

1. Спеціальна теорія відносності. Принцип відносності. Релятивістський принцип відносності.	4
2. Перетворення Лоренца. Основні властивості.	7
4. Релятивістська кінематика. Власний час. Власна довжина. Додавання швидкостей.	9
5. Геометрія 4-простору. Ко- та контра- варіантні величини.	10
6. Диференціальні операції в 4-просторі. 4-швидкість і 4-прискорення.	12
7. Функції Лагранжа та Гамільтона релятивістської частинки.	14
8. Коваріантне рівняння руху.	15
9. Електромагнітне поле. Загальні принципи побудови теорії поля.	16
10. Заряд в електромагнітному полі. Елементарний заряд в класичній теорії поля.	17
11. 4-потенціал електромагнітного поля.	18
12. Рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі. Сила Лоренца. Напруженість електромагнітного поля. Обернений рух в електромагнітному полі.	19
13. Калібрувальна інваріантність. Типи калібровок.	22
14. Тензор електромагнітного поля. Рівняння електромагнітного поля в коваріантній формі.	23
15. Перетворення Лоренца для поля. Інваріанти електромагнітного поля.	24
16. 4-вектор струму та рівняння неперервності.	26
17. Дія системи, що складається із зарядів і електромагнітного поля. Загальні принципи побудови теорії поля.	27
18. Виведення рівнянь Максвелла в коваріантній формі.	28
19. Трьохвимірна форма рівняння Максвелла.	29
20. Диференціальна форма рівнянь Максвелла.	30
21. Інтегральна форма рівнянь Максвелла та її зв'язок з експериментальними законами електромагнетизму.	32
22. Межові умови для векторів електромагнітного поля.	33
23. Закон збереження енергії електромагнітного поля. Теорема Умова-Пойтінга.	35
24. Рівняння для електромагнітних потенціалів (рівняння д'Аламбера).	37
25. Стале електромагнітне поле.	39
26. Стале електричне поле. Рівняння Пуассона та його загальний розв'язок.	41
27. Стале електричне поле на далеких відстанях. Дипольний і квадрупольний моменти.	43
28. Розклад електростатичного поля за мультиполями. Система зарядів у зовнішньому електростатичному полі.	46
29. Стале магнітне поле. Рівняння Пуассона та його загальний розв'язок.	48
30. Стале магнітне поле на далеких відстанях. Магнітний дипольний момент.	49
31. Векторний потенціал сталого магнітного поля. Магнітний момент у зовнішньому магнітному полі. Гіромагнітне відношення.	50
32. Електромагнітні хвилі. Плоскі електромагнітні хвилі. Загальний розв'язок хвильового рівняння.	52
33. Хвильовий 4-вектор і повздовжній ефект Доплера.	54
34. Хвильовий 4-вектор і поперечний ефект Доплера.	55

35. Червоний зсув. (Метод паралаксу)	56
36. Гамільтонова форма рівнянь електромагнітного поля. Власні типи коливань (моди) електромагнітного поля. Кількість власних коливань. Гамільтонова форма рівнянь поля. Ефект Казіміра	57
37. Сферичні хвилі. Потенціали спізнення і випередження	66
38. Потенціали Льєнара–Віхерта. Вираз для потенціалів	68
39. Точне значення електричного та магнітного полів точкового заряду, що рухається довільним чином	71
41. Електромагнітне поле заряду, що рухається рівномірно	73
42. Випромінювання електромагнітних хвиль точковим зарядом. Хвильова зона	74
43. Випромінювання точкового заряду, що рухається прямолінійно. Формула Лармора	75
44. Запізнювальні випереджаючі потенціали	76
45. Циклотронне та синхротронне випромінювання точкового заряду	77
46. Потенціали електромагнітного поля в хвильовій зоні	78
47. Вектор Умова-Пойтінга в електро-дипольному наближенні	80
48. Електродипольне випромінювання	82
49. Скалярний потенціал в дипольному наближенні	84
50. Опір випромінювання елементарного вібратора	85
51. Випромінювання диполя, що рівномірно обертається	88
52. Магнетодипольне випромінювання. Потенціали цього поля	89
53. Напруженості полів для магнето-дипольного випромінювання	91
54. Індикатриса магнето-дипольного випромінювання	93
55. Випромінювання колового струму	97
56. Електроквадрупольне випромінювання. Потенціали цього поля	98
57. Напруженості полів для електроквадрупольного випромінювання	100
58. Індикатриса електроквадрупольного випромінювання	101
60. Випромінювання простих квадрупольних систем	102
61. Випромінювання короткого диполя в ближній зоні. Потенціали поля в ближній зоні. Напруженість в сферичній СК. Залежність E і H від відстані до джерела випромінювання	104
62. Дипольне випромінювання динамічних систем зарядів	107
63. Випромінювання лінійної антени	108
64. Індикатриса напівхвильової та однохвильової антен	110
65. Аналіз індикатриса випромінювання у хвильовій зоні. Антенний опір випромінюванню	112
66. Сила променевого тертя	115
67. Класичний час життя атомів Ширина ліній випромінювання. Відбивання від експоненційного бар'єру	118
68. Дифракція на гаусовій діафрагмі. Аналіз дифракційного поля при дифракції на гаусовій діафрагмі	121
69. Теорія дифракції Кірхгофа. Умови існування дифракції Кірхгофа. Математичне формулювання принципу Гюйгенса-Френеля	123
70. Дифракція Френеля на непрозорому диску. Аналіз дифракційного поля	126

71. Інтерференція на гаусових щілинах.....	128
72. Проходження світла крізь лінзу. Формула Кірхгофа. Кут дифракційного розходження.....	129
73. Дифракційна теорія фокусної плями.	132
74. Мікроскопічні та макроскопічні рівняння електродинаміки. Фізично нескінченно малий об'єм і модель речовини.	134
75. Зв'язані заряди і поляризація.....	136
76. Внесок магнітного моменту в середній струм («молекулярний»).	138
77. Матеріальні рівняння та їх тензорний характер.	140
78. Динамічний відгук. Прицип причинності.	143
79. Нелінійні ефекти другого порядку.	145
80. Границі застосування макроскопічних рівнянь Максвелла.	146
81. Симетрія і тензорні характеристики речовини. Операції симетрії в кристалах. Тензори вищих рангів.	147
82. Діелектрична проникливість середовища.	152
83. Співвідношення Крамерса-Кронінга.	155
84. Фотони і поляритони. Фотонні кристали. Стиснуті стани. Взаємодія фотонів з речовиною. Моделі речовин.	157
85. Повне внутрішнє відбивання. Ефект Гуса-Хенхена.....	159
86. Співвідношення невизначеності для фази хвилі і кількості фотонів.	161
87. Дисперсія поляритонів.	162
88. Рівняння Максвелла-Лоренца.....	164
89. Укорочені рівняння. Солітони.....	165
90. Фоторефракція і фотогальванічний ефект. Умови спостереження ефекту.....	167
91. Однорезонансна модель діелектричної проникливості.	169
92. Повздовжні хвилі. Представлення плоских хвиль. Співвідношення Саха-Теллера.	171
93. Сегнетоелектрика. Спонтанна поляризація.	175
94. Хвилі ТМ в прямокутному хвилеводі.....	177
95. Хвилі ТЕ в прямокутному хвилеводі.....	178
96. Хвилі ТМ в циліндричному хвилеводі.	179
97. Хвилі ТЕ в циліндричному хвилеводі.	181
98. Хвилі ТЕМ в коаксіальному хвилеводі.	183
99. Коефіцієнт затухання хвиль в хвилеводах.	185
100. Затухання ТЕМ хвилі в коаксіальному хвилеводі.....	187
101. Електромагнітні коливання в прямокутному резонаторі.....	189
102. Електромагнітні коливання в циліндричному резонаторі.....	191
103. Добротність резонатора.	192
104. Метод електростатичних зображень. Метод конформних відображень.....	194

1. Спеціальна теорія відносності. Принцип відносності. Релятивістський принцип відносності.

Для описання процесів, що відбуваються в природі, необхідно мати, як говорять, *систему відліку*. Під системою відліку розуміють систему координат, що слугує для вказання положення частинок в просторі, разом з пов'язаними з цією системою годинами, що слугують для вказання часу.

Існують системи відліку, в яких вільне рух тіл, т. є. рух тіл, що знаходяться під дією зовнішніх сил, відбувається з постійною швидкістю. Такі системи відліку мають назву *інерціальних*.

Якщо дві системи відліку рухаються одна відносно до іншої рівномірно і прямокутно і якщо одна з них інерціальна, то очевидно, що і друга теж є інерціальною (будь-яке вільне рух і в цій системі буде прямокутним і рівномірним). Таким чином, існує скільки завгодно інерціальних систем відліку, що рухаються одна відносно до іншої рівномірно-періодично.

Досвід показує, що справедливим є так званий *принцип відносності*.

Згідно цьому принципу всі закони природи однаково в усіх інерціальних системах відліку. Іншими словами, рівняння, що виражають закони природи, інваріантні по відношенню до перетворень координат і часу від однієї інерціальної системи до іншої. Це означає, що рівняння, що описують деякий закон природи, будучи виражені через координати і час в різних інерціальних системах відліку, мають один і той же вигляд.

Взаємодія матеріальних частинок описується в звичайній механіці за допомогою потенціальної енергії взаємодії, що є функцією від координат взаємодіючих частинок. Легко побачити, що цей спосіб описування взаємодій включає в себе припущення про миттєвість поширення взаємодій.

Досвід, однак, показує, що миттєвих взаємодій в природі не існує. Тому і механіка, що виходить з уявлення про миттєвість поширення взаємодій, включає в себе деяку неточність. В дійсності, якщо з одним з взаємодіючих тіл відбувається будь-яке змінення, то на іншому тілі це відобразиться лише по истеченні деякого проміжку часу. Лише після цього проміжку часу з другим тілом почнуть відбуватися процеси, викликані цим зміненням. Розділив відстань між обома тілами на цей проміжок часу, ми знайдемо «швидкість поширення взаємодій».

Звернемо увагу, що цю швидкість можна було б, власне кажучи, називати максимальною швидкістю поширення взаємодій. Вона визначає лише той проміжок часу, після якого змінення, що відбувається з одним тілом, починає проявлятися на іншому. Очевидно, що наявність максимальної швидкості поширення взаємодій означає в той же час, що в природі взагалі неможливо рух тіл зі швидкістю, більшою цієї.

Из принципа относительности вытекает, в частности, что скорость распространения взаимодействий одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Таким образом, скорость распространения взаимодействий является универсальной постоянной. Эта постоянная скорость одновременно является, как будет показано в дальнейшем, скоростью распространения света в пустоте; поэтому ее называют **скоростью света**. Она обозначается обычно буквой c , а ее численное значение

$$c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/с.} \quad (1,1)$$

Большой величиной этой скорости объясняется тот факт, что на практике в большинстве случаев достаточно точной оказывается классическая механика.

Большинство скоростей, с которыми нам приходится иметь дело, настолько малы по сравнению со скоростью света, что предположение о бесконечности последней практически не влияет на точность результатов.

Объединение принципа относительности с конечностью скорости распространения взаимодействий называется **принципом относительности Эйнштейна** (он был сформулирован **А. Эйнштейном** в 1905 г.) в отличие от принципа относительности Галилея, исходящего из бесконечной скорости распространения взаимодействий.

Механика, основанная на эйнштейновском принципе относительности {мы будем обычно называть его просто принципом относительности), называется **релятивистской**. В предельном случае, когда скорости движущихся тел малы по сравнению со скоростью света, можно пренебречь влиянием конечности скорости распространения взаимодействий на движение. Тогда релятивистская механика переходит в обычную механику, основанную на предположении о мгновенности распространения взаимодействий; эту механику называют ньютоновской или классической. Предельный переход от релятивистской механики к классической может быть формально произведен как переход к пределу $c \rightarrow \infty$ в формулах релятивистской механики.

Уже в классической механике пространство относительно, т. е. пространственные соотношения между различными событиями зависят от того, в какой системе отсчета они описываются. Утверждение, что два одновременных события происходят в одном и том же месте пространства или, вообще, на определенном расстоянии друг от друга, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится.

Напротив, время является в классической механике абсолютным; другими словами, свойства времени считаются не зависящими от системы отсчета — время одно для всех систем отсчета. Это значит, что если какие-нибудь два явления происходят одновременно для какого-нибудь наблюдателя, то они являются одновременными и для всякого другого. Вообще, промежуток времени между двумя данными событиями должен быть одинаков во всех системах отсчета.

Легко, однако, убедиться в том, что понятие абсолютного времени находится в глубоком противоречии с эйнштейновским принципом относительности. Для этого достаточно уже вспомнить, что в классической механике, основанной на понятии об абсолютном времени, имеет место общеизвестный закон сложения скоростей, согласно которому скорость сложного движения равна просто сумме (векторной)

скоростей, составляющих это движение. Этот закон, будучи универсальным, должен был бы быть применим и к распространению взаимодействий. Отсюда следовало бы, что скорость этого распространения должна быть различной в различных инерциальных системах отсчета, в противоречии с принципом относительности. Опыт, однако, вполне подтверждает в этом отношении принцип относительности. Измерения, произведенные впервые Майкельсоном (в 1881 г.), обнаружили полную независимость скорости света от направления его распространения; между тем согласно классической механике скорость света в направлении движения Земли должна

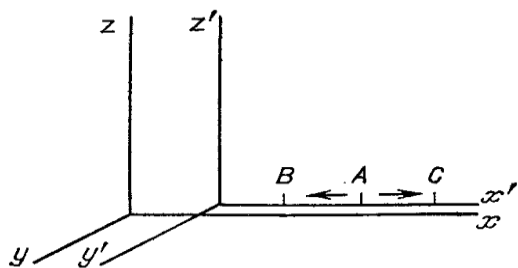
была бы быть отличной от скорости в противоположном направлении.

Таким образом, принцип относительности приводит к результату, что время не является абсолютным. Время течет по-разному в разных системах отсчета.

Следовательно, утверждение, что между двумя данными событиями прошел определенный промежуток времени, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится. В частности, события, одновременные в некоторой системе отсчета, будут не одновременными в другой системе.

Для уяснения этого полезно рассмотреть следующий простой пример.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' с осями координат соответственно xyz и $x'y'z'$, причем система K' движется относительно K вправо вдоль осей x и x' (рис. Г).



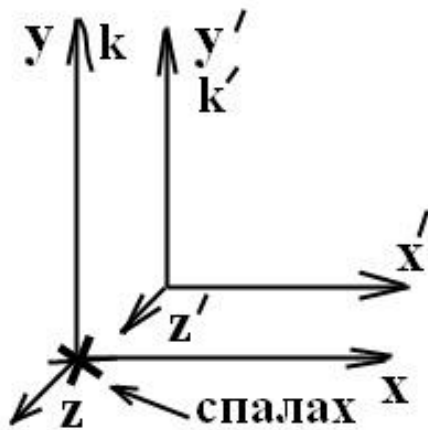
Пусть из некоторой точки A на оси x' отправляются сигналы в двух взаимно противоположных направлениях. Поскольку скорость распространения сигнала в системе K' , как и во всякой инерциальной системе, равна (в обоих

направлениях) c , то сигналы достигнут равноудаленных от A точек B и C в один и тот же момент времени (в системе K').

Легко, однако, видеть, что те же самые два события (приход сигнала в B и C) будут отнюдь не одновременными для наблюдателя в системе K . Действительно, скорость сигналов относительно системы K согласно принципу относительности равна тому же c , и поскольку точка B движется (относительно системы K) навстречу посланному в нее сигналу, а точка C — по направлению от сигнала (посланному из A в C), то в системе K сигнал придет в точку B раньше, чем в точку C .

Таким образом, принцип относительности Эйнштейна вносит фундаментальные изменения в основные физические понятия. Заимствованные нами из повседневного опыта представления о пространстве и времени оказываются лишь приближенными, связанными с тем, что в повседневной жизни нам приходится иметь дело только со скоростями, очень малыми по сравнению со скоростью света.

2. Перетворення Лоренца. Основні властивості.



Нехай в нас є дві системи. З початку відліку лабораторної системи рахується сферична хвиля. Потрібно знайти зв'язок

$$(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$$

$$t = t' = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \text{ - р-ня фронту хвилі}$$

$$\textcircled{\mathbf{k}} : r^2 = c^2 t^2$$

$$\textcircled{\mathbf{k}'} : r'^2 = c^2 t'^2$$

$$\text{Релятивістський інтервал: } s^2 = r^2 - c^2 t^2$$

$$\text{Для події розповсюдження світла } s^2 = 0 \quad s'^2 = 0$$

Якщо маємо дві події (r_1, t_1) та (r_2, t_2)

$$S_{1,2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 \text{ - перетворення Галілея}$$

$$ds^2 = k ds'^2 \quad ds^2 = ds'^2 \quad \Rightarrow \boxed{s = \text{inv}}$$

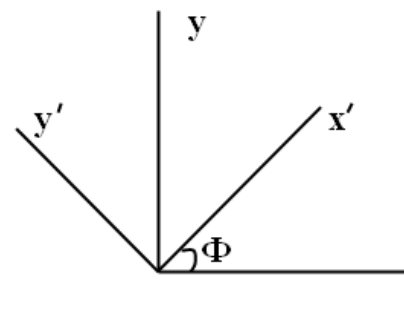
$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = \text{inv} \text{ - евклідовий простір}$$

$$\Delta S_{12}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 t^2 = \text{inv} \text{ - псевдо евклідов простір.}$$

(Надалі замість Φ пишіть ϕ)!!!!!!!!!!!!!!

$$(x, y) \quad x^2 + y^2 = l^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x', y') \quad x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$



$$\begin{cases} x' = x \cos \Phi + y \sin \Phi \\ y' = -x \sin \Phi + y \cos \Phi \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = \text{inv}$$

$$(x, t) \rightarrow (x, r') \quad x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2 = \text{inv}$$

$$y = ict$$

$$x^2 + (ict)^2 = \text{inv}$$

$$x' = x \cos \Phi + ict \sin \Phi$$

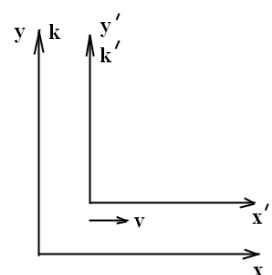
$$ict' = -x \sin \Phi + ict \cos \Phi$$

$$\psi = i \Phi \quad \cos i \psi = \text{ch } \psi$$

$$\begin{cases} x' = x \text{ch } \psi + ct \text{sh } \psi \\ ct' = x \text{sh } \psi + ict \cos \psi \end{cases} \text{ операція гіперболічного повороту або БУСТ.}$$

$$\text{релятивістський інтервал } S_{1,2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 = \text{inv}$$

$$(x, t) \rightarrow (x', t')$$



$$x^2 - c^2 t^2 = \text{inv}$$

$$x' = 0, \quad x = vt$$

$$0 = vt \operatorname{ch} \psi + ct \operatorname{sh} \psi \Rightarrow \operatorname{th} \psi = -V/c, \operatorname{sh} \psi = \frac{-V/t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \operatorname{ch} \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\beta = \frac{V}{c} \quad - \text{нормована швидкість,}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad - \text{Лоренц Фактор}$$

Таким чином маємо спеціальні перетворення Лоренца

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Впливає: } x' = \gamma(x - \beta ct) \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{array}$$

3. нема =)

4. Релятивістська кінематика. Власний час. Власна довжина. Додавання швидкостей.

Працюючи з релятивістськими швидкостями, ми звертаємося до геометрії 4-простору, в якому:

$$x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^4 = ct$$

Матриця переходу Лоренца виглядає таким чином:

$$\lambda_k^l = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Тобто $X^{l'} = \lambda_k^{l'} X^k$.

Як бачимо, четвертою змінною в перетвореннях Лоренца є ct , яка містить в собі час, отже час різний в різних системах відліку. Нехай τ - час у власній системі відліку, тоді згідно з перетворенням Лоренца для часу у лабораторній системі відліку визначається

формулою:

$$t = \frac{\tau + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Нехай в системі відліку, яка рухається є годинник, відзначимо час двох подій, які сталися в одній і тій самій точці простору, в цій системі координат. Коли проміжок часу, який відділяє ці події в рухомій системі $\tau_1 - \tau_2$, в нерухомій системі події будуть

$$\text{відділені інтервалом часу } t_2 - t_1 = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Аналогічні розмірковування можна провести і для власної довжини: $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Проаналізуємо, як додаються швидкості. Нехай всі величини в рухомій системі координат будемо позначати штрихованими, величини в лабораторній системі – відповідно не штрихованими. Тоді:

$$dx = \frac{dx' + Vdt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad dz = dz' \quad dy = dy' \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Поділивши почленно три перші рівності на четверту і увівши швидкості $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ та

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} \text{ маємо: } v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$$

5. Геометрія 4-простору. Ко- та контра- варіантні величини.

Введемо такі позначення і потім, користуючись перетвореннями Лоренца, знайдемо зв'язок між компонентами «штрихованої» та «нештрихованої» систем відліку:

$$x^1 \equiv x, \quad x'^1 = \gamma \cdot (x^1 - \beta \cdot x^4);$$

$$x^2 \equiv y, \quad x'^2 = x^2;$$

$$x^3 \equiv z, \quad x'^3 = x^3;$$

$$x^4 \equiv ct \quad x'^4 = \gamma \cdot (x^4 - \beta \cdot x^1).$$

Ці компоненти утворюють 4-простір.

Запишемо загальний вигляд для компоненти 4-вектора, а разом і для інтервала:

$$x = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, ct) = (\vec{r}, ct);$$
$$x^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = inv. \quad (*)$$

Можемо ввести базис по координатам:

$$x = x^1 \cdot e_1 + x^2 \cdot e_2 + x^3 \cdot e_3 + x^4 \cdot e_4;$$
$$(x)^2 = x \cdot x = x^i \cdot e_i \cdot x^k \cdot e_k = x^i \cdot x^k \cdot e_i \cdot e_k. \quad (**)$$

Добуток $e_i \cdot e_k = g_{ik}$ називається метричним тензором. Загальний вигляд одержимо порівнявши вираз (*) із виразом (**), бо це по суті і є скалярний добуток векторів тільки у випадку 4-простору.

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = diag(1, 1, 1, -1).$$

Чотирирівимірний простір, без урахування гравітації, називається простором Мінковського. Із вигляду метричного тензору робимо висновок – будь-який діагональний тензор є симетричним: $g_{ik} = g_{ki}$.

Можемо в загальному випадку виписати закон переходу між координатами «штрихованої та нештрихованої» систем (чисто з уявлень математики):

$$(x^i)' = \Lambda_k^i \cdot x^k, \quad (***)$$

$$\text{де } x^k = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}; (x^i)' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ x'^4 \end{pmatrix}.$$

А тепер, користуючись перетвореннями Лоренца, конкретно для нашого випадку одержимо вигляд матриці переходу:

$$\Lambda_k^i = \Lambda_{special} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta \cdot \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta \cdot \gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Вище було доведено про інваріантність величини «х», а тому можемо записати:

$x = x^i \cdot e_i = x'^i \cdot e'_i$. Підставляючи формулу (***) у тільки-що записаний вираз, одержимо:

$x^i \cdot e_i = \Lambda_k^i \cdot x^k \cdot e'_i$. Оскільки індекс «і» німий, то ми його можемо змінити на «k»:

$x^k \cdot e_k = \Lambda_k^i \cdot x^k \cdot e'_i$. Звідси, неважко побачити, що $e_k = \Lambda_k^i \cdot e'_i$, або навпаки $e'_i = (\Lambda^{-1})_i^k \cdot e_k$.

Перейдемо до означень:

1) Чотири величини A^1, A^2, A^3, A^4 , які при перетвореннях Лоренца перетворюються як і 4-радіус-вектори, називається контраваріантний 4-вектор

$$A'^i = \Lambda_k^i \cdot A_k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \cdot A_k.$$

2) Чотири величини, які при перетворенні Лоренца змінюються за аналогічним законом як і 4-базис, утворюють компоненти коваріантного 4-вектора.

$$B'_i = (\Lambda^{-1})_i^k \cdot B_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \cdot B_k.$$

3) Шістнадцять величин, які при перетвореннях Лоренца змінюються як 4-вектор, називається 4-тензором II-го рангу. Позначається T^{ik} .

Тензор T^{ik} називаємо *симетричним*, якщо $T^{ik} = T^{ki}$, та *антисиметричним*, якщо $T^{ik} = -T^{ki}$.

6. Диференціальні операції в 4-просторі. 4-швидкість і 4-прискорення.

Диференціальні операції:

1. 4-градієнт деякого скаляра $\phi(x^1, x^2, x^3, x^4)$ має бути 4-вектором:

$$\frac{\delta\phi}{\delta x^i} = \left(\nabla\phi, \frac{1}{c} \frac{\delta\phi}{\delta t} \right). \text{ Для того щоб визначити який це вектор – ко- чи контрваріантний,}$$

обчислимо повний диференціал скаляра Φ : $d\phi = \frac{\delta\phi}{\delta x^i} dx^i$. Очевидно, що диференціал скаляра має бути також скаляром. Оскільки диференціали контрваріантних величин є все одно контрваріантними величинами, а результатом множення є скаляр (величина, що не змінюється при переході від однієї системи координат до іншої) є величини коваріантні. Отже, при диференціюванні за контрваріантним змінюю утворюється коваріантна величина і навпаки, при диференціюванні за коваріантною змінюю –

контрваріанта. Таким чином, величина $\delta\phi/\delta x^i$ є коваріантний градієнт. Відповідно

$$\text{контрваріантний оператор градієнта має вигляд: } \frac{\delta\phi}{\delta x_i} = \left(\nabla\phi, -\frac{1}{c} \frac{\delta\phi}{\delta t} \right).$$

2. 4-дивергенція деякого 4-вектора A^i має бути скаляр, тобто інваріантом відносно

$$\text{перетворень Лоренца: } \frac{\delta A^i}{\delta x^i} = \frac{\delta A_i}{\delta x_i} = \text{div} A + \frac{1}{c} \frac{\delta A^4}{\delta t}.$$

3. 4-ротатор деякого 4-вектора A^i є антисиметричним тензором другого (порядку) рангу:

$$\frac{\delta A_i}{\delta x^k} = -\frac{\delta A_k}{\delta x^i}. \quad 4. \text{ Оператор д'Аламбера в чотирьохвимірних позначеннях має}$$

$$\text{вигляд: } \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \quad (\text{дорівнює „квадратіку”, це спеціальне позначення,}$$

якого немає в редакції формул, і не зміг його підставити)

4-швидкість. У трьохвимірному просторі швидкість $U=dr/dt$ не є 4-вектор. Природно ввести 4-швидкість, як похідну від 4-радіус-вектора події за власним часом:

$$U^i = dx^i/d\tau. \text{ Користуючись цим означенням можемо обчислити його компоненти. У}$$

попередньому виразі перейдемо від диференціювання за власним часом до диференціювання за часом лабораторної системи координат, ураховуючи

$d\tau = dt \sqrt{1 - U^2/c^2}$: $U^i = \gamma \frac{dx^i}{dt}$. Розглянемо окрему просторову частину 4-швидкості та окрему часову. Для довільної просторової компоненти (візьмемо як приклад перше, а

останні обчислюються аналогічно): $U^1 = \gamma dx^1/dt = \gamma U_x$, $U^2 = \gamma U_y$,

$$U^3 = \gamma U_z .$$

7. Функції Лагранжа та Гамільтона релятивістської частинки.

В 4-вимірному просторі вводять 4-вектор швидкості: $u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \gamma \frac{dx^i}{dt} = (\gamma \vec{v}, \gamma c)$, де τ – власний час, t – час лабораторної системи координат(СК), $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Тоді 4-імпульс

логічно ввести як $p^i = m u^i$. Але тоді треба перевизначити функцію Лагранжа частинки, оскільки в класичній механіці $L = \frac{mv^2}{2}$, $p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$, $p_x = mv_x$, а з СТВ відомо, що $p_x = \gamma m v_x$.

Будемо виходити з принципу найменшої дії: буде реалізовуватись той рух, для якого інтеграл дії S набуватиме найменшого значення.

Для визначення дії S будемо виходити з таких міркувань: воно не повино залежати від СК, тобто повина бути інваріантною по щодо перетворень Лоренца, а єдиним

інваріантом вільної частинки є інтервал: $(ds)^2 = -c^2(d\tau)^2$, $dS \sim ds = ic \frac{dt}{\gamma}$.

$$S = \alpha \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt \Rightarrow L = \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \text{ де } \alpha - \text{деяка стала. Для її визначення}$$

перейдемо до нерелятивістського впадку $v \ll c$, тоді $L \approx \alpha - \alpha \frac{v^2}{2c^2}$. Перший доданок є константою, тому його відкидаємо. Порівнюючи даний вираз з нерелятивістським виразом ф. Лагранжа, отримаємо $\alpha = -mc^2$. Отже, маємо:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U(r). \text{ Тоді енергія буде визначатись як}$$

$$E = \vec{p} \vec{v} - L = \gamma m v^2 + \frac{mc^2}{\gamma} + U(r) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + U(r) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + U(r).$$

Записавши енергію через узагальнені координати та імпульси, отримаємо функцію

$$\text{Гамільтона: } H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + U(r). \text{ При } v \ll c, H \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m} + U(r). \text{ Перший}$$

доданок є константою, тому його відкидаємо і отримуємо нерелятивістську функцію Гамільтона.

8. Коваріантне рівняння руху

Р-ня Ньютона не інваріантні відносно перетворень Лоренца і тому не можуть адекватно описувати рух із швидкостями порівняними зі швидкістю світла. Сформулюємо р-ня руху, яке було б інваріантним відносно перетворень Лоренца, тобто описувало рух зі швидкістю, порівняною зі швидкістю світла, а при малих швидкостях переходило б у р-ня руху Ньютона.

Вводимо поняття 4-сили $K^i = (\vec{K}, K^4)$ як

$$\begin{aligned} K^i &= mw^i, \\ u_i K^i &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тому 4-сила ортогональна до 4-швидкості.

Просторові компоненти пов'язані з трьохвимірним вектором сил таким

співвідношенням: $\vec{K} = m\vec{w} = \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. (2)

Підставляємо (2) в (1) и знаходимо вираз для K^4 :

$$u_i K^i = \frac{(\vec{v}\vec{F})}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{cK^4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0,$$

звідки легко визначити часову компоненту 4-сили $K^4 = \frac{1}{c} \frac{(\vec{v}\vec{F})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Отже, компоненти 4-сили (Мінковського) мають вигляд: $K^i = (\gamma \vec{F}, \frac{\gamma}{c} (\vec{v}\vec{F}))$.

Р-ня руху набуває вигляду $\frac{dp^i}{dt} = K^i$ - це і є коваріантне р-ня руху.

Просторові компоненти цього р-ня становлять релятивістське співвідношення між прискоренням та силою, що в граничному випадку малих швидкостей перетворюється

на р-ня Ньютона. Часова компонента, з огляду на те, що $p^i = (\vec{p}, \frac{\mathcal{E}}{c})$ (4-імпульс), має

вигляд: $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (\vec{v}\vec{F})$. Тобто швидкість зміни енергії частинки = потужності сил, що діють на неї.

9. Електромагнітне поле. Загальні принципи побудови теорії поля.

Електромагнітне поле - фундаментальне фізичне поле, що взаємодіє з електрично зарядженими тілами, а також з тілами, що мають власні дипольні і мультипольні електричні і магнітні моменти. Являє собою сукупність електричного і магнітного полів, які можуть, за певних умов, породжувати один одного, а по суті є однією сутністю, що

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

формалізується через тензор електромагнітного поля.

(коваріантний вектор, що використовується для інваріантного формулювання рівнянь електродинаміки).

Електромагнітне поле (і його зміна з часом) описується в електродинаміці в класичному наближенні за допомогою системи рівнянь Максвелла. При переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої електричне і магнітне поле в новій системі відліку - кожне залежить від обох - електричного і магнітного - в старій, і це ще одна з причин, що змушує розглядати електричне і магнітне поле як прояви єдиного електромагнітного поля.

У сучасному формулюванні електромагнітне поле представлено тензором

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

електромагнітного поля, а також чотиривимірним електромагнітним потенціалом $A^i = (\mathbf{A}, \Phi)$, де \mathbf{A} векторний потенціал, Φ скалярний потенціал.

Теорія поля будується виходячи з принципу найменшої дії (реалізуються ті поля, для яких $\delta S = 0$). Нехай маємо $\varphi(x)$ невідоме скалярне поле, $S[\varphi(x)] = \int f(\varphi) d^4x$.

Основні принципи побудови теорії поля такі:

1) Принцип близькодії (локальності) – інтервал дії має бути локальним, величина дії залежить від координати точки

$$S = \int L(x, \dot{x}) dt = \int F[\varphi(x)] d^4x, \text{ де } dx^k \text{ - елементи 4-простору (простір не відокремлюється від часу), } L \text{ - функція Лагранжа.}$$

2) Принцип відносності – величини мають бути інваріантними відносно системи координат. Тобто функціонал дії є релятивістським інваріантом $F[\varphi(x)] = \text{inv}$

3) Принцип дійсності – $S[\varphi(x)] \in \mathbb{R}$.

10. Заряд в електромагнітному полі. Елементарний заряд в класичній теорії поля.

Взаємодію частинок одна з одною можна описувати за допомогою поняття силового поля. Замість того, щоб говорити про те, що одна частинка діє на іншу, можна сказати, що частка створює навколо себе поле; на всяку іншу частинку, що знаходиться в цьому полі, діє деяка сила. У класичній механіці поле є лише деяким способом опису фізичного явища - взаємодії частинок. У теорії ж відносності завдяки скінченності швидкості розповсюдження взаємодії стан речей істотно змінюється. Сили, що діють в даний момент на частинку, не визначаються їх розташуванням в цей момент. Зміна положення однієї з частинок відображається на інших лише через деякий проміжок часу. Це означає, що поле саме по собі стає фізичною реальністю. Ми не можемо говорити про безпосередню взаємодію частинок, що знаходяться на відстані одна від одної. Взаємодія може відбуватися у кожний момент лише між сусідніми точками простору (близькодія). Тому ми повинні говорити про взаємодію однієї частинки з полем і про наступну взаємодію поля з іншою частинкою.

Ми будемо розглядати два види полів: поля гравітаційні й електромагнітні. Вивченню взаємодій частинок з електромагнітним полем поставимо у відповідність деякі загальні міркування, що відносяться до поняття «частинки» в релятивістській механіці. У класичній механіці можна ввести поняття абсолютно твердого тіла, тобто тіла, яке ні за яких умов не може бути деформоване. У теорії відносності під абсолютно твердими тілами слід було б відповідно мати на увазі тіла, всі розміри яких залишаються незмінними в системі відліку, де вони знаходяться в стані спокою. Легко, проте можна бачити, що теорія відносності робить взагалі неможливим існування абсолютно твердих тіл.

Нехай якесь тверде тіло зовнішнім впливом з якої-небудь однієї його точки приводиться в рух. Якби тіло було абсолютно твердим, то всі його точки повинні були б прийти в рух одночасно з тією, яка зазнала впливу; в іншому випадку тіло деформувалося б. Теорія відносності, однак, робить це неможливим, так як вплив від даної точки передається іншим з кінцевою швидкістю, а тому всі точки тіла не зможуть одночасно почати рухатися.

Зі сказаного випливають певні висновки, що відносяться до розгляду елементарних частинок, тобто частинок, для яких ми вважаємо, що їх механічний стан повністю описується заданням трьох координат і трьох компонент швидкості руху як цілого. Очевидно, що якби елементарна частинка володіла кінцевими розмірами, тобто була б протяжною, то вона не могла б деформуватися так як поняття деформації пов'язано з можливістю незалежного руху окремих частин тіла. Але як ми тільки що бачили, теорія відносності показує неможливість існування абсолютно твердих тіл.

11. 4-потенціал електромагнітного поля.

4-потенціал електромагнітного поля. При вивченні руху матеріальних частинок ми користуємось принципом найменшої дії. Цей принцип полягає в тому, що для довільної механічної системи існує такий інтеграл S , який називається дією, який для дійсного руху має мінімум і варіація δS якого дорівнює нулю. Згідно із СТВ дія вільної

матеріальної частинки має вигляд
$$S = -mc \int_a^b ds = - \int_{t_1}^{t_2} mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} dt; \quad (1)$$

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}, \quad \beta = v / c;$$

Дія для частинки, яка рухається в заданому електромагнітному полі складається із двох частин: із дії (1) вільної частинки та із члена, який описує взаємодію частинки з полем. Остання дія має включати в себе як величини, що характеризують частинку, так і поле. Виявляється, що властивості частинки у відношенні її взаємодії з полем визначаються одним параметром – зарядом частинки. Властивості ж поля характеризуються 4-вектором A_i , так званим 4-потенціалом, компоненти якого є ф-ями координат та часу.

Ці величини входять в дію у вигляді члена

$$-\frac{e}{c} \int_a^b A_i dx^i = \frac{e}{c} \left(c \int_{t_1}^{t_2} \varphi dt - \int_{x_1}^{x_2} A_x dx - \int_{y_1}^{y_2} A_y dy - \int_{z_1}^{z_2} A_z dz \right), \text{ де } \varphi - \text{ скалярний а } A -$$

векторний потенціал. Звернемо увагу, що 4-потенціал визначається як $A^i = (ct, A); \Rightarrow A_i = (ct, -A)$.

12. Рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі. Сила Лоренца. Напруженість електромагнітного поля. Обернений рух в електромагнітному полі.

Заряд, находящийся в поле, не только подвергается воздай воздействию со стороны поля, но в свою очередь сам влияет на поле, изменяя его. Однако если заряд е не велик, то его действием на поле можно пренебречь. В этом случае, рассматривая движение в заданном поле, можно считать, что само поле не зависит ни от координат, ни от скорости заряда. Точные условия, которым должен удовлетворять заряд для того, чтобы он мог считаться в указанном смысле малым, будут выяснены в дальнейшем (§75). Ниже мы будем считать это условие выполненным.

Итак, нам надо найти уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле. Эти уравнения получаются варьированием действия, т. е. даются уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \quad (17.1)$$

где L определяется формулой:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi.$$

Производная $dL/d\mathbf{v}$ есть обобщенный импульс частицы. Далее имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla L = \frac{e}{c} \text{grad } \mathbf{A} \mathbf{v} - e \text{grad } \varphi.$$

Но по известной формуле векторного анализа

$$\text{grad } \mathbf{a} \mathbf{b} = (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a} + [\mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a}] + [\mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b}],$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} — любые два вектора. Применяя эту формулу к $\mathbf{A} \mathbf{v}$ и помня, что дифференцирование по \mathbf{r} производится при постоянном \mathbf{v} , находим

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{A}] - e \text{grad } \varphi.$$

Уравнения Лагранжа, следовательно, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{A}] - e \text{grad } \varphi.$$

Но полный дифференциал $(d\mathbf{A}/dt)dt$ складывается из двух частей: из изменения $(\partial \mathbf{A}/\partial t)dt$ векторного потенциала со временем в данной точке пространства и из изменения при переходе от одной точки пространства к другой на расстояние $d\mathbf{r}$. Эта вторая часть равна $(d\mathbf{r} \nabla) \mathbf{A}$. Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A}.$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, получаем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \operatorname{grad} \varphi + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{A}]. \quad (17.2)$$

Это и есть уравнение движения частицы в электромагнитном поле. Слева стоит производная от импульса частицы по времени. Следовательно, выражение в правой части (17.2) есть сила, действующая на заряд в электромагнитном поле. Мы видим, что эта сила состоит из двух частей. Первая часть (первый и второй члены в правой части (17.2)) не зависит от скорости частицы. Вторая часть (третий член) зависит от этой скорости: пропорциональна величине скорости и перпендикулярна к ней. Силу первого рода, отнесенную к заряду, равному единице, называют **напряженностью электрического поля**; обозначим ее через \mathbf{E} . Итак, по определению,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi. \quad (17.3)$$

Множитель при скорости, точнее при \mathbf{v}/c , в силе второго рода, действующей на единичный заряд, называют **напряженностью магнитного поля**; обозначим ее через \mathbf{H} . Итак, по определению,

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (17.4)$$

Если в электромагнитном поле $\mathbf{E} \neq 0$, а $\mathbf{H} = 0$, то говорят об *электрическом поле*; если же $\mathbf{E} = 0$, а $\mathbf{H} \neq 0$, то поле называют *магнитным*. В общем случае электромагнитное поле является наложением полей электрического и магнитного. Отметим, что \mathbf{E} представляет собой полярный, а \mathbf{H} — аксиальный вектор.

Уравнения движения заряда в электромагнитном поле можно теперь написать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (17.5)$$

Стоящее справа выражение носит название **лоренцевой силы**. Первая ее часть — сила, с которой действует электрическое поле на заряд, — не зависит от скорости заряда и ориентирована по направлению поля \mathbf{E} . Вторая часть — сила, оказываемая магнитным полем на заряд, — пропорциональна скорости заряда и направлена перпендикулярно к этой скорости и к направлению магнитного поля \mathbf{H} .

