Вступ до фізики солітонів

(курс «Додаткові розділи сучасної фізики»)

курс лекцій

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем

Вступ до фізики солітонів

План курсу

1. Солітони: концепція солітону, основні солітонні рівняння, приклади солітонів
2. Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь
3. Обернена задача розсіяння і суперсиметрична квантова механіка
4. Метод оберненої задачі розсіяння в теорії солітонів
5. Рівняння синус Ґордон
6. Солітонна теорія збурень
7. Квантування солітонів

Інформація до курсу

Web–адреса курсу: http://ritm.knu.ua/ua/solitons/

- Література до курсу
- Програма курсу
- Презентації лекцій
- Індивідуальні завдання для студентів
- Перелік запитань до іспиту

Література до курсу

- Скотт Э. “Нелинейная наука”
- Додд Р. и др. “Солитоны и нелинейные волновые уравнения”
- Новокшенов В. Ю. “Введение в теорию солитонов”
- Новиков С. П. “Теория солитонов: метод обратной задачи”
- Лонгрен К., Скотт Э. “Солитоны в действии”

Лекція № 1

Тема лекції:

Солітони: концепція солітону, основні солітонні рівняння, приклади солітонів

План лекції

1. Народження концепції солітону
   - Досліди Рассела
   - Рівняння Кортвега–де–Вріза
   - Задача Фермі–Паста–Улама
2. Солітонні рівняння
   - Модель Френкеля–Конторової
     - Рівняння синус–Ґордон
   - Нелінійне рівняння Шредінгера
   - Задача про автомобільні затори

План лекції

1. Народження концепції солітону
   - Досліди Рассела
   - Рівняння Кортвега–де–Вріза
   - Задача Фермі–Паста–Улама
2. Солітонні рівняння
   - Модель Френкеля–Конторової
     - Рівняння синус–Ґордон
   - Нелінійне рівняння Шредінгера
   - Задача про автомобільні затори

В чому специфіка солітону?

Поняття солітону

Солітон (soliton = solitary wave + on) — стійка усоблена хвиля, що поширюється в нелінійному середовищі

Хвильове рівняння: $\Box\phi \equiv \phi_{xx} - \frac{1}{c^2}\phi_{tt} = 0$

$$\phi(x,t) = f(x-ct) = \int \mathrm{d}k\,[a(k)\cos(kx-\omega t) + b(k)\sin(kx-\omega t)]$$

Основні властивості:

- Розв'язок $\phi(x,t) = f(x-ct)$ поширюється без деформації: відсутність дисперсії $\omega = ck$
- Асимптотичне збереження форми після зіткнення: $\phi(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$

В чому специфіка солітону?

Поняття солітону

Солітон (soliton = solitary wave + on) — стійка усоблена хвиля, що поширюється в нелінійному середовищі

Хвильове рівняння: $\Box\phi \equiv \phi_{xx} - \frac{1}{c^2}\phi_{tt} = 0$

$$\phi(x,t) = f(x-ct) = \int \mathrm{d}k\, [a(k)\cos(kx-\omega t) + b(k)\sin(kx-\omega t)]$$

Основні властивості:

- Розв'язок $\phi(x,t) = f(x-ct)$ поширюється без деформації: відсутність дисперсії $\omega = ck$
- Асимптотичне збереження форми після зіткнення: $\phi(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$

В чому специфіка солітону?

Поняття солітону

Солітон (soliton = solitary wave + on) — стійка усоблена хвиля, що поширюється в нелінійному середовищі

Хвильове рівняння: $\Box\phi \equiv \phi_{xx} - \frac{1}{c^2}\phi_{tt} = 0$

$$\phi(x,t) = f(x-ct) = \int \mathrm{d}k\,[a(k)\cos(kx-\omega t) + b(k)\sin(kx-\omega t)]$$

Основні властивості:

- Розв'язок $\phi(x,t) = f(x-ct)$ поширюється без деформації: відсутність дисперсії $\omega = ck$
- Асимптотичне збереження форми після зіткнення: $\phi(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$

В чому специфіка солітону?

