Лекція № 3

Тема лекції:

Обернена задача розсіяння і суперсиметрична квантова механіка

План лекції

План лекції

План лекції

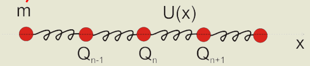
1. Перетворення Беклунда для ґратки Тоди
2. Схема методу оберненої задачі теорії розсіяння
   - Перетворення Фур'є
   - Перетворення розсіяння та представлення Лакса
3. Суперсиметрична квантова механіка
   - Метод факторизації і перетворення Дарбу
   - Перетворення Беклунда
   - Оператори знищення та народження
   - Приклад: потенціал солітонного типу

Ґратка Тоди

Ґратка (ланцюг) Тоди

Одновимірна ґратка з потенціалом взаємодії (M. Toda, 1970):

$$U(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q}_n = e^{Q_n - Q_{n-1}} - e^{Q_n - Q_{n+1}}$$



Перетворення Беклунда для ґратки Тоди

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \qquad \alpha = \text{const}$$

Нехай Q_n — розв'язок рівняння Тоди. Рівняння для q_n:

$$\ddot{q} = \left(\dot{Q}_n - \dot{q}_n\right) e^{Q_n - q_n} + \left(\dot{q}_n - \dot{Q}_{n+1}\right) e^{q_n - Q_{n+1}} = e^{q_n - q_{n-1}} - e^{q_n - q_{n+1}}$$

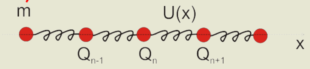
Отже q_n — також розв'язок рівняння Тоди.

Ґратка Тоди

Ґратка (ланцюг) Тоди

Одновимірна ґратка з потенціалом взаємодії (M. Toda, 1970):

$$U(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q}_n = e^{Q_n - Q_{n-1}} - e^{Q_n - Q_{n+1}}$$



Перетворення Беклунда для ґратки Тоди

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \qquad \alpha = \text{const}$$

Нехай Q_n — розв'язок рівняння Тоди. Рівняння для q_n:

$$\ddot{q} = \left(\dot{Q}_n - \dot{q}_n\right) e^{Q_n - q_n} + \left(\dot{q}_n - \dot{Q}_{n+1}\right) e^{q_n - Q_{n+1}} = e^{q_n - q_{n-1}} - e^{q_n - q_{n+1}}$$

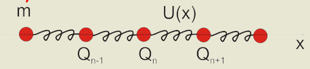
Отже q_n — також розв'язок рівняння Тоди.

Ґратка Тоди

Ґратка (ланцюг) Тоди

Одновимірна ґратка з потенціалом взаємодії (M. Toda, 1970):

$$U(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q}_n = e^{Q_n - Q_{n-1}} - e^{Q_n - Q_{n+1}}$$



Перетворення Беклунда для ґратки Тоди

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \qquad \alpha = \text{const}$$

Нехай Q_n — розв'язок рівняння Тоди. Рівняння для q_n:

$$\ddot{q} = \left(\dot{Q}_n - \dot{q}_n\right) e^{Q_n - q_n} + \left(\dot{q}_n - \dot{Q}_{n+1}\right) e^{q_n - Q_{n+1}} = e^{q_n - q_{n-1}} - e^{q_n - q_{n+1}}$$

Отже q_n — також розв'язок рівняння Тоди.

Ґратка Тоди: солітонний розв'язок

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \qquad \alpha = \text{const}$$

Застосуємо перетворення Беклунда для нульового розв'язку: $Q_n = 0$, $\dot{Q}_n = 0\ \forall n$:

$$\begin{cases} e^{-q_n} + e^{q_{n-1}} - \alpha = 0 \\ \dot{q}_n = e^{-q_n} + e^{q_n} - \alpha \end{cases} \quad \overset{\text{д.з.}}{\Rightarrow} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{q_n} = e^{2q_n} - \alpha e^{q_n} + 1$$

Заміна $u = e^{q_n}$: $\qquad \dot{u} = u^2 - \alpha u + 1$

$$\int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - \alpha u + 1} \overset{\text{д.з.}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{u - \alpha/2}{\sqrt{1-\alpha^2/4}} \Bigg|_{u_0}^{u} = t - t_n$$

