Лекція № 2

Тема лекції:

Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь

План лекції

1. Основні солітонні системи

2. Елементарні ідеї в теорії нелінійних хвиль

3. Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь
   - Рівняння Бюргерса
   - Метод Хіроти для рівняння КдВ
   - Перетворення Беклунда для рівняння КдВ

План лекції

1. Основні солітонні системи
2. Елементарні ідеї в теорії нелінійних хвиль
3. Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь
   - Рівняння Бюргерса
   - Метод Хіроти для рівняння КдВ
   - Перетворення Беклунда для рівняння КдВ

План лекції

1. Основні солітонні системи
2. Елементарні ідеї в теорії нелінійних хвиль
3. Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь
   - Рівняння Бюргерса
   - Метод Хіроти для рівняння КдВ
   - Перетворення Беклунда для рівняння КдВ

Основні солітонні системи

Три солітонні рівняння

- КдВ–рівняння (рівняння Кортвега–де Вріза)

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$

- СҐ–рівняння (рівняння синус Ґордон)

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin\phi$$

- НЛШ–рівняння (нелінійне рівняння Шредінгера)

$$i\phi_t + \phi_{xx} + 2|\phi|^2\phi = 0$$

Рівняння Кортвега–де Вріза: приклад

Нестислива рідина

$u(x,t)$ — поле швидкостей

$$\frac{\mathrm{d}u(x,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_t + uu_x = 0$$

Роль дисперсії

$$v_{ph} = c - \alpha k^2 \Rightarrow \qquad \omega(k) = ck - \alpha k^3$$

Д.З.

$$u(x,t) = u_0 \exp(ikx - i\omega t) \Rightarrow \qquad u_t = -cu_x - \alpha u_{xxx}$$

Дисперсія+нелінійність

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

Рівняння Кортвега–де Вріза: приклад

Нестислива рідина

$u(x,t)$ — поле швидкостей

$$\frac{\mathrm{d}u(x,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_t + uu_x = 0$$

Роль дисперсії

$$v_{ph} = c - \alpha k^2 \Rightarrow \qquad \omega(k) = ck - \alpha k^3$$

$$u(x,t) = u_0 \exp(ikx - i\omega t) \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} \qquad u_t = -cu_x - \alpha u_{xxx}$$

Дисперсія+нелінійність

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

Рівняння Кортвега–де Вріза: приклад

Нестислива рідина

$u(x,t)$ — поле швидкостей

$$\frac{\mathrm{d}u(x,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_t + uu_x = 0$$

Роль дисперсії

$$v_{ph} = c - \alpha k^2 \Rightarrow \qquad \omega(k) = ck - \alpha k^3$$

$$u(x,t) = u_0 \exp(ikx - i\omega t) \overset{\text{д.з.}}{\Rightarrow} \qquad u_t = -cu_x - \alpha u_{xxx}$$

Дисперсія+нелінійність

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

Рівняння Кортвега–де Вріза

КдВ–рівняння

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$

Застосування

- хвилі на неглибокій воді
- іон-акустичні хвилі в плазмі
- хвилі в ангармонічних ґратках

Однонапрямлена динаміка довгих хвиль в середовищі з дисперсією за умов збереження енергії

Рівняння Кортвега–де Вріза

КдВ–рівняння

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$

Застосування

- хвилі на неглибокій воді
- іон-акустичні хвилі в плазмі
- хвилі в ангармонічних ґратках

Однонапрямлена динаміка довгих хвиль в середовищі з дисперсією за умов збереження енергії

Рівняння Кортвега–де Вріза

КдВ–рівняння

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$

Застосування

- хвилі на неглибокій воді
- іон-акустичні хвилі в плазмі
- хвилі в ангармонічних ґратках

Однонапрямлена динаміка довгих хвиль в середовищі з дисперсією за умов збереження енергії

Рівняння синус Ґордон: приклад

Нелінійний маятник

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$$

Система пружно зв'язаних маятників — модель Френкеля–Конторової

$$\ddot{x}_n + \omega_0^2 \sin x + k\left(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n\right) = 0$$

Континуальне наближення — СҐ–рівняння

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin \phi$$

Рівняння синус Ґордон: приклад

Нелінійний маятник

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$$

Система пружно зв'язаних маятників — модель Френкеля–Конторової

$$\ddot{x}_n + \omega_0^2 \sin x + k\left(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n\right) = 0$$

Континуальне наближення — СҐ–рівняння

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin\phi$$

Рівняння синус Ґордон: приклад

Нелінійний маятник

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$$

Система пружно зв'язаних маятників — модель Френкеля–Конторової

$$\ddot{x}_n + \omega_0^2 \sin x + k\left(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n\right) = 0$$

Континуальне наближення — СҐ–рівняння

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin\phi$$

Модель Френкеля–Конторової (ФК)

Найпростіша модель, що описує динаміку ланцюжка частинок, що взаємодіють з найближчими сусідами в присутності зовнішнього періодичного потенціалу

$$\ddot{x}_n + \sin x_n - g\left(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n\right) = 0$$

Приклади

- Перше застосування моделі ФК: динаміка дислокацій
- В фізиці поверхні модель ФК використовується для опису динаміки адатомів
- Біофізика: нелінійна модель динаміки ДНК

Механічна модель ФК

Рівняння синус Ґордон

СҐ–рівняння

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin\phi$$

Застосування

- поширення дефектів в кристалах
- динаміка флюксонів в джозевсонових контактах
- динаміка доменних стінок в феромагнетиках
- скалярні моделі елементарних частинок
- поширення хвиль в ліпідних мембранах

Динаміка хвиль в полі періодичного потенціалу

Рівняння синус Ґордон

СҐ–рівняння

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin \phi$$

Застосування

- поширення дефектів в кристалах
- динаміка флюксонів в джозевсонових контактах
- динаміка доменних стінок в феромагнетиках
- скалярні моделі елементарних частинок
- поширення хвиль в ліпідних мембранах

Динаміка хвиль в полі періодичного потенціалу

Рівняння синус Ґордон

СҐ–рівняння

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin\phi$$

Застосування

- поширення дефектів в кристалах
- динаміка флюксонів в джозевсонових контактах
- динаміка доменних стінок в феромагнетиках
- скалярні моделі елементарних частинок
- поширення хвиль в ліпідних мембранах

Динаміка хвиль в полі періодичного потенціалу

Нелінійне рівняння Шредінгера: приклад

Хвильовий пакет, дисперсія та рівняння огинаючої

- Хвильовий пакет $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - i\omega t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- Дисперсія $\omega(k) \approx \omega_0 + \alpha(k - k_0)^2$
- Огинаюча

$$u(x,t) = e^{ik_0 x - i\omega_0 t}\phi(x,t), \quad \phi(x,t) = \left|\varkappa = k - k_0\right| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$$

- $\phi_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha\varkappa^2) F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = i\alpha\phi_{xx}$
- Рівняння огинаючої: $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = 0$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2$

Нелінійний хвильовий пакет

- Амплітуда огинаючої хвилі $a \sim |\phi|$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2 + \beta a^2$
- Нелінійне рівняння Шредінгера $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} + \beta|\phi|^2\phi = 0$

Нелінійне рівняння Шредінгера: приклад

Хвильовий пакет, дисперсія та рівняння огинаючої

- Хвильовий пакет $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - i\omega t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- Дисперсія $\omega(k) \approx \omega_0 + \alpha(k - k_0)^2$
- Огинаюча

