: $\Phi_{xx} + \left[\lambda^2 + u(x,t)\right]\Phi = 0$
- Дані розсіяння $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$

Рівняння Рікатті

Інтеґрали руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтеґрує КдВ: $\Phi_{xx} + \left[\lambda^2 + u(x,t)\right]\Phi = 0$
- Дані розсіяння $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$

Рівняння Рікатті

Інтеґрали руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтеґрує КдВ: $\Phi_{xx} + \left[\lambda^2 + u(x,t)\right]\Phi = 0$
- Дані розсіяння $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$

Рівняння Рікатті

Інтеґрали руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтеґрує КдВ: $\Phi_{xx} + \left[\lambda^2 + u(x,t)\right]\Phi = 0$
- Дані розсіяння $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$

Рівняння Рікатті

- Розв'язок $\Phi = e^{-i\lambda x}\exp\int_{-\infty}^{x}\chi(\lambda,t,\xi)d\xi \Rightarrow a(\lambda) = \exp\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(\lambda,t,\xi)d\xi$

Інтеґрали руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтеґрує КдВ: $\Phi_{xx} + \left[\lambda^2 + u(x,t)\right]\Phi = 0$
- Дані розсіяння $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$

Рівняння Рікатті

- Розв'язок $\Phi = e^{-i\lambda x} \exp \int\limits_{-\infty}^{x} \chi(\lambda,t,\xi)\mathrm{d}\xi \;\Rightarrow\; a(\lambda) = \exp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda,t,\xi)\mathrm{d}\xi$
- Рівняння для χ: $\overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow}$ $\chi_x - 2i\lambda\chi + \chi^2 + u = 0$
- $\chi(\lambda,t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x,t)}{(2i\lambda)^n} = \frac{\chi_1}{2i\lambda} + \frac{\chi_2}{(2i\lambda)^2} + \cdots$

Інтеґрали руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтеґрує КдВ: $\Phi_{xx} + \left[\lambda^2 + u(x,t)\right]\Phi = 0$
- Дані розсіяння $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$

Рівняння Рікатті

- Розв'язок $\Phi = e^{-i\lambda x} \exp \int\limits_{-\infty}^{x} \chi(\lambda,t,\xi)\mathrm{d}\xi \;\Rightarrow\; a(\lambda) = \exp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda,t,\xi)\mathrm{d}\xi$
- Рівняння для χ: $\overset{\text{д.з.}}{\Rightarrow}$ $\chi_x - 2i\lambda\chi + \chi^2 + u = 0$
- $\chi(\lambda,t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\chi_n(x,t)}{(2i\lambda)^n} = \dfrac{\chi_1}{2i\lambda} + \dfrac{\chi_2}{(2i\lambda)^2} + \cdots$

Інтеґрали руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтеґрує КдВ: $\Phi_{xx} + \left[\lambda^2 + u(x,t)\right]\Phi = 0$
- Дані розсіяння $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$

Рівняння Рікатті

- Розв'язок $\Phi = e^{-i\lambda x} \exp \int\limits_{-\infty}^{x} \chi(\lambda,t,\xi)\mathrm{d}\xi \ \Rightarrow\ a(\lambda) = \exp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda,t,\xi)\mathrm{d}\xi$
- Рівняння для χ: $\overset{\text{д.з.}}{\Rightarrow}$ $\chi_x - 2i\lambda\chi + \chi^2 + u = 0$
- $\chi(\lambda,t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\chi_n(x,t)}{(2i\lambda)^n} = \dfrac{\chi_1}{2i\lambda} + \dfrac{\chi_2}{(2i\lambda)^2} + \cdots$

Інтеґрали руху для рівняння КдВ

Рівняння КдВ

- $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- Рівняння Шредінгера, яке інтеґрує КдВ: $\Phi_{xx} + \left[\lambda^2 + u(x,t)\right]\Phi = 0$
- Дані розсіяння $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$

Рівняння Рікатті

- Розв'язок $\Phi = e^{-i\lambda x} \exp \int\limits_{-\infty}^{x} \chi(\lambda,t,\xi)\mathrm{d}\xi \;\Rightarrow\; a(\lambda) = \exp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda,t,\xi)\mathrm{d}\xi$
- Рівняння для χ: $\overset{\text{д.з.}}{\Rightarrow}$ $\chi_x - 2i\lambda\chi + \chi^2 + u = 0$
- $\chi(\lambda,t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\chi_n(x,t)}{(2i\lambda)^n} = \dfrac{\chi_1}{2i\lambda} + \dfrac{\chi_2}{(2i\lambda)^2} + \cdots$

Закони збереження для КдВ

Інтеґрали руху

- $a(\lambda) = \exp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, t, \xi) \mathrm{d}\xi, \qquad \chi(\lambda, t, x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x,t)}{(2i\lambda)^2}$
- $\Rightarrow \quad 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln a(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2i\lambda)^n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) \mathrm{d}\xi \right)$
- $\Rightarrow \quad I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) \mathrm{d}\xi = \text{const}$

Для знаходження інтеґралів руху потрібно знайти $\chi_n(\xi, t)$

Закони збереження для КдВ

Інтеґрали руху

- $a(\lambda) = \exp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, t, \xi) \mathrm{d}\xi, \qquad \chi(\lambda, t, x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x,t)}{(2i\lambda)^2}$
- $\Rightarrow \quad 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln a(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2i\lambda)^n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) \mathrm{d}\xi \right)$
- $\Rightarrow \quad I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) \mathrm{d}\xi = \text{const}$