Поняття солітону

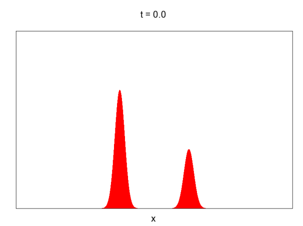
Солітон (soliton = solitary wave + on) — стійка усоблена хвиля, що поширюється в нелінійному середовищі

Хвильове рівняння: $\Box\phi \equiv \phi_{xx} - \frac{1}{c^2}\phi_{tt} = 0$

$$\phi(x,t) = f(x-ct) = \int \mathrm{d}k \left[a(k)\cos(kx-\omega t) + b(k)\sin(kx-\omega t)\right]$$

Основні властивості:

- Розв'язок $\phi(x,t) = f(x-ct)$ поширюється без деформації: відсутність дисперсії $\omega = ck$
- Асимптотичне збереження форми після зіткнення: $\phi(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$



Дисперсія хвиль

Рівняння Клейна–Ґордона

$$\Box\phi(x,t) = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi(x,t)$$

Основні властивості:

- Рівняння лінійне, повний набір функцій $\cos(kx \pm \omega t)$, $\sin(kx \pm \omega t)$
- Закон дисперсії хвиль: $\omega^2 = c^2k^2 + m^2c^4/\hbar^2$
- Завдяки дисперсії хвильовий пакет

$$\phi(x,t=0) = \int \mathrm{d}k\,[a(k)\cos(kx) + b(k)\sin(kx)]$$

з часом розпливається

Нелінійне рівняння

$$\Box\phi(x,t) = \phi^3(x,t)$$

Основні властивості:

- Енергія системи

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{\phi_t^2}{2c^2} + \frac{\phi_x^2}{2} + \frac{\phi^4}{4}\right]$$

- Мінімум енергії: $E = 0$ при $\phi = 0$
- Шуканий локалізований розв'язок: $\phi(x \to \pm\infty, t) \to 0$
- Закон дисперсії хвиль: $\omega = ck$
- Завдяки нелінійності хвильовий пакет з часом розпливається

Нелінійні хвилі з дисперсією

Модель ϕ^4

$$\Box\phi = \phi^3 - \phi$$

Основні властивості:

- Енергія системи

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{\phi_t^2}{2c^2} + \frac{\phi_x^2}{2} + \frac{(\phi^2-1)^2}{4}\right]$$

- Мінімум енергії: $E = 0$ при $\phi(x,t) = \pm 1$
- Шуканий локалізований розв'язок: $\phi(x \to \pm\infty, t) \to \pm 1$
- Закон дисперсії для лінійних хвиль: $\omega^2 = c^2 k^2 + \text{const}$

Статика моделі ϕ^4

Модель ϕ^4 — релятивістська модель $\Rightarrow \phi(x,t) = \phi(\gamma(x - vt))$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

Статичний розв'язок $\phi = \phi(x)$

$$E[\phi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{\phi_x^2}{2} + U(\phi) \right]$$

$$U(\phi) = \frac{(\phi^2 - 1)^2}{4}$$

Аналогія з лагранжевою механікою:

$$S = \int \mathrm{d}t \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right]$$

ϕ — «координата»

x — «час»

$-U(\phi)$ — «потенціал»

Потенціал

$$\phi(x) = \mathrm{th}\left(\frac{x - vt}{\sqrt{2(1 - v^2/c^2)}} + \delta \right)$$

Статика моделі ϕ^4

Модель ϕ^4 — релятивістська модель $\Rightarrow \phi(x,t) = \phi(\gamma(x - vt))$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

Статичний розв'язок $\phi = \phi(x)$

$$E[\phi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{\phi_x^2}{2} + U(\phi)\right]$$

$$U(\phi) = \frac{(\phi^2 - 1)^2}{4}$$

Аналогія з лагранжевою механікою:

$$S = \int \mathrm{d}t \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)\right]$$