  $u(x,t) = e^{ik_0 x - i\omega_0 t}\phi(x,t), \quad \phi(x,t) = \left|\varkappa = k - k_0\right| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- $\phi_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha\varkappa^2) F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = i\alpha\phi_{xx}$
- Рівняння огинаючої: $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = 0$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2$

Нелінійний хвильовий пакет

- Амплітуда огинаючої хвилі $a \sim |\phi|$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2 + \beta a^2$
- Нелінійне рівняння Шредінгера $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} + \beta|\phi|^2\phi = 0$

Нелінійне рівняння Шредінгера: приклад

Хвильовий пакет, дисперсія та рівняння огинаючої

- Хвильовий пакет $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - i\omega t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- Дисперсія $\omega(k) \approx \omega_0 + \alpha(k - k_0)^2$
- Огинаюча
  $u(x,t) = e^{ik_0x - i\omega_0 t}\phi(x,t), \quad \phi(x,t) = \big|\varkappa = k - k_0\big| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- $\phi_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha\varkappa^2) F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = i\alpha\phi_{xx}$
- Рівняння огинаючої: $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = 0$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2$

Нелінійний хвильовий пакет

- Амплітуда огинаючої хвилі $a \sim |\phi|$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2 + \beta a^2$
- Нелінійне рівняння Шредінгера $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} + \beta|\phi|^2\phi = 0$

Нелінійне рівняння Шредінгера: приклад

Хвильовий пакет, дисперсія та рівняння огинаючої

- Хвильовий пакет $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - i\omega t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- Дисперсія $\omega(k) \approx \omega_0 + \alpha(k - k_0)^2$
- Огинаюча

$$u(x,t) = e^{ik_0 x - i\omega_0 t}\phi(x,t), \quad \phi(x,t) = \left|\varkappa = k - k_0\right| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$$

- $\phi_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha\varkappa^2) F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = i\alpha\phi_{xx}$
- Рівняння огинаючої: $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = 0$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2$

Нелінійний хвильовий пакет

- Амплітуда огинаючої хвилі $a \sim |\phi|$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2 + \beta a^2$
- Нелінійне рівняння Шредінгера $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} + \beta|\phi|^2\phi = 0$

Нелінійне рівняння Шредінгера: приклад

Хвильовий пакет, дисперсія та рівняння огинаючої

- Хвильовий пакет $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - i\omega t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- Дисперсія $\omega(k) \approx \omega_0 + \alpha(k - k_0)^2$
- Огинаюча

  $u(x,t) = e^{ik_0 x - i\omega_0 t}\phi(x,t), \quad \phi(x,t) = \left|\varkappa = k - k_0\right| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- $\phi_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha\varkappa^2) F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = i\alpha\phi_{xx}$
- Рівняння огинаючої: $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = 0$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2$

Нелінійний хвильовий пакет

Нелінійне рівняння Шредінгера: приклад

Хвильовий пакет, дисперсія та рівняння огинаючої

- Хвильовий пакет $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - i\omega t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- Дисперсія $\omega(k) \approx \omega_0 + \alpha(k-k_0)^2$
- Огинаюча
  $$u(x,t) = e^{ik_0 x - i\omega_0 t}\phi(x,t), \quad \phi(x,t) = \left|\varkappa = k - k_0\right| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$$
- $\phi_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha\varkappa^2) F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = i\alpha\phi_{xx}$
- Рівняння огинаючої: $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = 0$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2$

Нелінійний хвильовий пакет

Нелінійне рівняння Шредінгера: приклад

Хвильовий пакет, дисперсія та рівняння огинаючої

- Хвильовий пакет $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - i\omega t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- Дисперсія $\omega(k) \approx \omega_0 + \alpha(k - k_0)^2$
- Огинаюча
  $$u(x,t) = e^{ik_0 x - i\omega_0 t}\phi(x,t), \quad \phi(x,t) = \left|\varkappa = k - k_0\right| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$$
- $\phi_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha\varkappa^2) F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = i\alpha\phi_{xx}$
- Рівняння огинаючої: $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = 0$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2$

Нелінійний хвильовий пакет

- Амплітуда огинаючої хвилі $a \sim |\phi|$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2 + \beta a^2$
- Нелінійне рівняння Шредінгера $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} + \beta|\phi|^2\phi = 0$

Нелінійне рівняння Шредінгера: приклад

Хвильовий пакет, дисперсія та рівняння огинаючої

- Хвильовий пакет $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - i\omega t} \frac{dk}{2\pi}$
- Дисперсія $\omega(k) \approx \omega_0 + \alpha(k-k_0)^2$
- Огинаюча
  $$u(x,t) = e^{ik_0x - i\omega_0 t}\phi(x,t), \quad \phi(x,t) = \left|\varkappa = k - k_0\right| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{dk}{2\pi}$$
- $\phi_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha\varkappa^2) F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{dk}{2\pi} = i\alpha\phi_{xx}$
- Рівняння огинаючої: $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = 0$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2$

Нелінійний хвильовий пакет

- Амплітуда огинаючої хвилі $a \sim |\phi|$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2 + \beta a^2$
- Нелінійне рівняння Шредінгера $i\phi_t + \alpha u_{xx} + \beta|\phi|^2\phi = 0$

Нелінійне рівняння Шредінгера: приклад

Хвильовий пакет, дисперсія та рівняння огинаючої

- Хвильовий пакет $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - i\omega t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- Дисперсія $\omega(k) \approx \omega_0 + \alpha(k - k_0)^2$
- Огинаюча
  $u(x,t) = e^{ik_0 x - i\omega_0 t}\phi(x,t), \quad \phi(x,t) = \left|\varkappa = k - k_0\right| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- $\phi_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha\varkappa^2) F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = i\alpha\phi_{xx}$
- Рівняння огинаючої: $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = 0$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2$

Нелінійний хвильовий пакет

- Амплітуда огинаючої хвилі $a \sim |\phi|$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2 + \beta a^2$
- Нелінійне рівняння Шредінгера $i\phi_t + \alpha u_{xx} + \beta|\phi|^2\phi = 0$

Нелінійне рівняння Шредінгера: приклад

Хвильовий пакет, дисперсія та рівняння огинаючої

- Хвильовий пакет $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - i\omega t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- Дисперсія $\omega(k) \approx \omega_0 + \alpha(k - k_0)^2$
- Огинаюча
  $$u(x,t) = e^{ik_0 x - i\omega_0 t}\phi(x,t), \quad \phi(x,t) = \left|\varkappa = k - k_0\right| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$$
- $\phi_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha\varkappa^2) F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = i\alpha\phi_{xx}$
- Рівняння огинаючої: $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = 0$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2$

Нелінійний хвильовий пакет

- Амплітуда огинаючої хвилі $a \sim |\phi|$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2 + \beta a^2$
- Нелінійне рівняння Шредінгера $i\phi_t + \alpha u_{xx} + \beta|\phi|^2\phi = 0$

Нелінійне рівняння Шредінгера: приклад

Хвильовий пакет, дисперсія та рівняння огинаючої

- Хвильовий пакет $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - i\omega t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- Дисперсія $\omega(k) \approx \omega_0 + \alpha(k-k_0)^2$
- Огинаюча
  $u(x,t) = e^{ik_0x - i\omega_0 t}\phi(x,t), \quad \phi(x,t) = \left|\varkappa = k - k_0\right| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$
- $\phi_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha\varkappa^2) F(\varkappa + k_0) e^{i\varkappa x - i\alpha\varkappa^2 t} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} = i\alpha\phi_{xx}$
- Рівняння огинаючої: $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = 0$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2$

