Лекція № 4

Тема лекції:

Метод оберненої задачі розсіяння

План лекції

1. Пряма задача розсіяння
   - Представлення Лакса для рівняння КдВ
   - Пряма задача розсіяння
   - Еволюція параметрів розсіяння
2. Обернена задача розсіяння
   - Аналітичні властивості даних розсіяння
   - Функції Йоста
   - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко
3. Дискретний спектр в методі оберненої задачі
   - Дискретний спектр
   - Безвідбивальний випадок

План лекції

1. Пряма задача розсіяння
   - Представлення Лакса для рівняння КдВ
   - Пряма задача розсіяння
   - Еволюція параметрів розсіяння
2. Обернена задача розсіяння
   - Аналітичні властивості даних розсіяння
   - Функції Йоста
   - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко
3. Дискретний спектр в методі оберненої задачі
   - Дискретний спектр
   - Безвідбивальний випадок

План лекції

1. Пряма задача розсіяння
   - Представлення Лакса для рівняння КдВ
   - Пряма задача розсіяння
   - Еволюція параметрів розсіяння
2. Обернена задача розсіяння
   - Аналітичні властивості даних розсіяння
   - Функції Йоста
   - Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко
3. Дискретний спектр в методі оберненої задачі
   - Дискретний спектр
   - Безвідбивальний випадок

Перетворення розсіяння

Дані розсіяння

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,0)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,0)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Перетворення розсіяння $\mathscr{S}$

Нехай $u(x,t)$ — розв'язок КдВ.
Спектральна задача $\Phi_{xx} + (\lambda^2 + u)\Phi = 0$ — рівняння Шредінгера

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \Phi = A\Phi$$

$$\Rightarrow a(\lambda,t) = a(\lambda,0),\ b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Обернене перетворення розсіяння $\mathscr{S}^{-1}$

$a(\lambda,t), b(\lambda,t) \Rightarrow$ «потенціал» $u(x,t)$

Перетворення розсіяння

Перетворення розсіяння $\mathscr{S}$

Нехай $u(x,t)$ — розв'язок КдВ.
Спектральна задача $\Phi_{xx} + (\lambda^2 + u)\Phi = 0$
— рівняння Шредінгера

Дані розсіяння

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,0)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,0)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Обернене перетворення розсіяння $\mathscr{S}^{-1}$

$a(\lambda,t), b(\lambda,t) \ \Rightarrow$ «потенціал» $u(x,t)$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \Phi = A\Phi$$

$$\Rightarrow a(\lambda,t) = a(\lambda,0), \ b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Перетворення розсіяння

Перетворення розсіяння $\mathscr{S}$

Нехай $u(x,t)$ — розв'язок КдВ.
Спектральна задача $\Phi_{xx} + (\lambda^2 + u)\Phi = 0$
— рівняння Шредінгера

Обернене перетворення розсіяння $\mathscr{S}^{-1}$

$a(\lambda,t), b(\lambda,t) \;\Rightarrow\;$ «потенціал» $u(x,t)$

Дані розсіяння

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,0)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,0)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \Phi = A\Phi$$

$$\Rightarrow a(\lambda,t) = a(\lambda,0),\;\; b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Перетворення розсіяння

Перетворення розсіяння $\mathscr{S}$

Нехай $u(x,t)$ — розв'язок КдВ.
Спектральна задача $\Phi_{xx} + (\lambda^2 + u)\Phi = 0$ — рівняння Шредінгера

Обернене перетворення розсіяння $\mathscr{S}^{-1}$

$a(\lambda,t), b(\lambda,t) \;\Rightarrow\;$ «потенціал» $u(x,t)$

Дані розсіяння

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,0)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,0)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t \Phi = A\Phi$$

$$\Rightarrow a(\lambda,t) = a(\lambda,0),\; b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Обернене перетворення розсіяння: діаграма

$$\begin{tikzcd}
\boxed{u(x,0)} \arrow[r, bend right, "\mathscr{S}"] \arrow[d] & \boxed{\begin{array}{c} a(\lambda,0) \\ b(\lambda,0) \end{array}} \arrow[d] \\
\boxed{u(x,t)} & \boxed{\begin{array}{l} a(\lambda,t) = a(\lambda,0) \\ b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t} \end{array}} \arrow[l, bend right, "\mathscr{S}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Представлення Лакса

Пара Лакса

Система рівнянь Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

$$\Psi = \Psi(x,t;\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix},\ L = L(x,t;\lambda),\ A = A(x,t;\lambda)$$

Умова сумісності системи рівнянь Лакса

$$\begin{cases} \Psi_{xt} & = L_t\Psi + L\Psi_t = L_t\Psi + LA\Psi \\ \Psi_{tx} & = A_x\Psi + A\Psi_x = A_x\Psi + AL\Psi \end{cases} \Rightarrow L_t - A_x = [A, L]$$

Нелінійне рівняння виникає як умова сумісності двох лінійних рівнянь

Представлення Лакса

Пара Лакса

Система рівнянь Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

$$\Psi = \Psi(x,t;\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}, \; L = L(x,t;\lambda), \; A = A(x,t;\lambda)$$