Для скоростей, малых по сравнению со скоростью света, импульс \mathbf{p} приближенно равен своему классическому выражению $m\mathbf{v}$, и уравнение движения (17.5) переходит в

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (17.6)$$

Выведем еще уравнение, определяющее изменение кинетической энергии частицы со временем, т.е. производную

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Легко убедиться, что

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = \mathbf{v} \frac{d\mathbf{p}}{dt};$$

подставляя $d\mathbf{p}/dt$ из (17.5) и замечая, что $[\mathbf{v}\mathbf{H}]\mathbf{v} = 0$, имеем

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v}. \quad (17.7)$$

Изменение кинетической энергии со временем есть работа, произведенная полем над частицей (в единицу времени). Из (17.7) видно, что эта работа равна произведению скорости заряда на силу, с которой действует на него электрическое поле. Работа поля за время dt , т. е. при перемещении заряда на $d\mathbf{r}$, равна $e\mathbf{E}d\mathbf{r}$.

Подчеркнем, что работу над зарядом производит только электрическое поле; магнитное поле не производит работы над движущимся в нем зарядом. Последнее связано с тем, что сила, с которой магнитное поле действует на частицу, всегда перпендикулярна к ее скорости.

Уравнения механики инвариантны по отношению к перемене знака у времени, т. е. по отношению к замене будущего прошедшим. В механике оба направления времени эквивалентны. Это значит, что если возможно какое-нибудь движение, то возможно и обратное движение, при котором система проходит те же состояния в обратном порядке.

То же самое имеет место и в электромагнитном поле в теории относительности. При этом, вместе с заменой t на $-t$ надо изменить знак магнитного поля. Действительно, легко видеть, что уравнения движения (17.5) не меняются, если произвести замену

$$t \rightarrow -t, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}. \quad (17.8)$$

При этом, согласно (17.3), (17.4), скалярный потенциал не меняется, а векторный меняет знак:

$$\varphi \rightarrow \varphi, \quad \mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}. \quad (17.9)$$

Таким образом, если в электромагнитном поле возможно некоторое движение, то возможно и обратное движение в поле с обратным направлением \mathbf{H} .

13. Калібрувальна інваріантність. Типи калібровок.

Калібровка - додаткова умова, що накладається на функцію f виконується в залежності від умови задачі з міркувань простоти її розв'язку.

В рівняннях магнітостатики безпосередньо векторний потенціал

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

не використовується, а лише магнітна індукція, тобто його ротор, тому маємо право визначати \mathbf{A} з точністю до градієнта деякої довільної функції, яка пропадає при обчисленні ротора. Тобто можна перетворювати векторний потенціал за правилом (при такій зміні значення полів не змінюється):

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} + \text{grad}\psi.$$

Таке перетворення називається калібрувальним,

оскільки підставивши $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$, в $\text{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ матимемо

$$\text{rot rot}\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \text{grad}(\text{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}.$$

Вибір \mathbf{A} деякою мірою є довільний – існування додаткової функції ψ дозволяє накласти скалярну умову на векторний потенціал. Накладаючи умову незмінності

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} + \text{grad}\psi.$$

напруженості електричного поля з

та

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} + \text{grad}\psi,$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

$$\phi \Rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

матимемо

Ця умова має назву **перетворення калібровки** для векторного та скалярного потенціалів. Вона дозволяє накласти додаткову(скалярну) умову на потенціал. В залежності від задачі, використовують калібровки

гамільтонова калібровка $\phi = 0,$

кулонова калібровка $\text{div}\mathbf{A} = 0,$

лоренцева калібровка $\text{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

аксіальна калібровка $\mathbf{A}_z = 0.$

Для динамічних задач найбільш зручною є лоренцева калібровка, що зберігають при

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0,$$

релятивістських перетвореннях

(лоренцева калібровка у коваріантному вигляді).

14. Тензор электромагнитного поля. Рівняння електромагнітного поля в коваріантній формі.

Принцип наименьшего действия гласит $\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right) = 0$

Замечая, что $ds = \sqrt{dx^i dx_i}$, находим (пределы интегрирования a и b мы будем ниже для краткости опускать):

$$\delta S = - \int \left(mc \frac{dx_i dx^i}{ds} + \frac{e}{c} A_i d\delta x^i + \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) = 0$$

Первые два члена в подынтегральном выражении проинтегрируем по частям. Кроме того, в первом члене введем 4-скорость $\frac{dx_i}{ds} = u_i$. Тогда

$$\int \left(mc \delta x^i du_i + \frac{e}{c} \delta x^i dA_i - \frac{e}{c} dA_i dx^i \right) - (mc u_i + \frac{e}{c} A_i) \delta x^i = 0$$

Второй член этого равенства равен нулю, так как интеграл варьируется при заданных значениях координат на пределах. Далее, $\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k$, $dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k$

и поэтому $\int (mc \delta x^i du_i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^i dx^k - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^i \delta x^k) = 0$

Напишем в первом члене $du_i = \frac{du_i}{ds} ds$, во втором и третьем $dx^i = u^i ds$. Кроме того, в третьем члене поменяем местами индексы i и k (это ничего не изменит, так как по значкам i и k производится суммирование).

Тогда $\int \left(mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right) \delta x^i ds = 0$

Ввиду произвольности δx^i отсюда следует, что подынтегральное выражение равно нулю:

$$mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k = 0$$

Введем обозначение $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ - этот антисимметричный тензор называется **тензором электромагнитного поля**.

Тогда полученное уравнение напишется в виде $m \frac{du_i}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k$

Это — уравнение движения заряда в четырехмерной форме.

Смысл отдельных компонент тензора F_{ik} , легко выяснить, подставив значения $A_i = (\varphi, -\mathbf{A})$ в определение F_{ik} . Результат можно записать в виде таблицы, в которой индекс $i = 0, 1, 2, 3$ нумерует строки, а индекс k — столбцы:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Короче, можно написать: $F_{ik} = (E, H)$, $F^{ik} = (-E, H)$.

Таким образом, компоненты напряженностей электрического и магнитного полей являются компонентами одного 4-тензора электромагнитного поля.

15. Перетворення Лоренца для поля. Інваріанти електромагнітного поля.

Перетворення Лоренца для поля. Електромагнітне поле описується тензором електромагнітного поля

$$M^k: (M')^k = L^k_i M^i$$

Позначення:

$$L = \Lambda$$

Тоді, закон перетворення полів при переході від однієї системи координат до іншої можна отримати як закон перетворення компонент тензора електромагнітного поля:

$$F^{ki}: (F')^{ki} = L^k_l L^i_m F^{lm}$$

Оскільки кожен тензор другого рангу може бути зображений як зовнішній добуток двох векторів, то закон перетворення деякої компоненти тензора можемо отримати перетворивши кожен співмножник та потім перемноживши їх.

Випишемо у два стовпчики закони перетворення компонент векторів G^i і

H^k і утворимо всі можливі добутки цих величин:

$$(M')^1 = \gamma(M^1 - \beta M^4)$$

$$(M')^2 = M^2; \quad (M')^4 = \gamma(M^4 - \beta M^1)$$

$$(M')^3 = M^3;$$

$$(N') = \dots$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Для N все так само переписуємо, як і для M .

$$\begin{aligned} E'_x &= (F')^{41} = (M')^4 (N')^1 = \gamma(M^4 - \beta M^1) \gamma(N^1 - \beta N^4) = \\ &= \gamma^2 (M^4 N^1 - \beta M^1 N^1 - \beta M^4 N^4 + \beta^2 M^1 N^4) = \\ &= (\gamma^2 F^{41} - \beta F^{11} - \beta F^{44} + \beta^2 F^{14}) = \gamma^2 (E^x - \beta^2 E^x) = E_x (1 - \beta^2)/(1 - \beta^2) = E_x; \end{aligned}$$

$$\boxed{E'_x = E_x}$$

$$\begin{aligned} E'_y &= (F')^{42} = (M')^4 (N')^2 = \gamma(M^4 - \beta M^1) N^2 = \gamma (M^4 N^2 - \beta M^1 N^2) = \\ &= \gamma (F^{42} - \beta F^{12}) = \gamma (E_y - \beta B_z) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_y = \gamma (E_y - \beta B_z)}$$

$$E'_z = (F')^{43} = \gamma(F^{43} - \beta F^{13}) = \gamma(E_z + \beta B_y) = E'_z$$

$$\boxed{E'_z = E_z}$$

Перетворення тривимірних компонент неважко записати в досить компактному вигляді, якщо розкласти поле на поздовжні та поперечні до напрямку руху складові:

$$\bar{\mathbf{v}} = (v, 0, 0)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}_{\parallel} + \bar{\mathbf{E}}_{\perp}$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{\parallel} = (E_x, 0, 0)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{\perp} = (0, E_y, E_z)$$

$$\bar{\mathbf{E}}'_{\parallel} = \bar{\mathbf{E}}_{\parallel}$$

$$\bar{\mathbf{E}}'_{\perp} = \gamma(\bar{\mathbf{E}}_{\perp} + (1/c)[\mathbf{v} * \bar{\mathbf{B}}_{\perp}])$$

$$\bar{\mathbf{B}}'_{\parallel} = \bar{\mathbf{B}}_{\parallel}$$

$$\bar{\mathbf{B}}'_{\perp} = \gamma(\bar{\mathbf{B}}_{\perp} + (1/c)[\mathbf{v} * \bar{\mathbf{E}}_{\perp}])$$

Досить часто ці формули використовують в лінійному наближенні за малим параметром $V/c \ll 1$

$$\text{Якщо } \bar{\mathbf{B}}' = 0, \quad \bar{\mathbf{B}} = (1/2) [\mathbf{v} * \bar{\mathbf{E}}]$$

Тобто заряд, що рухається зі швидкістю \mathbf{V} , утворює магнітне поле, яке зберігається з добре відомим магнітостатичним результатом.

Інваріанти електромагнітного поля.

Однакові в усіх системах координат: матричний тензор g^{ik} , антисиметричний тензор ϵ^{ijkl} $\epsilon^{1234} = 1 = \epsilon^{2341} = -\epsilon^{2431}$; $\epsilon^{1234} = 0$

Об'єкт	inv
M	M
M^i	$M^i M_i$ $M^i M^k g_{ik} = M^i M_i$ $M^i M^j M^k M^l \epsilon_{ijkl}$
M^{ik}	$M_i^i = M^{ik} g_{ik}$ $M^{ik} M^{jm} \epsilon_{ijkm}$ $M^{ik} M_{ik}$

Тензор електромагнітного поля F^{ki} :


$$F^{ki} F_{ki} = \text{inv}$$

$$F^{ki} F^{lm} \epsilon_{kiem} = \text{inv}$$

Відповідь: $E^2 - B^2 = \text{inv}$ - скаляр
 $\mathbf{E} * \bar{\mathbf{B}} = \text{inv}$ - псевдоскаляр

16. 4-вектор струму та рівняння неперервності.

Розглянемо систему з рухомих зарядів.



Запишемо густину зарядів $\rho(r, t) = \sum e_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t))$,
і густину струму $\vec{j} = \rho \vec{v} = \sum e_k v_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k)$
Звідси $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum e_k \frac{\partial \delta}{\partial t} = \sum e_k \frac{\partial \delta}{\partial \vec{r}_k} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = - \sum e_k \frac{\partial \delta}{\partial \vec{r}_k} \vec{v}_k =$
 $= - \sum e_k \vec{v}_k \nabla \delta = | \nabla(\vec{v} f) = \vec{v} \nabla f | = - \sum e_k \nabla(\vec{v}_k \delta) = - \nabla \sum e_k \vec{v}_k \delta = - \nabla \vec{j}$
Отже $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0$ це і є рівняння неперервності.

В інтегральному вигляді $\oint_S \vec{j} dS = - \frac{\partial}{\partial t} Q$ де $Q = \int_V \rho dV$

Рівняння неперервності можна переписати у вигляді $\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial(\rho c)}{\partial(ct)} = 0$

Тоді 4вектор $j^k = (j_x, j_y, j_z, \rho c) = (\vec{j}, \rho c) = (\rho \vec{v}, \rho c) = \rho \frac{dx^k}{dt}$

Рівняння $\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0$ або $j^k_{,k} = 0$ називається рівнянням неперервності в коваріантному вигляді.

17. Дія системи, що складається із зарядів і електромагнітного поля. Загальні принципи побудови теорії поля.

Власне теорію поля слід будувати виходячи з принципу найменшої дії. Еволюція поля здійснюється таким чином, що інтеграл дії набуває мінімального значення.

$\Phi(x^k)$ - скалярне поле.

$$S = \int [\Phi] = \int F[\Phi] d^4x$$

1) Принцип відносності – всі закони фізики діють так само у будь якій системі відліку.

$$F(\Phi) = inv$$

2) Принцип локальності – інтеграл дії має бути одноточковою функцією поля.

$$F(\Phi(x^k)) \neq F(\Phi(x^k_1, x^k_2)).$$

Принцип локальності – наслідок принципу близькодії (передача інформації зі скінченною швидкістю c)

3) $S \in \mathbb{R}$.

Нехай ми маємо систему, що складається з зарядів та електромагнітного поля.

Дія поля складається з S_p - дія заряду, S_{pf} - взаємодія заряду та поля, S_f - дії поля:

$$S = S_p + S_{pf} + S_f.$$

$$S_p = -\sum_a m_a c^2 \int d\tau.$$

$$\begin{aligned} S_{pf} &= \sum_a \int \frac{e}{c} A_k dx^k = \frac{1}{c} \iint \rho dV A_k dx^k = \frac{1}{c^2} \int dV \int \rho A_k \frac{dx^k}{dt} c dt == \frac{1}{c^2} \int d^4x \rho A_k \frac{dx^k}{dt} \\ &= \frac{1}{c^2} \int d^4x A_k j^k \end{aligned}$$

Залишилось знайти S_f . Дія повинна бути релятивістським інваріантом, локальною та дійсно значною.

$$S_f \sim \int_{(1)}^{(2)} d^4x \quad S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int_{(1)}^{(2)} d^4x F^{ik} F_{ik}$$

У теорії поля доданок S_p дії покладають рівним нулю. Це можна зробити завдяки тому, що дія визначена з точністю до константи. Отже, дія для окремої складової системи

$$\text{має вигляд: } S = \int_{(1)}^{(2)} d^4x \left\{ \frac{1}{c^2} A_k j^k - \frac{1}{16\pi c} F^{ik} F_{ik} \right\} + \int_{(1)}^{(2)} mc^2 d\tau.$$

Відповідно, для знаходження повної дії системи необхідно знайти суму по складовим.

18. Виведення рівнянь Максвелла в коваріантній формі.

Як відомо з курсу теоретичної механіки, якщо ми маємо систему, що задана дією

$$S = \int_{(1)}^{(2)} \Lambda(u_i, u_i', \xi) d\xi, \text{ то виходячи з «принципу найменшої дії» } (\delta S = 0) \text{ отримаємо}$$

$$\text{рівняння Лагранжа: } \frac{\partial \Lambda}{\partial u_i} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_i'} = 0.$$

$$\text{Або, якщо } \xi - \text{вектор, матимемо: } S = \int_{(1)}^{(2)} \Lambda(u_i(\xi_k), \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}) d\vec{\xi}, \text{ звідки } \frac{\partial \Lambda}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{i,k}} = 0;$$

$$\text{Для електромагнітного поля } S = \int_{(1)}^{(2)} \Lambda(A_i(x_k), \frac{\partial A_i}{\partial x_k}) d^4x, \text{ і рівняння Лагранжа}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Lambda}{\partial A_{i,k}} = 0; \quad \Lambda = \frac{1}{c^2} A_k j^k + \frac{1}{16\pi c} F_{lm} F^{lm}. \text{ Знайдемо похідні, щоб}$$

$$\text{записати рівняння Лагранжа: } \frac{\partial \Lambda}{\partial A_i} = \frac{1}{c^2} j^i;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial A_{i,k}} &= \frac{\partial}{\partial A_{i,k}} F_{lm} F^{lm} = \frac{\partial}{\partial A_{i,k}} \{ (A_{m,l} - A_{l,m}) \times (A^{m,l} - A^{l,m}) \} = \\ &= \frac{\partial}{\partial A_{i,k}} \{ A_{m,l} \cdot A^{m,l} - A_{m,l} \cdot A^{l,m} - A_{l,m} \cdot A^{m,l} + A_{l,m} \cdot A^{l,m} \} \end{aligned}$$

Так як m та l це німі індекси, то в 3 та 4 доданках можемо поміняти їх місцями:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial A_{i,k}} = 2 \frac{\partial}{\partial A_{i,k}} \{ A_{m,l} A^{m,l} - A_{m,l} A^{l,m} \} = 2 \{ 2A^{i,k} - 2A^{k,i} \} = -4F^{ik}$$

Звідки рівняння Лагранжа: $\frac{1}{c^2} j^i - \frac{\partial}{\partial x^k} (\frac{1}{4\pi c} F^{ik}) = 0$, або $\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i$ - це рівняння в коваріантному вигляді являє собою пару рівнянь Максвелла.

Повна система рівнянь Максвелла – Лоренца в коваріантній формі має вигляд:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i; \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0.$$

19. Трьохвимірна форма рівняння Максвелла.

Рівняння Максвелла — це основні рівняння класичної електродинаміки, які описують електричне та магнітне поле, створене зарядами й струмами.

СГС

У вакуумі

У диференціальній формі рівняння Максвелла для вакууму мають такий вигляд

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Рівняння записані в системі СГС. Тут \mathbf{E} — напруженість електричного поля, \mathbf{B} — вектор магнітної індукції, ρ — густина електричного заряду, \mathbf{j} — густина електричного струму, c — швидкість світла.

За допомогою формули Гаусса—Остроградського $\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, і теореми Стокса, диференціальним рівнянням Максвелла можна надати форму інтегральних. СГС

Закон Гауса

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q$$

Закон Гауса для магнітного поля

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Закон індукції Фарадея

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Теорема про циркуляцію магнітного поля

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$$

S — двовимірна замкнена поверхня, що обмежує об'єм

$Q = \int_v \rho dv$ — електричний заряд, в об'ємі v , що обмежений поверхнею S

$I = \int_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$ — струм, що проходить через поверхню S

20. Диференціальна форма рівнянь Маквелла.

$m=1. \varepsilon^{kil} F_{ki,l} = 0$ - друге рівняння Максвелла в коваріантній формі

(F - тензор електромагнітного поля, ε – символ Леві-Чивіта, значення залежить від перестановки індексів)

Переберемо всі можливі варіанти комбінацій k, i, l:

$$\varepsilon^{1234} F_{23,4} + \varepsilon^{1243} F_{24,3} + \varepsilon^{1324} F_{32,4} + \varepsilon^{1342} F_{34,2} + \varepsilon^{1423} F_{42,3} + \varepsilon^{1432} F_{43,2} = 0 \text{ При}$$

парній кількості перестановок елемент ε дорівнює 1, при непарній -1.

$$\varepsilon^{1234} = 1, \varepsilon^{1243} = -1, \varepsilon^{1324} = 1, \varepsilon^{1342} = -1, \varepsilon^{1423} = 1, \varepsilon^{1432} = -1$$

$$F_{23,4} = -F_{23,4}, F_{42,3} = -F_{24,3}, F_{43,2} = -F_{34,2}$$

Отримали тензор:

$$\|F_{ki}\| = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x \\ -B_z & 0 & B_x & E_y \\ B_y & -B_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix} \quad (E - \text{вектор напруженості електричного поля, } B -$$

магнітного)

$$\text{Маємо } \frac{\partial B_x}{\partial (ct)} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0, \text{ отже } \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{E}$$

При $m=1$ ліва та права частина цього виразу змінюються таким чином, що отримується

$$\left(\text{rot} \vec{E} \right)_x = - \left(\frac{1 \cdot \partial B}{c \cdot \partial t} \right)_x$$

вираз

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{1 \cdot \partial \vec{B}}{c \cdot \partial t}$$

Узагальнивши це рівняння для $m=2, 3$ отримаємо

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{1 \cdot \partial \vec{B}}{c \cdot \partial t} - \text{закон електромагнітної індукції Фарадея.}$$

$$\text{При } m=4 \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{B} = 0 - \text{закон відсутності магнітних зарядів}$$

$$\|F^{ki}\| = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}$$

Тепер запишемо контраваріантний формі тензор

Для $k=1$ запишемо $F^{1i}_{,1} = \frac{4\pi}{c} j^1$ (це перше рівняння Максвела в коваріантній формі).
Коли індекс i пробігає всі значення від 1 до 4 то ми отримуємо наступний вираз

$$F^{11}_{,1} + F^{12}_{,2} + F^{13}_{,3} + F^{14}_{,4} = 4\pi j^1 / c$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{c \partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

$$[\nabla \times \vec{B}]_x = \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

При $k=1, 2, 3$ $\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ - закон Біо-Савара-Лапласа
 $k=4$

$$F^{4i}_{,i} = \frac{4\pi}{c} j^4; \quad F^{41}_{,1} + F^{42}_{,2} + F^{43}_{,3} = \frac{4\pi}{c} j^4$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$
 - закон Кулона в диференціальній формі

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
 - закон електромагнітної індукції Фарадея

$$\text{div} \vec{B} = 0$$
 - закон відсутності магнітних зарядів

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
 - закон Біо-Савара-Лапласа

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$
 - закон Кулона в диференціальній формі

21. Інтегральна форма рівнянь Маквелла та її зв'язок з експериментальними законами електромагнетизму.

Для виведення інтегральних рівнянь Максвелла проінтегруємо їх в диференціальній формі. Розглянемо рівняння $\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$ (закон Кулона), проінтегруємо обидві частини рівняння по довільному об'єму V і перейдемо від інтегрування по об'єму до інтегрування по поверхні, яка охоплює цей об'єм, згідно з теоремою Остроградського-Гаусса: $\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV$, де $d\vec{S} = dS\vec{n}$ — елементарний елемент

площі на цій поверхні, має напрям вектора зовнішньої нормалі. Отримуємо $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q$ — закон Кулона в інтегральній формі, який у випадку нерухомого

точкового заряду переходить у вигляд $4\pi E r^2 = 4\pi q$ або $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$, де \vec{r} — радіус-вектор, проведений з точки, в якій знаходиться заряд, у точку спостереження.

Розглянемо рівняння $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (закон відсутності магнітного заряду). Проінтегруємо аналогічно до першого рівняння: $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ — закон відсутності магнітного заряду.

Потік вектора магнітної індукції через замкнену поверхню дорівнює нулю.

Рівняння $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ інтегруємо по замкненій поверхні S , яка обмежена замкненим контуром L . В лівій частині перейдемо від інтегрування по поверхні до інтегрування по замкнутому контуру згідно з т. Стокса, а в правій частині змінимо порядок диф. за часом та інтегр. за просторовими змінними.

$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}$. $\oint_L \vec{E} d\vec{l}$ — ЕРС, а $\int_S \vec{B} d\vec{S} = \Phi$ — магнітний потік через поверхню S . Можна переписати у вигляді $\mathcal{E}_{ind} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$.

Четверте рівняння $\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Останній доданок — струм зміщення.

Інтегральна форма рівняння (інтегрування аналогічне до попереднього рівняння)

$\int_S \operatorname{rot} \vec{B} d\vec{S} = \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S}$. Повний

електричний струм вільних зарядів і зміна потоку електричної індукції через незамкнену поверхню S пропорційні циркуляції магнітного поля на замкнутому контурі L , який є межею поверхні S . Це закон **Біо-Савара-Лапласа**.

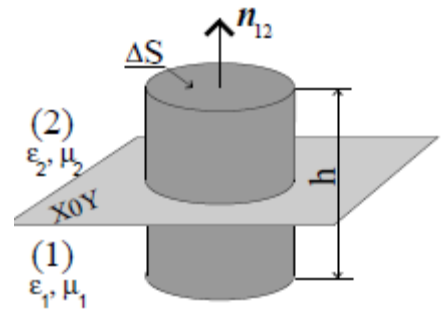
22. Межові умови для векторів електромагнітного поля.

Запишемо спочатку рівняння Максвелла

Закон електромагнітного поля	Диференціальна форма	Інтегральна форма
Закон відсутності магнітного заряду	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
Закон Кулона	$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q$
Закон електромагнітої індукції Фарадея	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
Закон Біо – Савара – Лапласа	$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$

Для одержання межових умов на поверхнях розриву скористаємося інтегральною формою рівнянь Максвелла.

Розглянемо рівняння $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ на межі поділу 2-ох середовищ, що збігається з площиною XOY, які характеризуються ϵ_1, μ_1 , а друге ϵ_2, μ_2 (діелектрична та магнітна проникності). \mathbf{n} – одиничний вектор нормалі (!!! далі **все** є вектором !!!!), що спрямований з одного середовища в інше. В деякій точці поверхні будемо нескінченно малий циліндр висотою h та площею основ ΔS , оскільки площа основ нескінченно мала, то ми можемо вважати, що в межах основ значення індукції \mathbf{B} залишається постійним, а тому його можна винести за знак інтеграла. Зовнішня нормаль до верхньої основи має такий же напрям, як і вектор \mathbf{n} , а зовнішня нормаль до нижньої – протилежний: $\mathbf{n}_{12} = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$, крім того, ми не враховуємо потік через бічну поверхню, оскільки висота циліндра $\rightarrow 0$. Таким чином, наше



рівняння прийме вигляд $\int_S \mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{n}_1 dS - \int_S \mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{n}_2 dS = \left(-\mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{n}_{12} + \mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{n}_{12} \right) \Delta S = 0$, отримуюмо

межову умову для нормальних складових магнітної індукції $(-\mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)}) \cdot \mathbf{n}_{12} = 0$

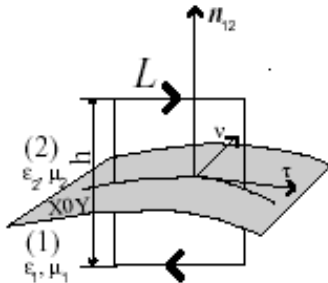
або у вигляді скалярної рівності $B_n^{(2)} = B_n^{(1)}$ Розглянемо $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q$,

$Q = \int_{\Delta V} \rho dV = \sigma \Delta S$ виконуємо аналогічне інтегрування і отримуюмо

$$\int_S \vec{D}^{(1)} \vec{n}_1 dS - \int_S \vec{D}^{(2)} \vec{n}_2 dS = (-\vec{D}^{(1)} \vec{n}_{12} + \vec{D}^{(2)} \vec{n}_{12}) \Delta S = 4\pi\sigma \Delta S$$

, отримуємо межу умову для

нормальних компонент електричної індукції $(\vec{D}^{(2)} - \vec{D}^{(1)}) \cdot \vec{n}_{12} = 4\pi\sigma$, або в скалярному вигляді $D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = 4\pi\sigma$.



.Розглянемо тепер тангенціальні складові полів. Закон

електромагнітної індукції $\oint \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{S}$. На межі

поділу двох середовищ виберемо нескінченно малий контур інтегрування L, в межах якого значення електричного поля контуру змінюватися не буде. Вектор нормалі спрямовуємо з середовища (1) в середовище (2). Введемо ще 2 одиничних вектори $\vec{\tau}$ та \vec{v} , дотичних до межевої поверхні ($\vec{\tau}$ лежить у площині контуру L, а вектор \vec{v} перпендикулярний до нього). Причому в середовищі (2) вектори $d\vec{\ell}$ та $\vec{\tau}$ паралельні, а в (1) – анти. Тоді закон електромаг. індукції запишеться

$(\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}) \cdot \vec{\tau} \cdot L = 0$, права частина = 0, бо потік вектора \vec{B} через елемент поверхні, що

стягується до 0 = 0. Для $\vec{\tau}$ та \vec{v} має виконуватися рівність $\vec{\tau} = [\vec{v} \times \vec{n}_{12}]$, тому,

виконавши циклічну перестановку отримаємо $[\vec{n}_{12} \times (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)})] = 0$ - це **межова умова для тангенціальних складових електричних полів**. У скалярному вигляді

$E_\tau^{(2)} - E_\tau^{(1)} = 0$. І нарешті **закон Біо-Савара** $\oint \vec{B} d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \oint \vec{E} d\vec{S}$ внаслідок

аналогічних перетворень матиме вигляд $(\vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(1)}) \cdot \vec{\tau} \cdot L = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{v} \cdot L$, де j_s -

поверхнева густина струму, що тече по межі розподілу двох середовищ, внеском вертикальних компонент контуру нехтуємо, бо $h \rightarrow 0$, і підставивши вираз для $\vec{\tau}$, та виконавши циклічну перестановку отримаємо **межу умову для тангенціальних**

складових: $[\vec{n}_{12} \times (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)})] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_s$!!!!! Використання цієї формули у скалярному вигляді веде до неминучих помилок !!!!!

Отже межові умови : нормальні складові $B_n^{(2)} = B_n^{(1)}$ $D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = 4\pi\sigma$

тангенціальні $[\vec{n}_{12} \times (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)})] = 0$ $[\vec{n}_{12} \times (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)})] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_s$

23. Закон збереження енергії електромагнітного поля. Теорема Умова-Пойтінга.

Теорема Умова - Пойнтінга.

Розглянемо тривимірні рівняння Максвелла у диференціальній формі:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1); \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2); \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3);$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \quad (4).$$

Помножимо рівняння (2) на $(-\vec{B})$ [не забудьте поставити над \vec{B} стрілку, адже це векторна величина], а рівняння (3) на вектор \vec{E} , після чого додамо ліві та праві частини цих виразів, отримаємо:

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \Rightarrow$$

$$-\operatorname{div} [\vec{E} \times \vec{B}] = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + B^2) \right)$$

Помножимо ліву та праву частини виразу на $c/4\pi$, внаслідок чого отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \right] = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \operatorname{div} \left(\frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}] \right) \quad (5)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = e \vec{V} E = \vec{V} F = \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$$

Оскільки величина

- це потужність, то величина

$$\varpi = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}$$

має розмірність роботи і називається густиною енергії електромагнітного

поля. Величина $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}]$ - це потік енергії, або вектор Умова – Пойнтінга.

Підставивши величини ϖ та \vec{S} у вираз (5) отримуємо рівняння:

$$\frac{\partial \varpi}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \operatorname{div} \vec{S}$$

- це диференціальна форма теореми Умова – Пойнтінга.

Проінтегрувавши цей вираз по об'єму dV , отримуємо власне теорему Умова – Пойнтінга (закон збереження електромагнітного поля).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int W dV = - \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV - \oint \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} \quad \int \operatorname{div} \vec{S} dV = \oint \vec{S} d\vec{\sigma}$$

(заміна, що була виконана: -

це теорема Гаусса).

Зміст теореми Умова - Пойнтінга полягає в тому, що зміна електромагнітної енергії в замкненому об'ємі може відбуватися за рахунок потоку енергії назовні чи всередину, або за рахунок роботи, що виконується над частинками, які знаходяться в цьому об'ємі.

Розглянемо 2 граничні випадки :

- 1) Система замкнена, тобто ізолювана від зовнішнього середовища, тоді потік

через обмежуючу поверхню = 0, тому: $\frac{\partial}{\partial t} \int_V W dV = - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV$ тобто, зміна енергії в об'ємі може відбуватися лише за рахунок роботи, виконаної над частинками.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W dV = - \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s}$$

- 2) Якщо в об'ємі нема речовини, тобто $j=0$, то: тобто зміна густини енергії в її об'ємі відбувається лише за рахунок потоку її через обмежуючу поверхню.

24. Рівняння для електромагнітних потенціалів (рівняння д'Аламбера).

Система диференціальних рівнянь Максвела для статичних полів:

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \operatorname{rot} E = 0 \quad \operatorname{div} E = 4\pi\rho \quad \operatorname{rot} B = \frac{4\pi}{c} j.$$

Розглянемо векторний та скалярний потенціал для статичного випадку. *Векторний*

потенціал: розглянемо перше рівняння Максвела $\operatorname{div} B = 0$. З цього рівняння випливає, що $B = \operatorname{rot} A$ (1) ($\operatorname{div} B = \operatorname{div}(\operatorname{rot} A)$, а $\operatorname{div}(\operatorname{rot} A) = 0$), де

величина A має назву векторного потенціалу, і являє собою деяке векторне поле, яке при заданій залежності густини струмів від координат обчислюється за формулою:

$$A(r) = \frac{1}{c} \int \frac{j(r')}{|r - r'|} dV'. \text{ Фізичний зміст - векторний потенціал є реальною фізичною}$$

характеристикою електромагнітного поля. *Скалярний потенціал*: запишемо друге рівняння Максвела для стат. полів: $\operatorname{rot} E = 0$, очевидно що це рівняння має

розв'язок $E = -\operatorname{grad} \phi$ ($\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = 0$), явний вигляд для ϕ , що має назву

скалярний потенціал: $\phi(r) = \int_V \frac{\rho(r') dV'}{|r - r'|}$. Фізичний зміст – це робота по перенесенню

одиночного заряду з нескінченності в точку спостереження. Поняття скалярного та векторного потенціалів, які щойно розглянули для статичних задач, можуть бути узагальнені і для динамічних задач. Система рівнянь Максвела для вакууму:

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad \operatorname{div} E = 4\pi\rho \quad \operatorname{rot} B = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2).$$

Як і в статичному випадку розв'язок першого рівняння Максвела буде: $B = \operatorname{rot} A$.

Підставимо одержаний вираз у рівняння $\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$, і виконаємо нескладні

перетворення. $(\operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \frac{\partial(\operatorname{rot} A)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{rot}(E + \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}) = 0)$. Це рівняння має

розв'язок $E = -\operatorname{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$ (3), (знак перед градієнтом вибираємо так, щоб

силові лінії були спрямовані від додатного заряду до від'ємного).

Рівняння д'Аламбера Запишемо рівняння, які задовольняють потенціали (1) та (3).

Підставимо їх в рівняння (2), врахувавши, що $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} A) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} A) - \Delta A$,

отримаємо $\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left\{ \operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} = \frac{4\pi}{c} j$, та наклавши лоренцеву

калібровку ($\text{div}A + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$) матимемо: $\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} j$, Позначемо

$\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, де \square - квадратик який використовується для позначення оператора

д'Аламбера. А відповідно рівняння $\square A = -\frac{4\pi}{c} j$, називається рівнянням д'Аламбера.

Також можна вивести друге рівняння підставивши рівняння (3) в рівняння $\text{div}E = 4\pi\rho$

, отримаємо $-\Delta\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div}A = -\frac{4\pi}{c} \rho$, та з урахуванням Лоренцевої калібровки

отримаємо $\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \rho$, яке можна записати у вигляді: $\square\phi = -4\pi\rho$ і

також назвати рівнянням д'Аламбера.

Формула	Статичний випадок	Динамічний випадок
Вираз для магнітної індукції через векторний потенціал	$B = \text{rot}A$	$B = \text{rot}A$
Вираз для електричного поля через скалярний потенціал	$E = -\text{grad}\phi$	$E = -\text{grad}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$
Рівняння для скалярного потенціалу	$\Delta\phi = -4\pi\rho$	$\square\phi = -4\pi\rho$
Рівняння для векторного потенціалу	$\Delta A = -\frac{4\pi}{c} j$	$\square A = -\frac{4\pi}{c} j$

25. Стале електромагнітне поле.

Постоянным электромагнитным полем мы называем поле, не зависящее от времени. Очевидно, что потенциалы постоянного поля можно выбрать так, чтобы они были функциями только от координат, но не от времени. Постоянное магнитное поле по-прежнему равно $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. Постоянное же электрическое поле

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (19.1)$$

Таким образом, *постоянное электрическое поле определяется только скалярным потенциалом, а магнитное — векторным потенциалом.*

Мы видели в предыдущем параграфе, что потенциалы поля определены не однозначно. Легко, однако, убедиться в том, что если описывать постоянное электромагнитное поле с помощью не зависящих от времени потенциалов, то к скалярному потенциалу можно прибавить, не изменяя поля, лишь произвольную постоянную (не зависящую ни от координат, ни от времени). Обычно на φ накладывают еще дополнительное условие, требуя, чтобы он имел определенное значение в определенной точке пространства; чаще всего выбирают φ так, чтобы он был равен нулю на бесконечности. Тогда и упомянутая произвольная постоянная становится определенной, и скалярный потенциал постоянного поля, таким образом, становится вполне однозначным.

Напротив, векторный потенциал по-прежнему не однозначен даже для постоянного электромагнитного поля; к нему можно прибавить градиент любой функции координат.

Определим, чему равна энергия заряда в постоянном электромагнитном поле. Если поле постоянно, то и функция Лагранжа для заряда не зависит явно от времени. Как известно, в этом случае энергия сохраняется, совпадая с функцией Гамильтона.

Согласно
$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi.$$
 имеем:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi. \quad (19.2)$$

Таким образом, вследствие наличия поля к энергии частицы прибавляется член $e\varphi$ — потенциальная энергия заряда в поле. Отметим существенное обстоятельство, что энергия зависит только от скалярного, но не от векторного потенциала. Другими словами, *магнитное поле не влияет на энергию зарядов*; энергию частицы может изменить только электрическое поле. Это связано с тем, что магнитное поле, в противоположность электрическому, не производит над зарядом работы.

Если напряженность поля во всех точках пространства одинакова, то поле называют однородным. Скалярный потенциал однородного электрического поля может быть выражен через напряженность поля согласно равенству

$$\varphi = -\mathbf{E}\mathbf{r}. \quad (19.3)$$

Действительно, при $\mathbf{E} = \text{const}$ имеем $\text{grad } (\mathbf{E}\mathbf{r}) = (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{E}$.

Векторный же потенциал однородного магнитного поля выражается через напряженность этого поля \mathbf{H} в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{H}\mathbf{r}]. \quad (19.4)$$

Действительно, при $\mathbf{H} = \text{const}$ находим с помощью формул векторн. анализа:

$$\text{rot} [\mathbf{H}\mathbf{r}] = \mathbf{H} \text{div} \mathbf{r} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{r} - 2\mathbf{H}$$

(напомним, что $\text{div} \mathbf{r} = 3$).

Векторный потенциал однородного магнитного поля можно выбрать и иначе, например, в виде

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0 \quad (19.5)$$

(ось z выбрана вдоль направления \mathbf{H}). Легко убедиться, что и при таком выборе \mathbf{A} имеет место равенство $\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}$. В соответствии с формулами преобразования (18.3) потенциалы (19.4) и (19.5) отличаются друг от друга градиентом некоторой функции: (19.5) получается из (19.4) прибавлением ∇f , где $f = -xy\mathbf{H}/2$.

Використано перетворення:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad} f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (18.3)$$

26. Стале електричне поле. Рівняння Пуассона та його загальний розв'язок.

Електричне поле — одна зі складових електромагнітного поля, що існує навколо тіл або частинок, що мають електричний заряд, а також у вільному вигляді при зміні магнітного поля (наприклад, в електромагнітних хвилях). Електричне поле може спостерігатися завдяки силовому впливу на заряджені тіла.

Кількісними характеристиками електричного поля є вектор напруженості електричного поля й вектор електричної індукції.

У випадку, коли електричне поле не змінюється з часом, його називають електростатичним полем.

При сталому електричному полі всі похідні за часом дорівнюють нулю ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$).

$$\Delta\phi = -4\pi\rho, \quad \Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Метод розв'язку р-ня Пуассона

базується на

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

або

доведемо це:

$$\Delta\phi = \Delta \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = -4\pi \int_V \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = -4\pi\rho(\mathbf{r})$$

// від старших колег:

Система рівнянь Максвелла для статичного випадку приймає вигляд: $\text{div}\mathbf{B}=0$,

$$\text{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n}(\ddot{\vec{n}}\vec{p}) - \ddot{\vec{p}}}{c^2 r}, \quad \text{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Це тепер є дві незалежні системи для електричного та магнітного поля. Отже для сталого електричного поля нам досить розглянути тільки два рівняння:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n}(\ddot{\vec{n}}\vec{p}) - \ddot{\vec{p}}}{c^2 r}, \quad \text{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

До речі перше, вказує на безвихровий характер сталого електричного поля. Це рівняння задовольняється, якщо вектор \mathbf{E} , буде представляти собою $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi$, де ϕ - електростатичний потенціал. Оскільки ротор від довільного градієнта тотожно дорівнює нулеві, то підставляючи цей вираз у рівняння $\text{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$, отримуємо рівняння: $\Delta\phi = -4\pi\rho$, яке називається рівнянням Пуассона. Там де немає зарядів рівняння Пуассона перетворюється на рівняння

Лапласа: $\Delta\phi = 0$, з цього рівняння ми бачимо, що потенціал електричного поля ніде не може мати ні максимуму, ні мінімуму. Тому, що для того щоб ϕ приймало екстримальне значення, необхідно щоб всі перші похідні від ϕ по координатам дорівнювали нулю, а другі похідні $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ мали однаковий знак. Останнє просто неможливо, так як при цьому не задовольняється рівняння Лапласа.

27. Стале електричне поле на далеких відстанях. Дипольний і квадрупольний моменти.

Поле електростатичної системи на далеких відстанях

Розглянемо електростатичне поле системи на відстанях, що набагато перевищують характерні розміри системи, де зосереджені заряди та струми, тобто

$$\frac{|r'|}{|r|} \ll 1$$

де, як звичайно, позначено r — відстань від початку координат (який вибираємо всередині системи) до точки спостереження, r' — відстань від початку координат до точки знаходження заряду. Нам буде зручно розглянути випадок точкового розподілу зарядів у системі. Тоді вираз для потенціалу —

$$\varphi(r) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|r - r'|}$$

Цей вираз ми розкладемо в ряд, використовуючи нерівність $|r'| \ll |r|$. Для функції трьох змінних розвинення в ряд Тейлора має вигляд:

$$f(x_\alpha + \Delta x_\alpha) = f(x_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \Delta x_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Delta x_\alpha \Delta x_\beta$$

де користуємось позначенням $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. У нашому випадку малим параметром є відстань до точки знаходження заряду, узята з протилежним знаком, $\Delta x_\alpha = -x'_\alpha$.