Нелінійний хвильовий пакет

- Амплітуда огинаючої хвилі $a \sim |\phi|$
- Закон дисперсії $\omega = \alpha\varkappa^2 + \beta a^2$
- Нелінійне рівняння Шредінгера $i\phi_t + \alpha u_{xx} + \beta|\phi|^2\phi = 0$

Нелінійне рівняння Шредінгера

НЛШ–рівняння

$$i\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^2\phi = 0$$

Застосування

- гідродинамічні хвилі на глибині
- поширення нелінійних імпульсів в оптичних волокнах
- оптичне самофокусування
- хвилі Ленґмюра в плазмі
- поширення теплових імпульсів в твердих тілах

Нелінійна модель з найменшим ступенем нелінійності для опису однонапрямленої динаміки хвиль в середовищі з дисперсією за умов збереження енергії

Нелінійне рівняння Шредінгера

НЛШ–рівняння

$$i\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^2\phi = 0$$

Застосування

- гідродинамічні хвилі на глибині
- поширення нелінійних імпульсів в оптичних волокнах
- оптичне самофокусування
- хвилі Ленґмюра в плазмі
- поширення теплових імпульсів в твердих тілах

Нелінійна модель з найменшим ступенем нелінійності для опису однонапрямленої динаміки хвиль в середовищі з дисперсією за умов збереження енергії

Нелінійне рівняння Шредінгера

НЛШ–рівняння

$$i\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^2\phi = 0$$

Застосування

- гідродинамічні хвилі на глибині
- поширення нелінійних імпульсів в оптичних волокнах
- оптичне самофокусування
- хвилі Ленґмюра в плазмі
- поширення теплових імпульсів в твердих тілах

Нелінійна модель з найменшим ступенем нелінійності для опису однонапрямленої динаміки хвиль в середовищі з дисперсією за умов збереження енергії

Елементарні ідеї в теорії нелінійних хвиль

Рівняння КдВ

Рівняння КдВ: $\phi_t + \phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$
Підстанова: $\phi(x,t) = 1 + u(x,t) \quad \Rightarrow \quad u_t + (1+u)u_x + u_{xxx} = 0$:

Дисперсія

Лінеаризація в околі $u = 0$:

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0.$$

Плоска хвиля $u(x,t) = e^{ikx - i\omega t} \Rightarrow$ Дисперсія хвиль:

$$\omega(k) = k - k^3$$

Роль u_{xxx} — дисперсія в порівнянні з $u_t + u_x = 0$.

Елементарні ідеї в теорії нелінійних хвиль

Нелінійність

$$u_t + (u+1)u_x = 0.$$

Початкова умова: $u(x,0) = f(x)$

Лінійне рівняння

$$u_t + cu_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = f(x-ct)$$

Нелінійне рівняння

$$u_t + (u+1)u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) \overset{\text{Д.З.}}{=} f\big(x-(u+1)t\big)$$

Елементарні ідеї в теорії нелінійних хвиль

Нелінійність

$$u_t + (u+1)u_x = 0.$$

Початкова умова: $u(x,0) = f(x)$

Лінійне рівняння

$$u_t + cu_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = f(x-ct)$$

Нелінійне рівняння

$$u_t + (u+1)u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) \overset{\text{Д.З.}}{=} f\left(x-(u+1)t\right)$$

Елементарні ідеї в теорії нелінійних хвиль

Нелінійність

$$u_t + (u+1)u_x = 0.$$

Початкова умова: $u(x,0) = f(x)$

Лінійне рівняння

$$u_t + cu_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = f(x-ct)$$

Нелінійне рівняння

$$u_t + (u+1)u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) \overset{\text{Д.З.}}{=} f\left(x-(u+1)t\right)$$

Бездисперсійний аналог КдВ

$$u_t + (u+1)u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = f(x-(u+1)t) = f(\xi - ut), \quad \xi \equiv x - t$$

Початкова умова

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \le x \le 1, \\ c(2-x), & 1 \le x \le 2, \\ 0, & x<0, x>2 \end{cases}$$

Функціональне рівняння

$$u = \begin{cases} c(\xi - ut), & 0 \le \xi - ut \le 1, \\ c(2-\xi+ut), & 1 \le \xi - ut \le 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Розв'язок

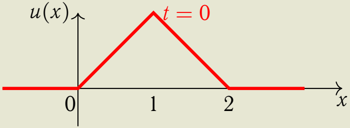
$$u \overset{\text{д.з.}}{=} \begin{cases} c\dfrac{\xi}{1+ct}, & 0 \le \xi - ut \le 1, \\ c\dfrac{2-\xi}{1-ct}, & 1 \le \xi - ut \le 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Бездисперсійний аналог КдВ

$$u_t + (u+1)u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = f(x-(u+1)t) = f(\xi - ut), \quad \xi \equiv x - t$$

Початкова умова

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \le x \le 1, \\ c(2-x), & 1 \le x \le 2, \\ 0, & x<0, x>2 \end{cases}$$



Функціональне рівняння

$$u = \begin{cases} c(\xi - ut), & 0 \le \xi - ut \le 1, \\ c(2-\xi+ut), & 1 \le \xi - ut \le 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Розв'язок

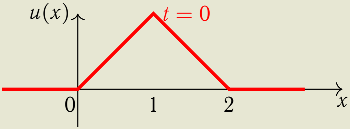
$$u \overset{\text{д.з.}}{=} \begin{cases} c\dfrac{\xi}{1+ct}, & 0 \le \xi - ut \le 1, \\ c\dfrac{2-\xi}{1-ct}, & 1 \le \xi - ut \le 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Бездисперсійний аналог КдВ

$$u_t + (u+1)u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = f(x-(u+1)t) = f(\xi - ut), \quad \xi \equiv x - t$$

Початкова умова

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \le x \le 1, \\ c(2-x), & 1 \le x \le 2, \\ 0, & x < 0, x > 2 \end{cases}$$



Функціональне рівняння

$$u = \begin{cases} c(\xi - ut), & 0 \le \xi - ut \le 1, \\ c(2 - \xi + ut), & 1 \le \xi - ut \le 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Розв'язок

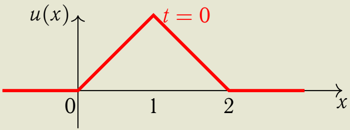
$$u \overset{\text{Д.З.}}{=} \begin{cases} c\dfrac{\xi}{1+ct}, & 0 \le \xi - ut \le 1, \\ c\dfrac{2-\xi}{1-ct}, & 1 \le \xi - ut \le 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Бездисперсійний аналог КдВ

$$u_t + (u+1)u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = f(x-(u+1)t) = f(\xi - ut), \quad \xi \equiv x - t$$

Початкова умова

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \le x \le 1, \\ c(2-x), & 1 \le x \le 2, \\ 0, & x<0, x>2 \end{cases}$$



Функціональне рівняння

$$u = \begin{cases} c(\xi - ut), & 0 \le \xi - ut \le 1, \\ c(2-\xi+ut), & 1 \le \xi - ut \le 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Розв’язок

$$u \overset{\text{д.з.}}{=} \begin{cases} c\dfrac{\xi}{1+ct}, & 0 \le \xi - ut \le 1, \\ c\dfrac{2-\xi}{1-ct}, & 1 \le \xi - ut \le 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Поява розривів в розв'язку $u = f(\xi - ut)$