Умова сумісності системи рівнянь Лакса

$$\begin{cases} \Psi_{xt} & = L_t\Psi + L\Psi_t = L_t\Psi + LA\Psi \\ \Psi_{tx} & = A_x\Psi + A\Psi_x = A_x\Psi + AL\Psi \end{cases} \Rightarrow L_t - A_x = [A, L]$$

Нелінійне рівняння виникає як умова сумісності двох лінійних рівнянь

Представлення Лакса

Пара Лакса

Система рівнянь Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

$$\Psi = \Psi(x,t;\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}, \; L = L(x,t;\lambda), \; A = A(x,t;\lambda)$$

Умова сумісності системи рівнянь Лакса

$$\begin{cases} \Psi_{xt} & = L_t\Psi + L\Psi_t = L_t\Psi + LA\Psi \\ \Psi_{tx} & = A_x\Psi + A\Psi_x = A_x\Psi + AL\Psi \end{cases} \Rightarrow L_t - A_x = [A, L]$$

Нелінійне рівняння виникає як умова сумісності двох лінійних рівнянь

Представлення Лакса

Пара Лакса

Система рівнянь Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

$$\Psi = \Psi(x,t;\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}, \ L = L(x,t;\lambda), \ A = A(x,t;\lambda)$$

Умова сумісності системи рівнянь Лакса

$$\begin{cases} \Psi_{xt} &= L_t\Psi + L\Psi_t = L_t\Psi + LA\Psi \\ \Psi_{tx} &= A_x\Psi + A\Psi_x = A_x\Psi + AL\Psi \end{cases} \Rightarrow L_t - A_x = [A, L]$$

Нелінійне рівняння виникає як умова сумісності двох лінійних рівнянь

Представлення Лакса

Пара Лакса

Система рівнянь Лакса

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi \end{cases}$$

$$\Psi = \Psi(x,t;\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}, \; L = L(x,t;\lambda), \; A = A(x,t;\lambda)$$

Умова сумісності системи рівнянь Лакса

$$\begin{cases} \Psi_{xt} &= L_t\Psi + L\Psi_t = L_t\Psi + LA\Psi \\ \Psi_{tx} &= A_x\Psi + A\Psi_x = A_x\Psi + AL\Psi \end{cases} \Rightarrow L_t - A_x = [A, L]$$

Нелінійне рівняння виникає як умова сумісності двох лінійних рівнянь

Оператори Лакса для КдВ

Оператори Лакса

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$A = -4\lambda^2 L - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}$$

Умова Лакса

$$L_t - A_x = [A, L] \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow}$$

$$\overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \lambda^0 : i \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{xx} & iu_{xxx} + 4iuu_x \\ 2iu_x & -u_{xx} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -iu_{xx} & -2uu_x \\ 2u_x & iu_{xx} \end{pmatrix} = 0$$

$$\overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} u_t - u_{xxx} - 6uu_x = 0.$$

Оператори Лакса для КдВ

Оператори Лакса

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$A = -4\lambda^2 L - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}$$

Умова Лакса

$$L_t - A_x = [A, L] \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow}$$

$$\overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \lambda^0 : i \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{xx} & iu_{xxx} + 4iuu_x \\ 2iu_x & -u_{xx} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -iu_{xx} & -2uu_x \\ 2u_x & iu_{xx} \end{pmatrix} = 0$$

$$\overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} u_t - u_{xxx} - 6uu_x = 0.$$

Оператори Лакса для КдВ

Перше рівняння Лакса

$$\Psi_x = L\Psi \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\Psi_{11} & \Psi_{12}\\ \Psi_{21} & \Psi_{22}\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}\Psi_{11} & \Psi_{12}\\ \Psi_{21} & \Psi_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\lambda & iu\\ i & -i\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_{11} & \Psi_{12}\\ \Psi_{21} & \Psi_{22}\end{pmatrix}$$

Скалярний вигляд:

$$\begin{cases}\Psi_{11}' = i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21}\\ \Psi_{21}' = i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21}\end{cases} \overset{\text{д.з.}}{\Rightarrow} \Psi_{21}'' + (\lambda^2 + u)\Psi_{21} = 0$$

Оператори Лакса для КдВ

Перше рівняння Лакса

$$\Psi_x = L\Psi \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\Psi_{11} & \Psi_{12}\\ \Psi_{21} & \Psi_{22}\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}\Psi_{11} & \Psi_{12}\\ \Psi_{21} & \Psi_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\lambda & iu\\ i & -i\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_{11} & \Psi_{12}\\ \Psi_{21} & \Psi_{22}\end{pmatrix}$$

Скалярний вигляд:

$$\begin{cases}\Psi'_{11} = i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21}\\ \Psi'_{21} = i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21}\end{cases} \overset{\text{д.з.}}{\Longrightarrow} \Psi''_{21} + (\lambda^2 + u)\Psi_{21} = 0$$

Задача розсіяння і асимптотичний розв'язок

Постановка задачі розсіяння

Одновимірне рівняння Шредінгера для $\Phi = \Psi_{21}$

$$\Phi_{xx} + \left[\lambda^2 + u(x,t)\right]\Phi = 0$$

$u(x,t)$ відіграє роль потенціалу (вважаємо, що $u \to 0$ при $x \to \pm\infty$)
λ — спектральний параметр