Для того, щоб розкласти функцію

$$f = \frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

за степенями відношення $|r'|/|r|$, обчислимо спочатку похідні першого та другого порядку:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = - \frac{(x_\alpha - x'_\alpha)}{|r - r'|^3} \Big|_{r'=0} = - \frac{x_\alpha}{r^3}$$

Обчислимо похідні другого порядку. Спочатку за координатою x_α :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2} = \left[\frac{3(x_\alpha - x'_\alpha)^2}{|r - r'|^5} - \frac{1}{|r - r'|^3} \right] \Big|_{r'=0} = - \frac{1}{r^3} + \frac{3x_\alpha^2}{r^5}$$

Обчислимо також мішану похідну,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \left[\frac{3(x_\alpha - x'_\alpha)(x_\beta - x'_\beta)}{|r - r'|^5} \right] \Big|_{r'=0} = \frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5}$$

Ці два вирази можна об'єднати у формулу

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3}$$

Тепер можемо скласти ряд Тейлора в такому вигляді: з

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} + \sum_{\alpha=1}^3 \left(-\frac{x_\alpha}{r^3} \right) (-x'_\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \left(\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} \right) (-x'_\alpha) (-x'_\beta) \\ &+ \dots = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2) x_\alpha x_\beta + \dots \end{aligned}$$

Одержаний ряд Тейлора підставимо в вираз для потенціалу :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{d}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 D_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + \dots$$

Означення величин Q — повний заряд системи, d — дипольний момент і $D_{\alpha\beta}$ — квадрупольний момент (див. табл. 3.3). У правій колонці знаходяться означення тих самих величин для випадку неперервного розподілу зарядів. У рядках розміщені відповідно: 1 — повний заряд системи, 2 — дипольний момент, 3 — квадрупольний момент. З одержаного розкладу бачимо, що кожний наступний доданок зменшується відносно попереднього на величину $|\mathbf{r}'|/|\mathbf{r}|$ (відношення: розмір системи / відстань до точки спостереження). Тобто на значних відстанях від системи внесок у поле дають лише кілька перших доданків ряду. Якщо $Q \neq 0$, то головний внесок у поле має перший доданок — потенціал системи на далеких відстанях діє як потенціал точкового заряду величиною Q . Якщо $Q = 0$, то головний внесок має дипольний момент:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}\mathbf{d}}{r^3}$$

У цьому випадку поле знаходимо звичайним чином:

$$\mathbf{E}_d = -\text{grad} \frac{\mathbf{r}\mathbf{d}}{r^3} = -\frac{\mathbf{d}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r}\mathbf{d})\mathbf{r}}{r^5} = -\frac{\mathbf{d} - 3\mathbf{n}(\mathbf{d}\mathbf{n})}{r^3}$$

де $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — одиничний вектор, спрямований на спостерігача. Означення дипольного моменту (а також і квадрупольного) у загальному випадку залежать від вибору системи координат. Проте можна показати, що якщо $Q = 0$, то дипольний момент не залежить від вибору початку відліку. Якщо $Q = 0$ і $d = 0$, то головний внесок у поле має квадрупольний момент. Можна показати, що в цьому разі його величина не залежить від вибору початку відліку. Зауважимо, що введені означення тензора квадрупольного моменту не єдине можливе. Тензор квадрупольного моменту ми ввели таким чином, що сума його діагональних елементів дорівнює нулеві. Симетричний тензор квадрупольного моменту, визначений згідно з табл. 3.3, має лише 5 незалежних компонент.

Для того, щоб одержати наступні доданки розвинення в ряд, звичайно використовують іншу процедуру. Розкладають потенціал у ряд за поліномами Лежандра, оскільки безпосереднє розвинення в ряд Тейлора проводити досить важко. Розглянемо тепер електростатичну систему в зовнішньому полі. Нехай φ_{exi} позначає потенціал цього поля. Припустимо, що зовнішнє поле майже не змінюється в об'ємі, де знаходяться заряди. Тоді можливо розкласти його в ряд за малим параметром

$$\varphi_{exi} = \varphi_{exi}|_{r=0} + \mathbf{r}_i \text{grad} \varphi_{exi}|_{r=0} + \dots = \varphi_0 - \boldsymbol{\varphi}_0 \mathbf{E}_0 + \dots$$

де через φ_0 і \mathbf{E}_0 позначено потенціал і напруженість зовнішнього поля в початку координат.

Тоді повна потенціальна енергія системи зарядів у цьому полі дорівнює

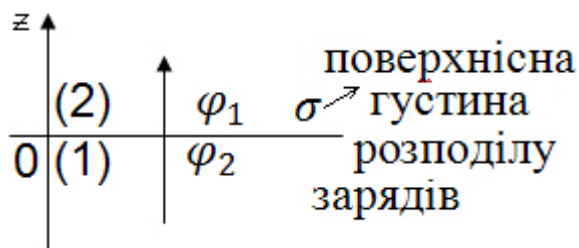
$$\varepsilon = Q\varphi_0 - \mathbf{d} \mathbf{E}_0 + \dots$$

Таблиця 3.3 Означення перших мультиплетних моментів

	Дискретний розподіл зарядів	Неперервний розподіл зарядів
1	$Q = \sum_{i=1}^n q_i$	$Q = \int \rho(r') dV'$
2	$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i$	$\mathbf{d} = \int \mathbf{r}' \rho(r') dV'$
3	$D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n (3x'_{i\alpha} x'_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta} r_i'^2) q_i$	$D_{\alpha\beta} = \int (3x'_{i\alpha} x'_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta} r_i'^2) \rho(r') dV'$

28. Розклад електростатичного поля за мультиполями. Система зарядів у зовнішньому електростатичному полі.

Постійне електричне поле $\nabla \vec{E} = 4\pi\rho$ $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ – рівняння Пуассона. Якщо $\rho=0$ (об'ємного заряду нема) $\Delta\varphi = 0$



Межова умова для скалярного потенціалу

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma$$

Якщо вводимо

зперпендикулярно до межі розділу

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 4\pi\sigma\varphi_1 \left(z \rightarrow 0, z < 0 \right) = \varphi_2 \left(z \rightarrow 0, z > 0 \right)$$

Нехай ми маємо неперервний і дискретний розподіл зарядів

(складний рисунок елемента об'єму у просторі який створює потенціал, об'єм –

dV, \vec{r}' – відстань до елементу, \vec{r} – відстань до точки у якій рахуємо потенціал)

$$\varphi = q/r; \vec{E} = q\vec{r}/r^3; \varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

для дискретного заряду

Для об'ємного розподілу неперервного заряду маємо:

$$d\varphi(\vec{r}) = \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}; \varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Знайдемо потенціал для випадку якщо

$r \gg r'$ і $L \ll r$ (L лінійні розміри області, зобразити на малюнку) Деяка функція

$f = 1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ можемо розкласти в ряд Тейлора в області $r \rightarrow 0$ отже маємо:

$$f \approx f(x^\alpha) + \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} x^\alpha + \frac{\partial^2 f}{2\partial x^\alpha \partial x^\beta} x^\alpha x^\beta + \dots, \text{ де}$$

$$x^\alpha = \begin{cases} x, \alpha = 1 \\ y, \alpha = 2 \\ z, \alpha = 3 \end{cases}; \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 (x^\alpha - x'^\alpha)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha}(\vec{r} \rightarrow 0) = -\frac{1}{r^2} * \frac{-2(x^\alpha - x'^\alpha)}{2|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{x^\alpha}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^{\alpha'2}} = \frac{\partial^2}{\partial x'^{\alpha'2}} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha'}} \left(\frac{(x^\alpha - x'^\alpha)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \frac{3(x^\alpha - x'^\alpha)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^4} * \frac{(x^\alpha - x'^\alpha)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x^\alpha)^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^{\alpha'} \partial x'^{\beta'}}(\vec{r}=0) = \frac{\partial}{\partial x'^{\beta'}} \left(\frac{(x^\alpha - x'^\alpha)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) = 3 \frac{(x^\beta - x'^\beta)(x^\alpha - x'^\alpha)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5} \Big|_{(\vec{r} \rightarrow 0)} = \frac{3x^\alpha x^\beta}{r^5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'} (\vec{r}=0)} &= \frac{3x^{\alpha} x^{\beta}}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} \\
\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r} + \frac{x^{\alpha} x^{\alpha'}}{r^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{3x^{\alpha} x^{\beta}}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} \right) x^{\alpha'} x^{\beta'} = \\
&= \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r} \vec{r}')}{r^3} + \frac{1}{2r^5} (3x^{\alpha} x^{\beta} - \delta_{\alpha\beta} r^2) x^{\alpha'} x^{\beta'} = \\
&= \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r} \vec{r}')}{r^3} + \frac{1}{2r^5} (3x'_{\alpha} x'_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} (r')^2) x_{\alpha} x_{\beta} \\
\varphi(\vec{r}) &= \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\
&= \frac{1}{r} \int_V \rho(\vec{r}') dV' + \frac{1}{r^3} \int_V \rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}') dV' + \\
&+ \frac{x_{\alpha} x_{\beta}}{2r^5} \int_V \rho(\vec{r}') (3x'_{\alpha} x'_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} (r')^2) dV'
\end{aligned}$$

$Q = \int_V \rho(\vec{r}') dV'$ - повний заряд всієї області

$\vec{d} = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = \int_V \vec{r}' dq_{(\vec{r})}$ - дипольний момент

Тензор квадрупольного моменту $D_{\alpha\beta} = \int (3x'_{\alpha} x'_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} (r')^2) \rho(\vec{r}') dV'$;

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{(\vec{r} \vec{d})}{r^3} + \frac{D_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta}}{2r^5}$$

Існують кілька форм введення $D_{\alpha\beta}$, зокрема в деяких з них відсутні доданки, що містять символи Кронекера, в деяких відсутній заряд.

D , що побудован за формулою, наведеною вище, характеризує тим, що сума діагональних елементів тензора дорівнює нулю.

29. Стале магнітне поле. Рівняння Пуассона та його загальний розв'язок.

Почнемо з того що запишемо систему рівнянь Максвела для магнітного поля.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

Знаючи вираз для магнітної індукції через векторний потенціал, можемо записати $\vec{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. (Згадавши що $\nabla \times \nabla = \text{grad} \cdot \text{div} - \Delta$)

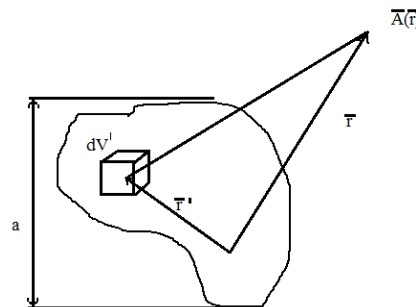
Звідси $\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ а це і є рівняння Пуассона.

Коли права частина рівняння перетворюється на 0 то рівняння перетворюється на рівняння Лапласа.

Розв'язок знаходиться аналогічно як і для електричного поля. (Перевірено виведення не давали ні для

електричного ні для магнітного) Лише замість зарядів фігурують контури зі струмами.

Загальний розв'язок даного рівняння: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$



30. Стале магнітне поле на далеких відстанях. Магнітний дипольний момент.

- $\text{div} \vec{B} = 0$, отже можна сказати, що $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, де \vec{A} - деяке векторне поле, що називається векторним потенціалом і, оскільки $\vec{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$, то з рівнянь Максвелла $\vec{B} = \frac{1}{c} \oint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl'$.
- Розглянемо *магнітостатичну* систему і знайдемо її поле на *великих* відстанях: \vec{r} – координата точки спостереження, \vec{r}' - координата всередині системи. На великих відстанях означає, що: $\frac{r'}{r} \ll 1$. Як завжди, $\vec{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$, але хто так інтегрує? Якщо вже на великій відстані, то розкладемо: $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3}$. Тоді:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{1}{cr} \int_V \vec{j}(\vec{r}') dV' + \frac{1}{cr^2} \int_V \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') dV'.$$

Розглянемо ці інтеграли окремо.

Інтеграл векторної величини не береться, тому, як завжди, помножимо перший інтеграл на деякий вектор \vec{b} і тоді проінтегруємо:

$\vec{b} \vec{I}_1 = \int_V \vec{b} \vec{j}' dV'$. Враховуючи статичність задачі ($\nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \vec{j} = 0$), розглянемо вираз: $\nabla' (\vec{j}' (\vec{b} \vec{r}')) = (\nabla' \vec{j}') (\vec{b} \vec{r}') + \vec{j}' \nabla' (\vec{b} \vec{r}') = \vec{j}' \nabla' (\vec{b} \vec{r}') = \vec{j}' \vec{b}$.

Тобто, $\vec{b} \vec{I}_1 = \int_V \vec{b} \vec{j}' dV' = - \int_V \nabla' (\vec{j}' (\vec{b} \vec{r}')) dV' = - \oint_S j'_n (\vec{b} \vec{r}') dS = 0$ бо $j'_n = 0$ на великих відстанях.

Отже, $\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{1}{cr^2} \int_V \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') dV'$. Розглянемо підінтегральний вираз:

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') &= \frac{1}{2} \{ \vec{j}' (\vec{r} \vec{r}') + \vec{r}' (\vec{r} \vec{j}') \} + \frac{1}{2} \{ \vec{j}' (\vec{r} \vec{r}') - \vec{r}' (\vec{r} \vec{j}') \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ \vec{j}' (\vec{r} \vec{r}') + \vec{r}' (\vec{r} \vec{j}') \} + \frac{1}{2} [\vec{r}' \times [\vec{j}' \times \vec{r}]]. \end{aligned}$$

Інтеграл знову розбито на два, розглянемо перший з них:

$\vec{I}_2 = \frac{1}{2} \int_V \{ \vec{j}' (\vec{r} \vec{r}') - \vec{r}' (\vec{r} \vec{j}') \} dV'$ - знову помножуємо на деякий сталий \vec{b} і розглядаємо підінтегральний вираз:

$$\vec{b} \{ \vec{j}' (\vec{r} \vec{r}') + \vec{r}' (\vec{r} \vec{j}') \} = (\vec{b} \vec{j}') (\vec{r} \vec{r}') + (\vec{b} \vec{r}') (\vec{r} \vec{j}') = \vec{j}' \{ \vec{b} (\vec{r} \vec{r}') + \vec{r} (\vec{b} \vec{r}') \} \rightarrow$$

Врахуємо, що: $\vec{b} = \nabla' (\vec{b} \vec{r}')$ та $\vec{r} = \nabla' (\vec{r} \vec{r}')$, тоді:

$\rightarrow \vec{j}' \{ \nabla' (\vec{b} \vec{r}') (\vec{r} \vec{r}') + \nabla' (\vec{r} \vec{r}') (\vec{b} \vec{r}') \} = \vec{j}' \nabla' \{ (\vec{b} \vec{r}') (\vec{r} \vec{r}') \} = \nabla' \{ \vec{j}' (\vec{b} \vec{r}') (\vec{r} \vec{r}') \}$, отже:

$\vec{b} \vec{I}_2 = \frac{1}{2} \int_V \nabla' \{ \vec{j}' (\vec{b} \vec{r}') (\vec{r} \vec{r}') \} dV' = \oint_S j'_n (\vec{b} \vec{r}') (\vec{r} \vec{r}') dS = 0$ бо $j'_n = 0$ на великих відстанях.

Таким чином: $\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{1}{2cr^3} \int_V [\vec{r} \times [\vec{j}' \times \vec{r}']] dV' = \frac{-(\frac{1}{2c} \int_V [\vec{j}' \times \vec{r}']) \times \vec{r}}{r^3}$.

Величину $\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}'] dV'$ називають дипольним магнітним моментом. $\vec{A} = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}$.

31. Векторний потенціал сталого магнітного поля. Магнітний момент у зовнішньому магнітному полі. Гіромагнітне відношення.

$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, де \vec{A} - деяке векторне поле, що називається векторним потенціалом.

Оскільки $\vec{A} = \frac{1}{c} \int_v \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$, то з рівнянь Максвелла $\vec{B} = \frac{1}{c} \oint \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl'$.

Розглянемо магнітостатичну систему і знайдемо її поле на великих відстанях:
 \vec{r} - координата точки спостереження, \vec{r}' - координата всередині системи.

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{1}{cr} \int_v \vec{j}(\vec{r}') dV' + \frac{1}{cr^3} \int_v \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') dV'.$$

Розглянемо ці інтеграли окремо.

Інтеграл векторної величини не береться, тому як завжди, помножимо перший інтеграл на деякий сталий вектор \vec{b} і тоді проінтегруємо:

$$\vec{b} \cdot \vec{I}_1 = \int_v \vec{b} \cdot \vec{j}' dV'$$

Враховуючи статичність задачі ($\nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), розглянемо вираз

$$\nabla'(\vec{j}'(\vec{b} \cdot \vec{r}')) = \nabla'(\vec{j}')(\vec{b} \cdot \vec{r}') + \vec{j}' \nabla'(\vec{b} \cdot \vec{r}') = \vec{j}' \nabla'(\vec{b} \cdot \vec{r}') = \vec{j}' \cdot \vec{b}.$$

Тобто $\vec{b} \cdot \vec{I}_1 = \int_v \vec{b} \cdot \vec{j}' dV' = - \int_v \nabla'(\vec{j}'(\vec{b} \cdot \vec{r}')) dV' = - \oint_s \vec{j}_n'(\vec{b} \cdot \vec{r}') dS = 0$, бо $j_n' = 0$ на великих відстанях.

Отже $\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{1}{cr^3} \int_v \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') dV'$. Розглянемо підінтегральний вираз:

$$\vec{j}(\vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') = \frac{1}{2} \{ \vec{j}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') + \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{j}') \} + \frac{1}{2} [\vec{r}' \times [\vec{j}' \times \vec{r}]].$$

Інтеграл знову розбито на два.

$$\vec{b} \{ \vec{j}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') + \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{j}') \} = \nabla' \{ \vec{j}' \cdot (\vec{b} \cdot \vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') \}, \text{ отже}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{I}_2 = \frac{1}{2} \int_v \nabla' \{ \vec{j}' \cdot (\vec{b} \cdot \vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') \} dV' = \oint_s \vec{j}_n'(\vec{b} \cdot \vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') dS = 0, \text{ бо } j_n' = 0 \text{ на}$$

великих відстанях.

Таким чином:
$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{1}{2cr^3} \int_v [\vec{r}' \times [\vec{j}' \times \vec{r}]] dV' = \frac{-\left(\frac{1}{2c} \int_v [\vec{j}' \times \vec{r}] dV'\right) \times \vec{r}}{r^3}.$$

Величину $\vec{\mu} = -\frac{1}{2c} \int_v [\vec{j}' \times \vec{r}] dV'$ називають дипольним магнітним моментом.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}$$

Енергія магнітного моменту у зовнішньому магнітному полі: $W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}.$

Розглянемо деяку систему частинок, для яких $\frac{e_k}{m_k} = \text{const}$. Магнітний момент для неї:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_k e_k [\vec{r}_k \times \vec{V}_k] = \frac{e}{2mc} \sum_k m_k [\vec{r}_k \times \vec{V}_k] = \frac{e}{2mc} \vec{L}, \text{ де } \vec{L} - \text{момент кількості руху}$$

системи.

Число $\gamma = \frac{e}{2mc}$ називається гіромагнітним відношенням. Це коефіцієнт пропорційності між магнітним моментом та моментом імпульсу.

32. Електромагнітні хвилі. Плоскі електромагнітні хвилі. Загальний розв'язок хвильового рівняння.

Для плоских хвиль всі характеристики залежать лише від x . Під $u(x, t)$ будемо розуміти якусь характеристику поля φ або A_i . Хвильове рівняння має вигляд: $\square u(x, t) = 0$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0$$

Виконаємо заміну $\xi = x - ct, \eta = x + ct \Rightarrow x = \frac{\xi + \eta}{2}, t = \frac{\xi - \eta}{2c}$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

Тепер хвильове рівняння матиме вигляд $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Проінтегрувавши маємо $\frac{\partial u}{\partial \eta} = F(\eta)$

Проінтегрувавши ще раз, знаходимо, що:

$$u = f(\xi) + g(\eta) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Розв'язок $u \equiv f$ описує хвилю, що біжить вздовж напрямку зростання x із швидкістю c , оскільки рівняння її хвильового фронту $x - ct = \text{const}$. Розв'язок $u \equiv g$ описує хвилю, що біжить у протилежному напрямку. Оберемо перший розв'язок і обчислимо поля у цій хвилі. Для цього запишемо рівняння Максвелла для вільного електромагнітного поля:

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad \text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Враховуючи те, що всі величини залежать лише від $\xi = x - ct$. Тоді диференціальні операції будуть мати вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \vec{\nabla} = \vec{n} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \vec{n} = (1; 0; 0)$$

Тепер отримаємо правила обчислення ротора та дивергенції векторної величини $\vec{f}(\xi)$:

$$\text{div} \vec{f} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) = \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \cdot \vec{f}) \quad \text{rot} \vec{f} = [\vec{\nabla} \times \vec{f}] = \frac{\partial}{\partial \xi} [\vec{n} \times \vec{f}]$$

Застосуємо ці правила для системи рівнянь Максвелла

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \cdot \vec{B}) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \times \vec{E} - \vec{B}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \cdot \vec{E}) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \times \vec{B} + \vec{E}) = 0$$

Оскільки ми шукаємо динамічний розв'язок, то вважаємо \vec{E} та \vec{B} змінними величинами (тобто такими, похідні від яких не рівні нулю $\frac{\partial}{\partial \xi} \vec{E} \neq 0$ $\frac{\partial}{\partial \xi} \vec{B} \neq 0$).

Тоді очевидні такі співвідношення (бо вектор \vec{n} сталий).

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{n} \times \vec{E} = \vec{B}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{n} \times \vec{B} = -\vec{E}$$

Звідси видно, що електричне та магнітне поля ортогональні до напрямку поширення хвилі. Тому електромагнітні хвилі називаються **поперечними**. Потік енергії плоскої хвилі (вектор Умова - Пойтінга) визначається так:

$$S = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}] = c \cdot w \cdot \vec{n} \quad w = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi},$$

де w – густина енергії поля. Тепер отримаємо зв'язок між магнітним полем та векторним потенціалом. Для цього слід помітити, що, виходячи із вищезгаданих

правил координатне диференціювання може бути замінене на часове $\vec{\nabla} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t}$. Тоді

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = -\frac{1}{c} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\frac{[\vec{n} \times \dot{\vec{A}}]}{c} = \frac{[\dot{\vec{A}} \times \vec{n}]}{c}$$

33. Хвильовий 4-вектор і повздовжній ефект Доплера.

Розглянемо плоску хвилю, що описується рівнянням $\vec{A} = \vec{A}_0 \cdot \exp\{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\}$. Поле, що описується такою хвилею буде постійним, коли фаза $\vec{k}\vec{r} - \omega t = \text{const}$. Ця фаза є скаляром і тому не залежить від СК, в якій вона вимірюється, а отже, вона є інваріантом щодо перетворень Лоренца: $k_x x + k_y y + k_z z - \frac{\omega}{c} ct = \text{const}$.

Цей вираз можна представити у вигляді скалярного добутку двох 4-векторів:

$$x_i = (x, y, z, -ct) \text{ та } k^i = \left(k_x, k_y, k_z, \frac{\omega}{c} \right) - \text{хвильовий 4-вектор.}$$

При переході до рухомої СК K' координати хвильового 4-вектора перетворюються таким чином:

$$k'_x = \gamma \left(k_x - \frac{v}{c} \cdot \frac{\omega}{c} \right), \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z, \quad \left(\frac{\omega}{c} \right)' = \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c} k_x \right)$$

Оскільки квадрат 4-вектора є інваріантом

перетворення, то $\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \vec{k}'^2 - \frac{\omega'^2}{c^2} = 0$. В якості

константи стоїть 0 оскільки хвиля поширюється зі швидкістю світла, а тому інтервал рівний нулю.

Нехай кут між віссю x та \vec{k} рівний θ , а між x' та \vec{k}' – θ' .

Оскільки $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$, тоді $k_x = |\vec{k}| \cdot \cos \theta = \frac{\omega}{c} \cos \theta$, $k_y = \frac{\omega}{c} \sin \theta$

Розглянемо часову координату хвильового 4-вектора:

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c} \cdot k_x \right) = \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c} \cdot \frac{\omega}{c} \cos \theta \right); \quad \boxed{\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}} - \text{формула для ефекту}$$

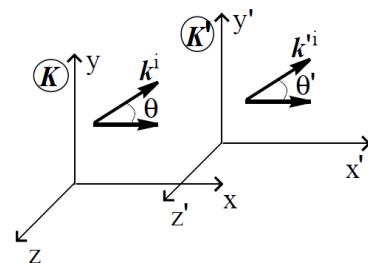
Доплера.

1. При $\theta = 0$ СК K' "наздоганяє" K , а $\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$. При $v \ll c$, $\omega = \omega' (1 + v/c)$.

Спостерігач сприймає частоту, що більша за частоту джерела.

2. При $\theta = \pi$ K' "тікає" від K , а $\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$. При $v \ll c$, $\omega = \omega' (1 - v/c)$

3. При $\theta = \frac{\pi}{2}$ маємо поперечний ефект Доплера, $\omega = \omega' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$



34. Хвильовий 4-вектор і поперечний ефект Доплера.

див. 33

Для випадку, коли $\theta = \frac{\pi}{2}$ ефект Доплера є поперечним (такий випадок має місце,

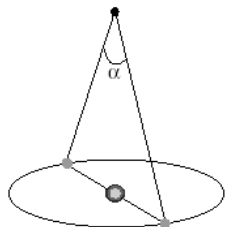
коли система K' , пролітаючи повз K , випромінює електромагнітну хвилю в той момент, коли відстань між системами не змінюється (точно по перпендикуляру)). Тоді

формула для частоти: $\omega = \omega' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Цей ефект не має класичного пояснення, оскільки є цілком релятивістським. Він пов'язаний із тим, що час у цих двох системах «іде по-різному».

35. Червоний зсув. (Метод паралаксу)

Парала́кс — зміна видимого положення об'єкта відносно віддаленого фону в залежності від положення спостерігача. Знаючи відстань від точок спостереження D (база) та кут зміщення α в радіанах, можна обчислити відстань до об'єкта $L = D / 2\sin(\alpha/2)$. для малих кутів $L = D / \alpha$. $1\text{пк} = 3 \cdot 10^{13} \text{ км}$.



Як раніше вимірювали відстань до зірок: оскільки діаметр земної орбіти 300 млн км, то вимірюючи кут між площиною земної орбіти та напрямком на зірку з інтервалом у півроку, можемо з простого прямокутного трикутника визначити катет(відстань до зірки) за відомим кутом і другим катетом. Проте зазначеним способом можна

виміряти відстані не більше ніж 300 світлових років. Але ж відомо, що Всесвіт досяжний для спостереження має більший розмір, 10 - 20 млрд св років. Потім з'явився інший спосіб. Хабблом експериментально було встановлено, що Всесвіт „розбігається”, який він спостерігав за зміщенням спектральних ліній хімічних елементів у спектрах далеких зірок. Якщо спрямувати спектральний прилад на далеку зірку, то спектр хімічних елементів буде зсунуто у бік подовження хвилі. Оскільки іде в бік подовження, то це наз **червоний зсув**. Якщо відстань до галактики позначити через R , а радіальну компоненту швидкості її віддалення dR/dt , то **закон** встановлений **Хабблом** має вигляд: $dR/dt = HR$, де $H = (50 - 100) \text{ км/с} \cdot \text{Мпк} = (1.6-3.2) \cdot 10^{-18} \text{ 1/с}$ – стала **Хаббла**. Міряється частота одного елемента, вона відома. Тому легко визначити відстань, знаючи швидкість. Треба ще зробити деякі зауваження про " розміри Всесвіту ". Виявляється , простір Всесвіту кривий якщо мати на увазі великі відстані, тому поняття розміру у звичному розумінні тут не доцільно.

Також є так званий **гравітаційний червоний зсув**: зміщення спектральних ліній також може статися внаслідок гравітаційного поля великих тіл. Один із висновків загальної теорії відносності полягає в тому що годинники ідуть по різному при різній гравітації. Наприклад годинник на Сонці має йти повільніше ніж на Землі. Внаслідок того що час у нас уповільнюється, то випромінювання ніби то трохи розтягується у порівнянні з годинником який не в гравітації. Тому падає і частота, і з'являється червоний зсув.

36. Гамильтонова форма рівнянь електромагнітного поля. Власні типи коливань (моди) електромагнітного поля. Кількість власних коливань. Гамильтонова форма рівнянь поля. Ефект Казіміра.

(питання знайшов тільки в цій книжці, тому вставляю принтскрини, а ефект Казимира з вікіпедії).

§ 24.1. Переход к одномерному континууму

Рассмотрим систему из N точечных частиц одинаковой массы m , соединенных пружинками с одинаковой упругостью k и длиной a (рис. 24.1). Пусть η_i представляет смещение i -й массы из положения

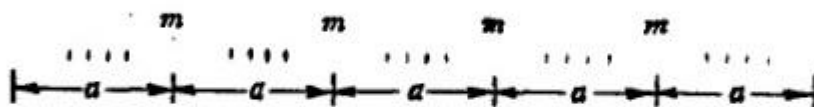


Рис. 24.1. Система материальных точек, соединенных пружинами.

равновесия. Решение задачи основано на выборе подходящей функции Лагранжа L с тем, чтобы путем вариации

$$\delta \int L(\eta_i, \dot{\eta}_i, t) dt = 0 \quad (24.1)$$

400

ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

[гл. 24

получить уравнения движения. Из механики известно, что $L = T - V$, где T и V соответственно кинетическая и потенциальная энергии. В нашей задаче, если пренебрегать влиянием концов, имеем

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [m \dot{\eta}_i^2 - k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2]. \quad (24.2)$$

Эту функцию Лагранжа можно записать в таком виде:

$$L = \sum_{i=1}^N a \mathcal{L}_i, \quad (24.3)$$

где

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right]. \quad (24.4)$$

Эту величину можно назвать линейной плотностью функции Лагранжа. Уравнение (24.1) с функцией Лагранжа (24.2) приводит к обычным уравнениям движения системы связанных осцилляторов; ортогонализация (24.2) дает нормальные колебания системы. •

Пусть теперь число степеней свободы стремится к бесконечности. При этом

$$\left. \begin{aligned} a &\rightarrow dx, \\ \frac{m}{a} &\rightarrow \mu, \\ ka &\rightarrow Y, \\ \frac{\eta_{l+1} - \eta_l}{a} &\rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (24.5)$$

где μ — линейная плотность, а Y — модуль упругости. При таком переходе дискретный индекс l заменяется непрерывной переменной x , а функция Лагранжа приобретает следующий вид:

$$L = \frac{1}{2} \int \left[\mu \dot{\eta}^2 - Y \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] dx = \int \mathcal{L} dx, \quad (24.6)$$

где

$$\mathcal{L} \left(\eta, \dot{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, t \right) = \frac{1}{2} \left[\mu \dot{\eta}^2 - Y \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (24.7)$$

Таким образом, плотность функции Лагранжа явно зависит от пространственных производных «координат поля» η .

Из вариационного уравнения (24.1), которое теперь имеет вид

$$\delta \int L dt - \delta \iint \mathcal{L} dx dt = 0, \quad (24.8)$$

можно вывести соответствующие уравнения Эйлера. Для этого в (24.8) подставим плотность функции Лагранжа (24.7). Интегрируя по частям § 24.2] ОБОБЩЕНИЕ НА ТРЕХМЕРНЫЙ КОНТИНУУМ 401

и не учитывая явной зависимости от времени, получим

$$\begin{aligned} \delta \int L dt &= \int \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right\} dx dt = \\ &= \int \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} \right] \right\} \delta \eta dx dt = 0. \end{aligned} \quad (24.9)$$

Проинтегрированная часть обращается в нуль в силу условия, что $\delta \eta = 0$ на границах области интегрирования по t . Так как $\delta \eta$ — произвольная функция x , то из (24.9) следует уравнение в частных производных

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} \right] = 0. \quad (24.10)$$

Это уравнение часто пишут в таком виде:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} \right] = 0, \quad (24.11)$$

где выражение

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} \right] \quad (24.12)$$

называется «вариационной», или «функциональной» производной. Заметим, что при предельном переходе к непрерывной переменной система из N обычных дифференциальных уравнений Лагранжа заменяется одним уравнением в частных производных.

Подставляя в (24.11) плотность функции Лагранжа (24.7), получим волновое уравнение

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad (24.13)$$

соответствующее упругим волнам, распространяющимся со скоростью $\sqrt{Y/\mu}$.

§ 24.2. Обобщение на трехмерный континуум

Изложенное в предыдущем параграфе может быть обобщено на случай трехмерного поля η , где η представляет собой произвольный ковариантный параметр. В этом случае вариационное уравнение, аналогичное (24.1), примет вид

$$\delta \int \int \mathcal{L} \, dv \, dt = 0, \quad (24.14)$$

402

ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

[гл. 24

или

$$\delta \int \int \mathcal{L} \left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x^i} \right) d^4x = 0. \quad (24.15)$$

Очевидно, такая форма уравнения ковариантна, если плотность функции Лагранжа — скаляр. Проварьируем опять функциональную зависимость \mathcal{L} от η и $\frac{\partial \eta}{\partial x^i}$, считая x^i постоянными. Интегрирование по частям приводит к уравнению

$$\int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^i} \right)} \right] \right\} d^4x \, \delta \eta = 0, \quad (24.16)$$

откуда получаются ковариантные уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^i} \right)} \right]. \quad (24.17)$$

Для того чтобы зависимость от времени сделать явной, эти уравнения запишем в виде

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right), \quad (24.18)$$

где

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^\sigma} \right)} \right], \quad (24.19)$$

причем $\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$, а x^σ представляют собой пространственные координаты.

Наша задача состоит в том, чтобы найти такую функцию \mathcal{L} , которая при подстановке в уравнения (24.17) приводила бы к уравнениям Максвелла. Очевидно, что все изложенные соображения применимы не только к электромагнитному полю, но и к любым другим полям.

Полученное нами уравнение Лагранжа в частных производных, а также принцип наименьшего действия имеют ковариантный вид. Для того чтобы ввести функцию Гамильтона, необходимо среди переменных x^i выделить время, как это сделано в соотношениях (24.18) и (24.19). После этого можно ввести «плотность импульса», сопряженную η ,

$$\pi(x^\sigma, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \quad (24.20)$$

и плотность функции Гамильтона

$$\mathcal{H} \left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x_\alpha}, \pi, \frac{\partial \pi}{\partial x_\alpha}, t \right) = \pi \dot{\eta} - \mathcal{L}. \quad (24.21)$$

Уравнения Гамильтона можно получить обычным образом. Рассмотрим приращение $\delta \mathcal{H}$ полной функции Гамильтона $H = \int \mathcal{H} dv$:

$$\delta H = \int \left[\dot{\eta} \delta \pi + \pi \delta \dot{\eta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^i} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta \right] dv.$$

Пользуясь уравнениями Лагранжа (24.17) и определением π , интегрируем по частям

$$\delta H = \int (\dot{\eta} \delta \pi - \dot{\pi} \delta \eta) dv. \quad (24.22)$$

Так как

$$H = \int \mathcal{H} \left(\pi, \frac{\partial \pi}{\partial x^\sigma}, \eta, \frac{\partial \eta}{\partial x^\sigma} \right) dv, \quad (24.23)$$

то можно написать

$$\begin{aligned} \delta H = \int \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \delta \pi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \pi}{\partial x^\sigma} \right)} \delta \left(\frac{\partial \pi}{\partial x^\sigma} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \delta \eta + \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^\sigma} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^\sigma} \right) \right] dv. \end{aligned} \quad (24.24)$$

Если это выражение проинтегрировать по частям и результаты сравнить с выражением (24.22), то получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}, \\ \dot{\pi} &= - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta}, \end{aligned} \right\} \quad (24.25)$$

где применено обозначение (24.19). Это и есть уравнения Гамильтона.

Уравнения Гамильтона позволяют выразить производную во времени через скобки Пуассона. Если Λ представляет собой плотность физической переменной L , т. е. $L = \int \Lambda dv$, то с помощью уравнений (24.25) можно написать

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \pi} \dot{\pi} \right) dv = \\ &= \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \pi} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \right) dv = \int [\Lambda, \mathcal{H}] dv, \end{aligned} \quad (24.26)$$

что аналогично обычным скобкам Пуассона. Эти выражения служат удобным исходным пунктом при квантовании уравнений поля. Если задана плотность функции Лагранжа \mathcal{L} , то изложенные выше соображения приводят к конкретным уравнениям поля. Для того чтобы

уравнения поля были линейными, функция Лагранжа не должна содержать η и $\frac{\partial \eta}{\partial x^i}$ в степени выше второй. В качестве простейшего примера рассмотрим функцию Лагранжа с плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \mu^2 \eta^2 \right), \quad (24.27)$$

которая при подстановке в (24.11) приводит к следующим уравнениям поля:

$$(\square - \mu^2) \eta = 0. \quad (24.28)$$

Соответствующая плотность импульса равна

$$\pi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (24.29)$$

в результате мы приходим к положительно определенной функции Гамильтона

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [c^2 \pi^2 + (\nabla \eta)^2 + \mu^2 \eta^2]. \quad (24.30)$$

Этими выражениями определяется скалярное мезонное поле Юкавы. В случае точечного источника потенциал этого поля имеет вид

$$\eta = e^{i(k \cdot r - \omega t)} \frac{e^{-\mu r}}{r}. \quad (24.31)$$

§ 24.3. Электромагнитное поле

В случае электромагнитного поля рассуждения более сложны. Теперь мы имеем дело с векторным полем, т. е.

$$\eta \rightarrow \varphi^i. \quad (24.32)$$

Полная функция Лагранжа должна иметь три члена: 1) член, описывающий движение материальных частиц; 2) член, описывающий взаимодействие частицы с полем, 3) член, соответствующий уравнениям поля.

Первые два члена можно написать на основе уже известных соображений предыдущих глав. Так, мы знаем, что получатся правильные уравнения движения точечной частицы во внешнем поле, если положить

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} g_0 c^2 u_i u^i, \quad (24.33)$$

где g_0 — плотность в собственной системе отсчета, а

$$\mathcal{L}_2 = j^i \varphi_i. \quad (24.34)$$

Для написания L_3 воспользуемся следующими соображениями: во-первых, плотность \mathcal{L} должна быть инвариантом, и во-вторых, функция L_3 должна быть аналогична классической функции Лагранжа в механике, пропорциональной разности потенциальной и кинетической энергий. При электромагнитных колебаниях энергия переходит из электрической в магнитную и обратно, как при механических из кинетической в потенциальную. Единственный скаляр, квадратичный относительно первых производных четырехмерного потенциала, имеет вид $F^{ij}F_{ij} = 2(c^2B^2 - E^2)$ (величина $F^{ij}G_{ij}$, где G_{ij} — тензор, дуальный тензору F_{ij} , исключается, ибо, как мы видели в § 17.2, она преобразуется не так, как другие члены функции Лагранжа). Конечно, плотность функции Лагранжа может содержать также члены, квадратичные относительно самого четырехмерного потенциала, подобные тому, который имеется в выражении (24.27), однако именно этот член приводит к экспоненциальной зависимости от r в решении для точечного источника (24.31). Таким образом, хотя плотность функции Лагранжа, аналогичная (24.27), оказывается возможной по своим трансформационным качествам, она не соответствует наблюдаемым на опыте свойствам электромагнитного поля. В квантовой механике теория, основанная на плотности функции Лагранжа, квадратичной как относительно потенциала, так и его производных, приводит к частицам с конечной массой покоя, в то время как в электромагнитной теории фотоны имеют нулевую массу покоя.

Таким образом, в случае электромагнитного поля

$$\mathcal{L}_3 = \frac{\epsilon_0(E^2 - c^2B^2)}{2} = -\frac{\epsilon_0}{4}F^{ij}F_{ij}. \quad (24.35)$$

Заметим, что уравнения поля

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

уже содержатся в уравнениях

$$F^{ij} = \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}, \quad (17.30)$$

соответствующих выражениям

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Таким образом, полная плотность функции Лагранжа равна

$$\mathcal{L} = -\frac{\epsilon_0}{4}F^{ij}F_{ij} + eu^i\varphi_i + \frac{1}{2}g_0c^2u^iu_i. \quad (24.36)$$

В пользу такого выбора функции Лагранжа свидетельствует также связь между плотностью функции Лагранжа и тензором энергии — импульса (22.24). Если за плотность функции Гамильтона принять по-прежнему плотность энергии, то можно написать

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{N} = 0, \quad (24.37)$$

Далее, вследствие равенства (24.21) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{\eta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} - \mathcal{L} \right) = \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) - \dot{\eta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^\sigma} \right)} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^\sigma \partial t} dt = - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left[\dot{\eta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^\sigma} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (24.38)$$

Следовательно,

$$N^\sigma = c T^{4\sigma} = \dot{\eta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^\sigma} \right)}. \quad (24.39)$$

Ковариантное обобщение соотношений (24.39) и (24.21) дает

$$T_j^i = \frac{\partial \eta}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^i} \right)} - \mathcal{L} \delta_j^i. \quad (24.40)$$

Таким образом, наш выбор функции Лагранжа удовлетворяет и соотношению (24.39), и равенству $T_4^4 = \mathcal{H}$.