Для знаходження інтеґралів руху потрібно знайти $\chi_n(\xi, t)$

Закони збереження для КдВ

Інтеґрали руху

- $a(\lambda) = \exp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, t, \xi) \mathrm{d}\xi, \qquad \chi(\lambda, t, x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x,t)}{(2i\lambda)^2}$
- $\Rightarrow \quad 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln a(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2i\lambda)^n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) \mathrm{d}\xi \right)$
- $\Rightarrow \quad I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) \mathrm{d}\xi = \text{const}$

Для знаходження інтеґралів руху потрібно знайти $\chi_n(\xi, t)$

Закони збереження для КдВ

Інтеґрали руху

- $a(\lambda) = \exp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, t, \xi) \mathrm{d}\xi, \qquad \chi(\lambda, t, x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x,t)}{(2i\lambda)^2}$
- $\Rightarrow \quad 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln a(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2i\lambda)^n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) \mathrm{d}\xi \right)$
- $\Rightarrow \quad I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(\xi, t) \mathrm{d}\xi = \text{const}$

Для знаходження інтеґралів руху потрібно знайти $\chi_n(\xi, t)$

Функції $\chi_n(x,t)$

Рівняння Рікатті: $\chi_x - 2i\lambda\chi + \chi^2 + u = 0, \qquad \chi(\lambda,t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x,t)}{(2i\lambda)^n}$

Розв'язок рівняння Рікатті:

$$
\begin{aligned}
(2i\lambda)^0 &: & -\chi_1 + u &= 0\\
(2i\lambda)^{-1} &: & \chi_{1x} - \chi_2 &= 0\\
(2i\lambda)^{-2} &: & \chi_{2x} - \chi_3 + \chi_1^2 &= 0\\
&\dots\\
(2i\lambda)^{-k} &: & \chi_{kx} - \chi_{k+1} + \sum_{i+j=k+1} \chi_i\chi_j &= 0\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Закони збереження

Функції $\chi_n(x,t)$

$$\chi_1 = u$$
$$\chi_2 = u_x$$
$$\chi_3 = u_{xx} + u^2$$
$$\chi_4 = -u_{xxx} + 2(u^2)_x$$
$$\chi_5 = -u_{xxx} + (u^2)_{xx} + u_x^2 + 2u_{xx}u - 2u^3$$

Закони збереження

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u \mathrm{d}x$$ – закон збереження маси

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u_x \mathrm{d}x = 0$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(u_{xx} + u^2\right) \mathrm{d}x$$ – закон збереження імпульсу

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_4 \mathrm{d}x = 0$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_5 \mathrm{d}x$$ – закон збереження енергії

Закони збереження

Функції $\chi_n(x,t)$

$$
\begin{aligned}
\chi_1 &= u\\
\chi_2 &= u_x\\
\chi_3 &= u_{xx} + u^2\\
\chi_4 &= -u_{xxx} + 2(u^2)_x\\
\chi_5 &= -u_{xxx} + (u^2)_{xx} + u_x^2\\
&\quad + 2u_{xx}u - 2u^3
\end{aligned}
$$

Закони збереження

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u \mathrm{d}x$$ – закон збереження маси

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_x \mathrm{d}x = 0$$

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(u_{xx} + u^2\right) \mathrm{d}x$$ – закон збереження імпульсу

$$I_4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_4 \mathrm{d}x = 0$$

$$I_5 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_5 \mathrm{d}x$$ – закон збереження енергії

Рівняння синус Ґордон (СҐ–рівняння)

СҐ–рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

1. Просторова трансляція $x \to x' = x - X$
2. Часова трансляція $t \to t' = t - T$
3. Перетворення Лоренца: $x \to x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-V^2}}$, $t \to t' = \frac{t - Vx}{\sqrt{1-V^2}}$

Інтеґрали руху

Нескінчена кількість інтеґралів руху

1. Енергія $H = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) dx$
2. Імпульс $P = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x dx$
3. Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x dx$

Рівняння синус Ґордон (СҐ–рівняння)

СҐ–рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \to x' = x - X$
- Часова трансляція $t \to t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \to x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}$, $t \to t' = \frac{t - xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеґрали руху

Нескінчена кількість інтеґралів руху

- Енергія $W = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) dx$
- Імпульс $P = -\int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x \, dx$
- Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x dx$

Рівняння синус Ґордон (СҐ–рівняння)

СҐ–рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \to x' = x - X$
- Часова трансляція $t \to t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \to x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}$, $t \to t' = \frac{t - xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеґрали руху

Нескінчена кількість інтеґралів руху

- Енергія $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) dx$
- Імпульс $P = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x dx$
- Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x dx$

Рівняння синус Ґордон (СҐ–рівняння)

СҐ–рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \to x' = x - X$
- Часова трансляція $t \to t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \to x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$, $t \to t' = \frac{t - xv}{\sqrt{1 - v^2}}$

Інтеґрали руху

Нескінчена кількість інтеґралів руху

- Енергія $H = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) dx$
- Імпульс $P = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x dx$
- Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x dx$

Рівняння синус Ґордон (СҐ–рівняння)

СҐ–рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \to x' = x - X$
- Часова трансляція $t \to t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \to x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}$, $t \to t' = \frac{t - xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеґрали руху

Нескінчена кількість інтеґралів руху

- Енергія $H = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) dx$
- Імпульс $P = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x dx$
- Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x dx$

Рівняння синус Ґордон (СҐ–рівняння)

СҐ–рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \to x' = x - X$
- Часова трансляція $t \to t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \to x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}$, $t \to t' = \frac{t - xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеґрали руху

Нескінчена кількість інтеґралів руху

- Енергія $H = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) \mathrm{d}x$
- Імпульс $P = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x \mathrm{d}x$
- Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x \mathrm{d}x$