Солітонний розв'язок при $\alpha \geq 2$. Параметризація: $\alpha = 2\operatorname{ch}\varkappa$, $\beta = -\operatorname{sh}\varkappa$

$$\begin{cases} e^{q_n} = \dfrac{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n + \varkappa)}{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n)} \\ \beta t_n \overset{\text{д.з.}}{=} \varkappa(n+1) \end{cases} \quad \Rightarrow e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \varkappa n)}{\operatorname{ch}(\beta t - \varkappa(n+1))}, \ \beta = -\operatorname{sh}\varkappa$$

Ґратка Тоди: солітонний розв'язок

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \qquad \alpha = \text{const}$$

Застосуємо перетворення Беклунда для нульового розв'язку: $Q_n = 0$, $\dot{Q}_n = 0\ \forall n$:

$$\begin{cases} e^{-q_n} + e^{q_{n-1}} - \alpha = 0 \\ \dot{q}_n = e^{-q_n} + e^{q_n} - \alpha \end{cases} \quad \overset{\text{д.з.}}{\Rightarrow} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{q_n} = e^{2q_n} - \alpha e^{q_n} + 1$$

Заміна $u = e^{q_n}$: $\qquad \dot{u} = u^2 - \alpha u + 1$

$$\int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - \alpha u + 1} \overset{\text{д.з.}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{u - \alpha/2}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} \Bigg|_{u_0}^{u} = t - t_n$$

Солітонний розв'язок при $\alpha \geq 2$. Параметризація: $\alpha = 2\operatorname{ch}\varkappa$, $\beta = -\operatorname{sh}\varkappa$

$$\begin{cases} e^{q_n} = \dfrac{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n + \varkappa)}{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n)} \\ \beta t_n \overset{\text{д.з.}}{=} \varkappa(n+1) \end{cases} \Rightarrow e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \varkappa n)}{\operatorname{ch}(\beta t - \varkappa(n+1))}, \quad \beta = -\operatorname{sh}\varkappa$$

Ґратка Тоди: солітонний розв'язок

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha \end{cases} \qquad \alpha = \text{const}$$

Застосуємо перетворення Беклунда для нульового розв'язку: $Q_n = 0$, $\dot{Q}_n = 0\ \forall n$:

$$\begin{cases} e^{-q_n} + e^{q_{n-1}} - \alpha = 0 \\ \dot{q}_n = e^{-q_n} + e^{q_n} - \alpha \end{cases} \overset{\text{д.з.}}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{q_n} = e^{2q_n} - \alpha e^{q_n} + 1$$

Заміна $u = e^{q_n}$: $\qquad \dot{u} = u^2 - \alpha u + 1$

$$\int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - \alpha u + 1} \overset{\text{д.з.}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{u - \alpha/2}{\sqrt{1 - \alpha^2/4}} \Bigg|_{u_0}^{u} = t - t_n$$

Солітонний розв'язок при $\alpha \geq 2$. Параметризація: $\alpha = 2 \operatorname{ch} \varkappa$, $\beta = -\operatorname{sh} \varkappa$

$$\begin{cases} e^{q_n} = \dfrac{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n + \varkappa)}{\operatorname{ch}(\beta t - \beta t_n)} \\ \beta t_n \overset{\text{д.з.}}{=} \varkappa(n+1) \end{cases} \Rightarrow e^{q_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \varkappa n)}{\operatorname{ch}(\beta t - \varkappa(n+1))}, \quad \beta = -\operatorname{sh} \varkappa$$

Перетворення Фур'є

Лінеаризоване рівняння КдВ

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Просторове перетворення Фур'є $\mathcal{F}$

$$\tilde{u}(\lambda,t) \equiv \mathcal{F}_x[u] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x,t)\mathrm{d}x$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\tilde{u}(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda$$

$$\mathcal{F}_x[u_x] = -i\lambda\tilde{u}, \qquad \mathcal{F}_x[u_{xxx}] = (-i\lambda)^3\tilde{u}$$

Обернене перетворення Фур'є $\mathcal{F}^{-1}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