Асимптотичні стани

$$|x| \to \infty \Rightarrow u \to 0 \Rightarrow \Phi_{xx} + \lambda^2\Phi = 0$$

$$\Rightarrow \Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

$a(\lambda,t)$ — амплітуда проходження
$b(\lambda,t)$ — амплітуда відбиття

Задача розсіяння і асимптотичний розв'язок

Постановка задачі розсіяння

Одновимірне рівняння Шредінгера для $\Phi = \Psi_{21}$

$$\Phi_{xx} + \left[\lambda^2 + u(x,t)\right]\Phi = 0$$

$u(x,t)$ відіграє роль потенціалу (вважаємо, що $u \to 0$ при $x \to \pm\infty$)
λ — спектральний параметр

Асимптотичні стани

$$|x| \to \infty \Rightarrow u \to 0 \Rightarrow \Phi_{xx} + \lambda^2\Phi = 0$$
$$\Rightarrow \Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

$a(\lambda,t)$ — амплітуда проходження
$b(\lambda,t)$ — амплітуда відбиття

Асимптотичні розв'язки

Ψ_{21}

$$\Psi_{21} \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Ψ_{11}

$$\begin{cases} \Psi_{11}' = i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21} \\ \Psi_{21}' = i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21} \end{cases} \Rightarrow \Psi_{11} = \lambda\Psi_{21} - i\Psi_{21}' \Rightarrow \Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \to -\infty \\ 2\lambda b(\lambda, t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Асимптотичні розв'язки

Ψ_{21}

$$\Psi_{21} \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Ψ_{11}

$$\begin{cases} \Psi'_{11} = i\lambda\Psi_{11} + iu\Psi_{21} \\ \Psi'_{21} = i\Psi_{11} - i\lambda\Psi_{21} \end{cases} \Rightarrow \Psi_{11} = \lambda\Psi_{21} - i\Psi'_{21} \Rightarrow \Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \to -\infty \\ 2\lambda b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Еволюція параметрів розсіяння

Часова еволюція: друге рівняння Лакса

$$\Psi_t = A\Psi$$

$$A = -4\lambda^2 \begin{pmatrix} i\lambda & u \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}$$

Еволюція даних розсіяння

$$|x| \to \infty \Rightarrow u \sim u_x \sim u_{xx} \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -4\lambda^2 \begin{pmatrix} i\lambda & 0 \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\Psi}_{11} = -4i\lambda^3 \Psi_{11} \\ \dot{\Psi}_{21} = -4i\lambda^2 \Psi_{11} + 4i\lambda^3 \Psi_{12} \end{cases}$$

Еволюція параметрів розсіяння

Часова еволюція: друге рівняння Лакса

$$\Psi_t = A\Psi$$

$$A = -4\lambda^2 \begin{pmatrix} i\lambda & u \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}$$

Еволюція даних розсіяння

$$|x| \to \infty \Rightarrow u \sim u_x \sim u_{xx} \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -4\lambda^2 \begin{pmatrix} i\lambda & 0 \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\Psi}_{11} = -4i\lambda^3 \Psi_{11} \\ \dot{\Psi}_{21} = -4i\lambda^2 \Psi_{11} + 4i\lambda^3 \Psi_{12} \end{cases}$$

Еволюція параметрів розсіяння

Асимптотика розв'язку для b

$$\Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \to -\infty \\ 2\lambda b(\lambda, t) e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Рівняння для $b(\lambda, t)$

$$\dot{\Psi}_{11} = -4i\lambda^3 \Psi_{11}$$

$$\Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \to -\infty \\ e^{4it\lambda^3} 2\lambda b(\lambda, t) e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

$$x \to +\infty : \quad \dot{b} = -8i\lambda^3 b \Rightarrow b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) e^{-8i\lambda^3 t}$$

Рівняння для $a(\lambda, t)$

$$\dot{\Psi}_{21} = -4i\lambda^2 \Psi_{11} + 4i\lambda^3 \Psi_{12} \quad \Psi_{21} \sim \begin{cases} e^{4it\lambda^3} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ e^{4it\lambda^3} \left[a(\lambda, t) e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t) e^{i\lambda x} \right] & x \to +\infty \end{cases}$$

$$x \to +\infty : \quad \dot{a} = 0 \Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0).$$

Еволюція параметрів розсіяння

Асимптотика розв'язку для b

$$\Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \to -\infty \\ 2\lambda b(\lambda, t) e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Рівняння для $b(\lambda, t)$

$$\dot{\Psi}_{11} = -4i\lambda^3 \Psi_{11}$$

$$\Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \to -\infty \\ e^{4it\lambda^3} 2\lambda b(\lambda, t) e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

$$x \to +\infty: \quad \dot{b} = -8i\lambda^3 b \Rightarrow b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) e^{-8i\lambda^3 t}$$

Рівняння для $a(\lambda, t)$

$$\dot{\Psi}_{21} = -4i\lambda^2 \Psi_{11} + 4i\lambda^3 \Psi_{12} \quad \Psi_{21} \sim \begin{cases} e^{4it\lambda^3} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ e^{4it\lambda^3} \left[a(\lambda, t) e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t) e^{i\lambda x} \right] & x \to +\infty \end{cases}$$

$$x \to +\infty: \quad \dot{a} = 0 \Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0).$$