Легко показать, что плотность функции Лагранжа $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ приводит к уравнениям Максвелла. Однако такой выбор \mathcal{L} не единственен. Так как поля F^{ij} не зависят от величины $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i}$, то к \mathcal{L} можно прибавить любую функцию от $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i}$. Обычно пользуются условием Лоренца $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} = 0$, хотя это и не обязательно.

Пользуясь равенствами $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ и $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_j} = j^j$, из соотношения (24.17) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} \right)} &= \\ &= \frac{\epsilon_0}{4} \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} \right)} \left[\left(\frac{\partial \varphi^l}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi^k}{\partial x_l} \right) \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^l} \right) \right] \right\} = \epsilon_0 \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i}, \end{aligned} \quad (24.41)$$

и, следовательно, получаем уравнения Максвелла, описывающие источники поля

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = \frac{j^j}{\epsilon_0}. \quad (17.34)$$

Те же вычисления можно проделать и для трехмерной плотности функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 (c^2 B^2 - E^2) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} + \rho \varphi, \quad (24.42)$$

и уравнения (24.19). В трехмерном случае имеем

$$\eta^\alpha = A^\alpha, \quad (24.43)$$

$$\pi^\alpha = -\epsilon_0 E^\alpha, \quad (24.44)$$

т. е. \mathbf{A} и \mathbf{E} — канонически сопряженные величины. Будучи выраженной через эти переменные, плотность функции Гамильтона для поля в отсутствии источников имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 + \epsilon_0 \left(\nabla \varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{2\mu_0} - \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - \\ & - \epsilon_0 \left(\nabla \varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) - \frac{\epsilon_0}{2} (\nabla \varphi)^2 = \frac{\pi^2}{2\epsilon_0} + \frac{(\nabla \times \boldsymbol{\eta})^2}{2\mu_0} - (\boldsymbol{\pi} \cdot \nabla \varphi). \end{aligned} \quad (24.45)$$

Специальным выбором калибровки последний член можно обратить в нуль; во всяком случае в силу равенства $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ объемный интеграл от последнего члена равен нулю, и таким образом, вклад в энергию он не дает.

Эффект Казимира

Эффект Казимира — слабка взаємодія між двома металевими пластинами у вакуумі, зумовлена квантуванням нульових коливань електромагнітного поля.

Эффект Казимира був запропонований у 1948 році нідерландськими фізиками Гендриком Казимиром і Діркком Польдером і експериментально виявлений у 1958 році. Однак перші вимірювання мали велику експериментальну похибку, тож точніших результатів довелося чекати до кінці 90-х років 20 століття.

Сила притягання між двома паралельними металевими пластинами на одиницю площі у вакуумі за розрахунками дорівнює

$$\frac{F_c}{S} = -\frac{d}{da} \frac{\langle E \rangle}{S} = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 a^4},$$

де F_c — сила Казимира, \hbar — зведена стала Планка, c — швидкість світла, a — віддаль між пластинами, E — енергія нульових коливань електромагнітного поля, S — площа пластин.

37. Сферичні хвилі. Потенціали спізнення і випередження.

Сферичною називається хвиля, потенціал якої та інші фізичні характеристики залежать лише від часу та відстані до точки спостереження. Запишемо хвильове рівняння:

$$u = u(r, t)$$

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad u = u(r, t) - \text{сферична хвиля}$$

Виходячи з рівняння, запишемо

$$\text{Шукаємо розв'язок у вигляді } u(r, t) = \frac{v(r, t)}{r}.$$

Підставивши у рівняння одержимо:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v(r, t)}{r} \right) \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{v(r, t)}{r} \right) = 0.$$

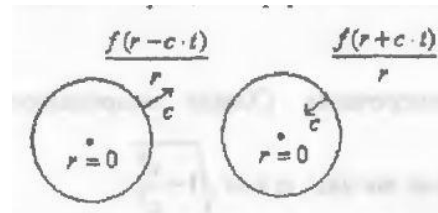
Провівши диференціювання та спростивши вираз, одержимо:

$$\frac{v_{rr}}{r} - \frac{1}{c^2} \frac{v_{tt}}{r} = 0;$$

$$\text{Домноживши ліву і праву частини рівняння на } r \text{ отримаємо: } v_{rr} - \frac{1}{c^2} v_{tt} = 0.$$

Це рівняння має такий же вигляд як і рівняння для плоскої хвилі, а тому скориставшись відомим виразом та вищевведеною заміною для хвильової функції, знайдемо повний вираз для сферичної хвилі:

$$u(r, t) = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{f(r + ct)}{r}$$



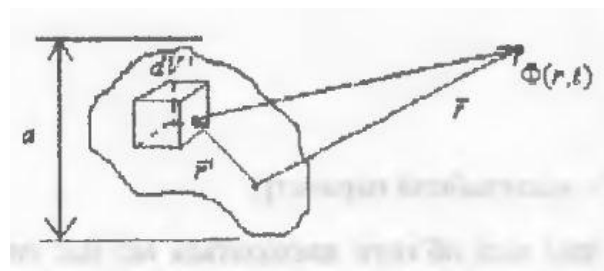
$$\text{Загальний вираз матимемо: } \vec{A} = \frac{\vec{A}_0}{r} e^{ikr - i\omega t}.$$

$$\text{Запишемо рівняння Д'Аламбера: } \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \text{ Як вище було доведено,}$$

функція, що задовольняє цьому рівнянню має вигляд:

$$\Phi(r, t) = \frac{u(r - ct)}{r} = \frac{f(t - \frac{r}{c})}{r}.$$

Верхній вираз записаний для початку координат, якщо ж точка знаходиться не в початку координат, то слід вищезаписану формулу переписати таким чином:



$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{f(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

В дискретному випадку, коли потенціал створюється точковими зарядами, отримаємо

$$\Phi(\vec{r}, t) = \sum_k \frac{f(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

У випадку неперервного розподілу зарядів, отримаємо такий вигляд:

$$\vec{n} \vec{E} = 0 \quad \vec{n} \times \vec{E} = \vec{B}$$

$$\vec{n} \vec{B} = 0 \quad \vec{n} \times \vec{B} = \vec{E}$$

Звідси видно, що електричне та магнітне поля ортогональні до напрямку поширення хвилі. Тому електромагнітні хвилі називають поперечними. Потік енергії плоскої хвилі (вектор Умова-Пойтінга) визначається так:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}] = c\omega \vec{n} \quad \omega = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi},$$

де ω - густина енергії поля. Тепер отримаємо зв'язок між магнітним полем та векторним потенціалом. Для цього слід помітити, що виходячи із вище приведених

правил координатне диференціювання може бути замінене на часове: $\vec{\nabla} = \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t}$.

Тоді $\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = -\frac{1}{c} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\frac{[\vec{n} \times \dot{\vec{A}}]}{c} = \frac{[\dot{\vec{A}} \times \vec{n}]}{c}$. ($\dot{\vec{A}}$ крапка повинна бути над вектором).

38. Потенціали Льєнара–Віхерта. Вираз для потенціалів.

§6.3.1. Потенціали Льєнара — Віхерта

Нехай $\mathbf{r}_0(t)$ описує траєкторію частинки, вектор $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0$ — її швидкість. Позначивши повний заряд частинки q , запишемо густини заряду і струму як функції координат і часу у вигляді

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, t) &= q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)).\end{aligned}\quad (6.17)$$

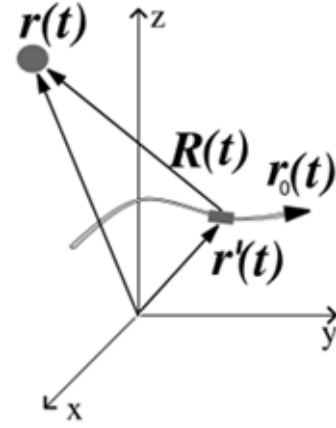


Рис. 6.1.

Запишемо загальний розв'язок рівнянь д'Аламбера у вигляді потенціалів спізнення (6.14)

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \\ t^*(\mathbf{r}') &= t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}.\end{aligned}\quad (6.18)$$

Використовуючи властивість δ -функцій (1.11), перепишемо (6.18) у вигляді

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, t) &= \int_V dV' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\rho(\mathbf{r}', t^*)\delta(\tau - t^*(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= q \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V dV' \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)\delta(\tau - t^*(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= q \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\delta(\tau - t^*(\mathbf{r}_0))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = q \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\delta\left(\tau - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.\end{aligned}\quad (6.19)$$

Інтегрування в останній формулі виконується з використанням властивостей δ -функцій (1.16), яку перепишемо у вигляді

$$\delta(F(\tau)) = \sum_{t': F(t')=0} \frac{\delta(\tau - t')}{|F'(t')|}. \quad (1.16')$$

У нашому випадку

$$F(\tau) = \tau - t + \frac{R}{c}, \quad \mathbf{R}(\tau) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau). \quad (6.20)$$

Нулі цієї функції визначають значення t' як розв'язків наступного рівняння:

$$R(t') = c(t - t'). \quad (6.21)$$

Обчислимо похідну $F'(t')$:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial \tau}$$

Диференціюючи ліву та праву частину тотожності $R^2 = r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 + r_0^2$, матимемо

$$2R \frac{\partial R}{\partial \tau} = -2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 + 2\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 = -2\mathbf{R} \cdot \mathbf{v},$$

звідки

$$\left. \frac{\partial R}{\partial \tau} \right|_{t'} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R}. \quad (6.22)$$

У результаті похідна $F'(t')$ набуває вигляду

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = 1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{cR},$$

і для потенціалу (6.19) маємо

$$\phi(\mathbf{r}, t) = q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{R} \cdot \frac{\delta(\tau - t')}{\left|1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{cR}\right|} = \frac{q}{R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}} \Big|_{t'}.$$

Цілком аналогічно обчислюється векторний потенціал.

Остаточно потенціали Льєнара — Віхерта запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{\left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)} \Big|_{t'}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{q\mathbf{v}}{c \left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)} \Big|_{t'}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Потенціали (6.23) зручно також переписати у вигляді

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{s}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mathbf{v}}{cs}, \quad (6.24)$$

де введено позначення

$$s = R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}. \quad (6.25)$$

Необхідно підкреслити, що зовнішня простота потенціалів (6.23) оманлива. Справа в тому, що всі величини в лівих частинах рівностей беруться в момент часу t , а в правих частинах тих самих рівностей — у момент t' , що визначається з рівняння (6.21). Для того, щоб записати потенціали у звичайному вигляді, необхідно функціональну залежність $t'(t)$ підставити в праві частини (6.23). Такий розрахунок технічно складно виконати навіть для досить простих випадків.

39. Точне значення електричного та магнітного полів точкового заряду, що рухається довільним чином.

Для обчислення полів точкового заряду за формулами (1):

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

слід диференціювати за точкою спостереження \mathbf{r} у момент часу t , однак вирази для

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{\left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)} \Big|_{t'},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mathbf{v}}{c \left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)} \Big|_{t'}.$$

потенціалів **Льєнара-Віхерта** чиним лише від t' .

залежать явним

У зв'язку з цим при диференціюванні за часовими та просторовими змінними у формулах (1) необхідно враховувати залежність t' від t (як похідну від складної функції). Обчислимо перш за все значення похідних $\partial t' / \partial t$ та $\text{grad } t'$. Для цього продиференціюємо рівність

$R(t') = c(t - t')$ по t :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t},$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{s}.$$

де $dR/dt' = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} / R$. Отже, можемо записати похідну у вигляді

Цілком аналогічно, обчислюючи градієнт від виразу $R(t') = c(t - t')$, матимемо

$$\text{grad } t' = -\frac{1}{c} \text{grad } R(t') = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial R}{\partial t'} \text{grad } t' + \frac{\mathbf{R}}{R} \right) =$$

$$= \frac{1}{c} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} \cdot \text{grad } t' \right).$$

$$\text{grad } t' = -\frac{\mathbf{R}}{cs}.$$

Остаточно

Таким чином, ми знайшли правила диференціювання у виразах (1):

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{s} \cdot \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \text{grad}_t = \text{grad}_{t'} - \frac{\mathbf{R}}{cs} \cdot \frac{\partial}{\partial t'}.$$

В останньому виразі за grad_t позначено градієнт у деякій точці простору в момент часу t .

Перейдемо тепер до обчислювання полів. Використовуючи отримані правила диференціювання, для градієнта скалярного потенціалу маємо

$$\text{grad } \phi = -\frac{q}{s^2} \text{grad}_{v'} s + \frac{q\mathbf{R}}{cs^3} \frac{\partial s}{\partial t'}.$$

Диференціювання явного виразу для s приводить до таких формул

$$\text{grad}_{v'} s = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad \frac{\partial s}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} - \frac{\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c} + \frac{v^2}{c}.$$

Враховуючи ці співвідношення, можемо записати вираз для градієнта ϕ у вигляді:

$$\text{grad } \phi = -\frac{q}{s^2} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) - \frac{q\mathbf{R}}{cs^3} \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} + \frac{\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c} - \frac{v^2}{c} \right).$$

Обчислимо також похідну $\partial A / \partial t$:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{qR}{cs} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{v}{s} \right) = \frac{qR}{cs^3} \left(s\dot{v} + v \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} + \frac{\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c} - \frac{v^2}{c} \right) \right)$$

Далі, користуючись виразом (1), після нескладних перетворень обчислюємо вираз для електричного поля:

$$\mathbf{E} = \frac{q(1 - v^2/c^2)}{s^3} \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) + \frac{q}{c^2 s^3} \left[\mathbf{R} \times \left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right] \quad (2)$$

При обчисленні (2) враховано очевидне співвідношення

$$\left[\mathbf{R} \times \left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right] = \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - R s \dot{\mathbf{v}}.$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R} [\mathbf{R} \times \mathbf{E}]$$

Відповідні перетворення приводять до

Ці вирази є точні значення полів, які створюються при русі однієї частинки у вакуумі, якщо її швидкість змінюється довільно. Простий аналіз цих виразів дозволить зробити три важливі висновки для нього випадку:

1. При рівномірному прямолінійному русі зарядженої частинки другий доданок у (2) дорівнює нулеві. Саме він обумовлює гальмівне випромінювання, тому дорівнюють нулеві поля і енергія випромінювання.

2. Хоча перший доданок (2) при $\mathbf{v}' = 0$ не зникає, однак внеску в поле випромінювання він не дає.

3. Для частинки, що рухається з позовжнім (змінюється величина швидкості) або поперечним (змінюється напрям швидкості) прискоренням, буде спостерігатись гальмівне випромінювання обумовлене другим доданком у (2).

40. див. 41

41. Електромагнітне поле заряду, що рухається рівномірно.

$$\mathbf{E} = \frac{q(1 - v^2/c^2)}{s^3} \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) + \frac{q}{c^2 s^3} \left[\mathbf{R} \times \left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right]. \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R} [\mathbf{R} \times \mathbf{E}].$$

Ці два рівняння описують поле заряду, що рухається довільним чином. Для того щоб відповісти на питання білету розберемося для початку, що собою представляють обидва доданки в першій формулі.

Перший доданок залежить лише від швидкості частинки і на великій відстані від системи змінюється як $1/R^2$ (це досить легко побачити в нерелятивістському наближенні $v \ll c$). Тобто, у хвильовій зоні напруженості електричного та магнітного полів пропорційні $1/R^2$. Це означає, що абсолютна величина вектора Умова-Пойнтінга буде пропорційна $1/R^4$. Але згідно з означенням абсолютна величина цього вектора дорівнює кількості енергії, яка щосекунди проходить через одиницю поверхні (потік енергії). Помноживши його на елемент поверхні $R^2 d\Omega$ та проінтегрувавши за повним тілесним кутом $\Omega = 4\pi$, одержимо кількість енергії, яка щосекунди проходить через сферу радіуса R . Узявши до уваги наведені оцінки для полів, неважко збагнути, що ця величина буде пропорційна до $1/R^2$. Тобто, чим більшого радіуса сферу ми візьмемо, тим меншим буде загальне значення енергії, яка через неї пройшла. Ця суперечить загальноприйнятому уявленню про випромінювання, тому необхідно зробити висновок, що **перший доданок у формулі (1), який представляє собою поле заряду при рівномірному і прямолінійному русі, внеску в поле випромінювання не дає.**

Більше того, якщо записати перший доданок у наближенні малих швидкостей руху, то в ньому неважко впізнати кулонівське поле частинки.

Для другого доданку (1) напруженості електричного та магнітного полів у хвильовій зоні змінюються як $1/R$, тому абсолютна величина вектора Умова-Пойнтінга пропорційна $1/R^2$. Після інтегрування за повним тілесним кутом одержимо значення енергії, яка щосекунди перетинає: поверхню радіуса R , пропорційне $1/R^2$. Тому для сфери довільного радіуса ця величина буде сталою: кількість енергії, яка щосекунди випромінюється джерелом, проходить через поверхню довільного радіуса R . Отже другий доданок відповідає за поле випромінювання.

Зроблені нами висновки стосуються випадку руху у вакуумі. Ситуація змінюється, якщо частинка рухається в суцільному середовищі. В цьому випадку частинка може випромінювати електромагнітні хвилі навіть, якщо її швидкість постійна. Отже остаточно відповідь на питання можна сформулювати так:

Заряджена частинка при рівномірному і прямолінійному русі у вакуумі не випромінює електромагнітні хвилі і її загальне поле описується тільки першим доданком виразу (1). Якщо ж частинка рухається рівномірно, але не прямолінійно (тобто з прискоренням), то її поле складається як з кулонівського поля (перший доданок) так і з поля випромінювання (другий доданок).

42. Випромінювання електромагнітних хвиль точковим зарядом. Хвильова зона.

На достатньо великих відстанях ми можемо розкласти поле по плоским хвилям, але для цього необхідно, щоб довжина хвилі випромінювання була значно меншою за відстань на яку поширюється хвиля. Цю область простору називають хвильовою зоною. Матвикладка наступного плану:

$$\vec{A} = \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad \text{rot} \vec{A} = \vec{H}$$

$$H_\omega = \text{rot} \int_{-\infty}^{\infty} \int_V \frac{\vec{j} e^{i\omega t'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dt = \text{rot} \int_{-\infty}^{\infty} \int_V \frac{\vec{j} e^{i\omega t} e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dt$$

Якщо $k|\vec{r} - \vec{r}'| \gg 1$, то при розкладі знаменника підінтегрального виразу по малому параметру $\frac{r'}{r}$ і послідуєчій дії ротора ми прийдемо до виразу для плоскої хвилі.

Спираючись на закон збереження енергії, можемо сказати, що у хвильовій зоні ($\lambda \ll R$) першим доданком в виразі для напруженості поля можна знехтувати.

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{c^2 R} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{v}}]}{(1 - \vec{\beta} \vec{n})^3} \quad \text{поле випромінювання}$$

$$dI = \frac{dI}{ds} ds = \frac{d^2 \varepsilon}{dt ds} R^2 d\Omega = |\vec{S}| R^2 d\Omega$$

$$\frac{dI}{d\Omega} = |S| R^2, \quad \vec{S} = \frac{4\pi}{c} [\vec{E} \times \vec{B}] = \frac{c E^2 \vec{n}}{4\pi}$$

$$\text{Тоді } \frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \frac{q}{c^2 R^2} \frac{(\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{v}}])^2}{(1 - \vec{\beta} \vec{n})^6} R^2 = \frac{q^2}{4\pi c^2} \frac{(\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{v}}])^2}{(1 - \vec{\beta} \vec{n})^6} \quad \text{вираз для}$$

діаграми направленості.

1. Для нерелятивістського випадку

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{4\pi c^3} \sin^2(\Theta)$$

2. Ультра релятивістська а $|v|$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{16 q^2 a^2 \gamma^{10}}{\pi c^3 (1 + (\theta \gamma)^2)^6} (\theta \gamma)^2$$

3. Ультра релятивістська а перпендикулярно v

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{4 q^2 a^2 \gamma^8}{\pi c^3 (1 + (\theta \gamma)^2)^4} \left(1 - \frac{4(\theta \gamma)^2 \cos^2(\varphi)}{(1 + (\theta \gamma)^2)^2} \right)$$

43. Випромінювання точкового заряду, що рухається прямолінійно. Формула Лармора.

Якщо заряд, що рухається прискорено, спостерігати в системі відліку, в якій його швидкість можна вважати малою, порівняно зі швидкістю світла, то в цій системі відліку доданок поля, що залежить від прискорення набуває вигляду:

$$\vec{E}_a = \frac{e}{c} \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{R} \right]_{\text{запізн}}, \text{ де } \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}.$$

Миттєвий потік енергії визначається вектором Умова-Пойтінга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_a|^2 \vec{n}.$$

Звідси потужність, що випромінюється в одиницю тілесного кута:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} |R\vec{E}_a|^2 = \frac{e^2}{4\pi c} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})|^2.$$

Або, якщо позначити кут між прискоренням та напрямком як θ :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 (\sin \theta)^2,$$

отже маємо кутову залежність потужності на тілесний кут, що і характеризує діаграму направленості випромінювання (в нерелятивістському випадку). З цієї ж формули бачимо, що випромінювання поляризовано в площині векторів $\dot{\vec{v}}$ та \vec{n} .

Повна потужність випромінювання визначається шляхом інтегрування залежності по всім кутам:

$P = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3}$ - це і є формула Лармора для нерелятивістського заряду, що рухається з прискоренням.

44. Запізнювальні випереджаючі потенціали.

Рівняння д'Аламбера або хвильові рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned}\square\phi &= -4\pi\rho, \\ \square\mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\end{aligned}$$

Розв'язками цих рівнянь є паступні співвідношення:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (6.14a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (6.14b)$$

Розв'язки електродинамічної задачі у вигляді (6.14) мають назву *потенціалів спізнення*. Вигляд часового аргумента в цих виразах свідчить про те, що поле в точці \mathbf{r} у момент часу t визначається станом джерел у попередній момент часу:

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}. \quad (6.15)$$

Запізнення в цих формулах відповідає принципу причинності: рух зарядів (причина) передуює появі поля (наслідок) на час $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$, необхідний для передачі електромагнітної хвилі з \mathbf{r}' у \mathbf{r} .

Цікаво, що рівнянням (2.7) та (2.9) будуть задовольняти також вирази (6.14a) та (6.14b), якщо замість знака мінус (спізнення) поставити знак плюс (випередження). Відповідно до цього потенціали мають назву *потенціалів випередження*:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.\end{aligned} \quad (6.16)$$

Відмітимо, що надати фізичний зміст потенціалам випередження не вдається, оскільки в цьому випадку не виконується принцип причинності.

45. Циклотронне та синхротронне випромінювання точкового заряду.

За модель циклотронного і синхротронного випромінювання приймаємо рух частинки в постійному магнітному полі. Радіус орбіти \vec{r} і циклічна частота ω_0 виражаться через напруженість поля \vec{H} і швидкість частинки \vec{v} формулами:

$$r = \frac{mcv}{eH\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{eH}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Повна інтенсивність випромінювання по всіх напрямках визначається за формулою:

$$I = \frac{2e^4 H^2 v^2}{3m^2 c^5 (1-v^2/c^2)}, \text{ впливає із загальної теорії випромінювання зарядженої частинки.}$$

Ми ставимо перед собою мету знайти кутовий розподіл інтенсивності, при цьому нас цікавить інтенсивність усереднена за періодом. Виберемо систему координат таким чином, щоб площина обертання співпадала з площиною ОХУ. \vec{k} -вектор – напрямок реєстрації випромінювання. Магнітне поле спрямоване в напрямку, протилежному до напрямку осі ОZ. Прискорення \vec{a} виражаємо через поле \vec{H} і швидкість \vec{v} згідно з

$$\text{рівняннями руху: } \vec{a} = \frac{e}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}[\vec{v} \times \vec{H}]$$

Ми знаємо формулу для кутового розподілу інтенсивності випромінювання, яка витікає із загальної теорії випромінювання рухомого заряду:

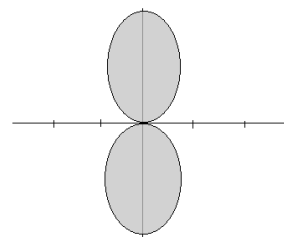
$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{2(\vec{a}\vec{k})(\vec{v}\vec{a})}{c\left(1-\frac{\vec{v}\vec{k}}{c}\right)^5} + \frac{\vec{a}^2}{\left(1-\frac{\vec{v}\vec{k}}{c}\right)^4} - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\vec{k}\vec{a})}{\left(1-\frac{\vec{v}\vec{k}}{c}\right)^6} \right\} d\Omega$$

Підставивши \vec{a} та виконавши усереднення за періодом (інтегруємо по φ від 0 до 2π і ділимо на $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$) отримаємо розподіл інтенсивності по тілесних кутах, адаптований до

$$\text{нашої задачі: } dI = d\Omega \frac{e^4 H^2 v^2}{8\pi^2 m^2 c^5} \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 \int_0^{2\pi} \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta + \left(\frac{v}{c} - \cos \theta \cos \varphi\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c} \cos \theta \cos \varphi\right)^5} d\varphi$$

Після інтегрування по φ отримаємо:

$$dI = d\Omega \frac{e^4 H^2 v^2}{8\pi m^2 c^5} \frac{\left[2 - \cos^2 \theta - \frac{v^2}{4c^2} \left(1 + \frac{3v^2}{c^2}\right) \cos^4 \theta\right]}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta\right)^{7/2}}$$



Діаграма напрямленості випромінювання матиме вигляд: (зверху)

46. Потенціали електромагнітного поля в хвильовій зоні.

$$\nabla \varphi = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho(\vec{r}, t)$$

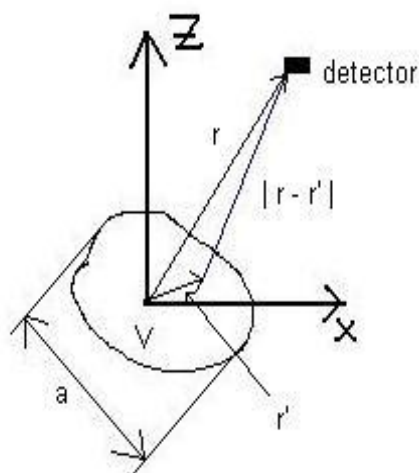
$$\nabla \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Роз'язок рівнянь у вигляді потенціалів запізнення:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_m q_m \delta(\vec{r} - \vec{r}_m(t))$$

Усереднимо по часу:



$$\varphi(\vec{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \varphi_0$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{j(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \vec{A}_0$$

Використаємо граничні умови (нехтуємо A_0 і φ_0)

У хвильовій зоні $\phi(r) \sim 1/|r|$

Маємо систему зарядів з густиною $\rho(r, t)$ і струмом $j(r, t)$, а- характерний розмір системи. Для хвилі що поширюється з

$$\text{точки } r, \quad \varphi(\vec{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r',$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{j(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Вважатимемо що детектор знаходиться далеко: $|r| \gg a$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\vec{r}^2 - 2(\vec{r} * \vec{r}') + (\vec{r}')^2} = \quad (\text{Так як } (\vec{r}')^2 \text{ мале в порівнянні с іншими}$$

$$\text{доданками, то його не враховуємо)} = |\vec{r}| \sqrt{1 - 2(\vec{r}' * \vec{n})} \cong$$

$$(a/|r| \ll 1, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{a}|} \text{ - одиничний вектор в напрямку детектора, } \sqrt{1-x} \cong 1 - 1/2 * x)$$

$$\cong |r|(1 - \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{|\vec{r}|})$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx |r| - (\vec{r}'\vec{n})$$

$$\varphi(\vec{r}, t) \cong \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - |r|/c + (\vec{r}'\vec{n})/c)}{|r| - (\vec{r}'\vec{n})} d^3r'$$

(тут треба знехтувати добутком $(r'n)$ в знаменнику тому що r' дуже мале в порівнянні з r).

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |r|/c + (\vec{r}'\vec{n})/c)}{|r| - (\vec{r}'\vec{n})} d^3r'$$

(Тут також треба знехтувати $(r'n)$ в знаменнику. Зауважте, що таким же самим добутком $(r'n)$ в чисельнику знехтувати не можна!!).

$$\exp[\psi] = \exp\left[-|r|/c + (\vec{r}'\vec{n})/c\right]; \quad \omega = 2\pi c/\lambda.$$

$$\exp[\Delta\psi] = \exp\left[-i \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{(\vec{r}'\vec{k})}{c}\right] \sim \quad (\text{так як добуток } (r'k) \text{ пропорційний до } a,$$

тому) $\sim \exp[2\pi i a/\lambda]$

$$\varphi(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{|r|} \int_V \rho(\vec{r}', t - \frac{|r|}{c} + \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{c}) d^3\vec{r}',$$

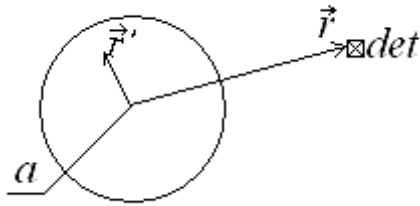
$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{c|r|} \int_V \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|r|}{c} + \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{c}\right) d^3\vec{r}',$$

47. Вектор Умова-Пойтінга в електро-дипольному наближенні.

Загальний вигляд вектора Умова-Пойтінга: $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \langle [\vec{E} \times \vec{H}] \rangle$.

Для векторного потенціалу: $\vec{S} = \frac{\vec{n}}{4\pi c} \left\{ \langle \dot{\vec{A}} \rangle^2 - \langle (\vec{n} \dot{\vec{A}})^2 \rangle \right\}$

Остання формула справедлива у будь-якому наближенні, треба лише правильно вибрати векторний потенціал. Він є розв'язком хвильового рівняння



$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t).$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' + A_0(\vec{r}, t)$$

Будемо працювати у хвильовій зоні. В ній векторний потенціал має поводити себе як $|A| \sim \frac{1}{r}$. \vec{A}_0 нехтуємо. Також мають місце наступні співвідношення:

$$|\vec{r}'| \sim a \ll |\vec{r}|, |\vec{r} - \vec{r}'| \approx |\vec{r}| - |\vec{n} \cdot \vec{r}'|, \vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

$$\vec{j} \sim e^{-i\omega t} \sim \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right], \text{ де } \Phi(t, \vec{r}, \vec{r}') = \omega\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) - \text{фаза.}$$

$$\Delta\Phi \sim \frac{\omega}{c} a \sim \frac{2\pi a}{\lambda}.$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r})^2 - 2(\vec{r} \cdot \vec{r}') + (\vec{r}')^2} = |\vec{r}| \sqrt{1 - 2\frac{(\vec{n} \cdot \vec{r}')}{|\vec{r}|} + \left(\frac{|\vec{r}'|}{|\vec{r}|}\right)^2} \approx |\vec{r}| \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|}\right)$$

Скористаємось отриманими наближеннями виразами та знехтуємо в знаменнику \vec{r}' :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \cong \frac{1}{c|\vec{r}|} \int_V \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c}(1 - \beta)\right) d^3 r', \text{ де } \beta = \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{n})}{|\vec{r}|} - \text{малий параметр.}$$

Розкладемо по малому параметру вектор \vec{j} та запишемо результат:

$$\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c}(1 - \beta)\right) = \vec{j}_0 + \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial \beta}\right) \beta + \dots$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \cong \frac{\vec{p}\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)}{c|\vec{r}|} + \frac{1}{c|\vec{r}|} \left[\vec{M}\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) \times \vec{n} \right] + \frac{1}{2c^2|\vec{r}|} \left[\ddot{\vec{Q}}\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) \times \vec{n} \right]$$

Доданки означають дипольне, магнітодипольне, квадрупольне наближення. Для електродипольного наближення залишиться лише перший доданок. Підставивши цей вираз у формулу для вектора Умова-Пойтінга отримаємо її у електродипольному наближенні.

$$\vec{S} = \frac{\vec{n}}{4\pi c} \left\{ \left\langle \dot{\vec{A}} \right\rangle^2 - \left\langle \left(\vec{n} \dot{\vec{A}} \right)^2 \right\rangle \right\}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \cong \frac{\vec{p}\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)}{c|\vec{r}|}$$

48. Електродипольне випромінювання.

Якщо ми розглядаємо випромінювання за умов $a \ll \lambda \ll r$ (a – характерний розмір системи, λ – довжина хвилі, r – вектор з початку координат в точку спостереження), це означає що ми розглядаємо його **у дипольному наближенні**. Ці умови беруться з того, що заряди мають бути нерелятивістськими, тобто $u \approx a/T \ll c$ і обмежена хвильовою зоною $\lambda \ll r$. Запишемо головні формули :

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{|\vec{r}|} \int_V \rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) d^3r' \quad (3). \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c|\vec{r}|} \int_V \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) d^3r' \quad (4).$$

$$\vec{p} = \sum_m q_m \vec{r}'_m \left(t - \frac{|\vec{r}|}{c} \right) \quad (5). \quad \text{Где } \vec{p} \text{ - дипольний момент системи (далі писатиму як}$$

$$\text{Обуховський давав через } \vec{d}!!!). \quad \vec{p}\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c} \right) = \sum_m q_m \vec{v}_m \left(t - \frac{|\vec{r}|}{c} \right) \quad (6). \quad \text{Где } v \text{ - швидкість}$$

$$m\text{-ой частинки. Густина струму} \quad \int_V \vec{j}(\vec{r}', t') d^3r' = \sum_m q_m v_m \delta(\vec{r}' - \vec{r}'_m(t')) d^3r' \quad (7).$$

$$\int_V \vec{j}(\vec{r}', t') d^3r' = \sum_{m \in V} q_m \vec{v}'_m \quad (8).$$

$$\text{Векторний потенціал має вигляд} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{d}(t - |\vec{r}|/c)}{c|\vec{r}|} \quad (9).$$

Озн. Дипольним називається таке наближення, при якому всі величини виражається через одну величину – а саме другу похідну дипольного моменту \vec{d} .

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{[\ddot{\vec{d}}(t - \frac{|\vec{r}|}{c}) \times \vec{n}]}{c^2 \vec{r}} \quad (10). \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n}(\ddot{\vec{d}}) - \ddot{\vec{d}}}{c^2 \vec{r}} \quad (11). \quad \vec{E} = [\vec{H} \times \vec{n}] \quad (12).$$

Обчислимо кутовий розподіл інтенсивності випромінювання. Підставляючи (12) в

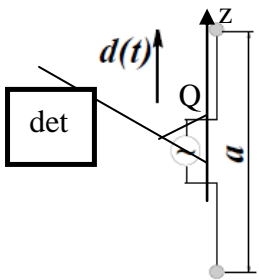
$$\text{формулу для потоку енергії в елемент тілесного кута } d\Omega \quad \frac{dI}{d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi} \vec{B}^2, \quad \text{отримаємо}$$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3} . \text{ Після інтегрування за тілесним кутом отримаємо повну інтенсивність}$$

дипольного випромінювання
$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 .$$

Треба звернути увагу на те, що для замкненої системи однакових частинок дипольне випромінювання **відсутнє**. Адже у цьому разі прискорення повного дипольного

моменту
$$\ddot{\mathbf{d}}_{\Sigma} = \sum q\ddot{\mathbf{r}} = \frac{q}{m} \sum m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{q}{m} \mathbf{F}_{\Sigma} = 0$$
 (тут всюди вектори)



Простішим випромінювачем є **вібратор Герца** – це такий антена з потовщеннями на кінцях та і розривом посередині для підключення джерела змінного струму. (тут не дуже видно, але там де показан кружечок зі змінним струмом розрив, тобто як антена, вона ніби з двох боків). Дипольний момент вібратора $\mathbf{d}(t)=d_0\cos(i\omega t)$. Для того, щоб він випромінював дипольно, необхідно щоб його розміри були менші за довжину випромінюваної хвилі $a \ll \lambda = 2\pi c/\omega$. Кут між

вібратором і напрямом на спостерігача θ , запишемо кутовий розподіл і повну

інтенсивність випромінювання у вигляді
$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{d_0^2 \omega^4}{4\pi c^3} \cos^2 \omega t \sin^2 \theta ,$$

$$I = \frac{2d_0^2 \omega^4}{3c^3} \cos^2 \omega t$$
 . Усереднивши ці залежності за період коливань вібратора маємо

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle = \frac{d_0^2 \omega^4}{8\pi c^3} \sin^2 \theta , \quad \langle I \rangle = \frac{d_0^2 \omega^4}{3c^3} .$$
 Ці формули описують діаграму направленості розглянутої штирової антени, тобто кутовий розподіл інтенсивності випромінювання

$$\frac{\langle dI/d\Omega \rangle}{\langle I \rangle} = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta$$

49. Скалярний потенціал в дипольному наближенні.

\vec{r}''

- трохи інша функція, щоб не сплутати з r' і ρ .

$$\varphi(\vec{r}, t) \cong \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|r|}{c} + \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{c}\right)}{|r|} d^3r' \quad (1).$$

Запишемо цей потенціал в найближчому ненульовому наближенні:

$$Q = \int \rho(\vec{r}, t') d^3r = 0 \quad (2).$$

$t' = t - |r|/c$. Розглядаємо дипольне наближення:

$$\begin{aligned} \rho\left(\vec{r}'', t - \frac{|r|}{c}(1 - \alpha)\right) &= \left(\alpha = \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{|r|} \ll 1, \alpha=0\right) \\ &= \rho\left(\vec{r}'', t - \frac{|r|}{c}\right) + \alpha \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = \rho\left(\vec{r}'', t - \frac{|r|}{c}\right) + \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{|r|} \frac{\partial \rho(\vec{r}'', t')}{\partial t} \frac{|r|}{c} \quad (3). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \frac{|r|}{c} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{|r|}{c}, \quad \tau = t - \frac{|r|}{c}(1 - \alpha), \quad \vec{r}'' \rightarrow \vec{r}'.$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{|r|} \int_V \rho\left(\vec{r}', t - \frac{|r|}{c}\right) d^3r' + \frac{1}{|r|c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{n} \int \vec{r}' \rho\left(\vec{r}', t - \frac{|r|}{c}\right) d^3r' \right) \quad (4).$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{Q(t)}{|r|} + \left(\vec{n} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\vec{p}(t')}{|r|c} \right\} \right) = \frac{Q(t)}{|r|} + (\vec{n} \vec{A}(\vec{r}, t)) \quad (5). \text{ – перше наближення.}$$

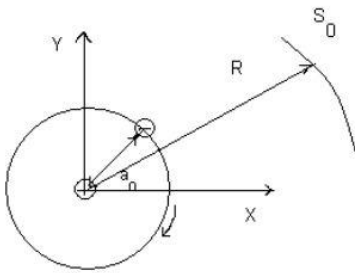
При виводі формули (5) ми скористались тим що $\left[\rho(\vec{r}', t) = \sum_n q_n \sum_n(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}'_n(t)) \right]$ та

$$\vec{A} = \frac{1}{|r|c} \int \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|r|}{c} + \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{c}\right) d^3r' \quad . \text{ В нульовому наближенні } \vec{A} = \frac{\dot{\vec{p}}}{|r|c}.$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{Q(t)}{|r|} + (\vec{n} \vec{A}(\vec{r}, t)) \quad . \text{ Для електронейтральних систем } \varphi = (\vec{n} \vec{A})$$

50. Опір випромінювання елементарного вібратора.

7. Сила променевого тертя.