Розв'язок часового рівняння

$$\tilde{u}_t - i\lambda^3\tilde{u} = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\lambda,t) = C(\lambda)e^{-i\lambda^3 t}$$

$$C(\lambda) = \tilde{u}(\lambda,0) = \mathcal{F}_x[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}u(x,0)\mathrm{d}x$$

Перетворення Фур'є

Лінеаризоване рівняння КдВ

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Обернене перетворення Фур'є $\mathcal{F}^{-1}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

Просторове перетворення Фур'є $\mathcal{F}$

$$\tilde{u}(\lambda,t) \equiv \mathcal{F}_x[u] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x,t)\mathrm{d}x$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\tilde{u}(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda$$

$$\mathcal{F}_x[u_x] = -i\lambda\tilde{u}, \qquad \mathcal{F}_x[u_{xxx}] = (-i\lambda)^3\tilde{u}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\tilde{u}_t - i\lambda^3\tilde{u} = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\lambda,t) = C(\lambda)e^{-i\lambda^3 t}$$

$$C(\lambda) = \tilde{u}(\lambda,0) = \mathcal{F}_x[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x,0)\mathrm{d}x$$

Перетворення Фур'є

Лінеаризоване рівняння КдВ

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Обернене перетворення Фур'є $\mathcal{F}^{-1}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda) \mathrm{d}\lambda$$

Просторове перетворення Фур'є $\mathcal{F}$

$$\tilde{u}(\lambda,t) \equiv \mathcal{F}_x[u] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x,t) \mathrm{d}x$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \tilde{u}(\lambda,t) \mathrm{d}\lambda$$

$$\mathcal{F}_x[u_x] = -i\lambda\tilde{u}, \qquad \mathcal{F}_x[u_{xxx}] = (-i\lambda)^3\tilde{u}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\tilde{u}_t - i\lambda^3\tilde{u} = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\lambda,t) = C(\lambda)e^{-i\lambda^3 t}$$

$$C(\lambda) = \tilde{u}(\lambda,0) = \mathcal{F}_x[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x,0) \mathrm{d}x$$

Перетворення Фур'є

Лінеаризоване рівняння КдВ

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Обернене перетворення Фур'є $\mathcal{F}^{-1}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

Просторове перетворення Фур'є $\mathcal{F}$

$$\tilde{u}(\lambda,t) \equiv \mathcal{F}_x[u] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x,t)\mathrm{d}x$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\tilde{u}(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda$$

$$\mathcal{F}_x[u_x] = -i\lambda\tilde{u}, \qquad \mathcal{F}_x[u_{xxx}] = (-i\lambda)^3\tilde{u}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\tilde{u}_t - i\lambda^3\tilde{u} = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\lambda,t) = C(\lambda)e^{-i\lambda^3 t}$$

$$C(\lambda) = \tilde{u}(\lambda,0) = \mathcal{F}_x[u_0(x)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x,0)\mathrm{d}x$$

Перетворення Фур'є: діаграма

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{u(x,0)} \arrow[r, bend right, "\mathcal{F}"] \arrow[d, bend left] & \boxed{\tilde{u}(\lambda,0)} \arrow[d, bend right] \\
\boxed{u(x,t)} & \boxed{\tilde{u}(\lambda,t) = \tilde{u}(\lambda,0)e^{-i\lambda^3 t}} \arrow[l, bend right, "\mathcal{F}^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

Перетворення розсіяння

Перетворення розсіяння $\mathscr{S}$

Нехай $u(x,t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + u(x,t)$.

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ — рівняння Шредінгера

Дані розсіяння

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Обернене перетворення розсіяння $\mathscr{S}^{-1}$

$a(\lambda,t), b(\lambda,t) \ \Rightarrow$ «потенціал» $u(x,t)$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t\psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda,t) = a(\lambda,0),\ b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Перетворення розсіяння

Перетворення розсіяння $\mathscr{S}$

Нехай $u(x,t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + u(x,t)$.

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ — рівняння Шредінгера

Дані розсіяння

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Обернене перетворення розсіяння $\mathscr{S}^{-1}$

$a(\lambda,t), b(\lambda,t) \ \Rightarrow$ «потенціал» $u(x,t)$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t\psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda,t) = a(\lambda,0), \ b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Перетворення розсіяння

Перетворення розсіяння $\mathscr{S}$

Нехай $u(x,t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор $L = -\dfrac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$.