Рівняння синус Ґордон (СҐ–рівняння)

СҐ–рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \to x' = x - X$
- Часова трансляція $t \to t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \to x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}$, $t \to t' = \frac{t - xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеґрали руху

Нескінчена кількість інтеґралів руху

- Енергія $H = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) \mathrm{d}x$
- Імпульс $P = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x \mathrm{d}x$
- Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x \mathrm{d}x$

Рівняння синус Ґордон (СҐ–рівняння)

СҐ–рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \to x' = x - X$
- Часова трансляція $t \to t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \to x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}$, $t \to t' = \frac{t-xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеґрали руху

Нескінчена кількість інтеґралів руху

- Енергія $H = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) \mathrm{d}x$
- Імпульс $P = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x \mathrm{d}x$
- Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x \mathrm{d}x$

Рівняння синус Ґордон (СҐ–рівняння)

СҐ–рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \to x' = x - X$
- Часова трансляція $t \to t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \to x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}$, $t \to t' = \frac{t - xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеґрали руху

Нескінчена кількість інтеґралів руху

- Енергія $H = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) \mathrm{d}x$
- Імпульс $P = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x \mathrm{d}x$
- Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x \mathrm{d}x$

Перетворення Беклунда для СҐ–рівняння

Симетрична форма СҐ–рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u \;\Rightarrow\; \left|\begin{matrix} x \to x - t \\ t \to t + x \end{matrix}\right| \;\Rightarrow$$

$$u_{xt} = \sin u$$

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin\dfrac{u+v}{2} \\ \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\dfrac{1}{\lambda}\sin\dfrac{u-v}{2} \end{cases} \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \begin{cases} u_{xt} = \sin u \\ v_{xt} = \sin v \end{cases}$$

Односолітонний розв'язок $N = 1$

$$u = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{v_x}{2} = \lambda \sin\dfrac{v}{2} \\ \dfrac{v_t}{2} = \dfrac{1}{\lambda}\sin\dfrac{v}{2} \end{cases} \Rightarrow \left|\omega = \frac{v}{2}\right| \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\omega}{\sin\omega} = \lambda \mathrm{d}x \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \mathrm{tg}\,\frac{v}{4} = e^{-\frac{\lambda}{2}[x - c(t)]}$$

$$c(t): \quad \frac{v_t}{2} = \frac{1}{\lambda}\sin\frac{v}{2} \quad \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \quad v(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\, e^{-\frac{\lambda}{2}(x - x_0) - \frac{1}{2\lambda}(t - t_0)}$$

Перетворення Беклунда для СҐ–рівняння

Симетрична форма СҐ–рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u \;\Rightarrow\; \left|\begin{matrix} x \to x - t \\ t \to t + x \end{matrix}\right| \;\Rightarrow$$

$$u_{xt} = \sin u$$

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \dfrac{u+v}{2} \\ \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\dfrac{1}{\lambda} \sin \dfrac{u-v}{2} \end{cases} \overset{\text{д.з.}}{\Longrightarrow} \begin{cases} u_{xt} = \sin u \\ v_{xt} = \sin v \end{cases}$$

Односолітонний розв'язок $N = 1$

$$u = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{v_x}{2} = \lambda \sin \dfrac{v}{2} \\ \dfrac{v_t}{2} = \dfrac{1}{\lambda} \sin \dfrac{v}{2} \end{cases} \Rightarrow \left| \omega = \frac{v}{2} \right| \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\omega}{\sin \omega} = \lambda \mathrm{d}x \overset{\text{д.з.}}{\Longrightarrow} \operatorname{tg} \frac{v}{4} = e^{-\frac{\lambda}{2}[x - c(t)]}$$

$$c(t): \quad \frac{v_t}{2} = \frac{1}{\lambda} \sin \frac{v}{2} \quad \overset{\text{д.з.}}{\Longrightarrow} \quad v(x,t) = 4 \operatorname{arctg} e^{-\frac{\lambda}{2}(x - x_0) - \frac{1}{2\lambda}(t - t_0)}$$

Перетворення Беклунда для СҐ–рівняння

Симетрична форма СҐ–рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u \;\Rightarrow\; \left| \begin{matrix} x \to x - t \\ t \to t + x \end{matrix} \right| \;\Rightarrow$$

$$u_{xt} = \sin u$$

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \dfrac{u+v}{2} \\ \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\dfrac{1}{\lambda} \sin \dfrac{u-v}{2} \end{cases} \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \begin{cases} u_{xt} = \sin u \\ v_{xt} = \sin v \end{cases}$$

Односолітонний розв'язок $N = 1$

$$u = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{v_x}{2} = \lambda \sin \dfrac{v}{2} \\ \dfrac{v_t}{2} = \dfrac{1}{\lambda} \sin \dfrac{v}{2} \end{cases} \Rightarrow \left| \omega = \dfrac{v}{2} \right| \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\sin \omega} = \lambda \mathrm{d}x \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \operatorname{tg} \dfrac{v}{4} = e^{-\frac{\lambda}{2}[x - c(t)]}$$

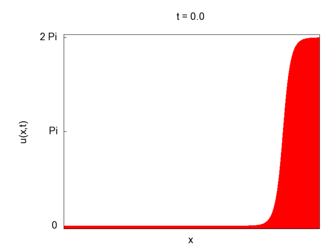
$$c(t):\quad \dfrac{v_t}{2} = \dfrac{1}{\lambda} \sin \dfrac{v}{2} \quad \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \quad v(x,t) = 4 \operatorname{arctg} e^{-\frac{\lambda}{2}(x - x_0) - \frac{1}{2\lambda}(t - t_0)}$$