ϕ — «координата»

x — «час»

$-U(\phi)$ — «потенціал»

Потенціал

$$\phi(x) = \mathrm{th}\left(\frac{x - vt}{\sqrt{2(1 - v^2/c^2)}} + \delta\right)$$

Статика моделі ϕ^4

Модель ϕ^4 — релятивістська модель $\Rightarrow \phi(x,t) = \phi(\gamma(x - vt))$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

Статичний розв'язок $\phi = \phi(x)$

$$E[\phi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{\phi_x^2}{2} + U(\phi)\right]$$

$$U(\phi) = \frac{(\phi^2 - 1)^2}{4}$$

Аналогія з лагранжевою механікою:

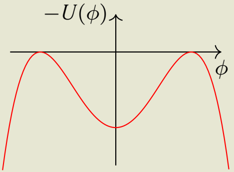
$$S = \int \mathrm{d}t \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)\right]$$

ϕ — «координата»

x — «час»

$-U(\phi)$ — «потенціал»

Потенціал



$$\phi(x) = \mathrm{th}\left(\frac{x - vt}{\sqrt{2(1 - v^2/c^2)}} + \delta\right)$$

Статика моделі ϕ^4

Модель ϕ^4 — релятивістська модель $\Rightarrow \phi(x,t) = \phi(\gamma(x - vt))$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

Статичний розв'язок $\phi = \phi(x)$

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{\phi_x^2}{2} + U(\phi)\right]$$

$$U(\phi) = \frac{(\phi^2 - 1)^2}{4}$$

Аналогія з лагранжевою механікою:

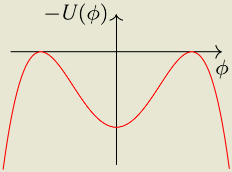
$$S = \int \mathrm{d}t \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)\right]$$

ϕ — «координата»

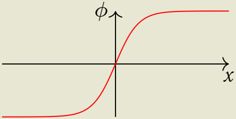
x — «час»

$-U(\phi)$ — «потенціал»

Потенціал



$$\phi(x) = \mathrm{th}\left(\frac{x - vt}{\sqrt{2(1 - v^2/c^2)}} + \delta\right)$$



Умови існування усоблених хвиль

- Лінійні рівняння без дисперсії: усоблені хвилі існують;
- Лінійні рівняння з дисперсією: усоблені хвилі не існують;
- Нелінійні рівняння без дисперсії: усоблені хвилі не існують;
- Нелінійні рівняння з дисперсією: усоблені хвилі існують;

Для існування усоблених хвиль потрібна нелінійність + дисперсія

За яких умов нелінійне збудження є солітоном?

Означення солітону

Солітон — хвильове збудження $\phi(x,t)$ в нелінійному середовищі, яке задовольняє наступним вимогам:

- поширюється зі сталою швидкістю, не змінюючи при цьому форми: $\phi(x-vt)$
- локалізоване у просторі: $\phi'(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$
- не змінюється при зіткненні з іншим таким збудженням (окрім можливого зсуву фаз)

$$\phi(x,t) \sim \sum_i \phi_s(x - v_i t) \quad \text{при } t \to -\infty,\ v_i = \text{const},$$

$$\phi(x,t) \sim \sum_i \phi_s(x - v_i t + \delta_i) \quad \text{при } t \to +\infty,\ \delta_i = \text{const}$$