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ — рівняння Шредінгера

Обернене перетворення розсіяння $\mathscr{S}^{-1}$

$a(\lambda,t), b(\lambda,t) \Rightarrow$ «потенціал» $u(x,t)$

Дані розсіяння

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t\psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda,t) = a(\lambda,0),\ b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Перетворення розсіяння

Перетворення розсіяння $\mathscr{S}$

Нехай $u(x,t)$ — розв'язок КдВ.

Розглянемо оператор $L = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + u(x,t)$.

Спектральна задача $L\psi = -\lambda^2\psi$ — рівняння Шредінгера

Обернене перетворення розсіяння $\mathscr{S}^{-1}$

$$a(\lambda,t), b(\lambda,t) \;\Rightarrow\; \text{«потенціал»}\; u(x,t)$$

Дані розсіяння

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\lambda x} & x \to -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty \end{cases}$$

Розв'язок часового рівняння

$$\partial_t\psi = A\psi$$

$$\Rightarrow a(\lambda,t) = a(\lambda,0),\; b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Обернене перетворення розсіяння: діаграма

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{u(x,0)} \arrow[r, bend right, "\mathscr{S}"] \arrow[d] & \boxed{\begin{matrix} a(\lambda,0) \\ b(\lambda,0) \end{matrix}} \arrow[d] \\
\boxed{u(x,t)} & \boxed{\begin{aligned} a(\lambda,t) &= a(\lambda,0) \\ b(\lambda,t) &= b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t} \end{aligned}} \arrow[l, bend right, "\mathscr{S}^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

Метод факторизації і перетворення Дарбу

Рівняння Шредінгера

$$H\psi = E\psi, \qquad H = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$$

Перетворення Дарбу

Факторизація Гамільтоніану: $H = A^\dagger A + E_0$:

$$A = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x), \qquad A^\dagger = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x)$$

Перетворення: $\tilde{\psi} = A\psi$

$$A^\dagger A\psi + E_0\psi = E\psi \overset{A}{\Rightarrow} AA^\dagger\tilde{\psi} + E_0\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}$$

$$\Rightarrow \widetilde{H}\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}, \qquad \widetilde{H} = AA^\dagger + E_0$$

Метод факторизації і перетворення Дарбу

Рівняння Шредінгера

$$H\psi = E\psi, \qquad H = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$$

Перетворення Дарбу

Факторизація Гамільтоніану: $H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0$:

$$\mathcal{A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x), \qquad \mathcal{A}^\dagger = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x)$$

Перетворення: $\tilde{\psi} = \mathcal{A}\psi$

$$\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}\psi + E_0\psi = E\psi \stackrel{\mathcal{A}}{\Rightarrow} \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\tilde{\psi} + E_0\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}$$

$$\Rightarrow \widetilde{H}\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}, \qquad \widetilde{H} = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger + E_0$$

Перетворення Беклунда

Зв'язок між V та $\tilde{V}$

$$\begin{cases} W^2 + W' + E_0 = V \\ W^2 - W' + E_0 = \tilde{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V - \tilde{V} = 2W' \\ V + \tilde{V} = 2(E_0 + W^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{matrix} V = 2\phi' \\ \tilde{V} = 2\tilde{\phi}' \end{matrix} \right| \Rightarrow \begin{cases} \phi - \widetilde{\phi} = W \\ \phi' + \widetilde{\phi}' = E_0 + W^2 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$\phi' + \widetilde{\phi}' = E_0 + \left(\phi - \tilde{\phi}\right)^2$$

Перетворення Беклунда

Зв'язок між V та $\tilde{V}$

$$\begin{cases} W^2 + W' + E_0 = V \\ W^2 - W' + E_0 = \tilde{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V - \tilde{V} = 2W' \\ V + \tilde{V} = 2(E_0 + W^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{matrix} V = 2\phi' \\ \tilde{V} = 2\tilde{\phi}' \end{matrix} \right| \Rightarrow \begin{cases} \phi - \widetilde{\phi} = W \\ \phi' + \widetilde{\phi}' = E_0 + W^2 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$\phi' + \widetilde{\phi}' = E_0 + \left(\phi - \tilde{\phi}\right)^2$$