Еволюція параметрів розсіяння

Асимптотика розв'язку для b

$$\Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \to -\infty \\ 2\lambda b(\lambda, t) e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Рівняння для $b(\lambda, t)$

$$\dot{\Psi}_{11} = -4i\lambda^3 \Psi_{11}$$

$$\Psi_{11} \sim \begin{cases} 0 & x \to -\infty \\ e^{4it\lambda^3} 2\lambda b(\lambda, t) e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

$$x \to +\infty: \quad \dot{b} = -8i\lambda^3 b \Rightarrow b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) e^{-8i\lambda^3 t}$$

Рівняння для $a(\lambda, t)$

$$\dot{\Psi}_{21} = -4i\lambda^2 \Psi_{11} + 4i\lambda^3 \Psi_{12} \quad \Psi_{21} \sim \begin{cases} e^{4it\lambda^3} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ e^{4it\lambda^3} \left[a(\lambda, t) e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t) e^{i\lambda x} \right] & x \to +\infty \end{cases}$$

$$x \to +\infty: \quad \dot{a} = 0 \Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0).$$

Властивості даних розсіяння

Еволюція даних розсіяння

$$\begin{cases} a(\lambda, t) & = a(\lambda, 0) \\ b(\lambda, t) & = b(\lambda, 0) e^{-8i\lambda^3 t} \end{cases}$$

Закон збереження

$$|a(\lambda, t)|^2 - |b(\lambda, t)|^2 = 1$$

Властивості даних розсіяння

Еволюція даних розсіяння

$$\begin{cases} a(\lambda,t) &= a(\lambda,0) \\ b(\lambda,t) &= b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t} \end{cases}$$

Закон збереження

$$|a(\lambda,t)|^2 - |b(\lambda,t)|^2 = 1$$

Функції Йоста

Асимптотичні стани

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Функція Йоста

$$\chi(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda)e^{i\lambda x} \sim \begin{cases} 1 & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)1 + b(\lambda,t)e^{2i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Функції Йоста

Асимптотичні стани

$$\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Функція Йоста

$$\chi(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda)e^{i\lambda x} \sim \begin{cases} 1 & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)1 + b(\lambda,t)e^{2i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Функції Йоста: інтегральне рівняння

Функція Йоста

$$\chi(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda)e^{i\lambda x}$$

Диференціальне рівняння

$$\Phi(x,\lambda) \Rightarrow \qquad \Phi_{xx} + \left[\lambda^2 + u(x)\right]\Phi = 0$$

$$\chi(x,\lambda) : \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \qquad \chi_{xx} - 2i\lambda\chi_x + u(x)\chi = 0$$

Інтегральне рівняння

$$\chi(x,\lambda) \overset{\text{Д.З.}}{=} 1 - \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)} - 1}{2i\lambda} u(\xi)\chi(\xi,\lambda)\mathrm{d}\xi$$

Функції Йоста: інтегральне рівняння

Функція Йоста

$$\chi(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda)e^{i\lambda x}$$

Диференціальне рівняння

$$\Phi(x,\lambda) \Rightarrow \qquad \Phi_{xx} + \left[\lambda^2 + u(x)\right]\Phi = 0$$

$$\chi(x,\lambda) : \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \qquad \chi_{xx} - 2i\lambda\chi_x + u(x)\chi = 0$$

Інтегральне рівняння

$$\chi(x,\lambda) \overset{\text{Д.З.}}{=} 1 - \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)} - 1}{2i\lambda} u(\xi)\chi(\xi,\lambda)\mathrm{d}\xi$$

Функції Йоста: інтегральне рівняння

Функція Йоста

$$\chi(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda)e^{i\lambda x}$$

Диференціальне рівняння

$$\Phi(x,\lambda) \Rightarrow \qquad \Phi_{xx} + \left[\lambda^2 + u(x)\right]\Phi = 0$$

$$\chi(x,\lambda) : \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \qquad \chi_{xx} - 2i\lambda\chi_x + u(x)\chi = 0$$

Інтегральне рівняння

$$\chi(x,\lambda) \overset{\text{Д.З.}}{=} 1 - \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)} - 1}{2i\lambda} u(\xi)\chi(\xi,\lambda)\mathrm{d}\xi$$

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)}-1}{2i\lambda} u(\xi)\chi(\xi,\lambda)\mathrm{d}\xi$
- $\chi(x,\lambda) \sim a(\lambda,t)1 + b(\lambda,t)e^{2i\lambda x} \qquad x \to +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim\limits_{\lambda\to\infty} 2i\lambda\left[\chi(x,\lambda) - 1\right]$

Аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$
- $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$ та $a(\lambda) = 1 + O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$
- Нулі $a(\lambda)$ в $\mathbb{C}_+$ відповідають дискретному спектру оператора $-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + u(x,t)$

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)}-1}{2i\lambda} u(\xi)\chi(\xi,\lambda)\mathrm{d}\xi$
- $\chi(x,\lambda) \sim a(\lambda,t)1 + b(\lambda,t)e^{2i\lambda x} \qquad x \to +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim\limits_{\lambda\to\infty} 2i\lambda\left[\chi(x,\lambda) - 1\right]$

Аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$
- $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$ та $a(\lambda) = 1 + \mathcal{O}(1/\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$
- Нулі $a(\lambda)$ в $\mathbb{C}_+$ відповідають дискретному спектру оператора $-d^2/dx^2 + u(x,t)$