Розглянемо систему двох зарядів (атомарна модель водню):

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_x r_x(t) + \vec{e}_y r_y(t)$$

$$r_x(t) = a_0 \cos \omega t$$

$$r_y(t) = -a_0 \sin \omega t$$

Вважаємо, що в моделі $a_0 = \text{const}$

Користуючись дипольним наближенням можемо записати:

$$\vec{S}(\vec{R}, t) = \frac{\vec{n}}{4\pi c^3 |\vec{R}|^2} \left\{ \langle (\ddot{\vec{p}})^2 \rangle - \langle (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}})^2 \rangle \right\}_{t-\frac{R}{c}}$$

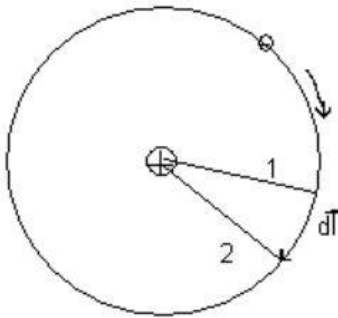
$P = \int_{S_0} \vec{S} d\vec{\sigma}$, де \vec{S} – вектор Умова-Пойтинга, а $d\vec{\sigma}$ – елемент поверхні, що значно більша за

характерні розміри системи.

$$P_x = \frac{2}{3} \frac{\langle (\ddot{p}_x)^2 \rangle}{c^3}$$

$$P = P_x + P_y + P_z \sim \langle (\ddot{p}_x)^2 \rangle + \langle (\ddot{p}_y)^2 \rangle + \langle (\ddot{p}_z)^2 \rangle = \langle (\ddot{\vec{p}})^2 \rangle$$

$$\text{Остаточно: } P(t) = \frac{2}{3} \frac{\langle (\ddot{\vec{p}})^2 \rangle}{c^3}$$



$$dA = \vec{f} d\vec{l}$$

$$\frac{dA}{dt} = \vec{f} \frac{d\vec{l}}{dt}$$

$$P_A = (\vec{f} \cdot \vec{v}) = (\vec{f} \cdot \dot{\vec{r}})$$

$$\langle P_A \rangle = -P$$

$$\ddot{\vec{p}} = -e_0 \ddot{\vec{r}}$$

$$\langle (\vec{f} \cdot \dot{\vec{r}}) \rangle = -\frac{2e_0^2 \langle (\ddot{\vec{r}})^2 \rangle}{3c^3}$$

Виразимо $\ddot{\vec{r}}$, застосовуючи наступну формулу:

$$\frac{d}{dt}(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = (\dddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + (\ddot{\vec{r}})^2$$

$$\dot{\vec{r}} = a_0 \omega (-\vec{e}_x \sin \omega t - \vec{e}_y \cos \omega t)$$

$$\ddot{\vec{r}} = a_0 \omega^2 (-\vec{e}_x \cos \omega t + \vec{e}_y \sin \omega t)$$

$$\dddot{\vec{r}} = a_0 \omega^3 (\vec{e}_x \sin \omega t + \vec{e}_y \cos \omega t)$$

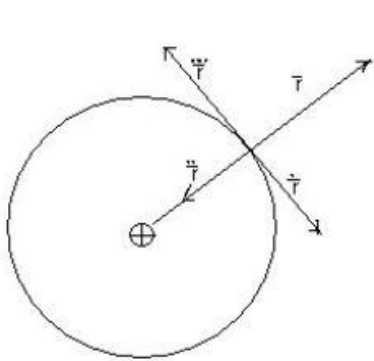
Звідси $\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r}$ $\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \cong 0$

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \dot{\vec{r}}$$

$$(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \approx -(\ddot{\vec{r}})^2$$

$$\left\langle \left\{ \vec{f} \cdot \dot{\vec{r}} - \frac{2e_0^2}{3c^3} (\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \right\} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \left\{ \left(\vec{f} - \frac{2e_0^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} \right) \cdot \dot{\vec{r}} \right\} \right\rangle = 0$$



$$\langle (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) \rangle = 0, \text{ де } \vec{F} = \vec{f} - \frac{2e_0^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}$$

Скалярний добуток $(\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}})$ має один знак, тому $(\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) = 0$

Звідси слідує, що або $\vec{F} = 0$ або $\vec{F} \perp \dot{\vec{r}}$

Отже:

$$\vec{f} = \frac{2e_0^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} + \vec{f}_\perp \text{ де } \vec{f}_\perp \text{ -перпендикулярна до } \dot{\vec{r}}$$

\vec{f}_\perp має смисл кулонівської сили.

Отже вираз для сили променевого тертя:

$$\vec{f}_{\text{пр.тертя}} = \frac{2e_0^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}$$

Маємо елементарний вібратор довжиною L . $|r| \gg L$, $\lambda \gg L$ (1) Так як розглядаємо в хвильовій зоні, то можемо обмежитись дипольним наближенням.

$$\vec{p}(t') = \vec{e}_z p'_0 \cos(\omega t') \quad (2). \quad \vec{p}(t') = \vec{e}_z p_0 e^{-i\omega t'} \quad . \quad t' = t - |r|/c \quad (3). \quad \ddot{\vec{p}} = -\omega^2 \vec{p}$$

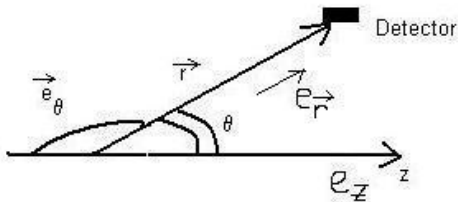
$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{e}_\alpha H_\alpha^0 e^{-i\omega t'} \quad (5). \quad H_\alpha^0 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{p_0}{|r|} \sin\theta \quad (6).$$

$$[\vec{A} \times \vec{n}] \sim [\vec{e}_z \times \vec{e}_r] = \vec{e}_\alpha \sin\theta \quad (7). \quad \vec{E} = \vec{e}_\theta E_\theta^0 e^{-i\omega t'} \quad (8). \quad E_\theta^0 = H_\alpha^0 \quad (9).$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \left\langle [\vec{E} \times \vec{H}] \right\rangle \quad (10). \quad (\text{Для тех кто не к курсе – } S - \text{ вектор Умова-Пойнтинга.})$$

$$\vec{S} = \vec{e}_z S_0 \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{|r|}{c}\right)\right) \quad (11),$$

$$S_0 = \sin^2 \theta \frac{c p_0^2}{4\pi |r|^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 .$$



$$\langle \vec{S} \rangle = \vec{e}_z S_0 \langle \cos^2 \omega t' \rangle \quad , \quad \langle \cos^2 \omega t' \rangle = 1/2 \quad (12).$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \vec{e}_r \frac{c}{8\pi} \frac{p_0^2}{|r|^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \sin^2 \theta$$

51. Випромінювання диполя, що рівномірно обертається.

Умова дипольного випромінювання: $a \ll \lambda$. Тобто розміри системи повинні бути малі в порівнянні з довжиною хвилі, що випромінює система. Цю умову можна написати і в іншому вигляді, враховуючи, що $T \sim a/v$, отже $\lambda \sim ca/v$, якщо v – це порядок величини швидкості заряду. З того, що $a \ll \lambda$, маємо $v \ll c$. Тобто швидкості зарядів повинні бути малі в порівнянні зі швидкістю світла. Для дипольного випромінювання характерно те, що випромінювання визначається другою похідною від дипольного моменту системи. Оберемо площину xy в якості площини обертання. Тоді:

$$d_x = d_0 \cos \Omega t, \quad d_y = d_0 \sin \Omega t.$$

Так як ці функції монохроматичні, то випромінювання таке монохроматичне з частотою $\omega = \Omega$. Запишемо формулу кутового розподілу випромінювання:

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} \left[\ddot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n} \right]^2 d\Omega = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta d\Omega$$

Ω – це тілесний кут, θ – кут між векторами \mathbf{d} і \mathbf{n} . Підставивши в цю формулу дипольний момент

$$\mathbf{d} = \sum e \mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m \mathbf{r} = \text{const} \sum m \mathbf{r}, \text{отримаємо:}$$

$$dI = \frac{d_0^2 \Omega^4}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega_{\text{тел}},$$

де Ω – тут тілесний кут, θ – кут між напрямками \mathbf{n} і віссю z . Отже, випромінювання дорівнює:

$$I = \frac{2d_0^2 \Omega^4}{3c^3}$$

52. Магнетодипольне випромінювання. Потенціали цього поля.

Розглянемо вищі члени розкладу ел.маг. поля по степенях l/λ ,

де l -розміри випромінювача, λ –довжина ел.маг. хвилі

Особливе значення ці члени набувають у тому випадку, коли перший член формули

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) dV' + \\ + \frac{\mu_0}{4\pi c r} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} \mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) dV' + \dots \quad (1)$$

Дорівнює нулю і відповідного йому дипольного випромінювання немає. Другий член розкладу формули (1) після деяких перетворень перепишемо так

$$\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} \mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) dV' = \\ = \mathbf{A}_{\text{магн}} + \mathbf{A}_{\text{кв}} \quad (8.70)$$

або

$$\mathbf{A}_{\text{магн}} = \frac{\mu_0}{8\pi c r} \frac{\partial}{\partial t} \int [(\mathbf{r}', \mathbf{J}), \mathbf{n}] dV'; \quad (8.71)$$

$$\mathbf{A}_{\text{кв}} = \frac{\mu_0}{8\pi c r} \frac{\partial}{\partial t} \int [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} \mathbf{J} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \mathbf{r}'] dV'. \quad (8.72)$$

Зважаючи на визначення магнітного моменту сис-ми

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r}', \mathbf{J}(\mathbf{r}')] dV'$$

формулу (8.71) можна переписати у вигляді

$$\mathbf{A}_{\text{магн}} = \frac{\mu_0}{4\pi c r} [\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}]. \quad (8.73)$$

Отже, векторний потенціал $\mathbf{A}_{\text{магн}}$ створюється магнітним диполем. Тому відповідне йому випромінювання називається **магнітним дипольним**. Користуючись

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{n}]; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 c} [\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{n}].$$

співвідношенням

та

$$\mathbf{E} = [\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{A}}) - \dot{\mathbf{A}}] = [[\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{n}], \mathbf{n}],$$

Знайдемо напруженість магнітного і електричного полів, створених магнітними моментами

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{магн}} &= \frac{1}{4\pi c^2 r} [[\ddot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}], \mathbf{n}]; \\ \mathbf{E}_{\text{магн}} &= \frac{1}{4\pi c^2 \epsilon_0 r} [\mathbf{n}, \ddot{\mathbf{m}}]. \end{aligned} \right\} \quad (8.74)$$

$$(8.75)$$

Ці формули переходять у вираз для ел.маг. поля диполя

$$H_{\text{дип}} = \frac{1}{4\pi cr} [\dot{\vec{p}}, \vec{n}];$$

$$E_{\text{дип}} = \frac{1}{4\pi c^2 \epsilon_0 r} [[\dot{\vec{p}}, \vec{n}], \vec{n}].$$

якщо в останніх покласти

$$- \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E \text{ замість } H, \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H \text{ замість } E \text{ і } \frac{m}{c}$$

замість ρ . Тому, наприклад, для диполя, напрямленого вздовж полярної осі, електричне і магнітне поля напрямлені відповідно вздовж паралелі і меридіана, які проходять через точку спостереження (див. рис. 8.2). Енергію, випромінєну магнітним моментом, обчислюють так само, як і енергію, випромінєну електричним полем. Для повної енергії, випромінєної на одиницю часу магнітним моментом, можна дістати такий вираз:

$$I_{\text{магн}} = \frac{\ddot{m}^2}{6\pi c^3 \epsilon_0}. \quad (8.76)$$

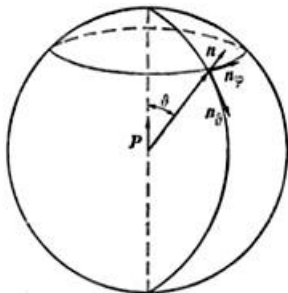


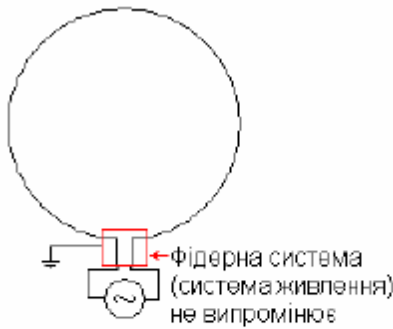
Рис. 8.2

комент до малюнка:

Розглянемо диполь, величина якого залежить від часу, напрям залишається незмінним. У цьому разі компоненти векторів напруженості електричного і магнітного полів зручно записувати в сферичній системі координат, початок якої збігається з положенням диполя, з полярною віссю, напрямленою вздовж ρ . Нехай \vec{n} , \vec{n}_ϕ і \vec{n}_θ одиничні вектори, напрямлені відповідно вздовж радіуса-вектора, паралелі і меридіана, які проходять через точку спостереження

Приклад магнітнодипольного випром.: випромінювання колового струму: див. 53

53. Напруженості полів для магнето-дипольного випромінювання.



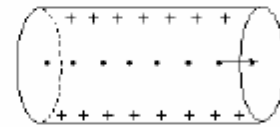
З теоретичної точки зору це коло зі струмом, амплітудою I_0 , частотою ω , та радіусом R_0 .

Наша задача знайти потужність випромінювання такої системи, вважаючи, що $R_0 \ll \lambda$.

У нас є фактично 3 типи випромінювання. Якщо є дипольне випромінювання, то воно саме сильне, атже є розкладом поля в першому наближенні, але в даному випадку $\vec{p} = 0$, бо в нас симетричне коло.

Квадрупольний момент такої системи також не враховуємо.

Середній заряд в статичному випадку 0. При наявності струму взагалі-то не 0, але ефект малий. Через хаотичну орієнтацію, усереднивши формулу для квадрупольного моменту, бачимо, що можемо його невраховувати.



Залишається тільки магнітодипольне випромінювання:

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}', t')] dV$$

Щоб якось визначити \vec{j} , треба ввести певну модель, в рамках якої ми будемо працювати.

Виберемо дrottину тонкою.

$$\vec{j}(\vec{r}', t') = \vec{I}(\vec{r}', t') \delta(r' - R_0) \delta(z')$$

Добуток δ -функцій описує власне кільце. $\delta(z')$ – тільки в площині $z' = 0$ буде щось відмінне від нуля. $\delta(r' - R_0)$ – тільки на відстані R_0 (власне в дrottині) буде струм.

Полярна система координат: $\vec{I} = \vec{e}_\alpha I_0 e^{-i\alpha t'}$

Елемент об'єму $dV' = R' dR' d\alpha dz'$

Підставляючи все це в вираз для магніто-дипольного моменту і одразу беручи інтеграли по δ -функціям будемо мати:

$$\vec{M} = \frac{I_0 e^{-i\alpha t'}}{2c} \int_0^{2\pi} d\alpha [\vec{R}_0 \times \vec{e}_\alpha] \cdot \vec{R}_0 = \frac{I_0 e^{-i\alpha t'}}{2c} \cdot 2\pi R_0 \vec{e}_z \cdot \vec{R}_0$$

$$|\vec{M}| = \frac{|\vec{I}| S}{c}; \quad S = \pi R_0^2$$

Тепер можна визначити потужність магніто-дипольного випромінювання. Причому треба рахувати сукупну потужність у всіх напрямках.

$P_{\text{мд}} = \int_{S_0} \vec{S} d\vec{\sigma}$, де S_0 – поверхня, яка набагато більша за наше кільце;

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \langle [\vec{E} \times \vec{H}] \rangle$ – в реальності прилади усереднюють сигнал, а ми будуємо теорію, яка б

описувала дійсність, тому усереднюємо вектор Умова-Пойтінга.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \left[\vec{M}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right]$$

$$\vec{E}_{\text{мд}} = \frac{1}{c^2 r} \left[\vec{n} \times \ddot{\vec{M}}(t - \frac{r}{c}) \right]$$

$$\vec{H}_{\text{мд}} = \frac{1}{c^2 r} \left[\left[\ddot{\vec{M}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right]$$

Такий вигляд справедливий для хвильової зони. Звідки:

$$\vec{S} = \frac{\vec{n}}{4\pi c} \left\{ (\dot{\vec{A}})^2 - (\vec{n} \cdot \dot{\vec{A}})^2 \right\}$$

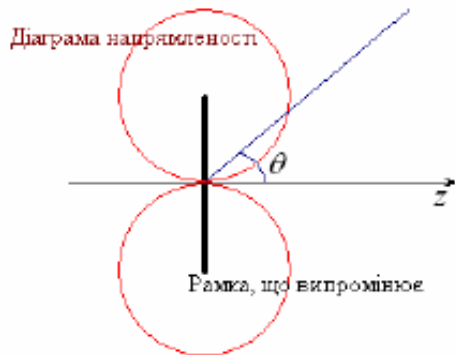
$$d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$$

Потужність випромінювання: $P_{\text{мд}} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{R_0 \omega}{c} \right)^4 \frac{I_0^2}{c}$

Значення електричного поля: $\vec{E}_{\text{мд}} = \vec{e}_\alpha E_{\text{мд}}^0 e^{-i\omega t'}, t' = t - \frac{r}{c}$

Підставивши в формулу для знаходження $\vec{E}_{\text{мд}}$ модуль $|\vec{M}|$ отримавмо:

$$E_{\text{мд}}^0 = \frac{\pi}{c} I_0 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(\frac{R_0^2}{r} \right) \sin \theta .$$



Дану властивість напрямленості використовують для пошуку передавачів(лісословлі). Ярко виражений мінімум інтенсивності вздовж осі z , дозволяє визначити напрямок в якому знаходиться передавач.

Магніто-дипольні антени використовують також в вигляді катушок з багатьма витками, що намотані на феритовий стрижень.

54. Індикатриса магнето-дипольноо випромінювання.

Використані формули (8.48), (8.43), (8.44), (4.35), (8.52), (8.53), (2.64) наведені в кінці.

Розглянемо вищі члени розкладу електромагнітного поля по степенях l/λ , де l — розміри випромінювача; λ — довжина електромагнітної хвилі. Особливого значення ці члени набувають у тому випадку, коли перший член формули (8.48) дорівнює нулю і відповідного йому дипольного випромінювання немає. Другий член розкладу формули (8.48) після деяких перетворень перепишемо так:

$$A^{(2)}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} J\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV' =$$

$$= A_{\text{магн}} + A_{\text{кв}} \quad (8.70)$$

або

$$A_{\text{магн}} = \frac{\mu_0}{8\pi cr} \frac{\partial}{\partial t} \int [|\mathbf{r}', \mathbf{J}|, \mathbf{n}] dV'; \quad (8.71)$$

$$A_{\text{кв}} = \frac{\mu_0}{8\pi cr} \frac{\partial}{\partial t} \int [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} \mathbf{J} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \mathbf{r}'] dV'. \quad (8.72)$$

Зважаючи на визначення магнітного моменту системи (4.35), формулу (8.71) можна переписати у вигляді

$$A_{\text{магн}} = \frac{\mu_0}{4\pi cr} [\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}]. \quad (8.73)$$

Отже, векторний потенціал $A_{\text{магн}}$ створюється магнітним диполем. Тому відповідне йому випромінювання називається магнітним дипольним. Користуючись співвідношенням (8.43) і (8.44), знайдемо напруженості магнітного і електричного полів, створених магнітним моментом

$$\left\{ \begin{aligned} H_{\text{магн}} &= \frac{1}{4\pi c^2 r} [|\ddot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}|, \mathbf{n}]; \\ E_{\text{магн}} &= \frac{1}{4\pi c^2 \epsilon_0 r} [\mathbf{n}, \ddot{\mathbf{m}}]. \end{aligned} \right\} \quad (8.74)$$

$$\left\{ \begin{aligned} H_{\text{магн}} &= \frac{1}{4\pi c^2 r} [|\ddot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}|, \mathbf{n}]; \\ E_{\text{магн}} &= \frac{1}{4\pi c^2 \epsilon_0 r} [\mathbf{n}, \ddot{\mathbf{m}}]. \end{aligned} \right\} \quad (8.75)$$

Ці формули переходять у вирази для електромагнітного поля електричного диполя (8.52) і (8.53), якщо в остан-

ніх покласти $-\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E$ замість H , $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H$ замість E і $\frac{m}{c}$ замість ρ . Тому, наприклад, для диполя, напрямленого вздовж полярної осі, електричне і магнітне поля напрямлені відповідно вздовж паралелі і меридіана, які проходять через точку спостереження (див. рис. 8.2). Енергію, випромінену магнітним моментом, обчислюють так само, як і енергію, випромінену електричним полем. Для повної енергії, випроміненої на одиницю часу магнітним моментом, можна дістати такий вираз:

$$I_{\text{магн}} = \frac{\ddot{m}^2}{6\pi c^3 \epsilon_0}. \quad (8.76)$$

Щоб вивчити випромінювання, відповідне члену $A_{\text{хв}}$ у формулі (8.70), зробимо деякі перетворення підінтегрального виразу формули (8.72). Розглянемо проекцію цього виразу на вісь OX

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} J_x + \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} x' = \text{div} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' x' \mathbf{J}) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' x' \text{div} \mathbf{J}. \quad (8.77)$$

Підставивши співвідношення (8.77) в інтеграл (8.72), дістанемо нульове значення для першого інтеграла, оскільки цей інтеграл можна перетворити в інтеграл по нескінченно віддаленій поверхні, на якій $\mathbf{J} = 0$. Замість $\text{div} \mathbf{J}$ в останньому інтегралі можна підставити його значення, подане через заряд, в рівняння неперервності (2.64). Після зазначених перетворень знайдемо

$$\begin{aligned} A_{\text{хв}} &= \frac{\mu_0}{8\pi c r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' r' \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV' = \\ &= \frac{\mu_0}{24\pi c r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) (3\mathbf{r}' \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' - n r'^2) dV'. \end{aligned} \quad (8.78)$$

випромінювання електромагнітних хвиль квадрупольним моментом. Електромагнітне поле, створене квадрупольним моментом, згідно з формулами (8.43), (8.44) дорівнює

$$H_{\text{кв}} = \frac{1}{24\pi c^2 r} [\ddot{D}, n]; \quad (8.80)$$

$$E_{\text{кв}} = \frac{1}{24\pi c^3 \epsilon_0 r} [[\ddot{D}, n], n]. \quad (8.81)$$

Для випроміненої за одиницю часу енергії дістанемо

$$I_{\text{кв}} = \int [E_{\text{кв}} H_{\text{кв}}] r^2 d\Omega = \frac{\ddot{D}_{\alpha\beta}^2}{720\pi c^3 \epsilon_0}. \quad (8.82)$$

Нагадаємо, що за індексами, які зустрічаються двічі, треба проводити підсумовування. Отже, у формулі (8.82) проводиться підсумовування за індексами α і β .

З формули (8.82) можна показати, що для монохроматичних коливань ($D \sim e^{-i\omega t}$) інтенсивність квадрупольного випромінювання пропорційна шостому степеню частоти коливань.

Так само можна розглянути наступні члени розкладу потенціалу в ряд по степенях l/λ . Якщо $l \ll \lambda$, то електромагнітне поле досить точно визначається вже розглянутими доданками.

Додатковий останній член у квадратних дужках під інтегралом не змінює значення електричного і магнітного полів, як це можна показати з формул (8.43) і (8.44). Ми дописали його для того, щоб остаточний результат можна було подати через квадрупольний момент системи. Справді, згадуючи визначення тензора квадрупольного моменту (3.51), формулу (8.78) можна переписати так:

$$A_{\text{кв}} = \frac{\mu_0}{24\pi c r} \ddot{D}, \quad (8.79)$$

де D — вектор, компоненти якого зв'язані з тензором квадрупольного моменту співвідношенням

$$D_\alpha = D_{\alpha\beta} n_\beta.$$

Отже, векторний потенціал $A_{\text{кв}}$ відповідальний за

$$\frac{\partial \rho_{\text{в}}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_{\text{пр}} = 0. \quad (2.64)$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r}', \mathbf{J}(\mathbf{r}')] dV' \quad (4.35)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{n}]; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 c} [\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{n}]. \quad (8.43)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{A}}) - \dot{\mathbf{A}}] = [[\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{n}], \mathbf{n}], \quad (8.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV' + \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi c r} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV' + \dots \end{aligned} \quad (8.48)$$

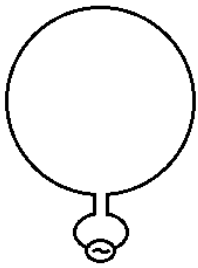
$$\mathbf{H}_{\text{дип}} = \frac{1}{4\pi c r} [\ddot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}]; \quad (8.52)$$

$$\mathbf{E}_{\text{дип}} = \frac{1}{4\pi c^2 \epsilon_0 r} [[\ddot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}], \mathbf{n}]. \quad (8.53)$$

Після знаходження векторного потенціалу задача зводиться до того, щоб знайти індикатрису на зразок задач, які ми вирішували на семінарах. Але сам я його знайти так і не зміг... сорі...

55. Випромінювання колового струму.

приблизна схема.



З теоретичної точки зору це коло зі струмом, амплітудою I_0 , частотою ω , та радіусом R_0 . Наша задача знайти потужність випромінювання такої системи, вважаючи, що $R_0 \ll \lambda$. Фактично в нас є 3 типи випромінювання. Якщо є дипольне, то воно саме сильне, адже є розкладом поля в першому наближенні, але в даному випадку $\vec{p} = 0$ оскільки в нас коло симетричне. Квадрупольний момент такої системи також не враховуємо. Середній заряд в статичному випадку 0. Коли тече

струм то взагалі-то не 0, але ефект малий. Через хаотичну орієнтацію, усереднивши формулу для квадрупольного моменту, бачимо що можемо його не враховувати.

Залишається магнітодипольне випромінювання.
$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}', t')] dV$$

Щоб якось визначити \vec{j} , треба ввести певну модель, в рамках якої ми будемо працювати.

Виберемо дротину тонкою $\vec{j}(\vec{r}', t') = \vec{I}(\vec{r}', t') \delta(r' - R_0) \delta(z')$

Добуток дельта-функцій описує власне кільце.

Полярна система координат: $\vec{I} = \vec{e}_\alpha I_0 e^{-i\omega t'}$

Елемент об'єму $dV' = R' dR' d\alpha' dz'$

Підставляємо цей вираз для магніто-дипольного моменту і одразу беручи інтеграли по

дельта-функціям будемо мати
$$\vec{M} = \frac{I_0 e^{-i\omega t'}}{2c} \int_0^{2\pi} [\vec{R}_0 \times \vec{e}_\alpha] R_0 d\alpha = \frac{I_0 e^{-i\omega t'}}{2c} 2\pi R_0 \vec{e}_z R_0$$

$$|\vec{M}| = \frac{|\vec{I}|S}{c}; \quad S = \pi R_0^2$$

Тепер можна визначити потужність магнітно-дипольного випромінювання. Причому треба врахувати сукупну потужність у всіх напрямках.

$P = \int_{S_0} \vec{S} d\vec{\sigma}$, S_0 – поверхня, яка набагато більша за наше кільце.

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle$ В реальності дані усереднені в часі

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} [\dot{\vec{M}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}]; \quad \vec{E}_{md} = \frac{1}{c^2 r} [\vec{n} \times \ddot{\vec{M}}(t - \frac{r}{c})]$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 r} [[\ddot{\vec{M}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}]$$

Такий вигляд справедливий для хвильової зони. Звідки

$$\vec{S} = \frac{\vec{n}}{4\pi c} \{(\dot{\vec{A}})^2 - (\vec{n} \dot{\vec{A}})^2\}$$

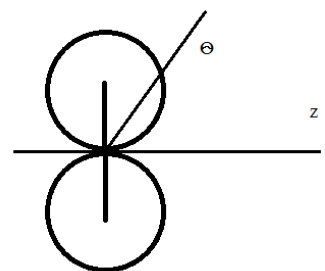
Потужність випромінювання $P = \frac{\pi^2}{3} (\frac{R_0 \omega}{c})^4 \frac{I_0^2}{c}$

Значення електричного поля $\vec{E}_{md} = \vec{e}_\alpha E_{md}^0 e^{-i\omega t'}; \quad t' = t - \frac{r}{c}$

Підставивши в формулу для знаходження E модуль магнітного моменту

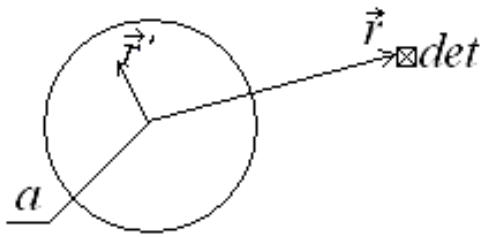
$$E_{md}^0 = \frac{\pi I_0}{c} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\frac{R_0^2}{r}\right) \sin\theta$$

Дану діаграму використовують для пошуку передавачів. В напрямку z спостерігається різкий мінімум.



56. Електроквадрупольне випромінювання. Потенціали цього поля.

Запишемо вираз для векторпотенціала:



$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Наближення хвильової зони: $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-i\omega\tau}, \quad \tau = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r})^2 - 2(\vec{r} \cdot \vec{r}') + (\vec{r}')^2} = |\vec{r}| \sqrt{1 - 2 \frac{(\vec{n} \cdot \vec{r}')}{|\vec{r}|} + \left(\frac{|\vec{r}'|}{|\vec{r}|}\right)^2} \approx |\vec{r}| \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|}\right), \quad \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|} \ll 1$$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)} e^{\frac{i\omega\alpha}{c}}.$$

$$\exp\left[-\frac{i\omega a}{c}\right] = \exp\left[-i \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{a}{c}\right] = \exp\left[-2\pi i \frac{a}{\lambda}\right], \quad a \ll \lambda \quad \text{- умова хвильового наближення (можна}$$

перейти до дипольного випромінювання і знехтувати r' в знаменнику)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{c|\vec{r}|} \int \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c}(1 - \alpha)\right) dV'$$

$$\vec{j}\left(\vec{r}'', t - \frac{|\vec{r}|}{c}(1 - \alpha)\right) = \vec{j}\left(\vec{r}'', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) + \alpha \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial \alpha}\right)\bigg|_{\alpha=0} + \dots$$

(розклали в ряд по $\alpha(r')$, але щоб розкласти лише праву частину, в лівій замінили \vec{r}' на \vec{r}'')

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{c|\vec{r}|} \int \vec{j}\left(\vec{r}'', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) dV' + \frac{1}{c|\vec{r}|} \int \frac{\vec{r}' \cdot \vec{n}}{|\vec{r}|} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}'', t_1)}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0} dV' \equiv \vec{A}^{(1)} + \vec{A}^{(2)}$$

$$t_1 = t - \frac{|\vec{r}|}{c}(1 - \alpha); \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \vec{j}}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial \alpha} = \frac{|\vec{r}|}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

$$\vec{A}^{(2)} = \frac{1}{c^2|\vec{r}|} \int (\vec{r}' \cdot \vec{n}) \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}'', t_1)}{\partial t} \bigg|_{\alpha=0} dV' = \frac{1}{c^2|\vec{r}|} \frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{r}' \cdot \vec{n}) \vec{j}(\vec{r}'', t_1) \bigg|_{\alpha=0} dV'$$

(Складова $\vec{A}^{(2)}$ відповідає наддипольному випромінюванню)

Перейдемо до моделі точкових зарядів (від інтеграла до суми):

$$\vec{j}(\vec{r}', t_1) = \sum_p q_p \vec{v}_p \delta(\vec{r}' - \vec{r}_p(t_1))$$

$$\vec{A}^{(2)} = \frac{1}{c^2 |\vec{r}|} \frac{\partial}{\partial t} \sum_p (\vec{r}'_p \cdot \vec{n}) q_p \frac{d\vec{r}'_p}{dt}$$

Перепишемо дану формулу через подвійний векторний добуток:

$$\vec{v}_p \cdot (\vec{r}'_p \cdot \vec{n}) = \vec{r}'_p \cdot (\vec{n} \cdot \vec{v}_p) + [\vec{r}'_p \times \vec{v}_p] \times \vec{n}$$

Введемо квадрупольний та магнітний моменти:

$$Q_{ij} = \sum_p q_p (\vec{r}'_p)_i (\vec{r}'_p)_j$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \sum_p q_p [\vec{r}'_p \times \vec{v}_p]$$

Тоді другу частину векторного потенціалу можна записати так:

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c |\vec{r}|} \left[\dot{\vec{M}} \left(t - \frac{|\vec{r}|}{c} \right) \times \vec{n} \right] + \frac{1}{2c^2 |\vec{r}|} \left(\ddot{\vec{Q}} \left(t - \frac{|\vec{r}|}{c} \right) * \vec{n} \right)$$

Із вище наведеного можна сказати, що квадрупольному випромінюванню відповідає вектор-потенціал:

$$\vec{A}_{\text{квадр}} = \frac{1}{2c^2 |\vec{r}|} (\ddot{\vec{Q}} \left(t - \frac{|\vec{r}|}{c} \right) * \vec{n}).$$

57. Напруженості полів для електроквадрупольного випромінювання.

Розкладаючи в ряд підінтегральний вираз $\vec{A} = \frac{1}{cR_0} \int \vec{j}_{t'+\vec{rn}/c} dv$ за степенями $\frac{\vec{rn}}{c}$ і,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_t \cdot dV + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t} \int (\mathbf{rn}) \mathbf{j}_t \cdot dV$$

зберігаючи два перші члени, знаходимо:

як відомо \vec{A} - це векторний потенціал. Так як $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ і переходячи до точкових зарядів

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \sum e \mathbf{v} + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t} \sum e \mathbf{v}(\mathbf{rn})$$

. В другому доданку пишемо

$$\mathbf{v}(\mathbf{rn}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{nr}) + \frac{1}{2} \mathbf{v}(\mathbf{nr}) - \frac{1}{2} \mathbf{r}(\mathbf{nv}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{nr}) + \frac{1}{2} [[\mathbf{rv}]\mathbf{n}]$$

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e \mathbf{r}(\mathbf{nr}) + \frac{1}{cR_0} [\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]$$

Знаходимо вираз для \vec{A} : , де \mathbf{d} дипольний

$$\mathbf{m} = \sum \frac{1}{2c} \sum e [\mathbf{rv}]$$

момент системи, а

- магнітний. Відомо, що якщо до \vec{A} прибавити

будь-який вектор, пропорційний \mathbf{n} , то поля \mathbf{E} і \mathbf{H} від того не зміняться. Тому попередню формулу можна переписати так:

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e [3\mathbf{r}(\mathbf{nr}) - \mathbf{nr}^2] + \frac{1}{cR_0} [\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]$$

але під знаком $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ є добуток $n_\beta D_{\alpha\beta}$ вектора \mathbf{n} на тензор квадрупольного момента

$$D_{\alpha\beta} = \sum e (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2)$$

, вводячи вектор \mathbf{D} з компонентами

$$D_\alpha = D_{\alpha\beta} n_\beta$$

знаходимо кінцевий вираз для векторного потенціалу:

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2 R_0} \ddot{\mathbf{D}} + \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{D}} + \frac{1}{cR_0} [\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]$$

. Знаючи \mathbf{A} , ми можемо знайти \mathbf{E} і \mathbf{H} за формулами:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}], \mathbf{E} = \frac{1}{c} [[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]$$

тобто

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0} \left\{ \left[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n} \right] + \frac{1}{6cR_0} \left[\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{n} \right] + \frac{1}{cR_0} \left[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n} \right] \mathbf{n} \right\}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} \left\{ \left[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n} \right] \mathbf{n} + \frac{1}{6cR_0} \left[\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{n} \right] \mathbf{n} + \frac{1}{cR_0} \left[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{m}} \right] \right\}$$

58. Індикатриса електроквадрупольного випромінювання.

$$dI = c \frac{H^2}{4\pi} R_0^2 d\Omega \quad (1) \text{ ця}$$

Інтенсивність dI в тілесному куті рахується за формулою
величина впливає з потоку енергії, що визначається вектором Пойнтінга. Для плоскої

$$\mathbf{S} = c \frac{H^2}{4\pi} \mathbf{n}$$

хвилі він

Інтенсивність визначають як кількість енергії протікає в одиницю часу через елемент

$$df = R_0^2 d\Omega$$

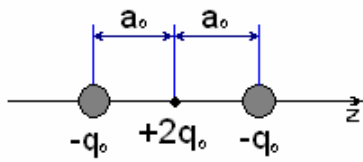
кульової поверхні з центром в початку координат з радіусом R_0 . Це
кількість енергії одно щільності потоку енергії \mathbf{S} помноженої на df тобто (1). Визначимо
повне випромінювання, тобто енергію, що випромінюється системою в одиницю часу
по всіх напрямках. Для цього усереднити dI за всіма напрямками \mathbf{n} ; повне
випромінювання дорівнює цьому середньому, помноженому на 4π . При усередненні
квадрата магнітного поля всі взаємні добутки першого, другого і третього членів в \mathbf{H}
зникають, так що залишаються тільки середні квадрати кожного з них. В результаті
маємо

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{\mathbf{D}}^2 + \frac{2}{3c} \ddot{\mathbf{m}}$$

Таким чином, повне випромінювання складається з трьох частин: дипольного,
квадрупольного і магніто-дипольного. Магніто-дипольне у багатьох випадках відсутнє.
Наприклад, у системах, в яких відношення заряду до маси однакове, в цьому випадку
відсутній і магніто-дипольне випромінювання.

59. Опір випромінюванню для квадрупольної антени. – нема =(

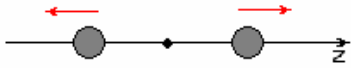
60. Випромінювання простих квадрупольних систем.



Розглянемо молекулу CO_2 :

$2q_0 \neq 4e_0$ - присутні різні ефекти екранування, але для оцінки ми можемо так рахувати.

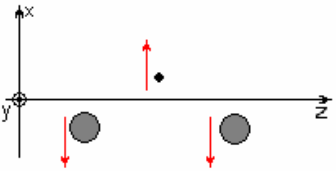
Для таких йонів можливі наступні схеми руху:



A_{1g} - повносиметричні коливання;



A_{1u} - антисиметричні коливання;



E - двічі вироджені (по x та по y) деформаційні коливання.

Для першого випадку повно симетричних коливань матимемо:

$$\vec{p} = 0, \vec{M} = 0, Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{xy} = Q_{yx} = Q_{zx} = Q_{xz} = 0, Q_{zz} \neq 0;$$

Антисиметричні:

$$Q_{zz} = 0, \vec{p}_z \neq 0.$$

Деформаційні коливання:

$$\vec{p}_x \neq 0.$$

Розглянемо чисто квадрупольне випромінювання (тобто візьмемо повносиметричні коливання, для яких ненульовим є квадрупольний момент):

$$Q_{zz} = -2q_0(a_0 + \Delta a(t))^2$$

Тепер можемо записати згортку:

$$(\hat{Q} * \vec{n}) = \begin{pmatrix} \sum_i Q_{xi} n_i \\ \sum_i Q_{yi} n_i \\ \sum_i Q_{zi} n_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{zz} n_z \end{pmatrix}, \quad n_z = \cos \theta \text{ — проекція } n \text{ на вісь } z$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2c^2 |\vec{r}|} (\ddot{\hat{Q}} * \vec{n}).$$

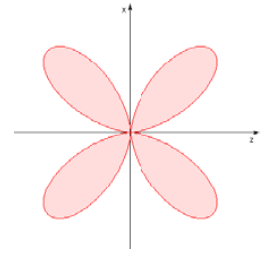
Вектор Умова-Пойтинга $\vec{S} \sim \vec{n}$. В результаті підстановки нашого значення вектор-потенціалу отримаємо кутовий розподіл: $\vec{S} \sim \vec{n} \sin^2(2\theta)$.

Фактично це означає, що індикатриса випромінювання квадрупольного випромінювання у випадку повної симетричності коливальних систем матиме вигляд:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{кв}} &\sim \ddot{Q} \sim \omega^3 \\ E_d &\sim \ddot{p} \sim \omega^2 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} S_{\text{кв}} &\sim \omega^6 \\ S_d &\sim \omega^4 \end{aligned} \right\} \text{ — нема універсальної формули для}$$

розрахунку індикатриса випромінювання, бо результат повністю залежить від частоти на якій розраховуємо.

Якщо маємо складну і велику систему, то внесок квадрупольного випромінювання може бути великий. Тобто дипольне випромінювання не завжди є самим сильним.



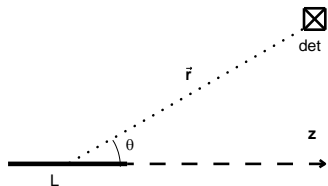
61. Випромінювання короткого диполя в ближній зоні. Потенціали поля в ближній зоні. Напруженість в сферичній СК. Залежність Е і Н від відстані до джерела випромінювання.

/* є ще одна версія даного питання */

Фаза, яка приходить до детектора майже однакова, але все ж таки існує деяке запізнення фронту хвилі. Характерною особливістю **ближньої зони** є незначний вплив запізнення на ел - маг. явища.

(**Ближня зона** - область в якій напрямлені властивості антени (діаграма направленості) визначається законами геометричної оптики. На відміну від дальньої зони, густина потоку енергії випром не пропорційна квадрату відстані до антени. Розділ між ближньою та дальньою зонами залежить від : розмірів антени, частоти випром, і відстані на якій вимірюються парам. антени.)

Нехай ми маємо систему, що випромінює. Будемо намагатись наблизити детектор поближче до випромінювача.



$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r}| - \frac{|\vec{r}| - (\vec{r}'\vec{n})}{c})}{|\vec{r}| - (\vec{r}'\vec{n})} dV' \quad (1)$$

Для ближньої зони : 1. $|\vec{r}| \ll \lambda$

2. всі величини $\sim 1/|\vec{r}|$

Запишемо $|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r}|(1 - \alpha)$, $\alpha = \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{|\vec{r}|}$ (2), $|\alpha| \ll 1$ малий параметр. $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$

. Розглянемо знаменник $\frac{1}{|\vec{r}|(1 - \alpha)} \approx \frac{1}{|\vec{r}|} (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots) = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{|\vec{r}|^2}$ (3)

Якщо ми врахуємо другий член розкладу то внесок у знаменник буде

$$\frac{r'j}{|r|^2} = \frac{q(\frac{d}{dt}r')r'}{|r|^2} \approx \frac{d}{dt} \times \frac{1}{|r|^2} \times (q(\vec{r}')^2) \quad \text{отже дає внесок квадрупольний момент.}$$

Будемо розглядати **лише дипольне** випром, оск дипольне наближення – це

наближення, в якому розглядають тільки дипольні поля. Отже $(\vec{r}'\vec{n}) = 0$.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{p}}(t - |r|/c)}{|r|c} \quad (4)$$

Тоді вираз для вектор потенціала

Для скалярного потенціалу з урахуванням наближення (2) маємо:

$$\varphi = \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}| - (\vec{r}'\vec{n})}{c})}{|\vec{r}| - (\vec{r}'\vec{n})} dV'$$

Розкладемо по α густину заряду: ρ

$$\rho = (\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c}(1-\alpha)) \approx \rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \alpha, \text{ де}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \{t - \frac{|\vec{r}|}{c}(1-\alpha)\} = \frac{|\vec{r}|}{c}. \text{ Таким чином:}$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{|\vec{r}|} \int_V \rho(\vec{r}', t') d^3 r' + \frac{1}{|\vec{r}|^2} (\vec{n} \int (\vec{r}' \cdot \rho(\vec{r}', t')) d^3 r') + \\ + \frac{1}{|\vec{r}|} \frac{1}{c} (\vec{n} \int (\vec{r}' \cdot \dot{\rho}(\vec{r}', t')) d^3 r') + \frac{1}{|\vec{r}|^2} \frac{1}{c} \int (\vec{n} \vec{r}')^2 \cdot \dot{\rho}(\vec{r}', t') d^3 r'$$

Розглядаємо лише ті системи в яких заряд $Q^0 = 0$, тобто система нейтральна. Після

перетворень:
$$\phi(\vec{r}, t') = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}'(t')}{|\vec{r}|^2} + \frac{(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}(t'))}{c |\vec{r}|}, \text{ де } t' = t - \frac{|\vec{r}|}{c}$$

Напруженість в сферичній СК. Залежність E і H від відстані до джерела випромінювання

Ми отримали
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{p}}(t - |\vec{r}|/c)}{|\vec{r}| c}$$

В дипольному наближенні(як в дальній так і в ближній зоні) маємо
$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Згадаємо формулу: $\text{rot}(f \vec{F}) = [\text{grad } f \times \vec{F}] + f \text{rot } \vec{F}$.