Суперпотенціал, оператори знищення та народження

Факторизація

Факторизація: $H = A^\dagger A + E_0$
Нехай ψ_0 — власна функція: $H\psi_0 = E_0\psi_0$

Зв'язок між A та ψ_0: $A\psi_0 = 0$

Доведення:

$$H\psi_0 = A^\dagger A\psi_0 + E_0\psi_0 = E_0\psi_0$$

A — оператор знищення
$A^\dagger$ — оператор народження

Суперпотенціал

Визначимо $W(x)$:

$$A\psi_0 = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x)\right)\psi_0 = 0 \Rightarrow \quad W(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0$$

Суперпотенціал, оператори знищення та народження

Факторизація

Факторизація: $H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0$
Нехай ψ_0 — власна функція: $H\psi_0 = E_0\psi_0$

Зв'язок між $\mathcal{A}$ та ψ_0: $\mathcal{A}\psi_0 = 0$

Доведення:

$$H\psi_0 = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}\psi_0 + E_0\psi_0 = E_0\psi_0$$

$\mathcal{A}$ — оператор знищення
$\mathcal{A}^\dagger$ — оператор народження

Суперпотенціал

Визначимо $W(x)$:

$$\mathcal{A}\psi_0 = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x)\right)\psi_0 = 0 \Rightarrow \quad W(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0$$

Суперпотенціал, оператори знищення та народження

Факторизація

Факторизація: $H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0$
Нехай ψ_0 — власна функція: $H\psi_0 = E_0\psi_0$

Зв'язок між $\mathcal{A}$ та ψ_0: $\mathcal{A}\psi_0 = 0$

Доведення:

$$H\psi_0 = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}\psi_0 + E_0\psi_0 = E_0\psi_0$$

$\mathcal{A}$ — оператор знищення
$\mathcal{A}^\dagger$ — оператор народження

Суперпотенціал

Визначимо $W(x)$:

$$\mathcal{A}\psi_0 = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x)\right)\psi_0 = 0 \Rightarrow \quad W(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0$$

Біографія суперсиметричної квантової механіки

- (1882) Перетворення Дарбу
- (1940) Ідеї методу факторізації (Шредінгер)
- (1951) Теорія методу факторізації (Інфельд і Халл)
- (1981) Суперсиметрична квантова механіка (Віттен)

Основна властивість перетворення Дарбу

$$H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{H} = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger + E_0$$

Перетворення або знищує рівень основного стану (оператор $\mathcal{A}$), або породжує новий рівень (оператор $\mathcal{A}^\dagger$). При цьому решта рівнів не зсувається.

Біографія суперсиметричної квантової механіки

- (1882) Перетворення Дарбу
- (1940) Ідеї методу факторізації (Шредінгер)
- (1951) Теорія методу факторізації (Інфельд і Халл)
- (1981) Суперсиметрична квантова механіка (Віттен)

Основна властивість перетворення Дарбу

$$H = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{H} = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger + E_0$$

Перетворення або знищує рівень основного стану (оператор $\mathcal{A}$), або породжує новий рівень (оператор $\mathcal{A}^\dagger$). При цьому решта рівнів не зсувається.

Чому суперсиметрія?

Спектри гамільтоніанів H та $\widetilde{H}$ співпадають, тому комбінований гамільтоніан $\mathcal{H} = H \oplus \widetilde{H}$ вироджений, тобто має певну симетрію.

Супералгебри

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}; \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H - E_0 & 0 \\ 0 & \widetilde{H} - E_0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{Q^+, Q^-\right\} = \mathcal{H}, \quad \left[\mathcal{H}, Q^\pm\right] = 0, \quad \left(Q^\pm\right)^2 = 0$$

$[A, B] = AB - BA$ — комутатор

$\{A, B\} = AB + BA$ — антікомутатор

Чому суперсиметрія?

Спектри гамільтоніанів H та $\widetilde{H}$ співпадають, тому комбінований гамільтоніан $\mathcal{H} = H \oplus \widetilde{H}$ вироджений, тобто має певну симетрію.