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)}-1}{2i\lambda} u(\xi)\chi(\xi,\lambda)\mathrm{d}\xi$
- $\chi(x,\lambda) \sim a(\lambda,t)1 + b(\lambda,t)e^{2i\lambda x} \qquad x \to +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim\limits_{\lambda\to\infty} 2i\lambda \left[\chi(x,\lambda) - 1\right]$

Аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$
- $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$ та $a(\lambda) = 1 + O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$
- Нулі $a(\lambda)$ в $\mathbb{C}_+$ відповідають дискретному спектру оператора $-\partial^2/\partial x^2 + u(x,t)$

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)}-1}{2i\lambda} u(\xi)\chi(\xi,\lambda)\mathrm{d}\xi$
- $\chi(x,\lambda) \sim a(\lambda,t)1 + b(\lambda,t)e^{2i\lambda x} \qquad x \to +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim\limits_{\lambda\to\infty} 2i\lambda\left[\chi(x,\lambda) - 1\right]$

Аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$
- $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$ та $a(\lambda) = 1 + \mathcal{O}(1/\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$
- Нулі $a(\lambda)$ в $\mathbb{C}_+$ відповідають дискретному спектру оператора $-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + u(x,t)$

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)}-1}{2i\lambda} u(\xi)\chi(\xi,\lambda)\mathrm{d}\xi$
- $\chi(x,\lambda) \sim a(\lambda,t)1 + b(\lambda,t)e^{2i\lambda x} \qquad x \to +\infty$
- $u = \dfrac{\partial}{\partial x} \lim\limits_{\lambda\to\infty} 2i\lambda\left[\chi(x,\lambda) - 1\right]$

Аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$
- $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$ та $a(\lambda) = 1 + O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$
- Нулі $a(\lambda)$ в $\mathbb{C}_+$ відповідають дискретному спектру оператора $-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + u(x,t)$

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)}-1}{2i\lambda} u(\xi)\chi(\xi,\lambda)\mathrm{d}\xi$
- $\chi(x,\lambda) \sim a(\lambda,t)1 + b(\lambda,t)e^{2i\lambda x} \qquad x \to +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim\limits_{\lambda\to\infty} 2i\lambda\left[\chi(x,\lambda) - 1\right]$

Аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$
- $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$ та $a(\lambda) = 1 + O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$
- Нулі $a(\lambda)$ в $\mathbb{C}_+$ відповідають дискретному спектру оператора $-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + u(x,t)$

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)}-1}{2i\lambda} u(\xi)\chi(\xi,\lambda)\mathrm{d}\xi$
- $\chi(x,\lambda) \sim a(\lambda,t)1 + b(\lambda,t)e^{2i\lambda x} \qquad x \to +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim\limits_{\lambda\to\infty} 2i\lambda\left[\chi(x,\lambda) - 1\right]$

Аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$
- $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$ та $a(\lambda) = 1 + O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$
- Нулі $a(\lambda)$ в $\mathbb{C}_+$ відповідають дискретному спектру оператора $-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + u(x,t)$

Функції Йоста: аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)}-1}{2i\lambda} u(\xi)\chi(\xi,\lambda)\mathrm{d}\xi$
- $\chi(x,\lambda) \sim a(\lambda,t)1 + b(\lambda,t)e^{2i\lambda x} \qquad x \to +\infty$
- $u = \frac{\partial}{\partial x} \lim\limits_{\lambda\to\infty} 2i\lambda\left[\chi(x,\lambda) - 1\right]$

Аналітичні властивості

- $\chi(x,\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$
- $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$ та $a(\lambda) = 1 + O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$
- Нулі $a(\lambda)$ в $\mathbb{C}_+$ відповідають дискретному спектру оператора $-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + u(x,t)$

Канонічні розв'язки

Канонічні розв'язки

Асимптотичний розв'язок: $\Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda, t) e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t) e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$

1 канонічний розв'язок: $\Theta \sim e^{i\lambda x} \quad x \to +\infty$

2 канонічний розв'язок: $\bar{\Theta} \sim e^{-i\lambda x} \quad x \to +\infty$

Лінійна залежність

$$\Phi(x, \lambda) = a(\lambda)\bar{\Theta}(x, \lambda) + b(\lambda)\Theta(x, \lambda) \quad \forall x, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Phi(x, \lambda)}{a(\lambda)} = \bar{\Theta}(x, \lambda) + r(\lambda)\Theta(x, \lambda)$$

$r(\lambda) \equiv \dfrac{b(\lambda)}{a(\lambda)}$ — коефіцієнт відбиття

Канонічні розв'язки

Канонічні розв'язки

$$\text{Асимптотичний розв'язок: } \Phi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

$$\text{1 канонічний розв'язок: } \Theta \sim e^{i\lambda x} \quad x \to +\infty$$

$$\text{2 канонічний розв'язок: } \bar{\Theta} \sim e^{-i\lambda x} \quad x \to +\infty$$

Лінійна залежність

$$\Phi(x,\lambda) = a(\lambda)\bar{\Theta}(x,\lambda) + b(\lambda)\Theta(x,\lambda) \quad \forall x,\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} = \bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda)$$

$r(\lambda) \equiv \dfrac{b(\lambda)}{a(\lambda)}$ — коефіцієнт відбиття

Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко

$$\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} = \bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) \Rightarrow$$

$$\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} = \bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) - e^{-i\lambda x} \Rightarrow$$

$$e^{i\lambda y}\left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = e^{i\lambda y}\left[\bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) - e^{-i\lambda x}\right] \Rightarrow$$