Народження концепції солітону

Скотт Рассел

Емпірична формула Рассела

$$v = \sqrt{g(d+h)}$$

v — швидкість хвилі, d — глибина каналу, h — висота хвилі

Народження концепції солітону

Скотт Рассел

Емпірична формула Рассела

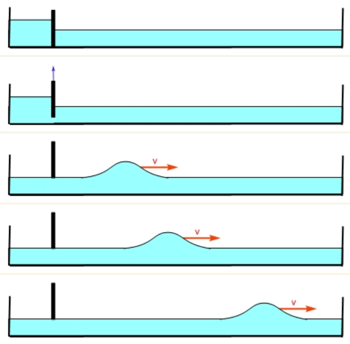
$$v = \sqrt{g(d+h)}$$

v — швидкість хвилі, d — глибина каналу, h — висота хвилі

Народження концепції солітону

Скотт Рассел

Спостереження Рассела (1834) — солітон на мілкій воді



Емпірична формула Рассела

$$v = \sqrt{g(d+h)}$$

v — швидкість хвилі, d — глибина каналу, h — висота хвилі

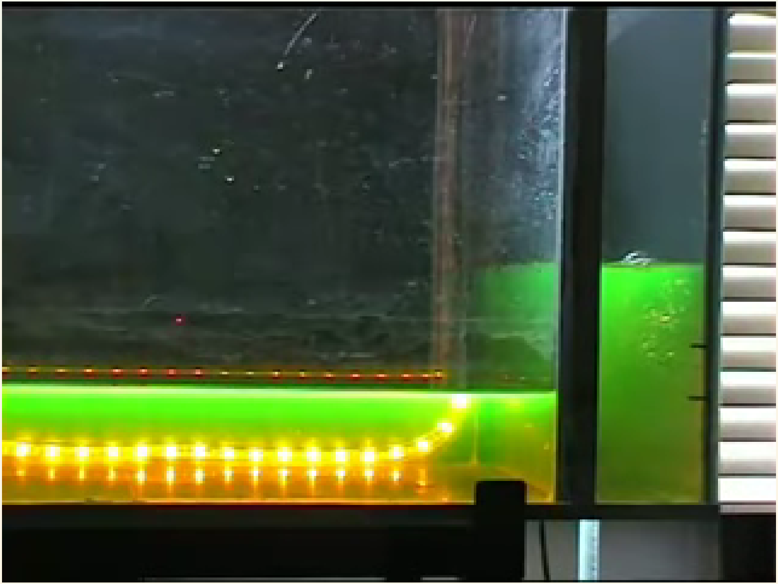
Біографія солітону

- 1834 Рассел: відкриття «великої первинної хвилі»
- 1845 Рассел: «Доповідь про хвилі»
- 1845 Ейрі: «Ми не схильні вважати цю хвилю Великою або первинною»
- 1847 Стокс: «Хвиля не може зберігати форму»
- 1895 Кортвег і де Вріз: Математичне рівняння для опису хвилі Рассела
  Рівняння КдВ: $u_t = uu_x - u_{xxx}$
- 1954 Парадокс Фермі–Паста–Улама
- 1965 Крускал і Забускі: народження поняття «солітон»
- 1967 Крускал та ін: метод оберненої задачі розсіяння
- Солітонний бум

Відтворення експерименту Рассела

Експеримент Рассела було відтворено в 1995 році на конференції по теорії солітонів в Шотландії

Відтворення експерименту Рассела

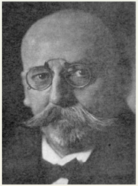


Рівняння Кортвега–де–Вріза (1895)

Рівняння КдВ

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$

Kortweges

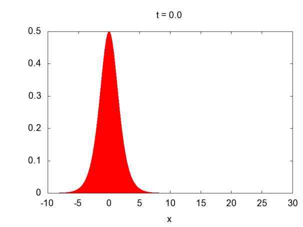


de Vries

Односолітонний розв'язок рівняння КдВ

Біжуча хвиля $\phi(x,t) = u(x - vt) \Rightarrow$
$(v + 6u)u' - u''' = 0 \Rightarrow$

$$\phi(x,t) = -\frac{v}{2}\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt - x_0)\right]}$$