Односолітонні розв’язки

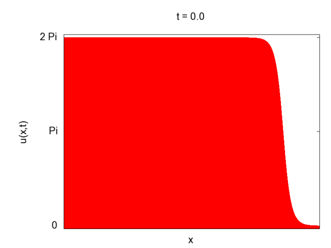
$v(x,t) = 4 \operatorname{arctg} e^{-\frac{\lambda}{2}(x-x_0) - \frac{1}{2\lambda}(t-t_0)}$

Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x \mathrm{d}x = \frac{u(+\infty,t)-u(-\infty,t)}{2\pi} = \pm n,\ n \in \mathbb{N}$

Кінк ($\lambda < 0$)



Антикінк ($\lambda > 0$)



Двосолітонні розв'язки

Низка перетворень

- v_0 — тривіальний розв'язок
- v_1, v_2 — односолітонні розв'язки
- v_3 — двосолітонний розв'язок

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема побудови двосолітонного розв'язку

$$\begin{tikzcd} & \boxed{v_0} \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & \\ \boxed{v_1} \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & & \boxed{v_2} \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \\ & \boxed{v_3} & \end{tikzcd}$$

Двосолітонні розв’язки

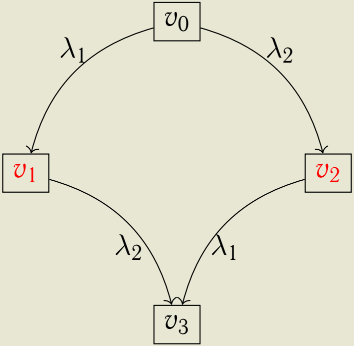
Низка перетворень

- υ_0 — тривіальний розв’язок
- υ_1, υ_2 — односолітонні розв’язки
- υ_3 — двосолітонний розв’язок

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - \upsilon_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+\upsilon}{2} \\ \dfrac{u_t + \upsilon_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-\upsilon}{2} \end{cases}$$

Схема побудови двосолітонного розв’язку



Двосолітонні розв'язки

Низка перетворень

- v_0 — тривіальний розв'язок
- v_1, v_2 — односолітонні розв'язки
- v_3 — двосолітонний розв'язок

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin\frac{u+v}{2} \\[2ex] \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin\frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема побудови двосолітонного розв'язку

$$\begin{tikzcd} & \boxed{v_0} \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & \\ \boxed{v_1} \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & & \boxed{v_2} \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \\ & \boxed{v_3} & \end{tikzcd}$$

Двосолітонні розв'язки

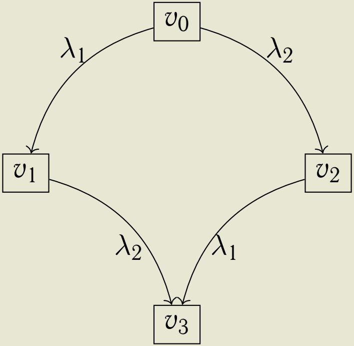
Низка перетворень

- υ_0 — тривіальний розв'язок
- υ_1, υ_2 — односолітонні розв'язки
- υ_3 — двосолітонний розв'язок

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - \upsilon_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+\upsilon}{2} \\ \dfrac{u_t + \upsilon_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-\upsilon}{2} \end{cases}$$

Схема побудови двосолітонного розв'язку



Двосолітонні розв'язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема

$$\begin{tikzcd} & \boxed{v_0} \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & \\ \boxed{v_1} \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & & \boxed{v_2} \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \\ & \boxed{v_3} & \end{tikzcd}$$

$N = 1$

$$\begin{cases} N = 0 & u = v_0 = 0 \\ N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_1}{2} \\ \left(\dfrac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_2}{2} \end{cases}$$

$N = 2$

$$\begin{cases} N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N = 2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_3 + v_1}{2} \\ \left(\dfrac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонні розв'язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\[2mm] \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема

$$\begin{tikzcd} & \boxed{v_0} \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & \\ \boxed{v_1} \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & & \boxed{v_2} \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \\ & \boxed{v_3} & \end{tikzcd}$$

$N = 1$

$$\begin{cases} N = 0 & u = v_0 = 0 \\ N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_1}{2} \\[2mm] \left(\dfrac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_2}{2} \end{cases}$$

$N = 2$

$$\begin{cases} N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N = 2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_3 + v_1}{2} \\[2mm] \left(\dfrac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонні розв'язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\[2mm] \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема

$$\begin{tikzcd} & v_0 \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & \\ v_1 \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & & v_2 \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \\ & v_3 & \end{tikzcd}$$

$N = 1$

$$\begin{cases} N = 0 & u = v_0 = 0 \\ N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_1}{2} \\[2mm] \left(\dfrac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_2}{2} \end{cases}$$

$N = 2$

$$\begin{cases} N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N = 2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_3 + v_1}{2} \\[2mm] \left(\dfrac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонні розв’язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\[2mm] \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема

$$\begin{tikzcd} & \boxed{v_0} \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & \\ \boxed{v_1} \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & & \boxed{v_2} \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \\ & \boxed{v_3} & \end{tikzcd}$$

$N = 1$

$$\begin{cases} N = 0 & u = v_0 = 0 \\ N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_1}{2} \\[2mm] \left(\dfrac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_2}{2} \end{cases}$$

$N = 2$

$$\begin{cases} N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N = 2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_3 + v_1}{2} \\[2mm] \left(\dfrac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв’язок