Підставимо в цю формулу $f = 1/(c|\vec{r}|)$, $\vec{F} = (\vec{p})_t$ (похідна по часу, курсив **вектори**).

$$\text{grad}\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right) = -\frac{\vec{n}}{|\vec{r}|^2}, \quad \frac{\partial F_i(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i(t')}{\partial x_j} \cdot \frac{dt'}{dx_j} = \dot{F}_i(t - \frac{|\vec{r}|}{c}) \left(-\frac{1}{c}\right) n_j$$

$$\frac{dt'}{dx_j} = \frac{d(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{dx_j} = -\frac{1}{c} \frac{d|\vec{r}|}{dx_j} = -\frac{1}{c} n_j$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{[\dot{\vec{p}}(t') \times \vec{n}]}{c |\vec{r}|^2} + \frac{[\ddot{\vec{p}}(t') \times \vec{n}]}{c^2 |\vec{r}|}, \text{ де } t' = t - \frac{|\vec{r}|}{c}$$

Другий доданок схожий на закон Біо-Савара. Він відповідає за сталі струми, а отже і сталі поля. $(\vec{p})_t \sim \vec{j}$ $\dot{p}_x = q \dot{x} = I$.

Покладемо $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$ Підставляючи дипольний момент в вираз для магнітного

поля, отримаємо:
$$\vec{H}(\vec{r}, t) = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{|\vec{r}|} [\vec{p}(t') \times \vec{n}] \left(1 + i \frac{\lambda}{2\pi |\vec{r}|}\right)$$

З останньої рівності видно, **що хвильова зона** визначається нерівністю: $|\vec{r}| \gg \lambda$.

Маємо:
$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\varphi(\vec{r}, t') = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}'(t')}{|\vec{r}|^2} + \frac{(\vec{n} \cdot \vec{\dot{p}}(t'))}{c |\vec{r}|}, \text{ де } t' = t - \frac{|\vec{r}|}{c}$$

Отже, нескладними математичними перетвореннями для сферичної системи координат (r, α, θ) маємо:

$$n_z(\theta) = \cos\theta$$

$$H_\alpha^0 = \left(1 + i \frac{\lambda}{2\pi |\vec{r}|} \right) B^\infty \sin\theta; \quad \vec{H} = \vec{e}_\alpha H_\alpha^0 e^{-i\omega t}; \quad \vec{E} = (\vec{e}_r E_r^0 + \vec{e}_\theta E_\theta^0) e^{-i\omega t};$$

$$E_\theta^0 = \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2\pi |\vec{r}|} \right)^2 + i \frac{\lambda}{2\pi |\vec{r}|} \right] B^\infty \sin\theta; \quad E_r^0 = -2i \left(\frac{\lambda}{2\pi |\vec{r}|} \right) \left(1 + i \frac{\lambda}{2\pi |\vec{r}|} \right) B^\infty \cos\theta$$

Де B^∞ -напруженість магнітного поля в **дальній зоні**.
$$B^\infty = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{p_o}{|\vec{r}|}$$

В ближній зоні:

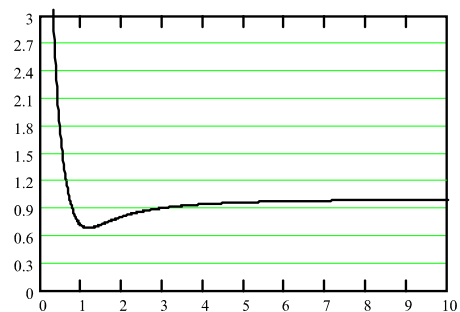
$$|\vec{H}| \sim \frac{1}{|\vec{r}|^2} \quad |\vec{E}| \sim \frac{1}{|\vec{r}|^3}$$

Розглянемо $\theta = \pi/2$. Введемо позначання $Q = \frac{2\pi |\vec{r}|}{\lambda}$ змінна безрозмірна величина.

Розглянемо $\theta = \pi/2$ функцію:

$$f = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \frac{E_\theta^0}{H_\theta^0} = \frac{|1 - \frac{1}{Q^2} + i \frac{1}{Q}|}{|1 + \frac{i}{Q}|} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{Q^4 - Q^2 + 1}{Q^2 + 1}}$$

На малюнку зображена залежність $f(Q)$



62. Дипольне випромінювання динамічних систем зарядів.

Потенційна енергія диполя в електростатичному полі дорівнює $U = - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$.

Це співвідношення отримано з виразу для обертального моменту, діючого на диполь:

$$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

§ 1.8]

ДИПОЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

31

Знак момента \mathbf{L} таков, що он стремится приблизить положительный конец диполя к направлению поля. Сила, действующая на диполь в неоднородном электрическом поле, если ориентация диполя относительно поля не меняется, равна¹⁾

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\nabla U = \\ &= -\nabla(-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

В однородном поле эта сила обращается в нуль, что и следовало ожидать из соображений симметрии.

Рассмотрим силу взаимодействия и энергию двух диполей, моменты которых произвольно ориентированы в пространстве (рис. 1.4). Объединяя приведенные выше соотношения для потенциала диполя (1.42) и силы, действующей на него (1.50), получим выражение для силы \mathbf{F}_1 , действующей на диполь 1 со стороны диполя 2, и наоборот, для силы \mathbf{F}_2 , действующей на диполь 2 со стороны диполя 1,

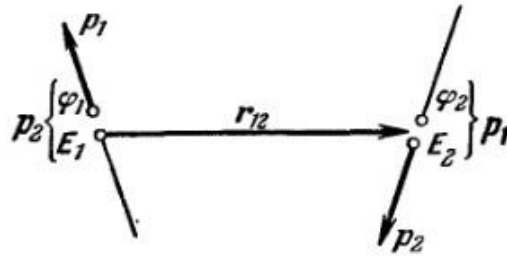


Рис. 1.4. Взаимодействие двух диполей.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p}_2 \cdot \nabla_1 \left(\frac{1}{r} \right), \quad \mathbf{E}_1 = -\nabla_1 \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla_1 \left[\mathbf{p}_2 \cdot \nabla_1 \left(\frac{1}{r} \right) \right], \\ \mathbf{F}_1 &= (\mathbf{p}_1 \cdot \nabla_1) \mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{p}_1 \cdot \nabla_1) \left\{ \nabla_1 \left[\mathbf{p}_2 \cdot \nabla_1 \left(\frac{1}{r} \right) \right] \right\}, \\ \mathbf{F}_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{p}_2 \cdot \nabla_2) \left\{ \nabla_2 \left[\mathbf{p}_1 \cdot \nabla_2 \left(\frac{1}{r} \right) \right] \right\} = -\mathbf{F}_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

Выражение для энергии взаимодействия можно получить, подставляя выражение для поля \mathbf{E}_1 в выражение для энергии U . В результате для энергии U_{12} диполя 1 в поле диполя 2 и соответственно для энергии U_{21} имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= -\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \nabla_1)}{4\pi\epsilon_0} \left[\mathbf{p}_2 \cdot \nabla_1 \left(\frac{1}{r} \right) \right], \\ U_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3} - \frac{3}{r^5} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}) \right], \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

очевидно, что

$$U_{21} = U_{12}.$$

Это — общие выражения для взаимодействия двух диполей.

¹⁾ Уравнение (1.50) имеет место в силу равенства $\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$, если только $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Если же $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$, то в выражении для силы появляется дополнительный член.

63. Випромінювання лінійної антени.

Використаємо модель нескінченно тонкої антени, що розташована так, як показано на

малюнку: $\vec{j}(\vec{r}', t') = \vec{e}_z I(z', t') e^{-i\omega t'} \delta(x') \delta(y') \theta\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)$

Використовуючи умову $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$ можемо розкласти:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c|\vec{r}|} \iiint_V \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{n}}{c}) dx' dy' dz'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{e}_z}{c|\vec{r}|} \exp(-i\omega(t - \frac{|\vec{r}|}{c})) \int_{-L/2}^{L/2} dz' I(z', t') \exp(-i\frac{\omega}{c}(z' n_z)) =$$

На

$$= \frac{\vec{e}_z}{c|\vec{r}|} \exp(-i\omega(t - \frac{|\vec{r}|}{c})) \int_{-L/2}^{L/2} dz' I(z', t') \exp(-\frac{i\omega}{c} \cos \theta z')$$

кінцях повинні бути вузли, інакше поле випромінювання мало б бути не неперервним, що не можливо. Тому:

$$I(z' = \frac{L}{2}) = I(z' = -\frac{L}{2}) = 0$$

Це можливе в двох випадках – симетричному і асиметричному:

$$I(z') = +I(-z')$$

$$I(z') = -I(-z')$$

При цьому пере випромінювання не враховується. Отже,

$$I(z') = I_0 \cos kz', \quad m = 1, 3, 5...$$

$$I(z') = I_0 \sin kz', \quad m = 2, 4, 6...$$

$$L = m \left(\frac{\lambda_m}{2} \right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{e}_z}{c|\vec{r}|} I_0 \exp(-i\omega(t - \frac{|\vec{r}|}{c})) F_m$$

$$F_m = \int_{-L/2}^{L/2} dz' \cos(\pi m \frac{z'}{L}) \exp(-\frac{i\omega}{c} \cos \theta z')$$

$$F_m = i \frac{\lambda}{\pi} \frac{\cos(m \frac{\pi}{2} \cos \theta) \sin \frac{\pi m}{2}}{\sin^2 \theta}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

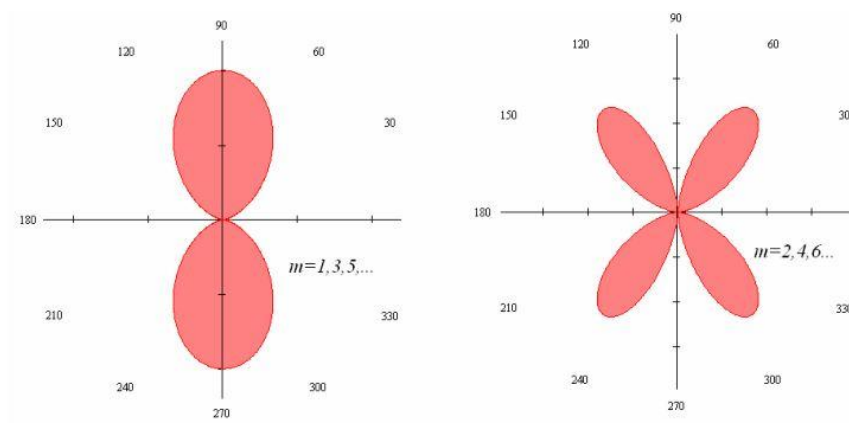
$$F_m = i \frac{\lambda}{\pi} \frac{\sin(m \frac{\pi}{2} \cos \theta) \cos \frac{\pi m}{2}}{\sin^2 \theta}, \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{n}}{4\pi c} (\langle \vec{\dot{A}}^2 \rangle - \langle (\vec{n} \vec{\dot{A}})^2 \rangle)$$

$$\vec{S}_m = \vec{n} S_m^a \frac{\cos^2(m \frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

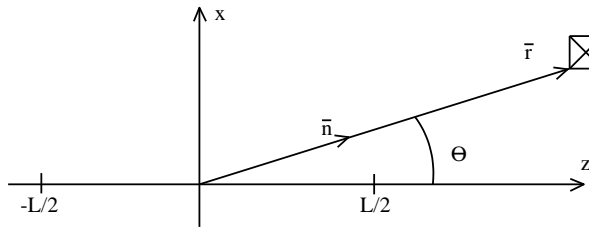
$$\vec{S}_m = \vec{n} S_m^a \frac{\sin^2(m \frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta}, \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

Діаграма напрямленості матиме вигляд:



64. Індикатриса напівхвильової та однохвильової антен.

Розглянемо антену у вигляді дроту довжиною L . Штриховані позначення означають що ми розглядаємо точку на самій антенні, а не штриховані вказують що ми розглядаємо точку що відноситься до детектору. В нашому випадку розподіл густини струму буде:



Тут дельта-функціями ми вказуємо, що нас дріт нескінченно тонкий, а функцією Хевісайда вказуємо на довжину антени. Ми будемо працювати в хвильовій зоні, тобто $r' \ll r$. Запишемо вираз для векторпотенціала:

$$\vec{j}(\vec{r}', t') = \vec{e}_z I(\vec{r}', t') e^{-i\omega t'} \delta(x') \delta(y') \theta(L/2 - |z'|)$$

Тут дельта-функціями ми вказуємо, що нас дріт нескінченно тонкий, а функцією Хевісайда вказуємо на довжину антени. Ми будемо працювати в хвильовій зоні, тобто $r' \ll r$. Запишемо вираз для векторпотенціала:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c|\vec{r}|} \iiint_V \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c} + \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{n})}{c}) dv' = \\ &= \frac{\vec{e}_z}{c|\vec{r}|} e^{-i\omega(t - \frac{|\vec{r}|}{c})} \int_{-L/2}^{L/2} I(z', t') e^{-i\omega \frac{(x'n_x + y'n_y + z'n_z)}{c}} dz' \end{aligned}$$

. Тут було враховано такі

твердження: $t' = t - \frac{|\vec{r}|}{c} + \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{n})}{c}$. Тепер візьмемо до уваги те що $x'=0$ $y'=0$ $n_z = \cos\theta$, а також візьмемо випадок стоячої хвилі тобто $I(z')$ не буде залежати від часу.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{e}_z}{c|\vec{r}|} e^{-i\omega(t - \frac{|\vec{r}|}{c})} \int_{-L/2}^{L/2} I(z') e^{-i\frac{\omega \cos\theta}{c} z'} dz'$$

Інтеграл позначимо через F_m .

Розглянемо два випадки розподілу струму: симетричний $I(-z')=I(z')$ та антисиметричний $I(-z')=-I(z')$. Візьмемо для цих випадків такі розподіли струмів:

$$I(z') = I^0 \cos(kz') \quad \text{для симетричного, та}$$

$$I(z') = I^0 \sin(kz') \quad \text{для антисиметричного (} k=2\pi/\lambda \text{). З граничних умов (}$$

$$I(\frac{L}{2})=0 \quad I(-\frac{L}{2})=0 \text{) знаходимо умову збудження стоячої хвилі: } L=(\lambda/2)m$$

Тепер підставляємо вираз для розподілу струму в F_m і інтегруємо. Отримаємо:

$$F_m = i I_m^0 \left(\frac{\lambda}{\pi} \right) \frac{\cos(\frac{m\pi}{2} \cos\theta) \sin(\frac{m\pi}{2})}{\sin^2(\theta)} \quad (m=1,3,5...)$$

$$F_m = i I_m^0 \left(\frac{\lambda}{\pi} \right) \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2} \cos\theta\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{\sin^2(\theta)} \quad (m=2,4,6\dots)$$

З попередніх курсів фізики ми маємо знати такі формули:

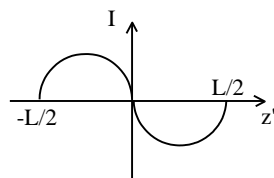
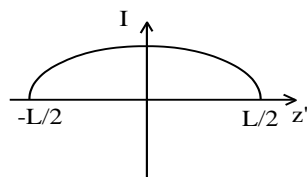
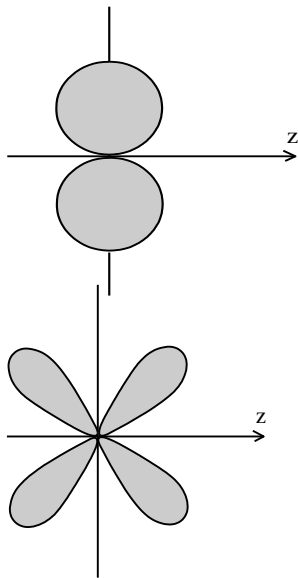
$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} [\dot{\vec{A}}(\vec{r}, t) \times \vec{n}] \quad ; \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} [[\dot{\vec{A}}(\vec{r}, t) \times \vec{n}] \times \vec{n}]$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$$

За означенням, вектор Умова-Пойнтінга рівний: Так от, якщо ми все це підставляємо та виконаємо деякі “очевидні” перетворення то отримаємо:

$$\vec{S}_m = \vec{n} S_0 \frac{\sin^2\left(m \frac{\pi}{2} (\cos\theta + 1)\right)}{\sin^2 \theta} \quad \text{де} \quad S_0 = \frac{(I_m^0)^2}{4\pi c |r|^2}$$

Фактично задача розв’язана, залишилось лише графічно зобразити ці залежності, намалювати індикатрису випромінювання:



Малюнки: індикатриса та розподіл струму по антені для випадку $m=1$ $L=\lambda/2$ (напівхвильова антена) $m=2$ $L=\lambda$ (хвильова антена)

65. Аналіз індикатриси випромінювання у хвильовій зоні. Антенний опір випромінюванню.

(Якщо потрібна теорія про випромінювання антен, то дивись питання 63)

Індикатрисою називається кутовий розподіл інтенсивності випромінювання. Треба пам'ятати, що вздовж напрямку лінійного дроту антена не випромінює.

В загальному випадку індикатриса випромінювання антени, на довжині якої укладається m півхвиль, має m мінімумів під кутами $\theta_n^{\min}(m_1)$. Можна показати, що при $m \gg 1$ кут першого максимуму

$$\theta_1(m) \sim \frac{1}{\sqrt{m}}. \quad (8.8)$$

а при великих "m" потужність випромінювання в напрямку першого (головного) максимуму зростає пропорційно m. При цьому чим більша довжина антени, тим вужчий перший максимум.

Для знаходження загальної потужності P_m випромінювання оточимо антену сферою дуже великого радіуса $R \gg L, \lambda$ і проінтегруємо інтенсивність випромінювання по всій поверхні цієї сфери:

$$P_m = \int_{\Omega} \vec{S}_m d\vec{\sigma}, \quad (8.9)$$

Опір випромінюванню R_m^a вводиться як коефіцієнт пропорційності між потужністю P_m і середньоквадратичним значенням струму в антені:

$$P_m = R_m^a \langle I^2 \rangle. \quad (8.10)$$

Зважаючи на те, що для гармонічних полів середнє значення квадрату струму

$$\langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} (I_m^0)^2, \quad (8.11)$$

може бути виражене через амплітудне значення I_m^0 , можна отримати

$$R_m^a = \frac{2P_m}{(I_m^0)^2}. \quad (8.12)$$

В загальному випадку антенний опір випромінюванню має комплексний характер: $Z(\lambda) = Z'(\lambda) + iZ''(\lambda)$. В умовах точного резонансу, коли $\lambda = \lambda_m$, уявна частина цього опору $Z''(\lambda_m) = 0$ $\left(\lambda_m = \frac{2L}{m}, m = 1, 2, 3, \dots \right)$.

Для формування діаграм направленості спеціальних типів (наприклад, з високою направленістю лише в одному напрямку) може бути застосовано непрямі (наприклад, круглі) антени, або складні антени що складаються із декількох лінійних частин. Наприклад, для ромбічної антени можна підібрати такі параметри (довжини ребер, кути між ними), що випромінювання буде, в основному, зосереджено вздовж довгої осі ромба.

Живлення антени повинно підключатися таким чином, щоб розрив антенного дроту мав місце в області максимуму струму.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{e}_z}{c|r|} I_0 \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{|r|}{c}\right)\right) F_m$$

$$F_m = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz' \cos\left(\pi m \frac{z'}{L}\right) \exp\left(-\frac{i\omega}{c} \cos\theta z'\right)$$

$$F_m = i \frac{\lambda}{\pi} \frac{\cos\left(m \frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \sin \frac{m\pi}{2}}{\sin^2 \theta}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

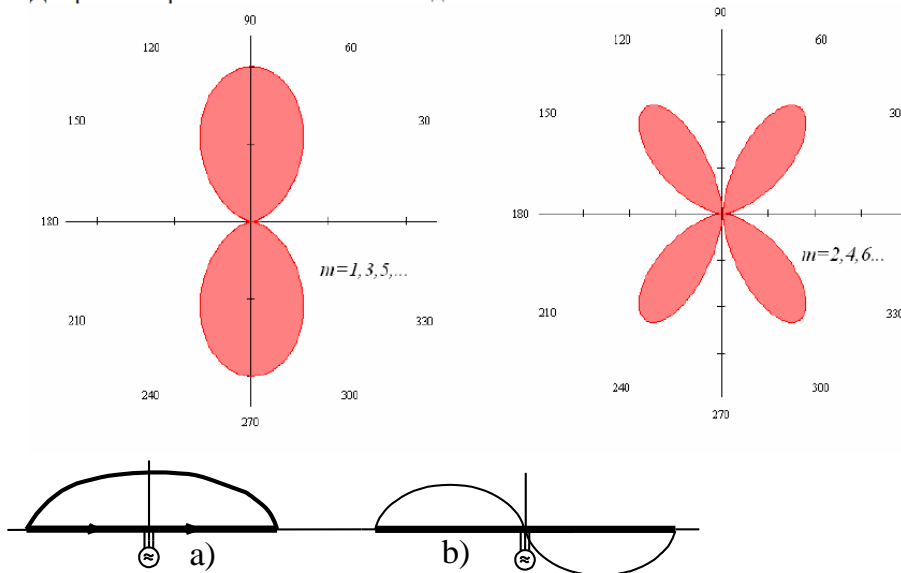
$$F_m = i \frac{\lambda}{\pi} \frac{\sin\left(m \frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \cos \frac{m\pi}{2}}{\sin^2 \theta}, \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{n}}{4\pi c} \left(\langle \dot{\vec{A}}^2 \rangle - \langle (\vec{n} \dot{\vec{A}})^2 \rangle \right)$$

$$\vec{S}_m = \vec{n} S_m^a \frac{\cos^2\left(m \frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2 \theta}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

$$\vec{S}_m = \vec{n} S_m^a \frac{\sin^2\left(m \frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2 \theta}, \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

Діаграма напрямленості матиме вигляд:



Накачку роблять у максимумі. У випадку b) випромінювання не буде. Якщо $L = \lambda/2m$, то опір антени активний. В протилежному випадку опір антени має ще і реактивну складову. Наявність реактивного опору виникає за рахунок неузгодженості антени і генератора. На великих відстанях потужність, яку випромінює антена в усіх напрямках

$$P_m = \int \vec{S} d\Omega$$

можна записати так:

Використовуючи формулу для вектора Умова-Поінтінга, отримаємо:

$$P_m = S_0 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sin^2(m \frac{\pi}{2} (\cos\theta + 1))}{\sin^2\theta} R^2 \sin\theta$$

заміна: $\cos\theta = x$

$$= \frac{(I_m^0)^2}{2c} \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(m \frac{\pi}{2} (x + 1))}{1 - x^2} dx$$

Прилади (очі і т.п.) усереднюють $\langle I^2 \rangle \sim \langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$

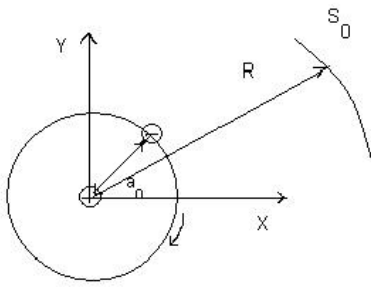
$$\langle I^2 \rangle = 1/2 \langle (I_m^0)^2 \rangle$$

$P_m = R \langle I^2 \rangle$ - потужність, що випромінюється

$$R = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(m \frac{\pi}{2} (x + 1))}{1 - x^2} dx$$

- опір антени. $R \sim m$ - недоцільно використовувати антени з $m \gg 1$

66. Сила променевого тертя.



Розглянемо систему двох зарядів (атомарна модель водню):

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_x r_x(t) + \vec{e}_y r_y(t)$$

$$r_x(t) = a_0 \cos \omega t$$

$$r_y(t) = -a_0 \sin \omega t$$

Вважаємо, що в моделі $a_0 = \text{const}$

Користуючись дипольним наближенням можемо записати:

$$\vec{S}(\vec{R}, t) = \frac{\vec{n}}{4\pi c^3 |\vec{R}|^2} \left\{ \langle (\ddot{\vec{p}})^2 \rangle - \langle (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}})^2 \rangle \right\}_{t-\frac{R}{c}}$$

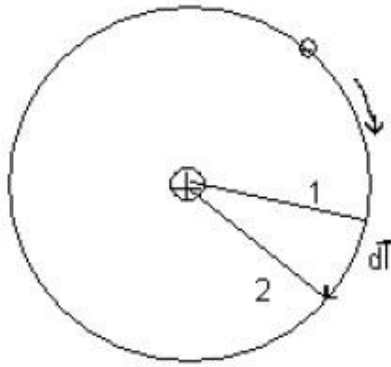
$P = \int_{S_0} \vec{S} d\vec{\sigma}$, де \vec{S} – вектор Умова-Пойтинга, а $d\vec{\sigma}$ – елемент поверхні, що значно більша за

характерні розміри системи.

$$P_x = \frac{2}{3} \frac{\langle (\ddot{p}_x)^2 \rangle}{c^3}$$

$$P = P_x + P_y + P_z \sim \langle (\ddot{p}_x)^2 \rangle + \langle (\ddot{p}_y)^2 \rangle + \langle (\ddot{p}_z)^2 \rangle = \langle (\ddot{\vec{p}})^2 \rangle$$

$$\text{Остаточно: } P(t) = \frac{2}{3} \frac{\langle (\ddot{\vec{p}})^2 \rangle}{c^3}$$



$$dA = \vec{f} d\vec{l}$$

$$\frac{dA}{dt} = \vec{f} \frac{d\vec{l}}{dt}$$

$$P_A = (\vec{f} \cdot \vec{v}) = (\vec{f} \cdot \dot{\vec{r}})$$

$$\langle P_A \rangle = -P$$

$$\ddot{\vec{p}} = -e_0 \ddot{\vec{r}}$$

$$\langle (\vec{f} \cdot \dot{\vec{r}}) \rangle = -\frac{2e_0^2 \langle (\ddot{\vec{r}})^2 \rangle}{3c^3}$$

Виразимо $\ddot{\vec{r}}$, застосовуючи наступну формулу:

$$\frac{d}{dt}(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = (\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + (\ddot{\vec{r}})^2$$

$$\dot{\vec{r}} = a_0 \omega (-\vec{e}_x \sin \omega t - \vec{e}_y \cos \omega t)$$

$$\ddot{\vec{r}} = a_0 \omega^2 (-\vec{e}_x \cos \omega t + \vec{e}_y \sin \omega t)$$

$$\ddot{\vec{r}} = a_0 \omega^3 (\vec{e}_x \sin \omega t + \vec{e}_y \cos \omega t)$$

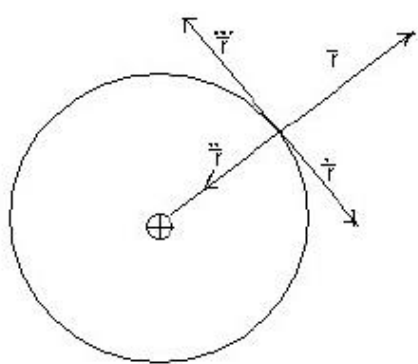
Звідси $\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r}$ $\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \equiv 0$

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \dot{\vec{r}}$$

$$(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \approx -(\ddot{\vec{r}})^2$$

$$\left\langle \left\{ \vec{f} \cdot \dot{\vec{r}} - \frac{2e_0^2}{3c^3} (\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \right\} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \left\{ \left(\vec{f} - \frac{2e_0^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} \right) \cdot \dot{\vec{r}} \right\} \right\rangle = 0$$



$$\langle (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) \rangle = 0 \quad , \quad \text{де } \vec{F} = \vec{f} - \frac{2e_0^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}$$

Скалярний добуток $(\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}})$ має один знак, тому

$$(\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) = 0$$

Звідси слідує, що або $\vec{F} = 0$ або $\vec{F} \perp \dot{\vec{r}}$

Отже:

$$\vec{f} = \frac{2e_0^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} + \vec{f}_\perp \quad \text{де } \vec{f}_\perp \text{ - перпендикулярна до } \dot{\vec{r}}$$

\vec{f}_\perp має смисл кулонівської сили.

Отже вираз для сили променевого тертя:

$$\vec{f}_{\text{пр.тертя}} = -\frac{2e_0^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}$$

67. Класичний час життя атомів Ширина ліній випромінювання. Відбивання від експоненційного бар'єру.

Запишемо другий закон Ньютона, врахувавши як силу Кулонівської взаємодії, так і променеве тертя:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{e_0^2}{|\vec{r}|^3}\vec{r} + \frac{2}{3}\frac{e_0^2}{c^3}\ddot{\vec{r}}$$

Перший доданок відповідає за кулонівську взаємодію, другий – за променеве тертя.

$|f_{\text{кул}}| \gg |f_{\text{пром.тертя}}|$. У розгляді обмежимося нульовим наближенням.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \Delta\vec{r}(t)$$

$$|\vec{r}_0| \gg |\Delta\vec{r}|$$

$$m\ddot{\vec{r}}_0 = -\frac{e_0^2}{|\vec{r}_0|^3}\vec{r}_0$$

Виражаючи з попередньої формули $\ddot{\vec{r}}_0$, та підставляючи в вираз для потужності випромінювання:

$$P \approx \frac{2e_0^2}{3c^3} \langle (\ddot{\vec{r}}_0)^2 \rangle = \frac{2e_0^6}{3c^3m^2} \left\langle \left(\frac{1}{r_0} \right)^4 \right\rangle = \frac{2e_0^6}{3c^3m^2} \frac{1}{|\vec{r}_0|^4}$$

Енергія кулонівської взаємодії: $E_{\text{кул.вз}} = -e_0\phi = -\frac{e_0^2}{|\vec{r}|}$; $P \approx \frac{2E_{\text{кул.вз}}^4}{ec^3m^2e_0^2}$

Сумарна енергія: $E_S = T + U = \left\langle \frac{m(\dot{\vec{r}})^2}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{e_0^2}{|\vec{r}|} \right\rangle$

Так як поле центральносиметричне, за теоремою Віріала: $E_S = \frac{1}{2}E_{\text{кул.вз}}$

$$P = -\frac{dE_S}{dt}$$

$$\frac{dE_{\text{кул.вз}}}{dt} + bE_{\text{кул.вз}}^4 = 0;$$

$$b = \frac{4}{3c^3e_0^2m^2}$$

$$\int_W^{-\infty} \frac{dE_{\text{кул.вз}}}{E_{\text{кул.вз}}^4} = -\int_0^T b dt;$$

$$W = E_{\text{кул.вз}}(t=0) = -\frac{e_0^2}{a_0}$$

$$T = \frac{a_0^3c^3m^2}{4e_0^4} - \text{класичний час життя атома. Для } a_0 \sim 1\text{\AA} \quad T \sim 10^{-10}\text{с.}$$

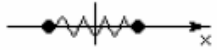
9. Ширина лінії випромінювання.

Коливання по колу завжди можна розкласти на два осцилятори (уявімо фігури Лісажу наприклад).

Знайдемо ширину ліній випромінювання для гармонічного осцилятора за наявності радіаційного тертя:

$$m\ddot{x} = -kx + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{x}$$

Сила радіаційного тертя не є універсальною, тобто так гарно вона не завжди записується.



– в отакому випадку можливий нормальний запис формули для радіаційного тертя.

Перепишемо наше рівняння ввівши деякі позначення:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0, \quad Q = \frac{2e^2}{3mc^3}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = Q \ddot{x}$$

Будемо вважати доданок $Q \ddot{x}$ малим впливом, і будемо шукати розв'язок методом збурень, тобто в вигляді:

$$x = x_0 + \delta x$$

Нульове наближення: $\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$, і відповідно розв'язок – звичайні коливання.

Отже рівняння для δx : $\delta \ddot{x} + \omega_0^2 \delta x = Q \ddot{x}_0$, з рівняння в першому наближенні $\ddot{x}_0 = -\omega_0^2 x_0$, отже матимемо рівняння (також до лівої частини рівняння можна дописати рівняння в першому наближенні, і отримати рівняння для x):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\omega_0^2 Q x_0, \text{ або позначивши } \gamma = \omega_0^2 Q$$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Теорія справедлива, коли виконується умова $\gamma \ll \omega_0$, тобто інакшими словами, коли ми маємо право так застосовувати метод збурень.

Розв'язок цього рівняння добре відомий:

$$x(t) = U_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_0 t, \quad \ddot{x}(t) = \tilde{U} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_0 t$$

Поле в дипольному наближенні пропорційне $E(t) \sim \ddot{p} \sim \ddot{x}$, отже:

$$E(t) = \theta(t) E_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_0 t, \text{ де } \theta(t) - \text{функція Хевісайда.}$$

Отже внаслідок наявності радіаційного тертя, енергія в осциляторі експоненційно зменшується. Це означає, що випромінювання відбувається в вигляді пугів хвиль з ефективною довжиною порядку c/γ . Такі імпульси випромінювання скінченної тривалості, вже не будуть монохроматичними, а будуть характеризуватися спектром частот, що займають інтервал порядку γ . Точний вигляд спектру визначається Фур'є перетвором напруженості електричного поля:

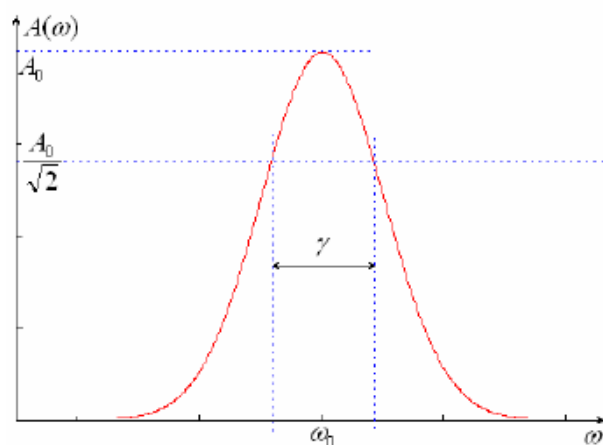
$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi} \frac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega - \omega_0)} = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = \frac{E_0}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{2(\omega - \omega_0)}{\gamma}\right)$$

При зміні початкових умов змінюється тільки фаза.

Ширину лінії на рівні половини інтенсивності (або значення амплітуди поділити на $\sqrt{2}$), яка рівна γ (з формули для амплітуди елементарно отримаємо), прийнято називати шириною лінії. Наявність реакції випромінювання обумовлює розширення лінії.



Маючи ширину лінії та частоту, можемо знайти значення величини затухання (обернена величина добротності):

$$d = \frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{\omega_0^2 Q}{\omega_0} = \frac{2e^2 \omega_0}{3mc^3} = \frac{2e^2 / \lambda}{3mc^2},$$

Значення енергії e^2 / λ невелике, порівняно з mc^2 , тому величина затухання $d \ll 1$.

68. Дифракція на гаусовій діафрагмі. Аналіз дифракційного поля при дифракції на гаусовій дпафрагмі.

12. Дифракція електромагнітних хвиль на Гаусовій діафрагмі.

Гаусова діафрагма характеризується таким коефіцієнтом пропускання:

$$T(x, y) = e^{-\frac{x^2}{2a_x^2} - \frac{y^2}{2a_y^2}}$$

Поле хвиль на виході:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}$$

Нехай дифракція суто в напрямку осі Ох (при тому, що поширення вздовж Oz).

$$\vec{E}(\vec{k}) = \vec{E}_0(\vec{k}) \delta(|\vec{k}| - k_0) \delta(k_y)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= e^{-i\omega t} \iiint_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_0(k_x, k_y, k_z) \exp(i(k_x x + k_y y + k_z z)) \delta(|\vec{k}| - k_0) \delta(k_y) dk_x dk_y dk_z = \\ &= e^{-i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{E}_0(\theta) e^{ik_0(x \sin \theta + z \cos \theta)} k_0 d\theta \quad (*) \end{aligned}$$

Запишемо крайові умови:

$$\vec{E}(x, y, +0, t) := \vec{e}_y A_0 e^{-\frac{x^2}{2a_0^2} - i\omega t}$$

$$\vec{e}_y A_0 e^{-\frac{x^2}{2a_0^2} - i\omega t} = e^{-i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{e}_y E_0(\theta) e^{ik_0(x \sin \theta)} k_0 d\theta$$

$$A_0 e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E_0(\theta) e^{ik_0(x \sin \theta)} k_0 d\theta$$

Візьмемо Фур'є перетвір по q :

$$A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2} - iqx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-iqx} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E_0(\theta) e^{ik_0(x \sin \theta)} k_0 d\theta$$

Перший інтеграл береться, а в другому можна побачити означення дельта-функції у розумінні теорії узагальнених функцій:

$$A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2} - iqx} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E_0(\theta) 2\pi \delta(k_0 \sin \theta - q) k_0 d\theta$$

$$A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2} - iqx} dx = 2\pi k_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta E_0(\theta) \delta(\theta - \theta_m) \frac{1}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) \Big|_{\theta=\theta_m}},$$

$$\partial_e \phi = k_0 \sin \theta - q; \quad \phi(\theta_m) = 0$$

$$E_0(\theta_m) = \frac{A_0}{2\pi} \cos \theta_m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2} - ik_0 \sin \theta_m x} dx$$

$$E_0(\theta_m) = \frac{A_0 a_0}{\sqrt{2\pi}} \cos \theta_m \exp\left(-\frac{a_0^2 k_0^2 \sin^2 \theta_m}{2}\right)$$

$$a_0 k_0 \gg 1 \Rightarrow a_0 \gg \lambda \quad \sin \theta_m = \alpha$$

$$(*) \Rightarrow E(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t} \frac{A_0 a_0 k_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{(a_0 k_0 \alpha)^2}{2} + ik_0(\alpha x + \sqrt{1-\alpha^2} z)\right) d\alpha$$

Це довгий інтеграл. Тому:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_y A_0 F_1(\vec{r}) \exp(i(k_0 z - \omega t))$$

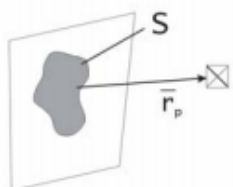
$$\vec{F}_1(\vec{r}) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2a_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)}\right)}{\left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)^{1/4}} e^{i\Delta\Phi(\vec{r})}$$

$$z_r = k_0 a_0^2$$

69. Теорія дифракції Кірхгофа. Умови існування дифракції Кірхгофа. Математичне формулювання принципу Гюйгенса-Френеля.

10. Теорія дифракції Кірхгофа

Формула Френеля-Гюйгенса справедлива далеко не завжди. І взагалі теорія дифракції дуже складна і далеко не прозора.



Формула Френеля-Гюйгенса: $U_p(\vec{r}) = a \int_{S_0} \frac{U(\vec{r}') \exp[ik_0 |\vec{r} - \vec{r}'|]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$ (1), де $U_p(\vec{r})$ -

поле зображення, та $U(\vec{r}')$ - поле в площині (наприклад, площині діафрагми).

Тобто, кожна точка простору – є джерело сферичних хвиль.

За формулою Гріна

$$\iiint_{V_0} [U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1] dV = - \iint_{S_0} \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right] ds \quad (2) \quad (\text{знак “-” перед}$$

інтегралом по поверхні поставлений, бо ми беремо нормаль всередину області).

Причому ця формула справедлива не лише для однозв'язних областей.

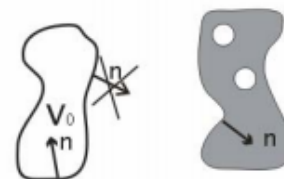
Умови на функцію U : гармонійна, диференційовна 2 порядку.

Вид функцій U_2 та U_1 був запропонований Кірхгофом.

Розглядаємо електромагнітне поле. Нехай U_1 та U_2 задовольняють одному і тому ж хвиловому рівнянню:

$$\Delta U_{1,2} = -k_0^2 U_{1,2} \quad (3),$$

$$\text{тоді } \iint_{S_0} \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right] ds = 0, \text{ де позначимо } F_0 = \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right] \quad (4).$$



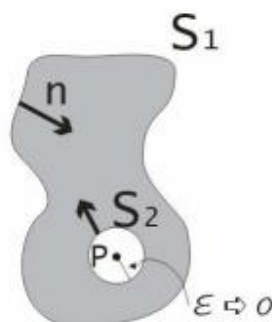
- 13 -

Запишемо U_2 у вигляді сферичної хвилі

$$U_2 = \frac{\exp[ik_0 |\vec{r}|]}{|\vec{r}|} \quad (5)$$

Але в точці $|\vec{r}| = 0$ маємо невизначеність, і тому математичним методом обійдемо її, розбивши поверхню на дві: що включає точку спостереження (коло нескінченно малого радіуса), і ту, що не включає.