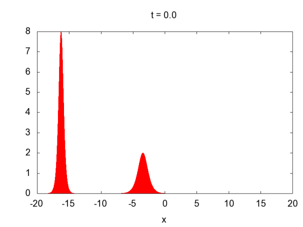
Рівняння Кортвега–де–Вріза

Рівняння КдВ

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$

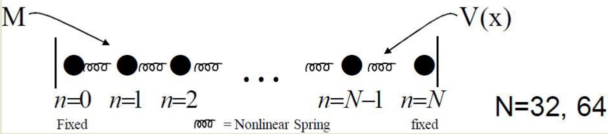
Двохсолітонний розв'язок рівняння КдВ

$$\phi(x,t) = 12\frac{3 + 4\,\mathrm{ch}(2x-8t) + \mathrm{ch}(4x-64t)}{[3\,\mathrm{ch}(2x-8t) + \mathrm{ch}(3x-36t)]^2}$$



Задача Фермі–Паста–Улама

Модель ФПУ



Fermi, Ulam, Pasta

Рівняння ФПУ:

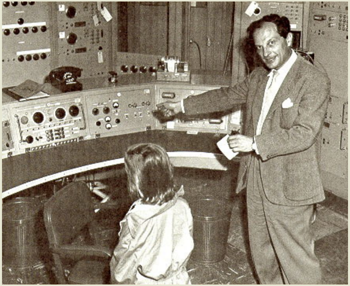
$$M\ddot{\phi}_n = U'\left(\phi_{n+1} - \phi_n\right) - U'\left(\phi_n - \phi_{n-1}\right)$$

$$F(\phi) = -U'(\phi), \qquad U(\phi) = \frac{k\phi^2}{2} + \frac{\alpha\phi^3}{3} + \frac{\beta\phi^4}{4}$$

Задача Фермі–Паста–Улама (моделювання)

Народження комп'ютерної фізики

Моделювання на суперкомп'ютері MANIAC
(Mathematical Analyzer, Numerical Integrator, and Computer)

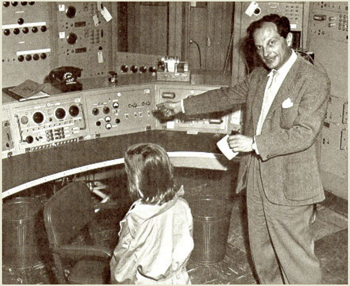


1954 — перший чисельний експеримент
(Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou)

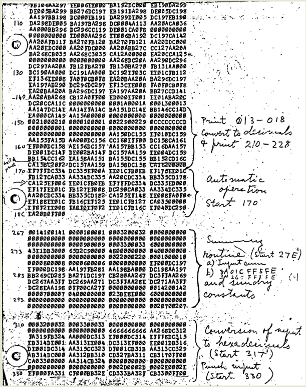
Задача Фермі–Паста–Улама (моделювання)

Народження комп'ютерної фізики

Моделювання на суперкомп'ютері MANIAC
(Mathematical Analyzer, Numerical Integrator, and Computer)



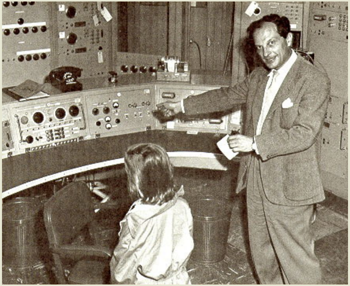
1954 — перший чисельний експеримент
(Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou)

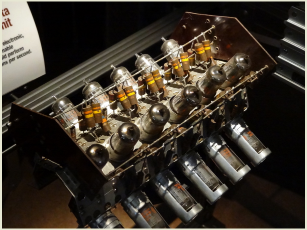


Задача Фермі–Паста–Улама (моделювання)

Народження комп'ютерної фізики

Моделювання на суперкомп'ютері MANIAC
(Mathematical Analyzer, Numerical Integrator, and Computer)



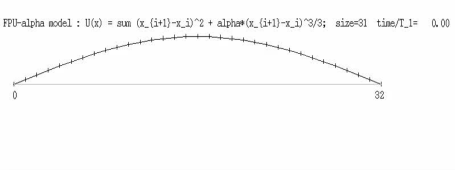


1954 — перший чисельний експеримент
(Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou)