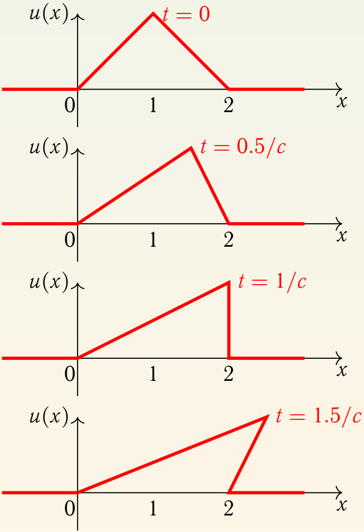
Розв'язок

$$u = \begin{cases} c\dfrac{\xi}{1+ct}, & 0 \le \xi - ut \le 1, \\ c\dfrac{2-\xi}{1-ct}, & 1 \le \xi - ut \le 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Нахил

$$u' = \begin{cases} \dfrac{c}{1+ct}, & 0 \le \xi - ut \le 1, \\ -\dfrac{c}{1-ct}, & 1 \le \xi - ut \le 2, \\ 0, & \text{решта випадків} \end{cases}$$

Час розриву (час перевертання):
$t_s = 1/c$



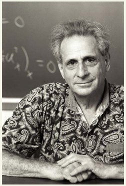
Знов дисперсія

КдВ: Забускі і Крускал

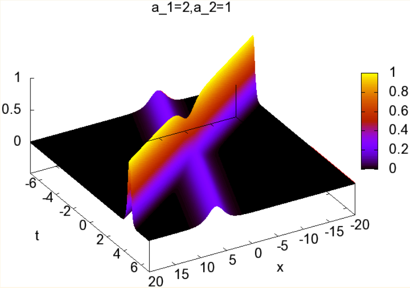
$$\left\| \begin{array}{l} u_t + (1+u)u_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \\ u(x,t) = u(x+2\pi, t) \\ u(x,0) = \cos x \end{array} \right.$$

$\delta = 0.022 \ll 1$

Norman Zabusky



Martin David Kruskal



Дисперсія протидіє тенденції утворення розривів завдяки нелінійності

Дисипація замість дисперсії

Рівняння Бюргерса

$$u_t + uu_x = \delta u_{xx}$$

Лінеаризація рівняння Бюргерса — перетворення Коула—Хопфа

$$u(x,t) = \alpha \partial_x \ln f(x,t), \qquad \alpha = const$$

$$\text{Д.З.} \Rightarrow \frac{f_t}{f} + \frac{f_x^2}{f^2}\left(\delta + \frac{\alpha}{2}\right) - \delta \frac{f_{xx}}{f} = c(t)$$

$$\alpha = -2\delta \qquad \Rightarrow \qquad f_t = \delta f_{xx} + c(t) f$$

Розв'язок Тейлора — ударна хвиля

$$u = A\delta \left(1 - \operatorname{th} \frac{Ax - \delta A^2 t}{2}\right)$$

Дисипація замість дисперсії

Рівняння Бюргерса

$$u_t + uu_x = \delta u_{xx}$$

Лінеаризація рівняння Бюргерса — перетворення Коула—Хопфа

$$u(x,t) = \alpha \partial_x \ln f(x,t), \qquad \alpha = const$$

Д.З. $$\Rightarrow \frac{f_t}{f} + \frac{f_x^2}{f^2}\left(\delta + \frac{\alpha}{2}\right) - \delta \frac{f_{xx}}{f} = c(t)$$

$$\alpha = -2\delta \qquad \Rightarrow \qquad f_t = \delta f_{xx} + c(t) f$$

Розв'язок Тейлора — ударна хвиля

$$u = A\delta\left(1 - \operatorname{th}\frac{Ax - \delta A^2 t}{2}\right)$$

Дисипація замість дисперсії

Рівняння Бюргерса

$$u_t + uu_x = \delta u_{xx}$$

Лінеаризація рівняння Бюргерса — перетворення Коула—Хопфа

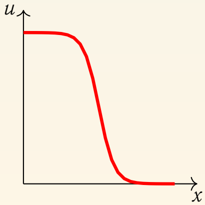
$$u(x,t) = \alpha\partial_x \ln f(x,t), \qquad \alpha = const$$

$$\text{Д.З.} \Rightarrow \frac{f_t}{f} + \frac{f_x^2}{f^2}\left(\delta + \frac{\alpha}{2}\right) - \delta\frac{f_{xx}}{f} = c(t)$$

$$\alpha = -2\delta \qquad \Rightarrow \qquad f_t = \delta f_{xx} + c(t)f$$

Розв'язок Тейлора — ударна хвиля

$$u = A\delta\left(1 - \operatorname{th}\frac{Ax - \delta A^2 t}{2}\right)$$



Метод Хіроти

КдВ–рівняння у вигляді $u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0$

- Перетворення $u = w_x \Rightarrow w_t + 6w_x^2 + w_{xxx} = 0$
- Перетворення Коула—Хопфа $w = \partial_x \ln f$
- Білінійне рівняння Хіроти (R.Hirota, 1971)

$$ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2 + ff_{xt} - f_x f_t = 0 \Leftarrow \text{Д.З.}$$

- Розв'язок — у вигляді ряда теорії збурень $f = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)}$

Метод Хіроти

КдВ–рівняння у вигляді $u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0$

- Перетворення $u = w_x \Rightarrow w_t + 6w_x^2 + w_{xxx} = 0$
- Перетворення Коула—Хопфа $w = \partial_x \ln f$
- Білінійне рівняння Хіроти (R.Hirota, 1971)

$$ff_{xxxx} - 4f_xf_{xxx} + 3f_{xx}^2 + ff_{xt} - f_xf_t = 0 \Leftarrow \text{Д.З.}$$

- Розв'язок — у вигляді ряда теорії збурень $f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)}$

Метод Хіроти

КдВ–рівняння у вигляді $u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0$

- Перетворення $u = w_x \Rightarrow w_t + 6w_x^2 + w_{xxx} = 0$
- Перетворення Коула—Хопфа $w = \partial_x \ln f$
- Білінійне рівняння Хіроти (R.Hirota, 1971)

$$ff_{xxxx} - 4f_xf_{xxx} + 3f_{xx}^2 + ff_{xt} - f_xf_t = 0 \Leftarrow \text{Д.З.}$$

- Розв'язок — у вигляді ряда теорії збурень $f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)}$

Метод Хіроти

КдВ–рівняння у вигляді $u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0$

- Перетворення $u = w_x \Rightarrow w_t + 6w_x^2 + w_{xxx} = 0$
- Перетворення Коула—Хопфа $w = \partial_x \ln f$
- Білінійне рівняння Хіроти (R.Hirota, 1971)

$$ff_{xxxx} - 4f_xf_{xxx} + 3f_{xx}^2 + ff_{xt} - f_xf_t = 0 \Leftarrow \text{Д.З.}$$

- Розв'язок — у вигляді ряда теорії збурень $f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)}$