Розглядаємо дві поверхні, S_1 і S_2 , та $S_0 = S_1 + S_2$.



$$\iint_{S_1} F_0 dS_1 + \iint_{S_2} F_0 dS_2 = 0 \quad (6) \quad (\text{це просто переписана формула (4) з}$$

урахуванням перепозначень).

Розглянемо інтеграл $\iint_{S_2} F_0 dS_2$:

$$\iint_{S_2} F_0 dS_2 = \iint_{S_2} \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial r} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial r} \right] r^2 d\Phi, \text{ де}$$

$$\frac{\partial U_m}{\partial n} = (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} U_m) = \vec{e}_r \cdot \left(\vec{e}_r \frac{\partial U_m}{\partial r} \right) = \frac{\partial U_m}{\partial r}, \text{ де } \vec{n} = \vec{e}_r.$$

$$U_2 \text{ та } \frac{\partial U_m}{\partial r} - \text{відомі функції, причому } \frac{\partial U_m}{\partial r} = \frac{\exp[ik_0 |\vec{r}|]}{|\vec{r}|} \left(ik_0 - \frac{1}{|\vec{r}|} \right).$$

На цій поверхні $|\vec{r}| = \varepsilon$; також врахуємо, що $dS = r^2 d\Phi$, тоді це

$$\iint_{S_2} F_0 dS_2 = \iint_{S_2} \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial r} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial r} \right] r^2 d\Phi = \iint_S \left\{ U_1 (ik_0 \varepsilon - 1) - \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial r} \right\} \exp(ik_0 \varepsilon) d\Phi \quad (7)$$

Розглянемо цей інтеграл як $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$, врахувавши, що $ik_0 \varepsilon \rightarrow 0$, тоді $\exp(\dots) \rightarrow 1$,

Поле, що ми розглядаємо – фізичне поле, де нема ніяких полюсів, отже $\varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial r} \Big|_{|\vec{r}|=\varepsilon} \rightarrow 0$

Тоді U_1 можна в маленькому околі вважати константою $\iint_{4\pi} -U_1 d\Phi = 4\pi U_1(0)$ (8).

$$4\pi U_1(0) = -\iint_{S_1} \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right] dS_1 \quad (9), \text{ звідки:}$$

$$U_1(0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right] dS_1 \quad \text{— інтегральна теорема Гельмгольца-Кірхгофа}$$

Таким чином поле в вибраній точці “0” пов’язано з іншими точками на межі області і співвідношення, яким вони пов’язані – інтегральна теорема Гельмгольца-Кірхгофа.

11. Математичне формулювання принципу Гюйгенса

Функцію $U_1 \rightarrow E_p(\vec{r}_p)$ (розглядаємо поле як електричне поле) назвемо скалярним варіантом нашого поля.

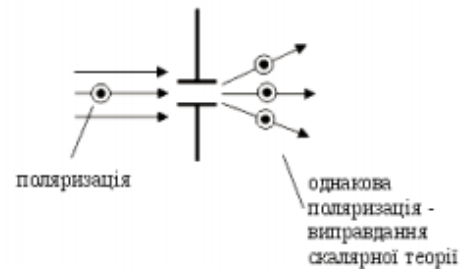
Світло буде дифрагувати, але поляризацію ми виберемо циркулярну.

Але якщо поляризація не змінюється після дифракції, то ми можемо розглядати амплітуди.

Перемістимо систему координат далеко від попередньої.

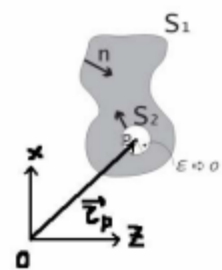
За інтегральною теоремою Гельмгольца-Кірхгофа:

$$4\pi U_1(0) = -\iint_{S_1} \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right] dS_1.$$

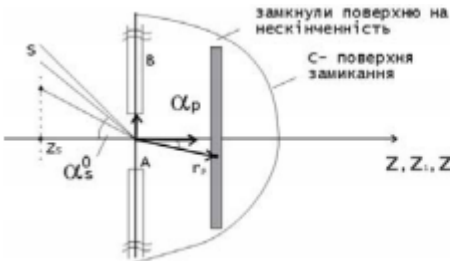


- 14 -

$$E(\vec{r}_p) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left\{ E(\vec{r}_1) \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{\exp[ik_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \right) - \frac{\exp[ik_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \frac{\partial E(\vec{r}_1)}{\partial n_1} \right\} dS_1 \quad (1)$$



Замикаємо поверхню на ∞ , це все буде S_1 . $S_1 = A + B + C$, де А-прозора поверхня, В-непрозора, С-частково непрозора. Але $E(\vec{r} \in C) \rightarrow 0$ та $E(\vec{r} \in B) \rightarrow 0$ (але на нескінченності внесок не нульовий, бо площа $\sim r^2$).



Тобто внесок даватиме лише інтеграл по А:

$$E(\vec{r}_p) = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left\{ E(\vec{r}_1) \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \right) - \frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \frac{\partial E(\vec{r}_1)}{\partial n_1} \right\} dS_1$$

Необхідно знати не тільки поле на вхідній діафрагмі, але й похідну:

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \right) = \left[ik_0 - \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \right] \cdot \frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \frac{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_p|}{\partial n_1} = \left\{ \text{нехтуємо } \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|}, n_1 = z_1 \right\} =$$

$$= ik_0 \cdot \frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \frac{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_p|}{\partial z_1} \quad (2)$$

Скористаємося тим, що $|\vec{r}_1 - \vec{r}_p| \gg \lambda$ (3).

$$\text{Тоді } \frac{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_p|}{\partial z_1} \bigg|_A = \frac{z_1 - z_p}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \bigg|_{z_1=0} = -\cos \alpha_p(\vec{r}_1, \vec{r}_p) \quad (4) \quad (z_p > 0)$$

Як видно з малюнка, α_p є не що інше, як кут нахилу \vec{r}_p до осі OZ .

$$E(\vec{r}_1) = \sum_m E_m(\vec{r}_1, \vec{R}_m) \quad (5) \quad (\vec{R}_m - \text{координати всіх точок джерела})$$

Вважаючи джерела квазіточковими, одержимо:

$$E_m(\vec{r}_1) = A_m \frac{\exp[ik_0|\vec{R}_m - \vec{r}_1| + i\varphi_m]}{|\vec{R}_m - \vec{r}_1|} \quad (6).$$

Введемо гіпотезу: кутові розміри джерела маленькі (α_S^0 - середній кут)

$$\frac{\partial E(\vec{r}_1)}{\partial n_1} \cong ik_0 E(\vec{r}_1) \cos \alpha_S^0 \quad (7), \text{ підставляємо цю формулу до (1):}$$

$$E(\vec{r}_p) = -\frac{ik_0}{4\pi} \iint_A E(\vec{r}_1) \frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \Phi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_p) dS_1 \quad (10), \text{ де}$$

$$\Phi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_p) = \cos \alpha_p(\vec{r}_1, \vec{r}_p) + \cos \alpha_S^0 \quad (11).$$

Розглянемо 2 випадки:

1. Джерело на осі $\alpha_S^0 = 0$, тоді $\Phi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_p) = 1 + \cos \alpha_p(\vec{r}_1, \vec{r}_p)$

2. Діафрагма велика порівняно з довжиною хвилі $\alpha_p = \alpha_p^0 = 0$ (12), де α_p^0 - центральний кут.

$$\text{Тоді } \Phi_0 = 2, \text{ звідки } E(\vec{r}_p) = -\frac{ik_0}{2\pi} \iint_A E(\vec{r}_1) \frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} dS_1 \quad (13).$$

Зауважимо, що в дифракції Гюйгенса пеле дійсна функція, а отримали комплексну (зсув на $\pi/2$);

Також бачимо, що вторинні хвилі не є сферичними.

Формула Гюйгенса застосовна для пояснення хвильових властивостей (в більш складних застосуваннях неможливе).

70. Дифракція Френеля на непрозорому диску. Аналіз дифракційного поля.

Дифракцією Френеля називають дифракцію від сферичного фронту хвилі.

У випадку дифракції світла на круглому непрозорому диску ВС закрити ним ділянку фронту хвилі треба виключити з розглядання і будувати зони Френеля, починаючи з країв диска.

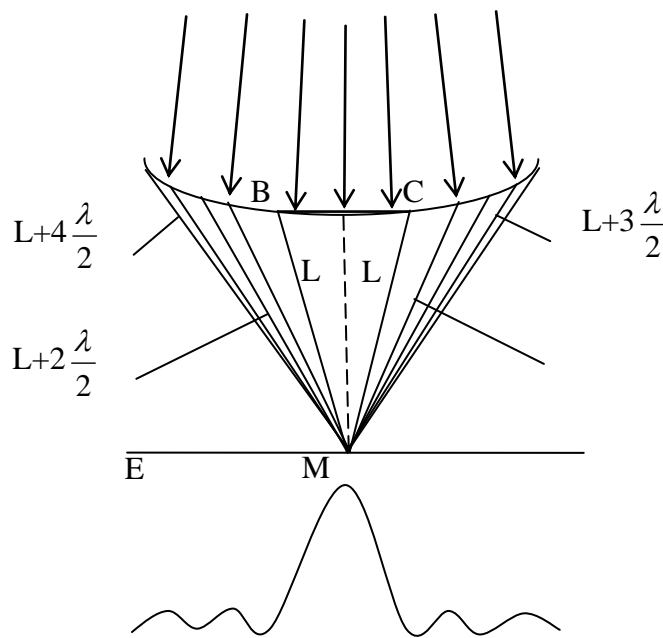


Рис. 13

Амплітуда A в точці M визначається спільною дією всіх відкритих зон, починаючи з першої:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots = A_1/2 + (A_1/2 - A_2 + A_3/2) + (A_3/2 - A_4 + A_5/2) + \dots = A_1/2.$$

Отже, в точці M завжди буде інтерференційний максимум, оточений концентричними з ним темними і світлими інтерференційними кільцями, які чергуються. Із збільшенням радіуса диска перша відкрита зона віддаляється від точки M і збільшується кут α_1 між нормаллю до поверхні цієї зони в будь-якій її точці та напрямком випромінювання в бік точки M . Тому інтенсивність центрального максимуму зменшується при збільшенні розмірів диска. Якщо радіус диска набагато більший за радіус закритої ним центральної зони Френеля, то за диском буде звичайна тінь із дуже слабкою інтерференційною картиною на її межах. Очевидно, що в цьому разі явищем дифракції світла можна знехтувати і скористатися законом прямолінійного поширення світла.

§ 60. Дифракция Френеля

Если источник света и точка P , в которой мы ищем интенсивность света, находятся на конечном расстоянии от экрана, то для определения интенсивности в точке P играет роль лишь небольшой участок волновой поверхности, по которой происходит интегрирование в (59,2), — участок, лежащий вблизи прямой, соединяющей источник с точкой P . Действительно, поскольку отклонения от геометрической оптики слабы, то интенсивность света, приходящего в P из различных точек волновой поверхности, очень быстро падает по мере удаления от указанной прямой. Дифракционные явления, в которых играют роль лишь небольшие участки волновой поверхности, носят название *дифракции Френеля*.

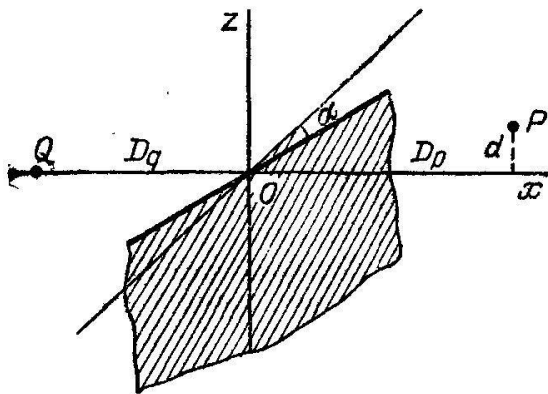


Рис. 11

Рассмотрим дифракцию Френеля от какого-нибудь экрана. Благодаря указанному свойству при этом играет роль (при заданной точке P) только небольшой участок края экрана. Но на достаточно малых участках край экрана можно всегда считать прямолинейным. Ниже под краем экрана будет поэтому подразумеваться именно такой небольшой прямолинейный участок.

Выберем в качестве плоскости xu плоскость, проходящую через источник света Q (рис. 11) и через линию края экрана. Перпендикулярную к ней плоскость xz выбираем так, чтобы она прошла через точку Q и точку наблюдения P , в которой мы ищем значение интенсивности света. Наконец, начало координат O выбираем на линии края экрана, после чего положение всех трех осей вполне определено.

Расстояние от источника света Q до начала координат пусть будет D_q . x -координату точки наблюдения P обозначим как D_p .

Расстояние от источника света Q до начала координат пусть будет D_q . x -координату точки наблюдения P обозначим как D_p .

71. Інтерференція на гаусових щілинах.

Інтерференція хвиль — явище накладання двох або більше когерентних світлових хвиль в результаті чого в одних місцях спостерігається підсилення результуючої хвилі (інтерференційний максимум), а в інших місцях послаблення (інтерференційний мінімум).

Гаусова діафрагма характеризується таким коефіцієнтом пропускання:

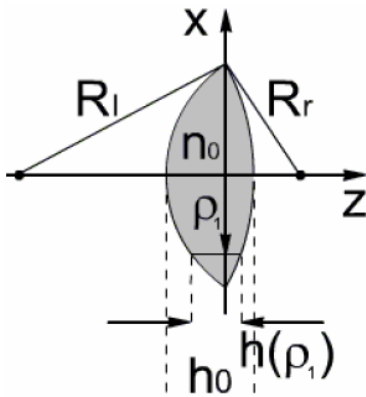
$$T(x, y) = e^{-\frac{x^2}{2a_x^2} - \frac{y^2}{2a_y^2}}$$

Поле хвиль на виході:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}$$

72. Проходження світла крізь лінзу. Формула Кірхгофа. Кут дифракційного розходження.



Відкладатимемо радіально від нуля змінну висоти ρ_1 і для початку виведемо зсув фази для променя, що проходить на висоті ρ_1 .

$$\Delta\phi(\rho_1) = \sum_m k_m \cdot l_m = \frac{\omega}{c} \sum_m n_m \cdot l_m \quad (\text{повітря-скло-повітря}).$$

У квадратичному наближенні $h(\rho_1) \cong h_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_l} + \frac{1}{R_r} \right) \rho_1^2$. Тоді

$$\Delta\phi(\rho_1) = \Delta\phi_{\max} - g_0 \rho_1^2, \quad \text{де } \Delta\phi_{\max} = \frac{\omega}{c} n_0 \cdot h_0;$$

$$g_0 = \frac{\omega}{2c} \left(\frac{1}{R_l} + \frac{1}{R_r} \right) (n_0 - 1). \quad ((n_0 - 1) \text{ бо враховано проходження у}$$

повітрі).

Для проведення подальшого розгляду задачі замінимо лінзу на систему, що складатиметься з гаусової діафрагми, яка вирізатиме на вході системи *параксіальну* область радіусу a_0 та тонкого фазового транспаранту, єдина властивість якого полягатиме у повороті фази променя у певній точці на величину, яка відповідає такому повороту у лінзи. Оптична система стає надтонкою і її коефіцієнт пропускання розраховується як

$$\tau(\rho_1) = \frac{E_{out}(\rho_1)}{E_{in}(\rho_1)} = \exp \left[-\frac{\rho_1^2}{2a_0^2} + i(\Delta\phi_{\max} - g_0 \rho_1^2) \right]$$

Як це легко зрозуміти, перша частина в експоненті вноситься гаусовою діафрагмою, а друга – фазовим транспарантом. Отримана оптична система називається амплітудно-фазовим транспарантом.

Далеко на осі z встановимо екран, на якому відображатиметься картинка. Координату, що проектується на екран, назвемо \bar{r}_p , координату на транспаранті - \bar{r}_1 . У від'ємній області z на досить далекій відстані встановимо точкове джерело світла, його координата - \bar{r}_s , джерело знаходиться на вісі. Знайдемо напруженість поля у точці \bar{r}_p :

$$E(\bar{r}_p) = -\frac{ik_0}{2\pi} \int E(\bar{r}_1) \frac{\exp[ik_0 |\bar{r}_1 - \bar{r}_p|]}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_p|} dS_1 \quad - \text{інтеграл усіх напруженостей поля на поверхні}$$

транспаранту. Екран встановлено настільки далеко, щоб $|x_1 - x_p|, |y_1 - y_p| \ll z_p$. Тоді:

$$|\bar{r}_1 - \bar{r}_p| = z_p \sqrt{1 + \frac{(x_1 - x_p)^2 + (y_1 - y_p)^2}{z_p^2}} \approx z_p \left[1 + \frac{(x_1 - x_p)^2 + (y_1 - y_p)^2}{2 \cdot z_p^2} \right].$$

Напруженість поля, що потрапляє на транспарант зліва від далекого джерела визначено як:

$$E_{in}(\vec{r}_1) = A_0 \frac{\exp(ik_0|\vec{r}_s - \vec{r}_1|)}{|\vec{r}_s - \vec{r}_1|} \approx \frac{A_0}{|z_s|} \exp\left[ik_0|z_s| \left(1 + \frac{\rho_1^2}{2|z_s|^2}\right)\right], \text{ оскільки } z_s \gg |x_1|; |y_1|.$$

Враховуючи дію транспаранту, записуємо напруженість поля на екрані:

$$E(\vec{r}_p) = -\frac{ik_0}{2\pi} \int \vec{E}_{in} \cdot \tau(\rho_1) \cdot \frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} dS_1 = -\frac{ik_0}{2\pi \cdot z_p} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \frac{A_0}{|z_s|} \exp[ik_0 z_p + i\Phi_0] \exp\left[-\frac{x_1^2 + y_1^2}{2a_0^2} + ig_1(x_1^2 + y_1^2) + \frac{ik_0}{z_p}((x_1 - x_p)^2 + (y_1 - y_p)^2)\right]$$

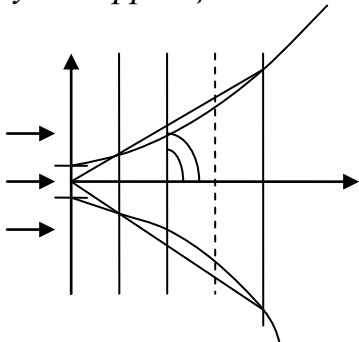
, де $\Phi_0 = \Delta\phi_{\max} + k_0|z_s|$; $g_1 = \frac{k_0}{2|z_s|} - g_0$.

Виконавши інтегрування, можна отримати формули напруженості поля та інтенсивності на поверхні екрану. Вони матимуть наступний вигляд:

$$E(\vec{r}_p) = \frac{c_0}{r_p} \frac{\exp[i\Phi_1]}{\sqrt{\left(\frac{1}{2a_0^2}\right)^2 + \left(g_1 + \frac{k_0}{2z_p}\right)^2}} \exp\left[-\frac{\left(\frac{k_0}{2z_p}\right)(x_p^2 + y_p^2)}{2a_0^2 \left[\left(\frac{1}{2a_0^2}\right)^2 + \left(g_1 + \frac{k_0}{2z_p}\right)^2\right]}\right]$$

$$I(\vec{r}_p) = \frac{c_1}{r_p^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2a_0^2}\right)^2 + \left(g_1 + \frac{k_0}{2z_p}\right)^2} \exp\left[-\frac{\left(\frac{k_0}{2z_p}\right)(x_p^2 + y_p^2)}{a_0^2 \left[\left(\frac{1}{2a_0^2}\right)^2 + \left(g_1 + \frac{k_0}{2z_p}\right)^2\right]}\right]$$

Кут дифракції



кут - Θ_p - кут дифракції. Вертикальна вісь x , горизонтальна z .

$$I(x, z = \text{const}) \sim \exp\left[-\frac{x^2}{R_0^2(z)}\right]$$

$$R_0(z) = a \sqrt{1 + \frac{Z^2}{Z_R^2}} - \text{радіус променя, що пройшов крізь діафрагму}$$

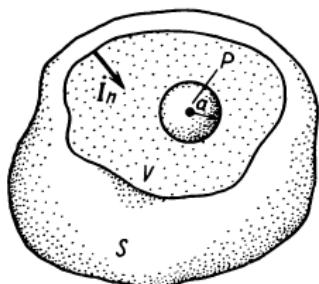
$$Z \gg Z_R; \quad R_0(z) \approx a_0 \frac{Z}{Z_R}$$

$$\operatorname{tg} \Theta_P = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{R_0(z)}{z}$$

$$\operatorname{tg} \Theta_P = \frac{a_0 \lambda}{2\pi a_0^2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{a_0} \right) \approx \Theta_P, \text{ тобто } \operatorname{tg} \Theta_P \approx \Theta_P$$

$$\text{Отже, } \Theta_P \approx \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{a_0} \right)$$

Формула Кірхгофа



Розглянемо довільний об'єм V , обмежений поверхнею S . Вважається, що поверхня гладка, тому в кожній її точці можна однозначно побудувати вектор нормалі i_n , направлений в середину об'єму.

Необхідно знайти таку скалярну функцію ψ , яка в області V задовольняє рівняння Гельмгольца $\nabla^2 \psi + \beta^2 \psi = 0$ за умови, що значення функції ψ і її нормальної похідної $\partial \psi / \partial n$ в кожній точці поверхні S задані.

Кірхгоф довів, що розв'язок матиме вигляд:

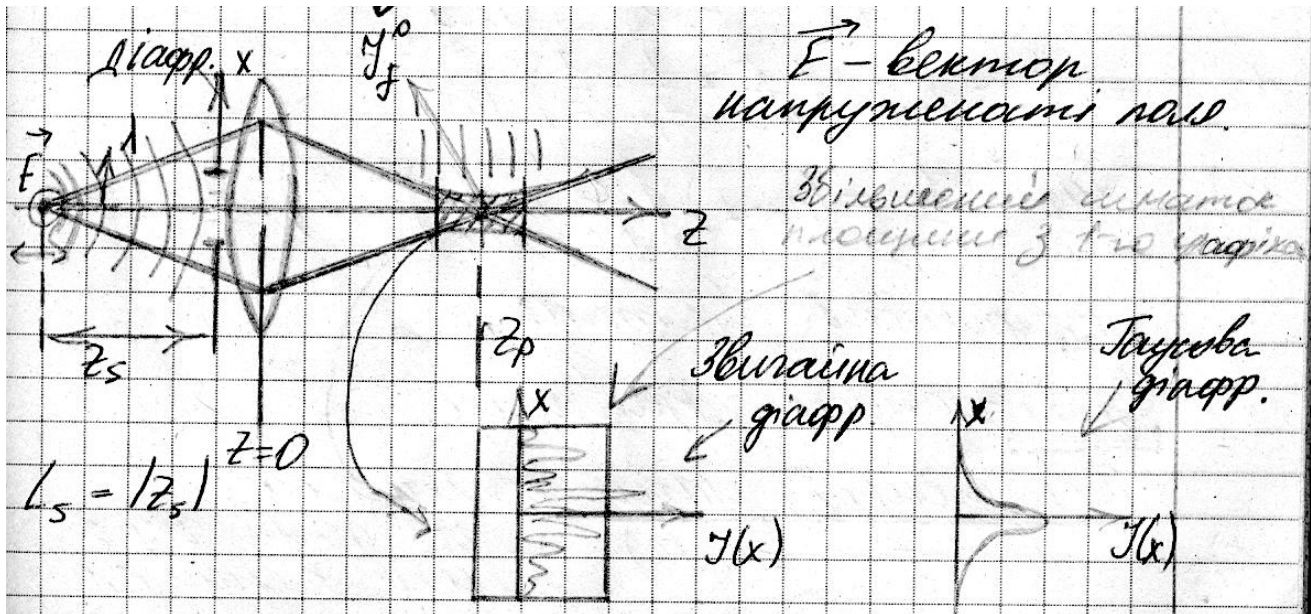
$$\psi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{e^{-j\beta r}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) \right] dS, \text{ де } r - \text{відстань між поточною точкою на}$$

поверхні і точкою спостереження P .

Доведення формули Кірхгофа засноване на формулі Гріна, згідно якої двічі

диференційовані функції ψ і ϕ просторових координат задовольняють тотожності

73. Дифракційна теорія фокусної плями.



В області біля z_p майже циліндричний промінь. Розглянемо частковий випадок $I(x_p = 0, y_p = 0, z_p)$ наступної формули (перевірити)

$$I(\vec{r}_p) = \frac{C_1}{z_p^2} \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{2a_0^2} \right)^2 + \left(g_1 + \frac{k_0}{2z_p} \right)^2 \right]} \exp \left[- \frac{\left(\frac{k_0}{2z_p} \right)^2 (x_p^2 + y_p^2)}{a_0 \left[\left(\frac{1}{2a_0^2} \right)^2 + \left(g_1 + \frac{k_0}{2z_p} \right)^2 \right]} \right]$$

$$I(x_p = 0, y_p = 0, z_p) = \frac{C_2}{z_p^2 [1 + Q_1^2(z_p)]}, \text{ де } C_2 = 4C_1 a_0^4 \text{ та } Q_1(z_p) = a_0^2 \left(2g_1 + \frac{k_0}{z_p} \right).$$

В попередню формулу підставимо $g_0 = \frac{\omega}{2c} \left[\frac{1}{R_{\Pi}} + \frac{1}{R_{\mathcal{L}}} \right] (n_0 - 1)$, $g_1 = \frac{k_0}{2L_s} - g_0$ і

$$\text{отримаємо } Q_1(z_p) = a_0^2 \left[k_0 \left(\frac{1}{L_s} + \frac{1}{z_p} \right) - 2g_0 \right] = a_0^2 k_0 \left[\frac{1}{L_s} + \frac{1}{z_p} - \frac{1}{F} \right], \text{ де}$$

$\frac{1}{F} = \frac{2g_0}{k_0} = (n_0 - 1) \left(\frac{1}{R_{\Pi}} + \frac{1}{R_{\mathcal{L}}} \right)$, де F — фокусна відстань, $R_{\Pi}, R_{\mathcal{L}}$ — правий та лівий радіуси кривизни.

Для тонкої лінзи запишемо $\frac{1}{L_s} + \frac{1}{z_p^0} = \frac{1}{F}$. z_p — довільна площина, а тут не довільна, тому познач з індексом "0".

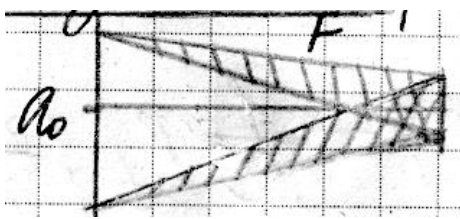
Перепишемо перше рівняння для цього випадку

$$I(x_p, y_p, z_p^0) = \frac{C_2}{(z_p^0)^2} \exp \left[-\frac{x_p^2 + y_p^2}{\rho_f^2} \right], \quad \rho_f - \text{діаметр плями у точному фокусі,}$$

$$z_R = k_0 a_0^2 - \text{релеївська довжина. } \rho_f = \frac{z_p^0}{a_0 k_0} - a_0 \left(\frac{z_p^0}{z_R} \right).$$

Розглянемо часткові випадок:

а) з лівого боку падає плоска хвиля $L_s \rightarrow \infty$, $z_p^0 = F$, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\rho_f = \frac{\lambda F}{2\pi a_0}$ — радіус



фокусування, $\frac{\lambda}{a_0} \sim \theta_D$ — кут дифракції (або кут сходження), $\rho_f \sim \theta_D F$.

Точкове джерело — джерело, яке дає сферичну хвилю, **куля** — модель точкового джерела.

$$I(x_p, y_p, z_p) = \frac{C_2}{(z_p)^2} \exp \left[-\frac{x_p^2 + y_p^2}{R_f^2(z_p)} \right] \quad (1), \quad \text{де} \quad R_f(z_p) = \rho_f \sqrt{u(z_p)} -$$

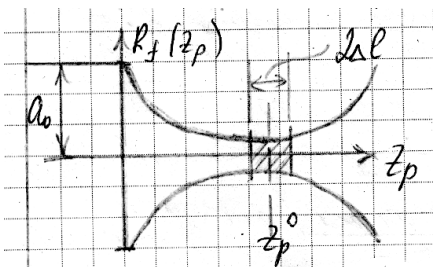
розповсюдження променя фокусування, $u(z_p)$ — допоміжна ф-ція.

$$u(z_p) = \left(\frac{z_p}{z_p^0} \right)^2 \left[1 + z_R^2 \left(\frac{1}{z_p} - \frac{1}{z_p^0} \right)^2 \right]. \quad \text{Ф-лу (1) можна переписати:}$$

$$I(x_p, y_p, z_p) = \frac{I_f^0}{u(z_p)} \exp \left[-\frac{x_p^2 + y_p^2}{\rho_f^2 u(z_p)} \right], \quad \text{де } I_f^0 - \text{інтенсивність в центрі точки}$$

фокуса. $u_f(z_p^0) = 1$, $z_p = z_p^0$.

б) $x_p, y_p = +0$, $z_p \rightarrow 0$, $I(0,0,0) = I_0$.



$$I(x_p, y_p, z_p) = I_0 \left(\frac{a_0}{R_f(z_p)} \right)^2 \exp \left[-\frac{x_p^2 + y_p^2}{R_f^2(z_p)} \right]. \quad \text{На вхідній}$$

площині $R_f(z_p = 0) = a_0$. При зменшенні діаметра променя зростатиме інтенсивність.

$$R_f(z_p) = a_0 \sqrt{\left(1 - \frac{z_p}{z_p^0} \right)^2 + \left(\frac{z_p}{z_R} \right)^2}. \quad \text{Коли радіус зменшується в } \sqrt{2} \text{ разів — це буде}$$

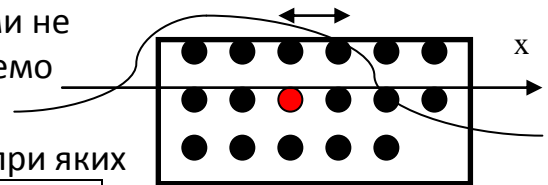
границя такої трубки. $R_f(z_p^0 \pm \Delta l) = \sqrt{2} R_f(z_p^0)$, $\Delta l Z_R = (z_p^0)^2$.

74. Мікроскопічні та макроскопічні рівняння електродинаміки. Фізично нескінченно малий об'єм і модель речовини.

Якщо ми вимірюємо поля на практиці деякими приладами, то що робити якщо масштаб детектора \gg за елементи структури, що ми вимірюємо?

Ідеєю моделі матеріальної точки є ідея правильного нескінченно малого об'єму. Тоді давайте домовимося, що будемо наз. **точкою** будь-який малий об'єкти, які характеризуються тим, що менші за них об'єкти виміряти не можна. Виникає питання, з якою точністю ми можемо поміряти координати точки за допомогою світлової хвилі?

\longleftrightarrow типова відстань 5 \AA , $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ отже так ми не зможемо поміряти наш об'єкт, отже ми його можемо вважати "матеріальною точкою".



О. Фізична точка - це об'єкт з такими розмірами, при яких його можна виміряти з точністю приладу. Тобто $\Delta l \ll \lambda$

Введемо параметр $N \gg 1$ - кількість атомів в об'ємі ($\gg 1$ оск. кількість об'єктів, що усереднюється повинно бути багато)

О. Нескінченно малим фізичним об'ємом наз. розміри цього об'єкту більші за відстань між атомами (або частинками в цьому об'ємі), але менший за точність вимірюючого пристрою. Тобто це частина досліджуваного об'єму, розмір якого менший за характеристичні значення шуканих параметрів. (**НМО**)

Таким чином мікроскопічні параметри речовини $\vec{e}(\vec{r})$ і $\vec{h}(\vec{r})$ усереднюються по НМО і вводяться відповідні значення $\langle \vec{e}(\vec{r}) \rangle = \vec{E}(\vec{r})$, $\langle \vec{h}(\vec{r}) \rangle = \vec{B}(\vec{r})$

Система р-нь **Максвелла для статистичних полів** у диф формі

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = 0 \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{div} \vec{E} = 4\pi\rho \\ \text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi\vec{j}}{c} \end{cases}, \text{ де } \rho \text{ і } \vec{j} \text{ густини мікроскопічних зарядів та мікрострумів.}$$

$$\langle \vec{j}_{\text{мікро}} \rangle = \vec{j}_i + \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t} + c \cdot \text{rot} \vec{M} \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}. \text{ Магнітні властивості реч. зумовлені}$$

молекулярними струмами (який пов'язаний зі спіном).

Нам також відоме одне динамічне р-ня – закон Фарадея в диф. формі: $\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

→ тобто це р-ня вірне як у динамічному так і в статистичному випадку.

Оскільки довести р-ня Максвелла неможливо, то спробуємо шляхом логічних переходів (як це напевно робив Максвел) побудувати с-му р-нь, що адекватно описує змінні в часі поля.

1. Магнітних зарядів також немає і в динамічному випадку – статистичне р-ня: $\text{div} \vec{B} = 0$ не змінюється

2. Диф. форма закону Фарадея є узагальненим р-ям $\text{rote}=0$ – тому для динамічного випадку будемо вважати $\text{rote}=(-d\vec{B})/(c dt)$
3. Диф. форма закону Гауса має бути справедливою і в динаміці, оскільки потік \vec{E} через замкнену поверхню має бути пропорційним внутрішньому заряду: $\text{div}\vec{E}=4\pi\rho$
4. Єдине р-ня, що має змінитись є $\text{rot}\vec{B}=4\pi\vec{j}/c$. Воно суперечить закону збереження заряду, бо взявши div від обох частин отримаємо $0=4\pi\text{div}\vec{j}/c$. Помилка зникає якщо записати закон Біо-Савара-Лапласа у вигляді: $\text{rot}\vec{B}=4\pi\vec{j}/c+d\vec{E}/(c dt)$

В результаті отримаємо с-му р-нь Максвелла – Лоренца:

$\begin{aligned} \text{div}\vec{B} &= 0 \\ \text{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}\vec{E} &= 4\pi\rho \\ \text{rot}\vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$, яку довести неможливо.
---	--------------------------

Макроскопічні рівняння Максвелла

Основна ідея полягає в тому, що беруть відомі всім р-ня Максвелла-Лоренца, які насправді стосуються мікроскопічних параметрів речовини і шляхом узагальнень та усереднень переходять до макроскопічних параметрів

Модель Максвелла: всі заряди діляться на 2 категорії: вільні та зв'язані, вони можуть характеризуватися такими величинами: швидкість та магнітний момент. *Заряди складають:* сторонні заряди і струми та внутрішні заряди і струми. В нашому розгляді сторонні заряди та струми не враховують (рівні 0). Розглянемо величину

$$\langle \rho(\text{мікро}) \rangle = \rho(\text{вільні}) + \rho(\text{зв'язані}). \quad (1)$$

Середня густина вільного заряду визначається як: $\rho(r, t) = \frac{1}{\Delta V} \sum q_n$ (2), виразимо густину зв'язаних зарядів через поляризацію $\rho(\text{зв}) = -\text{div}\vec{P}(r, t)$, \vec{P} – питомий дипольний момент зарядженої частинки $\vec{P}(r, t) = (1/V) \sum q_m \vec{r}_m$. Мікро струм можна розкласти на такі складові: $\langle \vec{j}(\text{мікро}) \rangle = \vec{j} + \vec{j}_p + \vec{j}_m$, де \vec{j} – струм вільних зарядів, \vec{j}_p – поляризаційний струм, \vec{j}_m – струм магнітного моменту.

$\langle \vec{j}_{\text{мікро}} \rangle = \vec{j}_i + \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t} + c \cdot \text{rot}\vec{M}$	Причому $\vec{j}_p = d\vec{P}/dt$, $\vec{j}_m = c \text{rot}\vec{M}$, \vec{M} -
---	---

магнітний момент. Для того щоб абстрагуватись від локальних та миттєвих значень вводимо усереднення по часу та по об'єму, тоді остаточно отримуємо **макроскопічні р-ня Максвелла**

Тут ρ і \vec{j} мають сенс усереднених величин, які визначенні лише для вільних зарядів.

$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}\vec{B} &= 0 \\ \text{div}\vec{D} &= 4\pi\rho \\ \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi\vec{P} \\ \vec{B} &= \vec{H} + 4\pi\vec{M} \end{aligned}$

75. Зв'язані заряди і поляризація.

63.Зв'язані заряди і поляризація. Внесок магнітного моменту в середній струм.

Система диференціальних рівнянь Максвела-Лоренца:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{h} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} & \text{div} \vec{e} &= 4\pi \rho \\ \text{rot} \vec{e} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} & \text{div} \vec{h} &= 0 \end{aligned}$$

де \vec{j}, ρ - точкові, мікро. Усереднення

$$\langle \vec{e} \rangle = \vec{E} \quad \text{величин дасть}$$

$$\langle \vec{h} \rangle = \vec{H} \quad \text{В усереднених величинах } \langle \vec{j}_{\text{мікро}} \rangle, \langle \rho_{\text{мікро}} \rangle$$

замасковані два класи зарядів – а) вільні, для

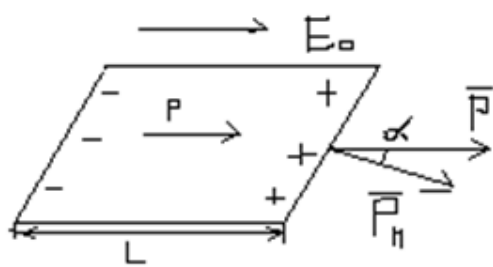
яких нема просторового обмеження - q_n ; б) зв'язані, що переміщуються на відстані порядку розміру атома - \tilde{q}_n .

Введемо ще \vec{m}_n - магнітний момент виключно зв'язаних зарядів, що рухаються по замкненій або квазізамкненій

траєкторії. Згідно цієї моделі $\rho_{\text{пов}} = \rho + \rho_{\text{зв}}$

Вектором поляризації електричний момент об'єму. Розглянемо в

електричному полі діелектрик у вигляді косої призми з ребром L та основою S .



на одній основі поляризаційні заряди $+\sigma$, на іншій $-\sigma$. Призма має поляризаційний момент $p = \sigma SL$.

Об'єм призми $v = SL \cos \alpha$. Тому Розглянемо всередині

$$p = \frac{\sigma * v}{\cos \alpha} = P * v \rightarrow \sigma = P_n$$

поляризованого діелектрика нескінченно малий

паралелепіпед зі сторонами dx, dy, dz . Тоді к-сть додатного заряду що виходить з паралелепіпеда через грань $x+dx$:

$$(P_x + \partial_x P_x * dx) dy * dz$$

а входить через паралельну $P_x dy + dz$ тому приріст
 додатного заряду $-\partial_x P_x * dv$ загалом отримаємо
 $-\rho = \partial_x P_x + \partial_y P_y + \partial_z P_z = \text{div } P$. Щодо струмів.

Магнітні моменти $\vec{m}_n = \frac{1}{2c} \sum_n [\vec{r}_n \times \vec{i}_n] \quad \langle \vec{m} \rangle = \vec{M}$

молекулярні струми Ампера : $\int \vec{j}_{\text{могл}} d\vec{S} = \int \vec{M} d\vec{l}$

Струми зв'язаних зарядів:

$$\langle \vec{j}'_{\text{мікро}} \rangle = \frac{1}{\Delta N} \sum_{n=1}^{\square} q_n \partial_t \vec{r}_n = \partial_t \left(\frac{1}{\Delta N} \sum_{n=1}^{\square} q_n \vec{r}_n \right) = \partial_t \vec{P}$$

Отже, загалом маємо :

$$\langle \vec{j}_{\text{мікро}} \rangle = \vec{j} + \partial_t \vec{P} + c * \text{rot } \vec{M}$$

76. Внесок магнітного моменту в середній струм («молекулярний»).

Система диференціальних рівнянь Максвела-Лоренца:

$$\text{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{e} = 4\pi\rho$$

$$\text{rot} \vec{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{h} = 0,$$

де j, ρ - точкові, мікро. Усереднення величин дасть

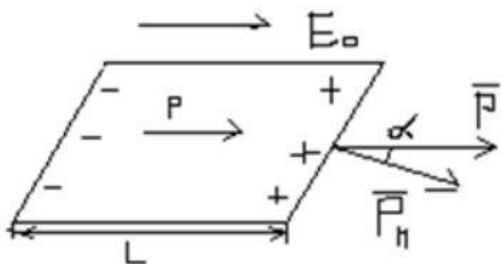
$$\langle \vec{e} \rangle = \vec{E}$$

$$\langle \vec{h} \rangle = \vec{H}$$

В усереднених величинах $\langle j_{\text{мікро}} \rangle, \langle \rho_{\text{мікро}} \rangle$ замасковані два класи зарядів - а) вільні, для яких нема просторового обмеження - q_n ; б) зв'язані, що переміщуються на відстані порядку розміру атома - \tilde{q}_n . Введемо ще m_n - магнітний момент виключно зв'язаних зарядів, що рухаються по замкненій або квазізамкненій траєкторії. Згідно цієї моделі $\rho_{\text{нов}} = \rho + \rho_{\text{зв}}$.