$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонні розв'язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема

$$\begin{tikzcd} & v_0 \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & \\ v_1 \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & & v_2 \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \\ & v_3 & \end{tikzcd}$$

$N = 1$

$$\begin{cases} N = 0 & u = v_0 = 0 \\ N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_1}{2} \\ \left(\dfrac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_2}{2} \end{cases}$$

$N = 2$

$$\begin{cases} N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N = 2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_3 + v_1}{2} \\ \left(\dfrac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонні розв'язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\[2mm] \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема

$$\begin{tikzcd} & \boxed{v_0} \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & \\ \boxed{v_1} \arrow[dr, bend left, "\lambda_2"] & & \boxed{v_2} \arrow[dl, bend right, "\lambda_1"'] \\ & \boxed{v_3} & \end{tikzcd}$$

$N=1$

$$\begin{cases} N=0 & u = v_0 = 0 \\ N=1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_1}{2} \\[2mm] \left(\dfrac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_2}{2} \end{cases}$$

$N=2$

$$\begin{cases} N=1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N=2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_3 + v_1}{2} \\[2mm] \left(\dfrac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонні розв'язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u+v}{2} \\ \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема

$$\begin{tikzcd} & \boxed{v_0} \arrow[dl, "\lambda_1"'] \arrow[dr, "\lambda_2"] & \\ \boxed{v_1} \arrow[dr, "\lambda_2"'] & & \boxed{v_2} \arrow[dl, "\lambda_1"] \\ & \boxed{v_3} & \end{tikzcd}$$

$N = 1$

$$\begin{cases} N = 0 & u = v_0 = 0 \\ N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_1}{2} \\ \left(\dfrac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_2}{2} \end{cases}$$

$N = 2$

$$\begin{cases} N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N = 2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_3 + v_1}{2} \\ \left(\dfrac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонний розв'язок: кінк–антикінк

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg}\frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\operatorname{tg}\frac{v_2-v_1}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{v_j}{4} = e^{\theta_j},\ \theta_j = \frac{\lambda_j x}{2} + \frac{t}{2\lambda_j} + \delta_j,\ j=1,2$$

$$u(x,t) = v_3 = 4\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\frac{e^{\theta_1}-e^{\theta_2}}{1+e^{\theta_1+\theta_2}}\right).$$

Двійка кінк–антикінк

$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \in \mathbb{R},$

$$v = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}\frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}}{v\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{1-v^2}}}$$

Двосолітонний розв'язок: кінк–антикінк

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg}\frac{v_3}{2}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\operatorname{tg}\frac{v_2-v_1}{2},\qquad \operatorname{tg}\frac{v_j}{4}=e^{\theta_j},\ \theta_j=\frac{\lambda_j x}{2}+\frac{t}{2\lambda_j}+\delta_j,\ j=1,2$$

$$u(x,t)=v_3=4\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\frac{e^{\theta_1}-e^{\theta_2}}{1+e^{\theta_1+\theta_2}}\right).$$

Двійка кінк–антикінк

$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \in\mathbb{R},$

$$v=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4}=\frac{\operatorname{sh}\frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}}{v\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{1-v^2}}}$$

Двосолітонний розв'язок: кінк–антикінк

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg}\frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\operatorname{tg}\frac{v_2-v_1}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{v_j}{4} = e^{\theta_j},\ \theta_j = \frac{\lambda_j x}{2} + \frac{t}{2\lambda_j} + \delta_j,\ j=1,2$$

$$u(x,t) = v_3 = 4\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\frac{e^{\theta_1}-e^{\theta_2}}{1+e^{\theta_1+\theta_2}}\right).$$

Двійка кінк–антикінк

$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \in\mathbb{R}$,

$$v = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}\frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}}{v\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{1-v^2}}}$$

Двосолітонний розв'язок: кінк–антикінк

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg}\frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\operatorname{tg}\frac{v_2-v_1}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{v_j}{4} = e^{\theta_j},\ \theta_j = \frac{\lambda_j x}{2} + \frac{t}{2\lambda_j} + \delta_j,\ j=1,2$$

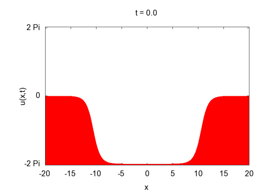
$$u(x,t) = v_3 = 4\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\frac{e^{\theta_1}-e^{\theta_2}}{1+e^{\theta_1+\theta_2}}\right).$$

Двійка кінк–антикінк

$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \in\mathbb{R},$

$$v = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}\frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}}{v\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{1-v^2}}}$$



Двосолітонний розв'язок: кінк–антикінк

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg}\frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\operatorname{tg}\frac{v_2-v_1}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{v_j}{4} = e^{\theta_j},\ \theta_j = \frac{\lambda_j x}{2} + \frac{t}{2\lambda_j} + \delta_j,\ j=1,2$$

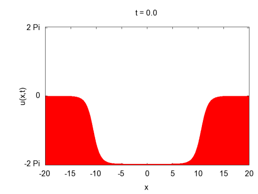
$$u(x,t) = v_3 = 4\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\frac{e^{\theta_1}-e^{\theta_2}}{1+e^{\theta_1+\theta_2}}\right).$$

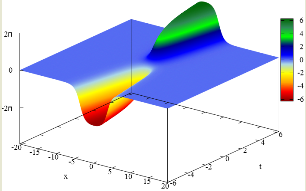
Двійка кінк–антикінк

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \in\mathbb{R},$$

$$v = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}\frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}}{v\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{1-v^2}}}$$