Метод Хіроти

Рівняння Хіроти

$$f\left[f_{xt} + f_{xxxx}\right] - f_x\left[f_t + 4f_{xxx}\right] + 3f_{xx}^2 = 0, \qquad f = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \cdots$$

$$\varepsilon\left(1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \cdots\right)\left[f^{(1)}_{xt} + \varepsilon f^{(2)}_{xt} + f^{(1)}_{xxxx} + \varepsilon f^{(2)}_{xxxx}\right] -$$

$$-\varepsilon^2\left(f^{(1)}_x + \varepsilon f^{(2)}_x\right)\left[f^{(1)}_t + \varepsilon f^{(2)}_t + 4f^{(1)}_{xxx} + \varepsilon 4f^{(2)}_{xxx}\right] + 3\varepsilon^2\left(f^{(1)}_{xx} + \varepsilon f^{(2)}_{xx}\right)^2 = 0$$

Лінійні рівняння в кожному порядку ε: $\Downarrow$ Д.З.

$$\varepsilon^1: f^{(1)}_{xt} + f^{(1)}_{xxxx} = 0,$$

$$\varepsilon^2: f^{(2)}_{xt} + f^{(2)}_{xxxx} = f^{(1)}_x f^{(1)}_t + 4f^{(1)}_x f^{(1)}_{xxx} - 3\left(f^{(1)}_{xx}\right)^2$$

$$\cdots$$

Розв'язок рівняння в порядку ε^1:

$$\varepsilon^1: \partial_x\left(f^{(1)}_t + f^{(1)}_{xxx}\right) = 0, \Rightarrow f^{(1)} = \exp\theta_1, \qquad \theta_1 \overset{\text{Д.З.}}{=} ax - a^3 t + \delta$$

$$\varepsilon^2: f^{(2)}_{xt} + f^{(2)}_{xxxx} = f^{(1)}_x f^{(1)}_t + 4f^{(1)}_x f^{(1)}_{xxx} - 3\left(f^{(1)}_{xx}\right)^2 \overset{\text{Д.З.}}{=} 0 \Rightarrow f^{(3)}_{xt} \equiv 0 \Rightarrow f^{(N)}_{xt} \equiv 0 \ldots$$

Метод Хіроти

Рівняння Хіроти

$$f\left[f_{xt}+f_{xxxx}\right]-f_x\left[f_t+4f_{xxx}\right]+3f_{xx}^2=0,\qquad f=1+\varepsilon f^{(1)}+\varepsilon^2 f^{(2)}+\cdots$$

$$\varepsilon\left(1+\varepsilon f^{(1)}+\varepsilon^2 f^{(2)}+\cdots\right)\left[f_{xt}^{(1)}+\varepsilon f_{xt}^{(2)}+f_{xxxx}^{(1)}+\varepsilon f_{xxxx}^{(2)}\right]-$$
$$-\varepsilon^2\left(f_x^{(1)}+\varepsilon f_x^{(2)}\right)\left[f_t^{(1)}+\varepsilon f_t^{(2)}+4f_{xxx}^{(1)}+\varepsilon 4 f_{xxx}^{(2)}\right]+3\varepsilon^2\left(f_{xx}^{(1)}+\varepsilon f_{xx}^{(2)}\right)^2=0$$

Лінійні рівняння в кожному порядку ε: $\Downarrow$ Д.З.

$$\varepsilon^1: f_{xt}^{(1)}+f_{xxxx}^{(1)}=0,$$
$$\varepsilon^2: f_{xt}^{(2)}+f_{xxxx}^{(2)}=f_x^{(1)}f_t^{(1)}+4f_x^{(1)}f_{xxx}^{(1)}-3\left(f_{xx}^{(1)}\right)^2$$
$$\ldots$$

Розв'язок рівняння в порядку ε^1:

$$\varepsilon^1: \partial_x\left(f_t^{(1)}+f_{xxx}^{(1)}\right)=0,\Rightarrow f^{(1)}=\exp\theta_1,\qquad \theta_1\overset{\text{Д.З.}}{=}ax-a^3t+\delta$$

$$\varepsilon^2: f_{xt}^{(2)}+f_{xxxx}^{(2)}=f_x^{(1)}f_t^{(1)}+4f_x^{(1)}f_{xxx}^{(1)}-3\left(f_{xx}^{(1)}\right)^2\overset{\text{Д.З.}}{=}0\Rightarrow f_{xt}^{(3)}\equiv 0\Rightarrow f_{xt}^{(N)}\equiv 0\ldots$$

Метод Хіроти

Рівняння Хіроти

$$f\left[f_{xt}+f_{xxxx}\right]-f_x\left[f_t+4f_{xxx}\right]+3f_{xx}^2=0, \qquad f=1+\varepsilon f^{(1)}+\varepsilon^2 f^{(2)}+\cdots$$

$$\varepsilon\left(1+\varepsilon f^{(1)}+\varepsilon^2 f^{(2)}+\cdots\right)\left[f_{xt}^{(1)}+\varepsilon f_{xt}^{(2)}+f_{xxxx}^{(1)}+\varepsilon f_{xxxx}^{(2)}\right]-$$
$$-\varepsilon^2\left(f_x^{(1)}+\varepsilon f_x^{(2)}\right)\left[f_t^{(1)}+\varepsilon f_t^{(2)}+4f_{xxx}^{(1)}+\varepsilon 4f_{xxx}^{(2)}\right]+3\varepsilon^2\left(f_{xx}^{(1)}+\varepsilon f_{xx}^{(2)}\right)^2=0$$

Лінійні рівняння в кожному порядку ε: $\Downarrow$ Д.З.

$$\varepsilon^1: f_{xt}^{(1)}+f_{xxxx}^{(1)}=0,$$
$$\varepsilon^2: f_{xt}^{(2)}+f_{xxxx}^{(2)}=f_x^{(1)}f_t^{(1)}+4f_x^{(1)}f_{xxx}^{(1)}-3\left(f_{xx}^{(1)}\right)^2$$
$$\dots$$

Розв'язок рівняння в порядку ε^1:

$$\varepsilon^1: \partial_x\left(f_t^{(1)}+f_{xxx}^{(1)}\right)=0, \Rightarrow f^{(1)}=\exp\theta_1, \qquad \theta_1 \overset{\text{Д.З.}}{=} ax-a^3t+\delta$$
$$\varepsilon^2: f_{xt}^{(2)}+f_{xxxx}^{(2)}=f_x^{(1)}f_t^{(1)}+4f_x^{(1)}f_{xxx}^{(1)}-3\left(f_{xx}^{(1)}\right)^2 \overset{\text{Д.З.}}{=} 0 \Rightarrow f_{xt}^{(3)}\equiv 0 \Rightarrow f_{xt}^{(N)}\equiv 0\dots$$

Метод Хіроти

Рівняння Хіроти

$$f\left[f_{xt}+f_{xxxx}\right]-f_x\left[f_t+4f_{xxx}\right]+3f_{xx}^2=0,\qquad f=1+\varepsilon f^{(1)}+\varepsilon^2 f^{(2)}+\cdots$$

$$\varepsilon\left(1+\varepsilon f^{(1)}+\varepsilon^2 f^{(2)}+\cdots\right)\left[f_{xt}^{(1)}+\varepsilon f_{xt}^{(2)}+f_{xxxx}^{(1)}+\varepsilon f_{xxxx}^{(2)}\right]-$$
$$-\varepsilon^2\left(f_x^{(1)}+\varepsilon f_x^{(2)}\right)\left[f_t^{(1)}+\varepsilon f_t^{(2)}+4f_{xxx}^{(1)}+\varepsilon 4f_{xxx}^{(2)}\right]+3\varepsilon^2\left(f_{xx}^{(1)}+\varepsilon f_{xx}^{(2)}\right)^2=0$$

Лінійні рівняння в кожному порядку ε: $\Downarrow$ Д.З.