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y}\left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y}\left[\bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) - e^{-i\lambda x}\right]$$

$\Phi(x,\lambda)$, $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$
Вважаємо, що $a(\lambda) \neq 0$ на $\mathbb{C}_+$ Теорема Коші:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y}\left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = 0$$

Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко

$$\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} = \bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) \Rightarrow$$

$$\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} = \bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) - e^{-i\lambda x} \quad \Rightarrow$$

$$e^{i\lambda y}\left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = e^{i\lambda y}\left[\bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) - e^{-i\lambda x}\right] \quad \Rightarrow$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y}\left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y}\left[\bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) - e^{-i\lambda x}\right]$$

$\Phi(x,\lambda)$, $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$
Вважаємо, що $a(\lambda) \neq 0$ на $\mathbb{C}_+$ Теорема Коші:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda y}\left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = 0$$

Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко

$$\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} = \bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) \Rightarrow$$

$$\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} = \bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) - e^{-i\lambda x} \quad \Rightarrow$$

$$e^{i\lambda y}\left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = e^{i\lambda y}\left[\bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) - e^{-i\lambda x}\right] \quad \Rightarrow$$

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y}\left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y}\left[\bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) - e^{-i\lambda x}\right]$$

$\Phi(x,\lambda)$, $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$
Вважаємо, що $a(\lambda) \neq 0$ на $\mathbb{C}_+$ Теорема Коші:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y}\left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = 0$$

Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко

$$\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} = \bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) \Rightarrow$$

$$\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} = \bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) - e^{-i\lambda x} \quad \Rightarrow$$

$$e^{i\lambda y}\left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = e^{i\lambda y}\left[\bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) - e^{-i\lambda x}\right] \quad \Rightarrow$$

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y}\left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y}\left[\bar{\Theta}(x,\lambda) + r(\lambda)\Theta(x,\lambda) - e^{-i\lambda x}\right]$$

$\Phi(x,\lambda)$, $a(\lambda)$ — аналітична на $\mathbb{C}_+$
Вважаємо, що $a(\lambda) \neq 0$ на $\mathbb{C}_+$ Теорема Коші:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y}\left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = 0$$

Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y} \left[\bar{\Theta}(x,\lambda) - e^{-i\lambda x} + r(\lambda)\Theta(x,\lambda)\right] = 0$$

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$\bar{\Theta}(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_x^{\infty} K(x,y) e^{-i\lambda y}\mathrm{d}y, \quad K(x,y) —$$ невідома функція

Рівняння ГЛМ (Гельфанда–Левітана–Марченко)

$$\boxed{K(x,y) + R(x+y) + \int\limits_x^{\infty} K(x,\xi)R(\xi+y)\mathrm{d}\xi = 0, \ \ x<y}$$

$R(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\lambda)e^{i\lambda z}\mathrm{d}\lambda$

$$u = \frac{\partial}{\partial x}\lim_{\lambda\to\infty} 2i\lambda\left[\chi(x,\lambda)-1\right] \overset{\text{д.з.}}{\Rightarrow} u(x) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x)$$

Рівняння Гельфанда–Левітана–Марченко

$$I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y}\left[\bar{\Theta}(x,\lambda)-e^{-i\lambda x}+r(\lambda)\Theta(x,\lambda)\right]=0$$

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$\bar{\Theta}(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}+\int_x^{\infty}K(x,y)e^{-i\lambda y}\mathrm{d}y,\quad K(x,y)\text{— невідома функція}$$

Рівняння ГЛМ (Гельфанда–Левітана–Марченко)

$$\boxed{K(x,y)+R(x+y)+\int\limits_{x}^{\infty}K(x,\xi)R(\xi+y)\mathrm{d}\xi=0,\ x<y}$$

$R(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}r(\lambda)e^{i\lambda z}\mathrm{d}\lambda$

$u=\dfrac{\partial}{\partial x}\lim\limits_{\lambda\to\infty}2i\lambda\left[\chi(x,\lambda)-1\right]\overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow}u(x)=-2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x)$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ

- Знаходження пари Лакса L, A
- Пряма задача розсіяння для оператора Шредінгера: $a(\lambda, 0)$, $b(\lambda, 0)$
- Еволюція даних розсіяння: $r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda,t)}{a(\lambda,t)} = r(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ $R(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t)e^{i\lambda z}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x, y, t) + R(x + y, t) + \int\limits_{x}^{\infty} K(x, \xi, t)R(\xi + y, t)\mathrm{d}\xi = 0, \ \ x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x, x, t).$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ

- Знаходження пари Лакса L, A
- Пряма задача розсіяння для оператора Шредінгера: $a(\lambda, 0)$, $b(\lambda, 0)$
- Еволюція даних розсіяння: $r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda,t)}{a(\lambda,t)} = r(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ $R(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, t)e^{i\lambda z}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x, y, t) + R(x + y, t) + \int\limits_x^{\infty} K(x, \xi, t)R(\xi + y, t)\mathrm{d}\xi = 0, \quad x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x, x, t).$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ

- Знаходження пари Лакса L, A
- Пряма задача розсіяння для оператора Шредінгера: $a(\lambda,0)$, $b(\lambda,0)$
- Еволюція даних розсіяння: $r(\lambda,t) = \frac{b(\lambda,t)}{a(\lambda,t)} = r(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ $R(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\lambda,t)e^{i\lambda z}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x,y,t) + R(x+y,t) + \int\limits_{x}^{\infty} K(x,\xi,t)R(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = 0, \ \ x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t).$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ

- Знаходження пари Лакса L, A
- Пряма задача розсіяння для оператора Шредінгера: $a(\lambda,0)$, $b(\lambda,0)$
- Еволюція даних розсіяння: $r(\lambda,t) = \frac{b(\lambda,t)}{a(\lambda,t)} = r(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ $R(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\lambda,t)e^{i\lambda z}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x,y,t) + R(x+y,t) + \int\limits_{x}^{\infty} K(x,\xi,t)R(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = 0, \quad x<y$$

- Обернене перетворення

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t).$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ

- Знаходження пари Лакса L, A
- Пряма задача розсіяння для оператора Шредінгера: $a(\lambda,0)$, $b(\lambda,0)$
- Еволюція даних розсіяння: $r(\lambda,t) = \frac{b(\lambda,t)}{a(\lambda,t)} = r(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ $R(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\lambda,t)e^{i\lambda z}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x,y,t) + R(x+y,t) + \int\limits_x^{\infty} K(x,\xi,t)R(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = 0, \;\; x<y$$

- Обернене перетворення

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t).$$

Схема методу оберненої задачі ГЛМ

- Знаходження пари Лакса L, A
- Пряма задача розсіяння для оператора Шредінгера: $a(\lambda,0)$, $b(\lambda,0)$
- Еволюція даних розсіяння: $r(\lambda,t)=\frac{b(\lambda,t)}{a(\lambda,t)}=r(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ $R(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\lambda,t)e^{i\lambda z}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x,y,t)+R(x+y,t)+\int\limits_x^{\infty} K(x,\xi,t)R(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi=0,\ x<y$$

- Обернене перетворення

$$u(x,t)=-2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t).$$

Дискретний спектр в методі оберненої задачі

- Власні числа уявні: $\lambda_n = i\varkappa_n$, $\varkappa_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$
- Еволюція b: $b_n(t) = b_n e^{-8\varkappa_n^3 t}$, $b_n = \text{const}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ:

  Неперервний спектр $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y}\left[\dfrac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = 0$

  Дискретний спектр $I = 2\pi i \sum \underset{\lambda = i\varkappa_n}{\text{res}} \dfrac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y}$

  $R(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\lambda,t)e^{i\lambda z} + \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{b_n e^{-\varkappa_n z}}{ia'(i\varkappa_n)}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x,y,t) + R(x+y,t) + \int\limits_x^\infty K(x,\xi,t)R(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = 0, \ \ x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t).$$

Дискретний спектр в методі оберненої задачі

- Власні числа уявні: $\lambda_n = i\varkappa_n$, $\varkappa_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$
- Еволюція b: $b_n(t) = b_n e^{-8\varkappa_n^3 t}$, $b_n = \text{const}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ:

  Неперервний спектр $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y}\left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = 0$

  Дискретний спектр $I = 2\pi i \sum \operatorname*{res}_{\lambda = i\varkappa_n} \frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y}$

  $R(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\lambda,t)e^{i\lambda z} + \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{b_n e^{-\varkappa_n z}}{ia'(i\varkappa_n)}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x,y,t) + R(x+y,t) + \int\limits_x^\infty K(x,\xi,t)R(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = 0, \ \ x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t).$$

Дискретний спектр в методі оберненої задачі

- Власні числа уявні: $\lambda_n = i\varkappa_n$, $\varkappa_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$
- Еволюція b: $b_n(t) = b_n e^{-8\varkappa_n^3 t}$, $b_n = \mathrm{const}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ:

  Неперервний спектр $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y}\left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = 0$

  Дискретний спектр $I = 2\pi i \sum \operatorname*{res}_{\lambda = i\varkappa_n} \frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y}$

  $R(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\lambda,t)e^{i\lambda z} + \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{b_n e^{-\varkappa_n z}}{ia'(i\varkappa_n)}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x,y,t) + R(x+y,t) + \int\limits_{x}^{\infty} K(x,\xi,t)R(\xi+y,t)\mathrm{d}\xi = 0, \ \ x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t).$$

Дискретний спектр в методі оберненої задачі

- Власні числа уявні: $\lambda_n = i\varkappa_n$, $\varkappa_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$
- Еволюція b: $b_n(t) = b_n e^{-8\varkappa_n^3 t}$, $b_n = \text{const}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ:

  Неперервний спектр $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] = 0$

  Дискретний спектр $I = 2\pi i \sum \underset{\lambda = i\varkappa_n}{\mathrm{res}} \frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y}$

  $R(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\lambda,t) e^{i\lambda z} + \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{b_n e^{-\varkappa_n z}}{ia'(i\varkappa_n)}$
- Розв’язання рівняння ГЛМ:

$$K(x,y,t) + R(x+y,t) + \int\limits_x^{\infty} K(x,\xi,t) R(\xi+y,t) \mathrm{d}\xi = 0, \ x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x} K(x,x,t).$$