Супералгебри

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}; \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H - E_0 & 0 \\ 0 & \widetilde{H} - E_0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{Q^+, Q^-\right\} = \mathcal{H}, \quad \left[\mathcal{H}, Q^\pm\right] = 0, \quad \left(Q^\pm\right)^2 = 0$$

$[A, B] = AB - BA$ — комутатор

$\{A, B\} = AB + BA$ — антікомутатор

Чому суперсиметрія?

Спектри гамільтоніанів H та $\widetilde{H}$ співпадають, тому комбінований гамільтоніан $\mathcal{H} = H \oplus \widetilde{H}$ вироджений, тобто має певну симетрію.

Супералгебри

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}; \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H - E_0 & 0 \\ 0 & \widetilde{H} - E_0 \end{pmatrix}$$

$$\{Q^+, Q^-\} = \mathcal{H}, \quad [\mathcal{H}, Q^\pm] = 0, \quad (Q^\pm)^2 = 0$$

$[A, B] = AB - BA$ — комутатор

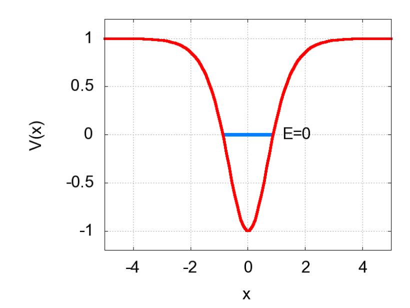
$\{A, B\} = AB + BA$ — антікомутатор

Приклад: потенціал солітонного типу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Рівняння Шредінгера

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi = E\psi$$

$$V(x) = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}$$



Суперпотенціал

Основний стан: $\psi_0 = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$, $E_0 = 0$

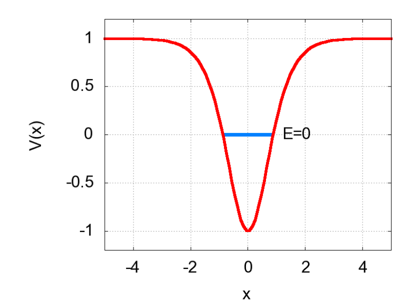
Суперпотенціал: $W(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0 = -\operatorname{th} x$

Приклад: потенціал солітонного типу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Рівняння Шредінгера

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi = E\psi$$

$$V(x) = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}$$



Суперпотенціал

Основний стан: $\psi_0 = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$, $E_0 = 0$

Суперпотенціал: $W(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0 = -\operatorname{th} x$

Перетворення Дарбу для потенціалу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Потенціал суперсиметричного партнера

Суперпотенціал: $W(x) = -\operatorname{th} x$

$$\mathcal{A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x, \quad \mathcal{A}^\dagger = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x$$

$$\Rightarrow \widetilde{V} = W^2 - W' + E_0 = 0$$

Розв'язок задачі для партнера

$$-\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\psi}}{\mathrm{d}x^2} = k^2\tilde{\psi} \;\Rightarrow\; \tilde{\psi}_k(x) = a_k e^{ikx} + b_k e^{-ikx}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{\mathcal{A}^\dagger\tilde{\psi}}{E} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x\right)\tilde{\psi}_k$$

Перетворення Дарбу для потенціалу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Потенціал суперсиметричного партнера

Суперпотенціал: $W(x) = -\operatorname{th} x$

$$A = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x, \quad A^\dagger = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x$$

$$\Rightarrow \widetilde{V} = W^2 - W' + E_0 = 0$$

Розв'язок задачі для партнера

$$-\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\psi}}{\mathrm{d}x^2} = k^2\tilde{\psi} \;\Rightarrow\; \tilde{\psi}_k(x) = a_k e^{ikx} + b_k e^{-ikx}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{A^\dagger\tilde{\psi}}{E} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x\right)\tilde{\psi}_k$$

Перетворення Дарбу для потенціалу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Потенціал суперсиметричного партнера