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 &: f_{xt}^{(1)}+f_{xxxx}^{(1)}=0,\\ \varepsilon^2 &: f_{xt}^{(2)}+f_{xxxx}^{(2)}=f_x^{(1)}f_t^{(1)}+4f_x^{(1)}f_{xxx}^{(1)}-3\left(f_{xx}^{(1)}\right)^2\\ &\dots\end{aligned}$$

Розв'язок рівняння в порядку ε^1:

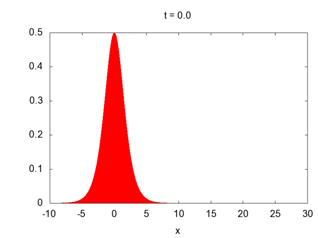
$$\varepsilon^1 :\partial_x\left(f_t^{(1)}+f_{xxx}^{(1)}\right)=0,\Rightarrow f^{(1)}=\exp\theta_1,\qquad \theta_1\overset{\text{Д.З.}}{=}ax-a^3t+\delta$$

$$\varepsilon^2 :f_{xt}^{(2)}+f_{xxxx}^{(2)}=f_x^{(1)}f_t^{(1)}+4f_x^{(1)}f_{xxx}^{(1)}-3\left(f_{xx}^{(1)}\right)^2\overset{\text{Д.З.}}{=}0\Rightarrow f_{xt}^{(3)}\equiv 0\Rightarrow f_{xt}^{(N)}\equiv 0\dots$$

Метод Хіроти: $N = 1$

$N = 1$

$$f^{(N=1)} = e^{\theta_1}, \ \theta_1 = a_1 x - a_1^3 t + \delta_1 \qquad f^{(N>1)} \equiv 0 \Rightarrow f = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)} = 1 + e^{\theta_1}$$



Перетворення Коула–Хопфа: $u = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f$

Односолітонний розв'язок

$$u = \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{f} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{a_1 e^{\theta_1}}{1 + e^{\theta_1}} \overset{\text{д.з.}}{=} \frac{a_1^2}{4} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\theta_1/2)}$$

Метод Хіроти: $N = 2$

$$\varepsilon^1 : f_{xt}^{(1)} + f_{xxxx}^{(1)} = 0,$$
$$\varepsilon^2 : f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} + 4 f_x^{(1)} f_{xxx}^{(1)} - 3\left(f_{xx}^{(1)}\right)^2$$
$$\ldots$$

$N = 2$

$$f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, \ \theta_n = a_n x - a_n^3 t + \delta_n$$

$$f^{(N>2)} \equiv 0 \Rightarrow f = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)} = 1 + f^{(1)} + f^{(2)}$$

Для знаходження $f^{(2)}$:

$$f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = 3a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}$$

$$\Rightarrow f^{(2)} \overset{\text{д.з.}}{=} A e^{\theta_1 + \theta_2}, \qquad A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2$$

Метод Хіроти: $N = 2$

$$\varepsilon^1 : f^{(1)}_{xt} + f^{(1)}_{xxxx} = 0,$$
$$\varepsilon^2 : f^{(2)}_{xt} + f^{(2)}_{xxxx} = f^{(1)}_x f^{(1)}_t + 4 f^{(1)}_x f^{(1)}_{xxx} - 3\left(f^{(1)}_{xx}\right)^2$$
$$\ldots$$

$N = 2$

$$f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, \; \theta_n = a_n x - a_n^3 t + \delta_n$$

$$f^{(N>2)} \equiv 0 \Rightarrow f = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)} = 1 + f^{(1)} + f^{(2)}$$

Для знаходження $f^{(2)}$:

$$f^{(2)}_{xt} + f^{(2)}_{xxxx} = 3a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}$$

$$\Rightarrow f^{(2)} \overset{\text{д.з.}}{=} A e^{\theta_1 + \theta_2}, \qquad A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2$$

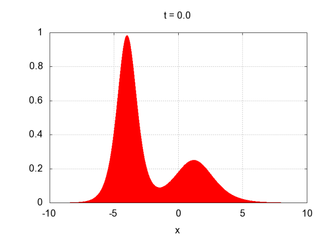
Метод Хіроти: $N = 2$

Двосолітонний розв'язок $N = 2$

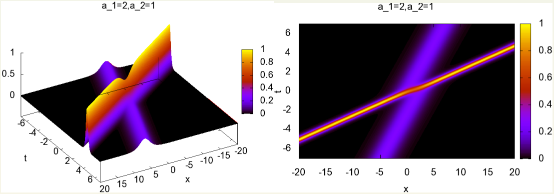
$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln\left(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + Ae^{\theta_1+\theta_2}\right), \qquad A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2, \; \theta_n = a_n x - a_n^3 t + \delta_n$$

Приклад: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$

$$u = \frac{9e^{t+x}\left(9e^{16t} + e^{4x} + 36e^{9t+x} + 18e^{8t+2x} + 4e^{7t+3x}\right)}{\left(9e^{9t} + e^{3x} + 9e^{8t+x} + 9e^{t+2x}\right)^2}$$



Метод Хіроти: $N=2$



$\theta = ax - a^3 t + \delta$

- 1 солітон: $\theta_1 \sim 0$, тобто $x \approx a_1^2 t \Rightarrow \theta_2 \approx (a_1^2 - a_2^2)t \Rightarrow \theta_2 \to \pm\infty$, коли $t \to \pm\infty$
- 2 солітон: $\theta_2 \sim 0$, тобто $x \approx a_2^2 t \Rightarrow \theta_1 \to \pm\infty$, коли $t \to \pm\infty$

Фазовий зсув

$$u \overset{\text{Д.З.}}{\approx} \sum_{i=1}^{2} \frac{a_i^2}{4\,\mathrm{ch}^2\, \frac{\theta_i + \Delta_i^{(\pm)}}{2}}, \qquad t \to \pm\infty$$

$$\Delta_1^{(+)} = \ln A, \qquad \Delta_1^{(-)} = 0,$$

$$\Delta_2^{(+)} = 0, \qquad \Delta_2^{(-)} = \ln A$$

$$\delta x_1 = (\Delta_1^{(+)} - \Delta_1^{(-)})/a_1 = \ln A/a_1 < 0$$

$$\delta x_2 = (\Delta_2^{(+)} - \Delta_2^{(-)})/a_2 = -\ln A/a_2 > 0.$$

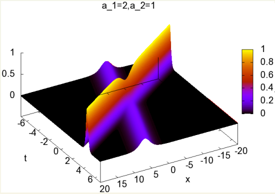
Маса $m = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 \mathrm{d}x}{4\,\mathrm{ch}^2\,\theta/2} = a$

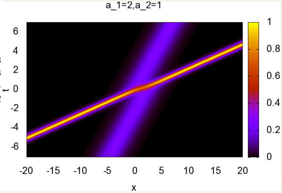
Закон збереження імпульсу

$$a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 = 0$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0.$$

Метод Хіроти: $N = 2$





$\theta = ax - a^3 t + \delta$

- 1 солітон: $\theta_1 \sim 0$, тобто $x \approx a_1^2 t \Rightarrow \theta_2 \approx (a_1^2 - a_2^2)t \Rightarrow \theta_2 \to \pm\infty$, коли $t \to \pm\infty$
- 2 солітон: $\theta_2 \sim 0$, тобто $x \approx a_2^2 t \Rightarrow \theta_1 \to \pm\infty$, коли $t \to \pm\infty$