Двосолітонний розв'язок: брізер

Брізер

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v\operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}, \qquad v = \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}, \quad \omega < 1$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4} = \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}\,\frac{\operatorname{sh}(\omega(t - v_e x)/\sqrt{1-v_e^2})}{\operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2}(x - v_e t)/\sqrt{1-v_e^2})}$$

Стаціонарний брізер: $v_e = 0$

Рухомий брізер: $v_e > 0$

Двосолітонний розв'язок: брізер

Брізер

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4}=\frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v\operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})},\qquad v=\frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}},\quad \omega<1$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4}=\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}\frac{\operatorname{sh}(\omega(t-v_e x)/\sqrt{1-v_e^2})}{\operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2}(x-v_e t)/\sqrt{1-v_e^2})}$$

Стаціонарний брізер: $v_e=0$

Рухомий брізер: $v_e>0$

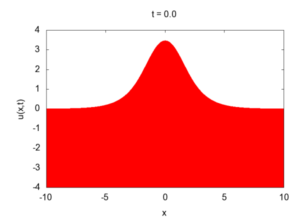
Двосолітонний розв'язок: брізер

Брізер

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v\operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}, \qquad v = \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}, \quad \omega < 1$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4} = \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}\frac{\operatorname{sh}(\omega(t-v_e x)/\sqrt{1-v_e^2})}{\operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2}(x-v_e t)/\sqrt{1-v_e^2})}$$

Стаціонарний брізер: $v_e = 0$



Рухомий брізер: $v_e > 0$

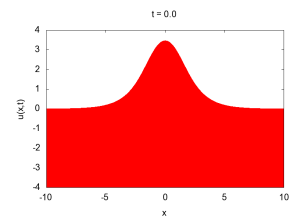
Двосолітонний розв'язок: брізер

Брізер

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v\operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}, \qquad v = \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}, \quad \omega < 1$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4} = \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}\frac{\operatorname{sh}(\omega(t-v_e x)/\sqrt{1-v_e^2})}{\operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2}(x-v_e t)/\sqrt{1-v_e^2})}$$

Стаціонарний брізер: $v_e = 0$



Рухомий брізер: $v_e > 0$

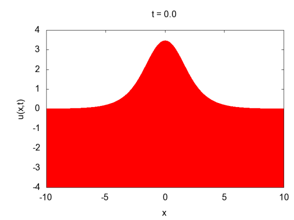
Двосолітонний розв'язок: брізер

Брізер

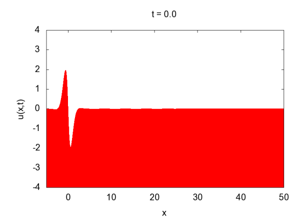
$$\operatorname{tg}\frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v\operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}, \qquad v = \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}, \quad \omega < 1$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4} = \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}\,\frac{\operatorname{sh}(\omega(t-v_e x)/\sqrt{1-v_e^2})}{\operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2}(x-v_e t)/\sqrt{1-v_e^2})}$$

Стаціонарний брізер: $v_e = 0$



Рухомий брізер: $v_e > 0$



Оператори Лакса для СҐ–рівняння

Двійка Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

Оператори Лакса для СҐ–рівняння

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} i\lambda & \frac{iu_x}{2} \\ \frac{iu_x}{2} & -i\lambda \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i\sin u \\ i\sin u & -\cos u \end{pmatrix}$$

$$L_t - A_x = [L, A] \quad \overset{\text{Д.З.}}{\Longrightarrow} \quad u_{xt} = \sin u$$

Перше рівняння Лакса

$$\Psi_x = L\Psi, \ \Phi_1 \equiv \Psi_{21}, \ \Phi_2 \equiv \Psi_{22}$$

$$\begin{cases} (\Phi_1)_x = i\lambda\Phi_1 + \dfrac{iu}{2}\Phi_2, \\ (\Phi_2)_x = \dfrac{iu}{2}\Phi_1 - i\lambda\Phi_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, & x \to -\infty \\ \begin{pmatrix} b(\lambda,t)e^{i\lambda x} \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, & x \to +\infty \end{cases}$$

Оператори Лакса для СҐ–рівняння

Двійка Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

Оператори Лакса для СҐ–рівняння

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} i\lambda & \frac{iu_x}{2} \\ \frac{iu_x}{2} & -i\lambda \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i\sin u \\ i\sin u & -\cos u \end{pmatrix}$$

$$L_t - A_x = [L, A] \quad \stackrel{\text{Д.З.}}{\Longrightarrow} \quad u_{xt} = \sin u$$

Перше рівняння Лакса

$$\Psi_x = L\Psi, \ \Phi_1 \equiv \Psi_{21}, \ \Phi_2 \equiv \Psi_{22}$$

$$\begin{cases} (\Phi_1)_x = i\lambda\Phi_1 + \dfrac{iu}{2}\Phi_2, \\ (\Phi_2)_x = \dfrac{iu}{2}\Phi_1 - i\lambda\Phi_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, & x \to -\infty \\ \begin{pmatrix} b(\lambda,t)e^{i\lambda x} \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, & x \to +\infty \end{cases}$$

Оператори Лакса для СҐ–рівняння

Двійка Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

Оператори Лакса для СҐ–рівняння

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} i\lambda & \frac{iu_x}{2} \\ \frac{iu_x}{2} & -i\lambda \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i\sin u \\ i\sin u & -\cos u \end{pmatrix}$$

$$L_t - A_x = [L, A] \quad \overset{\text{д.з.}}{\Rightarrow} \quad u_{xt} = \sin u$$