Суперпотенціал: $W(x) = -\operatorname{th} x$

$$\mathcal{A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x, \quad \mathcal{A}^\dagger = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x$$

$$\Rightarrow \widetilde{V} = W^2 - W' + E_0 = 0$$

Розв'язок задачі для партнера

$$-\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\psi}}{\mathrm{d}x^2} = k^2\tilde{\psi} \;\Rightarrow\; \tilde{\psi}_k(x) = a_k e^{ikx} + b_k e^{-ikx}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{\mathcal{A}^\dagger\tilde{\psi}}{E} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th} x\right)\tilde{\psi}_k$$

Задача розсіяння для потенціалу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Умови розсіяння

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \to -\infty \\ e^{ikx} & x \to +\infty \end{cases}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{th}x\right)\tilde{\psi}_k = \frac{\mathrm{th}x - ik}{1 - ik}e^{ikx}$$

Асимптотики:

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} \frac{-1-ik}{1-ik}e^{ikx} & x \to -\infty \\ e^{ikx} & x \to +\infty \end{cases}$$

Потенціал $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$ — безвідбивальний

Задача розсіяння для потенціалу $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$

Умови розсіяння

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \to -\infty \\ e^{ikx} & x \to +\infty \end{cases}$$

Розв'язок шуканої задачі

$$\psi = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \operatorname{th}x\right)\tilde{\psi}_k = \frac{\operatorname{th}x - ik}{1 - ik}e^{ikx}$$

Асимптотики:

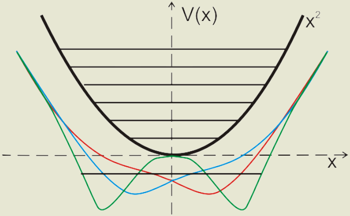
$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} \frac{-1-ik}{1-ik}e^{ikx} & x \to -\infty \\ e^{ikx} & x \to +\infty \end{cases}$$

Потенціал $V(x) = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 x$ — безвідбивальний

Суперсиметричні перетворення

$$\mathcal{A}\psi_0 = 0, \qquad W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати ізоспектральні потенціали.



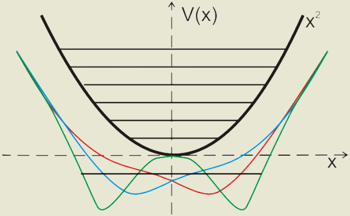
Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Породження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Зсув певного рівня:

Суперсиметричні перетворення

$$\mathcal{A}\psi_0 = 0, \qquad W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати ізоспектральні потенціали.



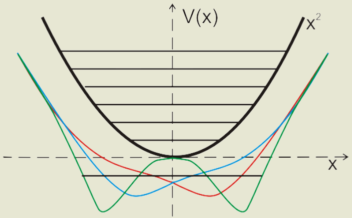
Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Породження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Зсув певного рівня:
  - Перший крок: факторизація на стані $\psi(x, E_n)$, де E_n — певний рівень енергії (не основний)
  - Другий крок: $\tilde{\psi} = \mathcal{A}\psi(x, E)$, де $E = E_n + \Delta$

Суперсиметричні перетворення

$$\mathcal{A}\psi_0 = 0, \qquad W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати ізоспектральні потенціали.



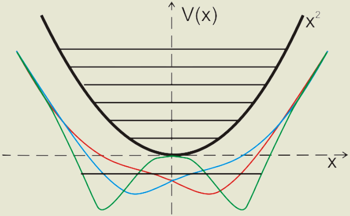
Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Породження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Зсув певного рівня:
  - Перший крок: факторизація на стані $\psi(x, E_n)$, де E_n — певний рівень енергії (не основний)
  - Другий крок: $\tilde{\psi} = \mathcal{A}\psi(x, E)$, де $E = E_n + \Delta$

Суперсиметричні перетворення

$$\mathcal{A}\psi_0 = 0, \quad W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \psi_0$$

Перетворення знищує рівень основного стану (ψ_0 не містить нулів). При цьому решта спектра не змінюється. Отже можна будувати ізоспектральні потенціали.



Узагальнення

- Знищення послідовності рівнів
- Породження нових рівнів (одягаючи низки перетворень)
- Зсув певного рівня:
  - Перший крок: факторизація на стані $\psi(x, E_n)$, де E_n — певний рівень енергії (не основний)
  - Другий крок: $\tilde{\psi} = \mathcal{A}\psi(x, E)$, де $E = E_n + \Delta$