Фазовий зсув

$$u \overset{\text{Д.З.}}{\approx} \sum_{i=1}^{2} \frac{a_i^2}{4\,\mathrm{ch}^2\,\frac{\theta_i + \Delta_i^{(\pm)}}{2}}, \qquad t \to \pm\infty$$

$$\Delta_1^{(+)} = \ln A, \qquad \Delta_1^{(-)} = 0,$$

$$\Delta_2^{(+)} = 0, \qquad \Delta_2^{(-)} = \ln A$$

$$\delta x_1 = (\Delta_1^{(+)} - \Delta_1^{(-)})/a_1 = \ln A/a_1 < 0$$

$$\delta x_2 = (\Delta_2^{(+)} - \Delta_2^{(-)})/a_2 = -\ln A/a_2 > 0.$$

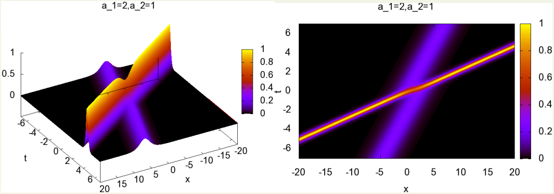
Маса $m = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 \mathrm{d}x}{4\,\mathrm{ch}^2\,\theta/2} = a$

Закон збереження імпульсу

$$a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 = 0$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0.$$

Метод Хіроти: $N = 2$



$\theta = ax - a^3 t + \delta$

- 1 солітон: $\theta_1 \sim 0$, тобто $x \approx a_1^2 t \Rightarrow \theta_2 \approx (a_1^2 - a_2^2)t \Rightarrow \theta_2 \to \pm\infty$, коли $t \to \pm\infty$
- 2 солітон: $\theta_2 \sim 0$, тобто $x \approx a_2^2 t \Rightarrow \theta_1 \to \pm\infty$, коли $t \to \pm\infty$

Фазовий зсув

$$u \overset{\text{Д.З.}}{\approx} \sum_{i=1}^{2} \frac{a_i^2}{4\,\mathrm{ch}^2\,\frac{\theta_i + \Delta_i^{(\pm)}}{2}}, \quad t \to \pm\infty$$

$$\Delta_1^{(+)} = \ln A, \qquad \Delta_1^{(-)} = 0,$$

$$\Delta_2^{(+)} = 0, \qquad \Delta_2^{(-)} = \ln A$$

$$\delta x_1 = (\Delta_1^{(+)} - \Delta_1^{(-)})/a_1 = \ln A/a_1 < 0$$

$$\delta x_2 = (\Delta_2^{(+)} - \Delta_2^{(-)})/a_2 = -\ln A/a_2 > 0.$$

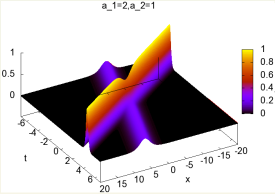
Маса $m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 \mathrm{d}x}{4\,\mathrm{ch}^2\,\theta/2} = a$

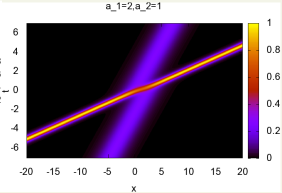
Закон збереження імпульсу

$$a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 = 0$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0.$$

Метод Хіроти: $N = 2$





$\theta = ax - a^3 t + \delta$

- 1 солітон: $\theta_1 \sim 0$, тобто $x \approx a_1^2 t \Rightarrow \theta_2 \approx (a_1^2 - a_2^2)t \Rightarrow \theta_2 \to \pm\infty$, коли $t \to \pm\infty$
- 2 солітон: $\theta_2 \sim 0$, тобто $x \approx a_2^2 t \Rightarrow \theta_1 \to \pm\infty$, коли $t \to \pm\infty$

Фазовий зсув

$$u \overset{\text{Д.З.}}{\approx} \sum_{i=1}^{2} \frac{a_i^2}{4\,\mathrm{ch}^2\,\frac{\theta_i + \Delta_i^{(\pm)}}{2}}, \qquad t \to \pm\infty$$

$$\Delta_1^{(+)} = \ln A, \qquad \Delta_1^{(-)} = 0,$$

$$\Delta_2^{(+)} = 0, \qquad \Delta_2^{(-)} = \ln A$$

$$\delta x_1 = (\Delta_1^{(+)} - \Delta_1^{(-)})/a_1 = \ln A/a_1 < 0$$

$$\delta x_2 = (\Delta_2^{(+)} - \Delta_2^{(-)})/a_2 = -\ln A/a_2 > 0.$$

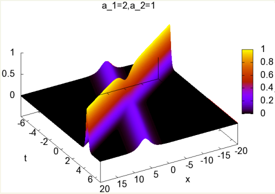
Маса $m = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{a^2 \mathrm{d}x}{4\,\mathrm{ch}^2\,\theta/2} = a$

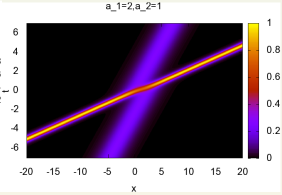
Закон збереження імпульсу

$$a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 = 0$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0.$$

Метод Хіроти: $N = 2$





$\theta = ax - a^3 t + \delta$

- 1 солітон: $\theta_1 \sim 0$, тобто $x \approx a_1^2 t \Rightarrow \theta_2 \approx (a_1^2 - a_2^2)t \Rightarrow \theta_2 \to \pm\infty$, коли $t \to \pm\infty$
- 2 солітон: $\theta_2 \sim 0$, тобто $x \approx a_2^2 t \Rightarrow \theta_1 \to \pm\infty$, коли $t \to \pm\infty$

Фазовий зсув

Д.З.

$$u \approx \sum_{i=1}^{2} \frac{a_i^2}{4\,\mathrm{ch}^2\, \frac{\theta_i + \Delta_i^{(\pm)}}{2}}, \qquad t \to \pm\infty$$

$$\Delta_1^{(+)} = \ln A, \qquad \Delta_1^{(-)} = 0,$$

$$\Delta_2^{(+)} = 0, \qquad \Delta_2^{(-)} = \ln A$$

$$\delta x_1 = (\Delta_1^{(+)} - \Delta_1^{(-)})/a_1 = \ln A/a_1 < 0$$

$$\delta x_2 = (\Delta_2^{(+)} - \Delta_2^{(-)})/a_2 = -\ln A/a_2 > 0.$$

Маса $m = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 \mathrm{d}x}{4\,\mathrm{ch}^2\,\theta/2} = a$

Закон збереження імпульсу

$$a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 = 0$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0.$$

Метод Хіроти: N–солітонний розв'язок

$$f^{(1)} = 1 + \sum_{n=0}^{N} e^{\theta_n}, \quad \theta_n = a_n x - a_n^3 t + \delta_n$$

$$\Rightarrow \qquad f^{(N+1)} = f^{(N+2)} = \cdots = 0$$

N–солітонний розв'язок

$$u_N(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln f(x,t),$$

$$f(x,t) = \det(M), \qquad M = ||m_{ij}||$$

$$m_{ij} = \frac{2\sqrt{\varkappa_i\varkappa_j}}{\varkappa_i+\varkappa_j}\exp\left[\frac{\varkappa_i+\varkappa_j}{2}x - \frac{\varkappa_i^2+\varkappa_j^2}{2}t + \alpha_{ij}\right] + \delta_{ij}$$