Перше рівняння Лакса

$$\Psi_x = L\Psi, \;\; \Phi_1 \equiv \Psi_{21}, \;\; \Phi_2 \equiv \Psi_{22}$$

$$\begin{cases} (\Phi_1)_x = i\lambda\Phi_1 + \dfrac{iu}{2}\Phi_2, \\ (\Phi_2)_x = \dfrac{iu}{2}\Phi_1 - i\lambda\Phi_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, & x \to -\infty \\ \begin{pmatrix} b(\lambda, t)e^{i\lambda x} \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, & x \to +\infty \end{cases}$$

Аналітичні властивості даних розсіяння

- $|a|^2 + |b|^2 = 1$
- $a(\lambda, t) = a(\lambda)$, $b(\lambda, t) = b(\lambda)e^{-it/2\lambda}$ — часова еволюція даних розсіяння
- $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$, $\bar{a}(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_-$
- Нулі $a(\lambda_n)$ на $\mathbb{C}_+$ відповідають дискретному спектру при $n = \overline{1, N}$
- Для кожної точки дискретного спектру $\Phi_1(\lambda_j, x, t) = b_j(t)\Phi_2(\lambda_j, x, t)$, де $b_j(t) = b_j e^{-it/2\lambda_j}$

Аналітичні властивості даних розсіяння

- $|a|^2 + |b|^2 = 1$
- $a(\lambda, t) = a(\lambda)$, $b(\lambda, t) = b(\lambda)e^{-it/2\lambda}$ — часова еволюція даних розсіяння
- $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$, $\bar{a}(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_-$
- Нулі $a(\lambda_n)$ на $\mathbb{C}_+$ відповідають дискретному спектру при $n = \overline{1, N}$
- Для кожної точки дискретного спектру $\Phi_1(\lambda_j, x, t) = b_j(t)\Phi_2(\lambda_j, x, t)$, де $b_j(t) = b_j e^{-it/2\lambda_j}$

Аналітичні властивості даних розсіяння

- $|a|^2 + |b|^2 = 1$
- $a(\lambda, t) = a(\lambda)$, $b(\lambda, t) = b(\lambda)e^{-it/2\lambda}$ — часова еволюція даних розсіяння
- $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$, $\bar{a}(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_-$
- Нулі $a(\lambda_n)$ на $\mathbb{C}_+$ відповідають дискретному спектру при $n = \overline{1, N}$
- Для кожної точки дискретного спектру $\Phi_1(\lambda_j, x, t) = b_j(t)\Phi_2(\lambda_j, x, t)$, де $b_j(t) = b_j e^{-it/2\lambda_j}$

Аналітичні властивості даних розсіяння

- $|a|^2 + |b|^2 = 1$
- $a(\lambda, t) = a(\lambda)$, $b(\lambda, t) = b(\lambda)e^{-it/2\lambda}$ — часова еволюція даних розсіяння
- $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$, $\bar{a}(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_-$
- Нулі $a(\lambda_n)$ на $\mathbb{C}_+$ відповідають дискретному спектру при $n = \overline{1, N}$
- Для кожної точки дискретного спектру $\Phi_1(\lambda_j, x, t) = b_j(t)\Phi_2(\lambda_j, x, t)$, де $b_j(t) = b_j e^{-it/2\lambda_j}$

Аналітичні властивості даних розсіяння

- $|a|^2 + |b|^2 = 1$
- $a(\lambda, t) = a(\lambda)$, $b(\lambda, t) = b(\lambda)e^{-it/2\lambda}$ — часова еволюція даних розсіяння
- $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$, $\bar{a}(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_-$
- Нулі $a(\lambda_n)$ на $\mathbb{C}_+$ відповідають дискретному спектру при $n = \overline{1, N}$
- Для кожної точки дискретного спектру $\Phi_1(\lambda_j, x, t) = b_j(t)\Phi_2(\lambda_j, x, t)$, де $b_j(t) = b_j e^{-it/2\lambda_j}$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ для СҐ–рівняння

- $\begin{cases} K_1(x,y,t) + \int\limits_x^\infty K_2(x,\xi,t) R(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = 0, \\ K_2(x,y,t) + \int\limits_x^\infty K_1(x,\xi,t) \overline{R}(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = \overline{R}(x+y,t) \end{cases}$ — рівняння ГЛМ
- $R(z,t) = \sum\limits_{j=1}^N \beta_j e^{it/2\lambda_j} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty r(\lambda,t) e^{i\lambda z}\mathrm{d}\lambda$ — інтеґральне ядро
- $r(\lambda,t) = \dfrac{b(\lambda,t)}{a(\lambda,t)} = \dfrac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{-it/2\lambda}$ — коефіцієнт відбиття
- $\beta_j = \dfrac{b_j}{ia'(\lambda_j)}$
- $u(x) = -2K_2(x,x,t)$ — розв'язок СҐ–рівняння

Схема методу оберненої задачі ГЛМ для СҐ–рівняння

- $\begin{cases} K_1(x,y,t) + \int\limits_x^\infty K_2(x,\xi,t)R(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = 0, \\ K_2(x,y,t) + \int\limits_x^\infty K_1(x,\xi,t)\overline{R}(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = \overline{R}(x+y,t) \end{cases}$ — рівняння ГЛМ
- $R(z,t) = \sum\limits_{j=1}^N \beta_j e^{it/2\lambda_j} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty r(\lambda,t)e^{i\lambda z}\mathrm{d}\lambda$ — інтеґральне ядро
- $r(\lambda,t) = \dfrac{b(\lambda,t)}{a(\lambda,t)} = \dfrac{b(\lambda)}{a(\lambda)}e^{-it/2\lambda}$ — коефіцієнт відбиття
- $\beta_j = \dfrac{b_j}{ia'(\lambda_j)}$
- $u(x) = -2K_2(x,x,t)$ — розв'язок СҐ–рівняння