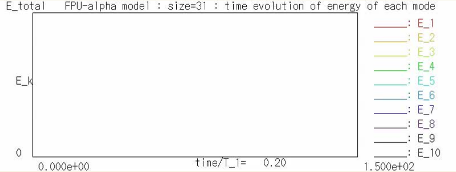
Парадокс Фермі–Паста–Улама

$$M\ddot{\phi}_n = U'\left(\phi_{n+1} - \phi_n\right) - U'\left(\phi_n - \phi_{n-1}\right), \qquad U(\phi) = \frac{k\phi^2}{2} + \frac{\alpha\phi^3}{3}$$

Просторова картина розподілу



Часова картина розподілу енергії



Парадокс: термолізація **не** відбувається!

Теоретичне пояснення ФПУ: Крускал і Забускі (1965)

Рівняння ФПУ

$$M\ddot{\phi}_n = U'\left(\phi_{n+1} - \phi_n\right) - U'\left(\phi_n - \phi_{n-1}\right), \qquad U(\phi) = \frac{k\phi^2}{2} + \frac{\alpha\phi^3}{3}$$

$$\Downarrow$$

Перехід до неперервного розподілу: $\phi_n(t) = ap(x,t)$, $x = an$

$$\Downarrow \qquad u(x,t) = p_x(x,t)$$

Рівняння Буссінеска

$$u_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{l^2}{12}u_{xx} + \alpha l^4 u^2 + l^2 k u\right)$$

$$u(x,t) = \frac{c^2}{8\alpha}\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{cx-\omega t+\delta}{2}\right)}, \qquad \omega^2 = kc^2a^2 + c^4a^4/12.$$

Модель Френкеля–Конторової (ФК)

Найпростіша модель, що описує динаміку ланцюжка частинок, що взаємодіють з найближчими сусідами в присутності зовнішнього періодичного потенціалу

$$\ddot{x}_n + \sin x_n - g\left(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n\right) = 0$$

Приклади

- Перше застосування моделі ФК: динаміка дислокацій
- В фізиці поверхні модель ФК використовується для опису динаміки адатомів
- Біофізика: нелінійна модель динаміки ДНК

Механічна модель ФК

Рівняння синус–Ґордон (СГ)

Континуальне наближення моделі ФК $\Rightarrow$ рівняння синус–Ґордон

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin\phi = 0$$

Приклади

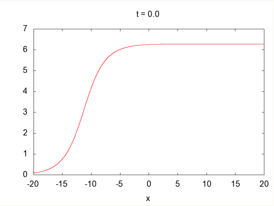
- Надпровідність (джозевсонові контакти): солітон — флюксон
- Магнетизм: солітон — доменна стінка

Солітони рівняння СГ

Кінки — топологічні солітони СГ

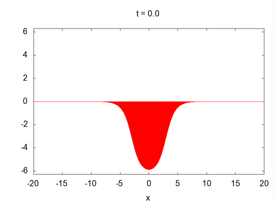
$$\operatorname{tg}\phi(x,t)/4 = \exp\left[-\sigma\gamma(x-vt)\right]$$

$\sigma = \pm 1$ — топологічний заряд,
$\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$



Брізери — динамічні солітони СГ

$$\operatorname{tg}\phi(x,t)/4 = \left(\frac{\sqrt{1-\Omega^2}}{\Omega}\right)\frac{\sin\Omega t}{\operatorname{ch}(x\sqrt{1-\Omega^2})}$$



Нелінійне рівняння Шредінгера

$$i\phi_t + \phi_{xx} + \phi|\phi|^2 = 0$$

Приклади

- Оптичне самофокусування
- Ленгмюрівські хвилі в плазмі
- Ниткоутворення (утворення річок, гідродинамічних струменів, шляхів міграцій)
- нелінійні оптичні хвилі


The Mathematical Society of Traffic Flow