Метод Хіроти: N–солітонний розв'язок

$$f^{(1)} = 1 + \sum_{n=0}^{N} e^{\theta_n}, \quad \theta_n = a_n x - a_n^3 t + \delta_n$$

$$\Rightarrow \qquad f^{(N+1)} = f^{(N+2)} = \cdots = 0$$

N–солітонний розв'язок

$$u_N(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f(x,t),$$

$$f(x,t) = \det(M), \qquad M = ||m_{ij}||$$

$$m_{ij} = \frac{2\sqrt{\varkappa_i \varkappa_j}}{\varkappa_i + \varkappa_j} \exp\left[\frac{\varkappa_i + \varkappa_j}{2} x - \frac{\varkappa_i^2 + \varkappa_j^2}{2} t + \alpha_{ij}\right] + \delta_{ij}$$

Перетворення Беклунда

Рівняння КдВ: $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
Рівняння мКдВ: $v_t - 6(v^2 + 6\lambda)v_x + v_{xxx} = 0$ (модифіковане рівняння КдВ)

Міура (1968)

Якщо v — розв'язок мКдВ, то $u = v_x + v^2 + \lambda$ — розв'язок КдВ (λ — стала)

Два розв'язки КдВ–рівняння

Якщо v є розв'язком мКдВ, то $-v$ також є розв'язком мКдВ

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + v^2 + v_x \\ u_1 = \lambda + v^2 - v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 - u_1 = 2v_x \\ u_0 + u_1 = 2(\lambda + v^2) \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{aligned} u_0 &= 2\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ u_1 &= 2\frac{\partial w_1}{\partial x} \end{aligned} \right| \Rightarrow \begin{cases} w_0 - w_1 = v \\ (w_1 + w_0)_x = \lambda + v^2 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} (w_1 + w_0)_x = (w_1 - w_0)^2 + \lambda \\ (w_1 - w_0)_t - 6(w_1 + w_0)_x(w_1 - w_0)_x + (w_1 - w_0)_{xxx} = 0 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

Рівняння КдВ: $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
Рівняння мКдВ: $v_t - 6(v^2 + 6\lambda)v_x + v_{xxx} = 0$ (модифіковане рівняння КдВ)

Міура (1968)

Якщо v — розв'язок мКдВ, то $u = v_x + v^2 + \lambda$ — розв'язок КдВ (λ — стала)

Два розв'язки КдВ–рівняння

Якщо v є розв'язком мКдВ, то $-v$ також є розв'язком мКдВ

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + v^2 + v_x \\ u_1 = \lambda + v^2 - v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 - u_1 = 2v_x \\ u_0 + u_1 = 2(\lambda + v^2) \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{aligned} u_0 &= 2\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ u_1 &= 2\frac{\partial w_1}{\partial x} \end{aligned} \right| \Rightarrow \begin{cases} w_0 - w_1 = v \\ (w_1 + w_0)_x = \lambda + v^2 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} (w_1 + w_0)_x = (w_1 - w_0)^2 + \lambda \\ (w_1 - w_0)_t - 6(w_1 + w_0)_x(w_1 - w_0)_x + (w_1 - w_0)_{xxx} = 0 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

Рівняння КдВ: $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
Рівняння мКдВ: $v_t - 6(v^2 + 6\lambda)v_x + v_{xxx} = 0$ (модифіковане рівняння КдВ)

Міура (1968)

Якщо v — розв'язок мКдВ, то $u = v_x + v^2 + \lambda$ — розв'язок КдВ (λ — стала)

Два розв'язки КдВ–рівняння

Якщо v є розв'язком мКдВ, то $-v$ також є розв'язком мКдВ

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + v^2 + v_x \\ u_1 = \lambda + v^2 - v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 - u_1 = 2v_x \\ u_0 + u_1 = 2(\lambda + v^2) \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{matrix} u_0 = 2\dfrac{\partial w_0}{\partial x} \\ u_1 = 2\dfrac{\partial w_1}{\partial x} \end{matrix} \right| \Rightarrow \begin{cases} w_0 - w_1 = v \\ (w_1 + w_0)_x = \lambda + v^2 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} (w_1 + w_0)_x = (w_1 - w_0)^2 + \lambda \\ (w_1 - w_0)_t - 6(w_1 + w_0)_x(w_1 - w_0)_x + (w_1 - w_0)_{xxx} = 0 \end{cases}$$

Перетворення Беклунда

$$u_0 = w_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} {w_1}_x = \lambda + w_1^2 \\ -{w_1}_t + 6({w_1}_x)^2 - (w_1)_{xxx} = 0 \end{cases}$$

$$w_1 = -\frac{f_x}{f} \overset{\text{Д.З.}}{\Rightarrow} f_{xx} + \lambda f = 0 \Rightarrow f = e^{a(x+c)} + e^{-a(x+c)}, \lambda = -a^2, c = c(t)$$

$$w_1 = -a \operatorname{th}\theta, \qquad \theta = a(x+c)$$

$$c_t + 4a^2 = 0 \Rightarrow c(t) = -4a^2 t + \delta$$

Односолітонний розв'язок $N = 1$

$$u_1 = 2{w_1}_x = \frac{2a^2}{\operatorname{ch}^2(a(x - 4a^2 t + \delta))}$$

N–солітонний розв'язок

$$0 \mapsto u_1 \mapsto u_2 \mapsto u_3 \mapsto \cdots \mapsto u_N$$

Перетворення Беклунда

$$u_0 = w_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} w_{1x} = \lambda + w_1^2 \\ -w_{1t} + 6(w_{1x})^2 - (w_1)_{xxx} = 0 \end{cases}$$

$$w_1 = -\frac{f_x}{f} \overset{\text{д.з.}}{\Rightarrow} f_{xx} + \lambda f = 0 \Rightarrow f = e^{a(x+c)} + e^{-a(x+c)}, \lambda = -a^2, c = c(t)$$

$$w_1 = -a\,\text{th}\theta, \qquad \theta = a(x+c)$$

$$c_t + 4a^2 = 0 \Rightarrow c(t) = -4a^2 t + \delta$$

Односолітонний розв'язок $N = 1$

$$u_1 = 2w_{1x} = \frac{2a^2}{\text{ch}^2(a(x - 4a^2 t + \delta))}$$

N−солітонний розв'язок

$$0 \mapsto u_1 \mapsto u_2 \mapsto u_3 \mapsto \cdots \mapsto u_N$$

Перетворення Беклунда

$$u_0 = w_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} w_{1x} = \lambda + w_1^2 \\ -w_{1t} + 6(w_{1x})^2 - (w_1)_{xxx} = 0 \end{cases}$$

$$w_1 = -\frac{f_x}{f} \overset{\text{д.з.}}{\Rightarrow} f_{xx} + \lambda f = 0 \Rightarrow f = e^{a(x+c)} + e^{-a(x+c)}, \lambda = -a^2, c = c(t)$$

$$w_1 = -a\,\mathrm{th}\theta, \qquad \theta = a(x+c)$$

$$c_t + 4a^2 = 0 \Rightarrow c(t) = -4a^2 t + \delta$$

Односолітонний розв'язок $N = 1$

$$u_1 = 2w_{1x} = \frac{2a^2}{\mathrm{ch}^2(a(x - 4a^2 t + \delta))}$$

$N-$солітонний розв'язок

$$0 \mapsto u_1 \mapsto u_2 \mapsto u_3 \mapsto \cdots \mapsto u_N$$