Дискретний спектр в методі оберненої задачі

- Власні числа уявні: $\lambda_n = i\varkappa_n$, $\varkappa_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$
- Еволюція b: $b_n(t) = b_n e^{-8\varkappa_n^3 t}$, $b_n = \text{const}$
- Обчислення ядра рівняння ГЛМ:

  Неперервний спектр $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda y} \left[\frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x} \right] = 0$

  Дискретний спектр $I = 2\pi i \sum \operatorname*{res}_{\lambda = i\varkappa_n} \frac{\Phi(x,\lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y}$

  $R(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\lambda,t) e^{i\lambda z} + \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{b_n e^{-\varkappa_n z}}{ia'(i\varkappa_n)}$
- Розв'язання рівняння ГЛМ:

$$K(x,y,t) + R(x+y,t) + \int\limits_x^{\infty} K(x,\xi,t) R(\xi+y,t) \mathrm{d}\xi = 0, \ x < y$$

- Обернене перетворення

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x} K(x,x,t).$$

Розв'язок рівняння ГЛМ для безвідбивального випадку

Безвідбивальний випадок

$$b(\lambda)\equiv 0 \quad\Rightarrow\quad r(\lambda)\equiv 0 \quad R(z,t)=\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n e^{-\varkappa_n z}}{ia'(i\varkappa_n)}=\sum_{n=1}^{N}\beta_n e^{-\varkappa_n z},\quad \beta_n=\frac{b_n}{ia'(i\varkappa_n)}$$

Розв'язування

$$K(x,y)=\sum_{n=1}^{N}K_n(x)e^{-\varkappa_n y}$$

$$e^{-\varkappa_n y}: K_n(z)+\sum_{m=1}^{N}K_m(x)\frac{\beta_m e^{-(\varkappa_n+\varkappa_m)x}}{\varkappa_n+\varkappa_m}=-\beta_n e^{-\varkappa_n x}$$

Матричний вигляд: $\mathcal{A}(x)\begin{pmatrix}K_1(x)\\ K_2(x)\\ \dots\\ K_N(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta_1 e^{-\varkappa_1 x}\\ -\beta_2 e^{-\varkappa_2 x}\\ \dots\\ -\beta_N e^{-\varkappa_N x}\end{pmatrix}$

Розв'язок рівняння ГЛМ для безвідбивального випадку

Безвідбивальний випадок

$$b(\lambda) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad r(\lambda) \equiv 0 \quad R(z,t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n e^{-\varkappa_n z}}{ia'(i\varkappa_n)} = \sum_{n=1}^{N} \beta_n e^{-\varkappa_n z}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{ia'(i\varkappa_n)}$$

Розв'язування

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{N} K_n(x) e^{-\varkappa_n y}$$

$$e^{-\varkappa_n y} : K_n(z) + \sum_{m=1}^{N} K_m(x) \frac{\beta_m e^{-(\varkappa_n+\varkappa_m)x}}{\varkappa_n + \varkappa_m} = -\beta_n e^{-\varkappa_n x}$$

Матричний вигляд: $\mathcal{A}(x) \begin{pmatrix} K_1(x) \\ K_2(x) \\ \dots \\ K_N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 e^{-\varkappa_1 x} \\ -\beta_2 e^{-\varkappa_2 x} \\ \dots \\ -\beta_N e^{-\varkappa_N x} \end{pmatrix}$

Розв'язок рівняння ГЛМ для безвідбивального випадку

Безвідбивальний випадок

Матричний вигляд: $\mathcal{A}(x)\begin{pmatrix} K_1(x) \\ K_2(x) \\ \dots \\ K_N(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 e^{-\varkappa_1 x} \\ -\beta_2 e^{-\varkappa_2 x} \\ \dots \\ -\beta_N e^{-\varkappa_N x}\end{pmatrix}$

$$A_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\beta_i e^{-x(\varkappa_i + \varkappa_j)}}{\varkappa_i + \varkappa_j}$$

$$u(x) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \mathcal{A}(x)$$

Залежність від часу

$$\beta_n = \frac{b_n}{ia'(i\varkappa_n)} \Rightarrow \beta_n(t) = \beta_n e^{-8\varkappa_n^3 t}$$

Розв'язок рівняння ГЛМ для безвідбивального випадку

Безвідбивальний випадок

Матричний вигляд: $\mathcal{A}(x)\begin{pmatrix} K_1(x) \\ K_2(x) \\ \dots \\ K_N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 e^{-\varkappa_1 x} \\ -\beta_2 e^{-\varkappa_2 x} \\ \dots \\ -\beta_N e^{-\varkappa_N x} \end{pmatrix}$

$$A_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\beta_i e^{-x(\varkappa_i + \varkappa_j)}}{\varkappa_i + \varkappa_j}$$

$$u(x) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \mathcal{A}(x)$$

Залежність від часу

$$\beta_n = \frac{b_n}{ia'(i\varkappa_n)} \Rightarrow \beta_n(t) = \beta_n e^{-8\varkappa_n^3 t}$$

Приклад: $N = 1$

$N = 1$

$$A = 1 + \frac{\beta e^{2\varkappa x - 8\varkappa^3 t}}{2\varkappa}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = -\frac{2\varkappa^2}{\operatorname{ch}^2\left(\varkappa(x - 4\varkappa^2 t - \delta)\right)}$$

$$\delta = \frac{1}{2\varkappa}\ln\frac{\beta}{2\varkappa}.$$