Схема методу оберненої задачі ГЛМ для СҐ–рівняння

- $\begin{cases} K_1(x,y,t) + \int\limits_x^{\infty} K_2(x,\xi,t)R(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = 0, \\ K_2(x,y,t) + \int\limits_x^{\infty} K_1(x,\xi,t)\overline{R}(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = \overline{R}(x+y,t) \end{cases}$ — рівняння ГЛМ
- $R(z,t) = \sum\limits_{j=1}^{N} \beta_j e^{it/2\lambda_j} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\lambda,t)e^{i\lambda z}\mathrm{d}\lambda$ — інтеґральне ядро
- $r(\lambda,t) = \dfrac{b(\lambda,t)}{a(\lambda,t)} = \dfrac{b(\lambda)}{a(\lambda)}e^{-it/2\lambda}$ — коефіцієнт відбиття
- $\beta_j = \dfrac{b_j}{ia'(\lambda_j)}$
- $u(x) = -2K_2(x,x,t)$ — розв'язок СҐ–рівняння

Схема методу оберненої задачі ГЛМ для СҐ–рівняння

- $\begin{cases} K_1(x,y,t) + \int\limits_x^\infty K_2(x,\xi,t)R(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = 0, \\ K_2(x,y,t) + \int\limits_x^\infty K_1(x,\xi,t)\overline{R}(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = \overline{R}(x+y,t) \end{cases}$ — рівняння ГЛМ
- $R(z,t) = \sum\limits_{j=1}^N \beta_j e^{it/2\lambda_j} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty r(\lambda,t)e^{i\lambda z}\mathrm{d}\lambda$ — інтеґральне ядро
- $r(\lambda,t) = \dfrac{b(\lambda,t)}{a(\lambda,t)} = \dfrac{b(\lambda)}{a(\lambda)}e^{-it/2\lambda}$ — коефіцієнт відбиття
- $\beta_j = \dfrac{b_j}{ia'(\lambda_j)}$
- $u(x) = -2K_2(x,x,t)$ — розв'язок СҐ–рівняння

Схема методу оберненої задачі ГЛМ для СҐ–рівняння

- $\begin{cases} K_1(x,y,t) + \int\limits_x^\infty K_2(x,\xi,t)R(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = 0, \\ K_2(x,y,t) + \int\limits_x^\infty K_1(x,\xi,t)\overline{R}(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = \overline{R}(x+y,t) \end{cases}$ — рівняння ГЛМ
- $R(z,t) = \sum\limits_{j=1}^{N} \beta_j e^{it/2\lambda_j} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\lambda,t) e^{i\lambda z} \mathrm{d}\lambda$ — інтеґральне ядро
- $r(\lambda,t) = \dfrac{b(\lambda,t)}{a(\lambda,t)} = \dfrac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{-it/2\lambda}$ — коефіцієнт відбиття
- $\beta_j = \dfrac{b_j}{ia'(\lambda_j)}$
- $u(x) = -2K_2(x,x,t)$ — розв'язок СҐ–рівняння

Багатосолітонні розв'язки для СҐ–рівняння

Безвідбивальний випадок

$$b(\lambda) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad r(\lambda) \equiv 0$$

N–солітонний розв'язок СҐ–рівняння

- $$A_{kj} = \frac{\beta_j}{\lambda_k + \lambda_j} \exp\left(i\lambda_j x - \frac{it}{\lambda_j}\right), \quad k, j = \overline{1, N}$$
- $$u(x, t) = -\frac{i}{2} \ln\left(\frac{\det\left[I + A(x, t)\right]}{\det\left[I - A(x, t)\right]}\right)$$

Багатосолітонні розв'язки для СҐ–рівняння

Безвідбивальний випадок

$$b(\lambda) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad r(\lambda) \equiv 0$$

N–солітонний розв'язок СҐ–рівняння

- $A_{kj} = \dfrac{\beta_j}{\lambda_k + \lambda_j} \exp\left(i\lambda_j x - \frac{it}{\lambda_j}\right), \quad k, j = \overline{1, N}$
- $u(x,t) = -\frac{i}{2} \ln \left(\dfrac{\det\left[I + A(x,t)\right]}{\det\left[I - A(x,t)\right]} \right)$

Багатосолітонні розв'язки для СҐ–рівняння

Безвідбивальний випадок

$$b(\lambda) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad r(\lambda) \equiv 0$$

N–солітонний розв'язок СҐ–рівняння

- $A_{kj} = \dfrac{\beta_j}{\lambda_k + \lambda_j} \exp\left(i\lambda_j x - \frac{it}{\lambda_j}\right), \quad k, j = \overline{1, N}$
- $u(x,t) = -\frac{i}{2} \ln\left(\dfrac{\det\left[I + A(x,t)\right]}{\det\left[I - A(x,t)\right]}\right)$

Багатосолітонні розв'язки для СҐ–рівняння

Безвідбивальний випадок

$$b(\lambda) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad r(\lambda) \equiv 0$$

N–солітонний розв'язок СҐ–рівняння

- $A_{kj} = \dfrac{\beta_j}{\lambda_k + \lambda_j} \exp\left(i\lambda_j x - \frac{it}{\lambda_j}\right), \quad k, j = \overline{1, N}$
- $u(x,t) = -\frac{i}{2} \ln \left(\dfrac{\det\left[I + A(x,t)\right]}{\det\left[I - A(x,t)\right]} \right)$