Вектором поляризації називається електричний момент одиниці об'єму

$$\vec{p} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i. \text{ Розглянемо в електричному полі діелектрик у вигляді косої призми з}$$



ребром L та основою S .

на одній основі поляризаційні заряди $+\sigma$, на іншій $-\sigma$. Призма має поляризаційний момент

$$p = \sigma SL. \text{ Об'єм призми } v = SL \cos \lambda. \text{ Тому}$$

$$p = \frac{\sigma * V}{\cos \lambda} = P * V \rightarrow \sigma = P_n$$

Розглянемо всередині поляризованого діелектрика нескінченно малий паралелепіпед зі сторонами dx, dy, dz . Тоді к-сть додатного заряду що виходить з паралелепіпеда через грань $x+dx$:

$$(P_x + \partial_x P_x * dx) dy * dz$$

а входить через паралельну $P_x dy * dz$ тому приріст додатного заряду $-\partial_x P_x * dV$ загалом отримаємо

$$-\rho = \partial_x P_x + \partial_y P_y + \partial_z P_z = \text{div} P$$

Щодо струмів

Магнітні моменти $\vec{m}_n = \frac{1}{2c} \sum_n [\vec{r}_n \times \vec{i}_n] \quad \langle \vec{m} \rangle = \vec{M}$

молекулярні струми Ампера : $\int \vec{j}_{\text{мол}} d\vec{S} = \int \vec{M} d\vec{l} \vec{I}$

Струми зв'язаних зарядів:

$$\langle \vec{j}'_{\text{мікро}} \rangle = \frac{1}{\Delta N} \sum_{n=\square}^{\square} q_n \partial_t \vec{r}_n = \partial_t \left(\frac{1}{\Delta N} \sum_{n=\square}^{\square} q_n \vec{r}_n \right) = \partial_t \vec{P}$$

Отже, загалом маємо :

$$\langle \vec{j}'_{\text{мікро}} \rangle = \vec{j} + \partial_t \vec{P} + c * \text{rot} \vec{M}$$

77. Матеріальні рівняння та їх тензорний характер.

Рівняння Максвела – Лоренца:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{h}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{мікро}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}; \quad \text{тут } (\vec{e}) = \vec{E}, (\vec{h}) = \vec{B} \\ \operatorname{rot}(\vec{e}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{h}) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\vec{e}) = 4\pi \rho_{\text{мікро}}$$

А ці рівняння уже менш широко застосовуються:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{H}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0,$$

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi \rho;$$

Як відомо $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{A})) = 0$ для будь-якого \vec{A} . Тоді

$$0 = \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{H})) = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div}(\vec{D})) = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (4\pi \rho)$$

звідки $\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ - рівняння неперервності.

Вільні заряди – це такі заряди, які можуть бути переміщені ел/м полем в будь-яку точку речовини. Зв'язані заряди – можуть зміщуватися на відстань порівняну з відстанню між атомами (сусідніми). Нехай є високочастотне поле з ω - оптичною частотою. При дії поля з такою частотою виникає внутрішня фотопровідність. Домішкові заряди зв'язані, а інші – вільні. Якщо зв'язаний заряд став вільним, то це не враховується в даній моделі. Струму тут не буде, бо точки еквіпотенціальні. Тоді

$$\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \quad \text{коли з'являється внутрішня фотопровідність. Перепишемо}$$

рівняння неперервності:

$$\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = S(\vec{r}, t), \quad (6) \quad \text{де } S(\vec{r}, t) \text{ - функція джерела, що описує явище}$$

переходу зв'язаних зарядів у вільні.

$S(\vec{r}, t) = S_0(T) + \beta l(\vec{r}, t) - S_{рек}(7)$, де $S_{рекомбінації}$, β , S_0 залежить від конкретних речовин ($S_{рекомбінації}$ - якийсь процес, що йде навпаки – після того, як електрон став вільним, він знову має стати зв'язаним).

Рівняння Максвелла для таких випадків не застосовні, модель точкових частинок – основа рівняння Максвелла-Лоренца.

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \vec{P} = \sum_n q_n \vec{r}_n \text{ (координати електричного заряду).}$$

Якщо ми відмовилися від точкових частинок, то і рівняння Максвелла-Лоренца не виконуються.

$\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ - 12 змінних, але в системі Максвелла-Лоренца лише 8 рівнянь. Тобто кількість змінних перевищує кількість рівнянь.

Матеріальні рівняння:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{H})$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{E}, \vec{H}) \quad (8)$$

$$\rho = \rho(\dot{E}, \dot{H})$$

$$\vec{j} = \vec{j}(\dot{E}, \dot{H})$$

$$\dot{D}(\dot{E}) = \varepsilon \dot{E}$$

$$\vec{D}(\vec{E}, \vec{H}) = \varepsilon \vec{E} + \gamma \vec{H} \quad (*)$$

де \vec{D}, \vec{E} - полярні вектори, а \vec{H} - аксіальний, тобто γ не може бути константою.

Покажемо це детальніше за допомогою оператора інверсії \hat{I} .

$$\hat{I}\psi(x, y, z) = \psi(-x, -y, -z) \quad (9)$$

$\hat{I}\dot{p} = -\dot{p}, \hat{I}\dot{a} = \dot{a}$, (10) де \dot{a}, \dot{p} - довільні аксіальний та полярний вектори відповідно.

Якщо $\dot{j} \neq const$, то рівняння (*) може бути правильним. Універсальних залежностей типу (8) не існує.

Зробимо розклад в ряд Тейлора $D_k(E_k)$. Розглянемо частковий випадок (речовина складається з йонів).

$$E_{ам} \sim \frac{e_0}{a_0^2} \sim 10^7 \text{ В / см} - \text{ за рахунок того, що заряди дуже близько один від одного,}$$

то поле велике.

$$|E_{\text{част}}| \ll E_{\text{ам}}, \alpha = \frac{E_{\text{част}}}{E_{\text{ам}}} \ll 1 \quad - \text{ за цим параметром малості можна робити}$$

розклад.

$$D_x(E_x) = D_x(0) + C_1 \frac{E_x}{E_0} + C_2 \left(\frac{E_x}{E_0}\right)^2 + \dots \quad (11), \text{ тобто}$$

$$D_x(E_x) = D_x^0 + \gamma_1 E_x + \gamma_1 E_x^2 + \dots \quad (12), \text{ де } \gamma_1 E_x^2 \text{ – доданок, що описує нелінійні}$$

явища, а вони виникають при достатньо великих полях і зараз ним можна знехтувати.

$$\text{Є ряд речовин (сегнетоелектрики, піроелектрики, електрики), де } D_x^0 \neq 0 \quad (13)$$

Як приклад застосування таких речовин є мікрофон на електриках: коли діафрагма рухається – змінюється потенціал, який ми знімаємо. Піроелектрики: турмалін при нагріванні змінює значення діелектричної сталої.

Коли речовина є неізотропною, то вираз для D_x має такий вигляд:

$$D_x(E_x, E_y, E_z) = \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z \quad (15)$$

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j \quad (16)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (17) \text{ – буде лише 6 незалежних компонент.}$$

При великих полях: $\vec{D}(\vec{E}, \vec{H})$ - фізичний ефект, що ілюструє цю залежність:

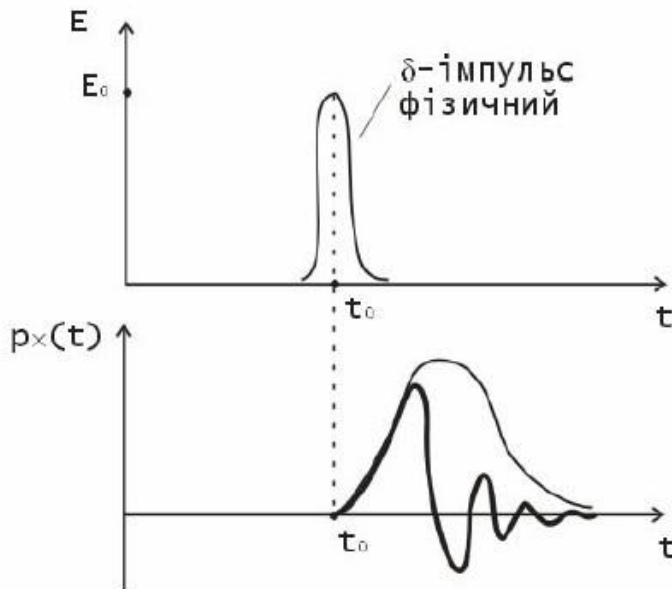
$$\text{rot}(\vec{H}(\dot{r}, \omega)) \sim \vec{H}(\dot{r}, \omega) \rightarrow \frac{\partial E_i}{\partial x_j}, \text{ тоді } D_i = \varepsilon_{ij} E_j + \gamma_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k}, \quad (19) \text{ де } \gamma_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k}$$

описує оптичну активність – це не сильне явище. Всі речовини мають діелектричну проникність ε , але не всім притаманна оптична активність.

78. Динамічний відгук. Принцип причинності.

Нехай маємо деякий імпульс $E_x(t) = E_0 \delta(t - t_0)$. Поляризація рречовини прореагує на даний імпульс: $p_x(t) = E_0 X(t - t_0)$, правда з деяким запізненням в наслідок інерційності p . Аналогічно під дією неперервного змінного імпульсу p змінюватиметься $P_x(t)$. Отже запишемо

Запишемо вирази для P і D :



$$P = \chi E$$

$$D = \epsilon E$$

Штовхнули систему

$$P_x \sim \chi,$$

$$P_x(t) = E_0 \chi(t - t_0) \quad (1)$$

$$P_x(t) = \sum \chi(t - t_n) E_n \quad (2)$$

$$t_n \leq t, \quad t - t_1 = \tau$$

$$P_x(t) = \int_{-\infty}^t \chi_{xx}(t - t_1) E_x(t_1) dt_1 \quad (3)$$

$$P_x(t) = \int_0^{\infty} \chi_{xx}(\tau) E_x(t - \tau) d\tau \quad (4)$$

(формули виражають принцип причинності)

$$\chi \rightarrow P \begin{cases} \chi(\tau = 0) = 0 \\ \chi(\tau \rightarrow \infty) = 0 \end{cases} \quad (5),$$

$X(\tau = 0) = 0$ - умова інерційності

$X(\tau \rightarrow \infty) = 0$ - умова пам'яті (сис-ма з нескінченною пам'ятю не існує)

(Частинка з часом зупиниться і зміститься до початкового положення)

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \quad (8)$$

$$\begin{cases} P_i(t) = \int_{-\infty}^t \chi_{ij}(t - t_1) E_{jx}(t_1) dt_1 \end{cases} \quad (6)$$

- узагальнення для анізотропних речовин.

$$\begin{cases} P_i(t) = \int_0^{\infty} \chi_{ij}(\tau) E_j(t - \tau) d\tau \end{cases} \quad (7)$$

$$D_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_{ij}(\tau) E_j(t - \tau) d\tau \quad (9), \text{ причому } \epsilon_{ij}(\tau < 0) = 0 \quad (10).$$

Не можна казати $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$, $\vec{P} = \sum_n q_n \vec{r}_n$

Означення тензора діелектричної проникливості:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\delta(\tau) + 4\pi\chi_{ij}(\tau) \quad (11), \text{ де } \delta_{ij} - \text{символи Кронекера.}$$

$$\left. \begin{aligned} D_i(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} D_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ E_i(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} (12) \text{ інтеграли Фур'є}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varepsilon_{ij}(\tau) E_j(\tau - t),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varepsilon_{ij}(\tau) e^{i\omega \tau} \right] E_j(\omega) e^{-i\omega t} \quad (13), \text{ (див. формулу (9)), де}$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varepsilon_{ij}(\tau) e^{i\omega \tau} \quad (14).$$

Щоб інтеграли в (13) були рівні необхідно, щоб під інтегральні ф-ї були рівними:

$$D_i(\omega) = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega), \quad \varepsilon_{ij} - \text{безрозмірна величина.}$$

$$\vec{P} = \vec{P}^{(0)} + \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(2)} + \dots$$

$$P_i^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 \chi_{ijk}(\tau_1, \tau_2) E_j(\tau - \tau_1) E_k(\tau - \tau_2) \quad (16)$$

$$P_i^{(2)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{ijk}(\omega_1, \omega - \omega_1) E_j(\omega) E_k(\omega - \omega_1) d\omega_1 \quad (17).$$

(ефекти другого порядку описуються нелінійною поляризацією)

χ_{ijk} - нелінійна поляризованість другого порядку.

$$\varepsilon_{ij}(\tau) = \delta_{ij}\delta(\tau) + 4\pi\chi_{ij}(\tau)$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = 1 + 4\pi\chi_{ij}(\omega)$$

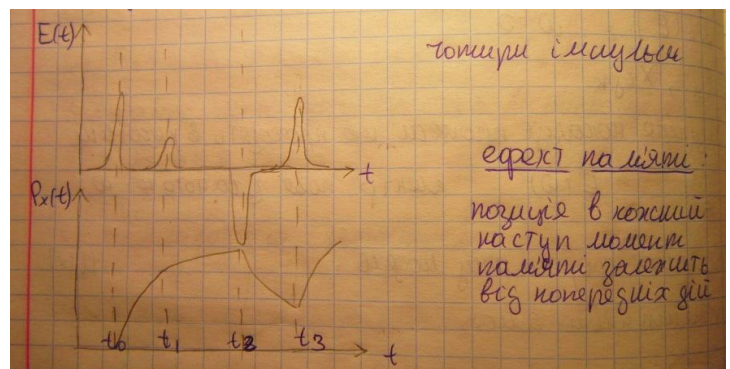
де $\delta(\tau)$ – є миттєва ф-ія відгуку

Принцип причинності - один із основних принципів фізики, який стверджує, що на подію, яка відбувається в певний час у певній точці простору, можуть впливати лише події, які передували їй у часі (точніше відділені від неї часоподібним інтервалом).

Принцип причинності тісно зв'язаний із принципом близькодії.

У класичній фізиці це твердження означає, що будь-яка подія $A(t)$ що сталася в момент часу t може вплинути на подію $B(t')$, що відбулася в момент часу t'

тільки за умови: $t' - t > 0$. Таким чином класична фізика допускає довільно велику швидкість переносу взаємодій.



79. Нелінійні ефекти другого порядку.

$$\vec{P} = \vec{P}^{(0)} + \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(2)} + \dots$$

$$P_i^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 \chi_{ijk}(\tau_1, \tau_2) E_j(\tau - \tau_1) E_k(\tau - \tau_2) \quad (16)$$

$$P_i^{(2)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{ijk}(\omega_1, \omega - \omega_1) E_j(\omega) E_k(\omega - \omega_1) d\omega_1 \quad (17).$$

(ефекти другого порядку описуються нелінійною поляризацією)
 χ_{ijk} - нелінійна поляризованість другого порядку.

80. Границі застосування макроскопічних рівнянь Максвелла.

З відповіддю на це питання виникають проблеми, тому що про ці границі немає ніде нічого..

Так що тут описано, що таке самі макроскопічні рівняння Максвелла.

Рівняння Максвелла (справа) :

Модель Максвелла: всі заряди діляться на 2 категорії: вільні та зв'язані, вони можуть характеризуватися такими величинами: швидкість та магнітний момент. Заряди складають: сторонні заряди і струми та внутрішні заряди і струми. В нашому розгляді сторонні заряди та струми не враховують (рівні 0).

Розглянемо величину

$$\langle \rho(\text{мікро}) \rangle = \rho(\text{вільні}) + \rho(\text{зв'язані}).$$

$$\langle \rho(\text{мікро}) \rangle = \rho(\text{вільні}) + \rho(\text{зв'язані}). \quad (1)$$

Середня густина вільного заряду визначається як:

$$\rho(r, t) = \frac{1}{\Delta V} \sum q_n \quad (2),$$

виразимо густину зв'язаних зарядів через поляризацію

$$\rho_{(зв)} = -\text{div} P(r, t),$$

P – питомий дипольний момент зарядженої частинки

$$P(r, t) = 1/V \sum q(m) r(m).$$

Мікро струм можна розкласти на такі складові:

$\langle J_{(\text{мікро})} \rangle = J + J_p + J_m$, де J – струм вільних зарядів, J_p – поляризаційний струм, J_m – струм магнітного моменту.

Причому $J_p = dP/dt$, $J_m = \text{Crot} M$. Для того щоб абстрагуватись від локальних та миттєвих значень вводимо усереднення по часу та по об'єму, тоді остаточно отримуємо макроскопічні р-ня Максвелла: (праворуч)

$$\text{div} B = 0$$

$$\text{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\text{div} E = 4\pi\rho$$

$$\text{rot} B = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\text{rot} H = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\text{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\text{div} B = 0$$

$$\text{div} D = 4\pi\rho$$

$$D = E + 4\pi P$$

$$B = H + 4\pi M$$

81. Симетрія і тензорні характеристики речовини. Операції симетрії в кристалах. Тензори вищих рангів.

$P_i(\vec{E}) = P_i^0 + \chi_{ij}E_j + \chi_{ijk}E_jE_k + \dots$ (1) можемо розкласти в ряд оскільки:

$$\alpha = \left| \frac{E_{\text{зовн}}}{E_{\text{внутрікрис.}}} \right| \ll 1 \quad (\text{відстань між атомами порядку ангстрем, тому}$$

поля дуже сильні)

Для магнітного моменту аналогічно:

$$M_i(\vec{H}) = M_i^0 + \delta_{ij}H_j + \delta_{ijk}H_jH_k + \dots$$
 (2)

P_i^0, M_i^0 - матеріальні параметри системи, це характеристики речовини
 χ_{ijk} - 27 компонент у 3d просторі

Теорія симетрії використовує операції симетрії – пов'язує компоненти тензора.

Операціями симетрії називають алгоритми руху, при яких реалізуються тотожні перетворення системи (тобто речовина переходить сама в себе).

Алгоритм руху: візьми ґратку, поверни на 90° .

Тотожне перетворення: ніхто не помітив обману.

Групою зветься повна сукупність усіх операцій симетрії, що відноситься до одного об'єкта. Кожна із цих операцій симетрії буде називатися елементом групи.

Група – G або $\hat{G} = \hat{G}(E, G_1, G_2, \dots)$. E, G_1, G_2, \dots - елементи групи.

Групою називається сукупність елементів, які мають такі властивості:

Існує тотожний елемент E : $E \cdot G_n = G_n$

У групі введено операцію асоціативного групового добутку:

Нехай є елементи G_1, G_2, G_3 , коли вони діють в якійсь послідовності, це – груповий добуток.

Асоціативний: $G_1 \cdot (G_2 \cdot G_3) = (G_1 \cdot G_2) \cdot G_3$

$$\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}\varphi = \widehat{A}(\widehat{B}\{\widehat{C}\varphi\})$$

Некомутативність: $G_1 \cdot G_2 \neq G_2 \cdot G_1$

Комутативність не є обов'язковою ознакою: пощастить – буде, ні – то ні.

Якщо в групі є елемент G_n , то ми часто казатимемо про нього як про прямий. Кожному елементу групи може бути поставлений у відповідність обернений елемент:

$$G_n \cdot G_n^{-1} = E$$

Для того, щоб описати кристал, слід знати 2 різновиди груп: точкові і просторові.

Точною групою зветься сукупність таких елементів, що при виконанні операцій симетрії залишають щонайменше одну точку

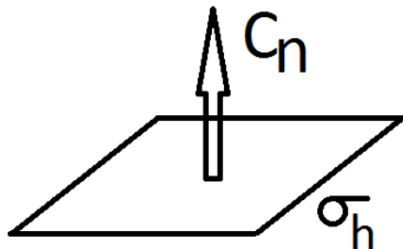
нерухомою. Елементами точкових груп можуть бути елементи:

А) C_n : $\varphi_n = \frac{2\pi}{n}$ – обертання на певний кут

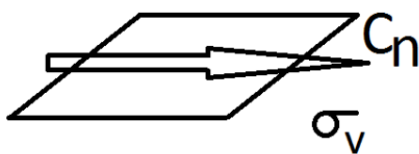
C_4 – операція повороту на 90°

У кристалевих ґратках $n=1,2,3,4,6$

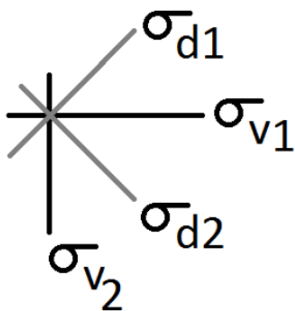
Б) σ_h – відбивання в площині, перпендикулярній до головної осі.



В) σ_v – відбивання в площині, паралельній головній осі.

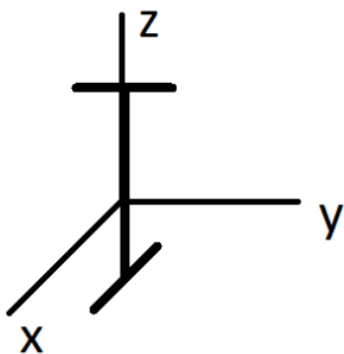


Г) σ_d



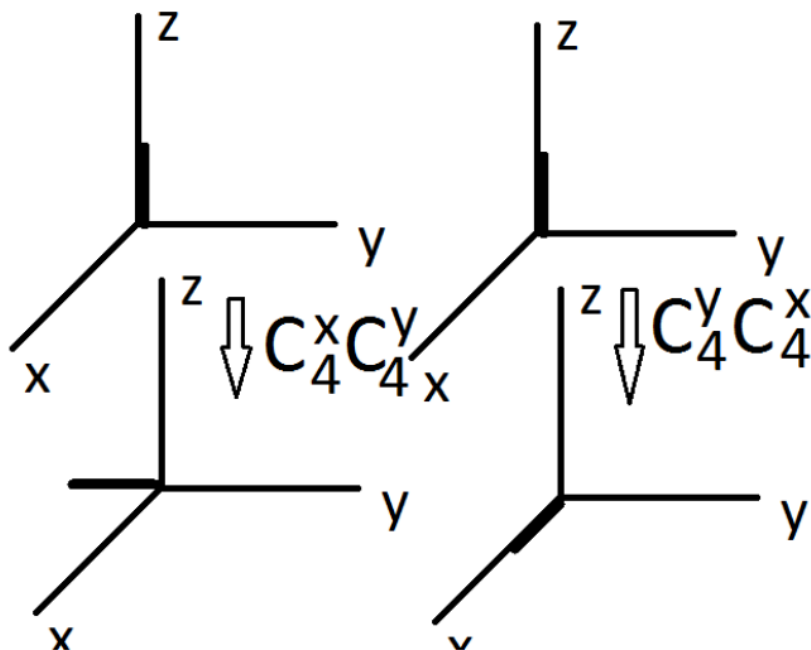
Д) S_{2n} – дзеркально-обертальні елементи – обертання на кут $\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n} +$

σ_h



Е) I – інверсія:

$$\hat{I}\varphi(x, y, z) = \varphi(-x, -y, -z) \quad (3)$$



Отримали 2 різні об'єкти – комутативності немає: $C_4^x C_4^y \neq C_4^y C_4^x$

$\vec{r}(G)$ – вектор після перетворення G $\vec{r}(G) = \hat{a}(G) \vec{r}^0$ (4)

\vec{r}^0 – вектор до перетворення

$\hat{a}(G)$ – матриця перетворення

Наприклад:
$$\hat{a}(C_4^Z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}(\sigma_h^Z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}(I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a_{ii'}(C_4^Z) = \delta_{ix}\delta_{i'y} - \delta_{iy}\delta_{i'x} + \delta_{iz}\delta_{i'z}$$

$$a_{ii'}(\sigma_h^Z) = \delta_{ix}\delta_{i'x} + \delta_{iy}\delta_{i'y} - \delta_{iz}\delta_{i'z}$$

$$a_{ii'}(I) = -\delta_{ii'}$$

Тензори, що описують матеріальні параметри речовини, є інваріантними групами симетрії цієї речовини:

$\hat{T}(G) = \hat{T}^0$ (5), \hat{T}^0 - вихідний тензор

$$(5) \equiv T_{ij...n}(G) = a_{ii'}(G)a_{jj'}(G) \dots a_{nn'}(G)T_{i'j'...n'}^0 \quad (6)$$

$$a_{ii'}(G)a_{jj'}(G) \dots a_{nn'}(G)T_{i'j'...n'}^0 = T_{ij...n}^0 \quad (7)$$

Ця рівність дозволяє сказати, які елементи будуть відмінними від 0.

При яких умовах симетрії може існувати сегнетоелектричний ефект?

Повинен існувати вектор поляризації $\vec{P}^0 \neq 0$ ($\vec{P}^0 \parallel \vec{OZ}$)

$$\vec{P}^0(G) = \vec{P}^0 \quad (8)$$

$$P_i^0(G) = a_{ii'}(G)P_{i'}^0 = P_i^0 = \delta_{ii'}P_{i'}^0 \quad (9)$$

$P_i^0 = B_0\delta_{iz}$ – поляризація виключно вздовж OZ

$$a_{ii'}(G)\delta_{i'z}B_0 = \delta_{ii'}B_0\delta_{iz}$$

$$a_{ii'}(G)\delta_{i'z} = \delta_{ii'}\delta_{iz} \quad (10)$$

Отже, сегнетоелектричний ефект можливий тільки у кристалах, де всі

елементи симетрії задовольняють умові (10): $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Серед наведених елементів – C_4^Z , крім них – σ_v , C_n . Інших елементів симетрії не повинно бути.

82. Діелектрична проникливість середовища.

Поле в діелектрику є сумою зовнішнього поля \vec{E}_0 і усередненого по простору і в часі поля зв'язаних зарядів, тобто поля всіх диполів, з яких складається діелектрик, включаючи і той диполь, для якого ми обчислюємо \vec{p} . Між тим, сам диполь на себе не діє. Замість поля \vec{E} в формулу для дипольного моменту атома необхідно підставити так зване діюче (або локальне) поле \vec{E}_d . Це поле є векторною сумою зовнішнього поля \vec{E}_0 і поля всіх інших диполів, виключаючи вибраний нами. Вираз для потенціалу диполя

$$\varphi = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3}.$$

$$E = -\text{grad} \varphi = -\text{grad} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} = \frac{3}{r^4} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \text{grad} r - \frac{1}{r^3} \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{r}).$$

$$\text{grad} r = \text{grad} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r},$$

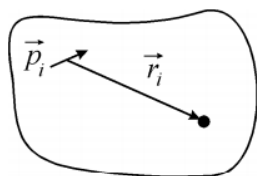
$$\text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{p},$$

тоді поле кожного диполя

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5}.$$

Тоді вираз для діючого поля набуває вигляду

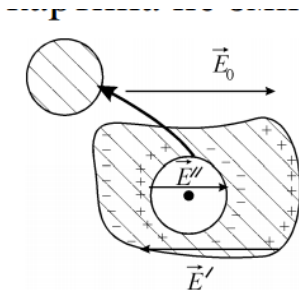
$$\vec{E}_d = \vec{E}_0 + \sum_i \frac{3(\vec{p}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{r}_i - \vec{p}_i r_i^2}{r_i^5},$$



де \vec{p}_i – дипольний момент довільного i –диполя, а \vec{r}_i – радіус-вектор, проведений з точки, де він знаходиться, в точку, де ми знаходимо \vec{E}_d . Штрих в сумі показує, що поле диполя, який знаходиться в шуканій точці, не враховується.

Оточимо точку, в якій ми обчислюємо \vec{E}_d , сферою такого радіусу, щоб він був достатньо великий порівняно із відстанями між диполями, і достатньо малий, щоб поле у сфері можна було вважати однорідним. В такій сфері знаходиться багато диполів.

Якщо вилучити речовину діелектрика, яка знаходиться у сфері, в діелектрику утвориться порожнина. Для диполів поза сферою картина не зміниться.



Діюче поле у околі виділеної точки складається з

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_0 + \vec{E}' + \vec{E}'' + \vec{E}''' ,$$

де

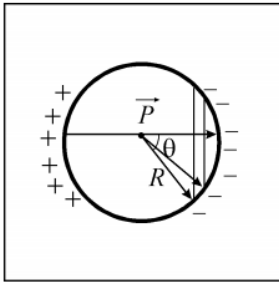
\vec{E}_0 – зовнішнє електричне поле;

\vec{E}' – поле, створене поляризаційним зарядом на зовнішній поверхні діелектрика;

\vec{E}'' – поле поляризаційних зарядів на внутрішній поверхні уявної сферичної порожнини (поле Лоренца). Воно діє на атом у центрі порожнини. Введення такої порожнини є лише математичним прийомом розрахунку поля Лоренца;

$\vec{E}''' = 0$ – поле диполів всередині уявної сфери (було доведено Лоренцом).

Решта диполів у проміжках між поверхнями компенсують поля один одного. Але $\vec{E}_0 + \vec{E}' = \vec{E}$ – не що інше, як поле у діелектрику,



яким ми користувались раніше, до нього тепер додалися два доданки, утворюючи діюче поле.

Якщо через θ позначити полярний кут, який будемо відраховувати від напрямку поляризації \vec{P} як від осі, то густина поверхневого заряду в околі точки, що задається радіус-вектором, направленим під кутом θ , становить $\sigma' = P \cos \theta$. Поверхневий заряд буде однаковий симетрично відносно осі \vec{P} ,

тому кільце радіусом $R \sin \theta$ і завширшки $R d \theta$ (тобто із площею $dS = 2\pi R^2 \sin \theta d \theta$) із зарядом

$$dq' = 2\pi R^2 P \cos \theta \sin \theta d \theta$$

створить у центрі порожнини поле

$$dE' = \frac{2\pi R^2 P \cos \theta \sin \theta d \theta}{R^2} = 2\pi P \cos \theta \sin \theta d \theta .$$

Повне електричне поле у центрі порожнини становитиме

$$E' = 2\pi P \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d \theta = -2\pi P \int_0^\pi \cos^2 \theta d(\cos \theta) = -2\pi P \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi = \frac{4\pi P}{3} .$$

Отже, поле Лоренца $\vec{E}'' = \frac{4\pi}{3} \vec{P}$ – поле у порожнині в діелектрику, де

\vec{P} – вектор поляризації. Тоді

$$\vec{E}_o = \vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P}, \quad (\text{система CGSE})$$

і є сумою середнього поля у діелектрику та доданку, пов'язаного із некомпенсованістю локальних полів диполів.

Дипольний момент атому

$$\vec{p} = \beta \vec{E}_o = \beta \left(\vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} \right), \quad \beta - \text{поляризованість.}$$

Вектор поляризації

$$\vec{P} = N\vec{p} = N\beta \left(\vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} \right),$$

звідки

$$\vec{P} = \frac{N\beta}{1 - \frac{4\pi}{3} \beta N} \vec{E}.$$

Але $\vec{P} = \alpha \vec{E}$, тоді діелектрична сприйнятливість і діелектрична проникність

$$\alpha = \frac{N\beta}{1 - \frac{4\pi}{3} \beta N},$$

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha = 1 + \frac{4\pi N\beta}{1 - \frac{4\pi}{3} \beta N}.$$

83. Співвідношення Крамерса-Кронінга.

Запишемо співвідношення діелектричної проникності у вигляді $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$. Тоді:

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x - \omega} dx \quad (1)$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(x) - 1}{x - \omega} dx \quad (2)$$

Єдиною істотною властивістю функції $\varepsilon(\omega)$ при виведенні цих формул є відсутність особливих точок у верхній півплощині. Тому можна сказати що формули Крамерса-Кронінга є прямим наслідком фізичного принципу причинності.

Формулу (1) можна привести до вигляду $\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x\varepsilon''(x)}{x^2 - \omega^2} dx$ (3)

Якщо розглядати провідник то в точці $\omega = 0$ функція $\varepsilon(\omega)$ має полюс, поблизу якого $\varepsilon = 4\pi\sigma i/\omega$. Це призводить до появи в формулі (2) додаткового члена $\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(x) - 1}{x - \omega} dx + \frac{4\pi\sigma}{\omega}$, а формула (1) або (3) залишаються незмінними. Крім того, у металів можуть існувати області частот, в яких функція $\varepsilon(\omega)$ втрачає свій фізичний зміст у зв'язку з ефектами просторової неоднорідності поля. Між тим, у розглянутих формулах інтегрування повинно вестися по всіх частотах. У таких випадках під $\varepsilon(\omega)$ у відповідних областях частот треба розуміти функцію, яка утворюється в результаті рішення формальної завдання про поведінку тіла у фіктивному просторово однорідному періодичному електричному полі (а не в неминуче неоднорідному полі електромагнітної хвилі).

Особливо істотна формула (3). Вона дає можливість обчислити функцію, $\varepsilon'(\omega)$ якщо відома хоча б наближеним чином функція $\varepsilon''(\omega)$ для даного тіла. При цьому істотно, що для будь-якої функції $\varepsilon''(\omega)$, що задовольняє фізично необхідного вимогу $\varepsilon'' > 0$ при $\omega > 0$, формула (3) дає функцію $\varepsilon'(\omega)$, яка не суперечить ніяким необхідним фізичним вимогам, тобто принципово можливу (знак і величина ε' не обмежуються ніякими загальними фізичними умовами). Ця обставина і дає можливість використовувати формулу (3) навіть за наближеною функції $\varepsilon''(\omega)$. Навпаки, формула (2) не дає (в загальному випадку довільної функції $\varepsilon'(\omega)$ фізично можливої функції $\varepsilon''(\omega)$), так як не забезпечує автоматичним чином позитивність останньої.

В теории дисперсии принято записывать выражение для $\epsilon'(\omega)$ в виде

$$\epsilon'(\omega) - 1 = -\frac{4\pi e^2}{m} \int_0^\infty \frac{f(x)}{\omega^2 - x^2} dx, \quad (4)$$

где e, m — заряд и масса электрона, а $f(\omega) d\omega$ называется *силой осцилляторов* в интервале частот $d\omega$. Согласно (3) эта величина связана с $\epsilon''(\omega)$ посредством

$$f(\omega) = \frac{m}{2\pi^2 e^2} \omega \epsilon''(\omega). \quad (5)$$

У металлов $f(\omega)$ стремится к конечному пределу при $\omega \rightarrow 0$.

При достаточно больших значениях ω в подынтегральном выражении в (3) можно пренебречь x по сравнению с ω . Тогда

$$\epsilon'(\omega) - 1 = -\frac{2}{\pi \omega^2} \int_0^\infty x \epsilon''(x) dx.$$

84. Фотони і поляритони. Фотонні кристали. Стиснуті стани. Взаємодія фотонів з речовиною. Моделі речовин.

Фотони

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{E}_0 \exp\left[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\right]$$

$$E = \hbar\omega; \vec{p} = \hbar\vec{k}; |\vec{k}| = \frac{\omega}{c} \text{ – із теорії вторинного квантування}$$

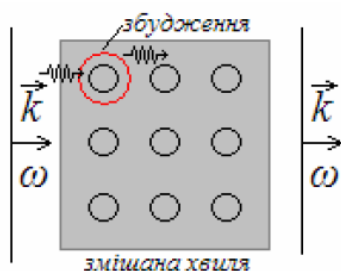
Спін фотона відповідає за поляризацію хвилі

$I = \hbar\omega \cdot n_f$ – інтенсивність, n_f – кількість елементарних збурень (фотонів), що перетинають одиницю поверхні в одиницю часу.

Співвідношення невизначеностей для фотона має вигляд: $\Delta n_f \cdot \Delta\phi \geq 2\pi$.

Якщо точно відома кількість фотонів, то їх фази невизначені. Отже, фаза – це характеристика не одного фотона, а фотонного поля.

Поляритони



Всередині кристалів має місце змішана хвиля – поєднання електромагнітної хвилі та збуджень ґратки кристала. Кванти змішаної хвилі – *поляритони* – фотони в речовині.

Дисперсійне рівняння для поляритонів має вигляд:

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(\omega)$$

За модель речовини приймемо модель гармонічних осциляторів. Для неї діелектрична проникність представляється так:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \sum_m \frac{f_m \omega_m^2}{\omega_m^2 - \omega^2}. \text{ До частот } \omega_m \text{ входять як електронні частоти } \omega_{el}, \text{ так і резонансна}$$

частота іонних коливань ω_f , при чому $\omega_{el} \gg \omega_f$. У нашому розгляді обмежимося лише залежністю від частоти ω_f . Для високих частот залежність від частоти дуже слабка, тому можемо вважати, що $\varepsilon(\omega = \infty) = \varepsilon_\infty$. Також позначимо $\varepsilon(\omega = 0) = \varepsilon_0$ – статична діелектрична проникність. Тоді формулу можемо переписати так:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty) \omega_f^2}{\omega_f^2 - \omega^2}. \text{ Тепер нашою метою є знаходження } k(\omega) \rightarrow \omega(k) \rightarrow E(k).$$

$$k^2 c^2 = \omega^2 \left[\varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty) \omega_f^2}{\omega_f^2 - \omega^2} \right].$$

Після перетворень маємо:

$$\omega_{1,2}^2(|\vec{k}|) = \frac{1}{2\varepsilon_\infty} \left\{ c^2 k^2 + \omega_f^2 \varepsilon_0 \pm \sqrt{[c^2 k^2 + \omega_f^2 \varepsilon_0]^2 - 4\varepsilon_\infty \omega_f^2 c^2 k^2} \right\}, \quad \varepsilon_0 > \varepsilon_\infty$$

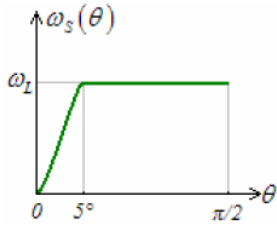
$$k \rightarrow 0: \quad k \ll \left(\frac{\omega_f}{c}\right) \varepsilon_{0,\infty}; \quad \omega_1(k) = \frac{c|\vec{k}|}{\sqrt{\varepsilon_0}}; \quad \omega_1(0) = 0; \quad \omega_2(0) = \omega_f \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty}}$$

$$k \rightarrow \infty: \quad \omega_1 = \omega_f; \omega_2 = \frac{c|\vec{k}|}{\sqrt{\varepsilon_\infty}}.$$

Розглянемо збудження поляритонних хвиль при опроміненні лазером:

$$\begin{cases} \hbar\omega_L = \hbar\omega_s + \hbar\omega(k) \\ \hbar\vec{k}_L = \hbar\vec{k}_s + \hbar\vec{k}_p \end{cases}$$

Детектор уловлює стоксову частоту від кута розхилу $\omega_s(\theta)$.



Поляритони – розв’язки рівнянь Максвелла для речовин ($\mu=1$, $\rho=0$):

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{H} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = 0 \end{cases}$$

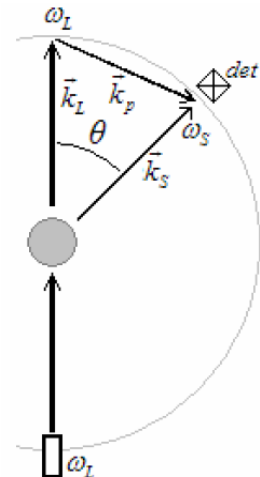
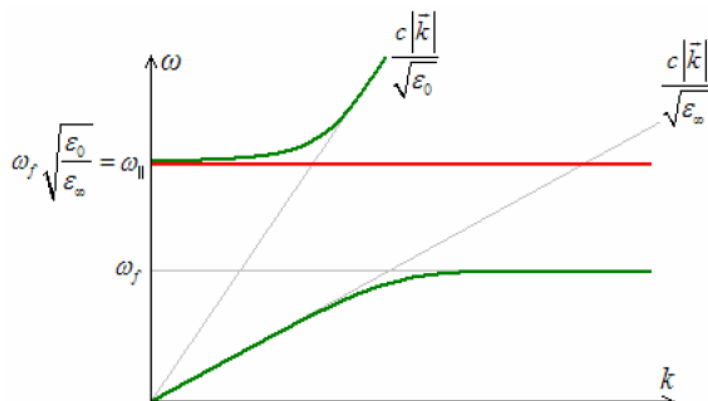
В представленні плоских хвиль: $\vec{u} = \vec{u}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$:

$$\begin{cases} [\vec{k} \times \vec{H}] = -\frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \vec{E} \\ [\vec{k} \times \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{H} \\ (\vec{k} \cdot \vec{H}) = 0 \\ \varepsilon(\omega)(\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \end{cases}$$

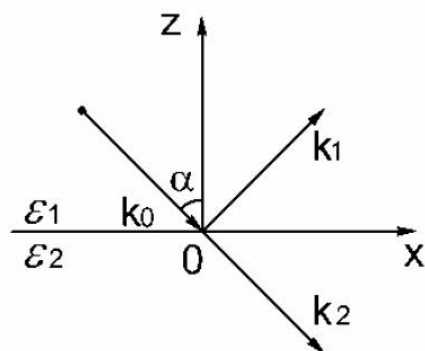
У цієї системи буде два розв’язки – поздовжні та поперечні поляритонні хвилі:

$$\omega_{\parallel} = \omega_f \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty}} > \omega_f \text{ – не залежить від } k, \text{ рівняння Саха-Теллера – поздовжня хвиля.}$$

$$\varepsilon(\omega_x) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)\omega_f^2}{\omega_f^2 - \omega_x^2} \text{ – поперечна хвиля.}$$



85. Повне внутрішнє відбивання. Ефект Гуса-Хенхена.



Частина перша.

Розглядається ефект повного внутрішнього відбивання, який реалізується за умов $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ та $\alpha > \pi/2 - \Theta_{\text{фр}}$, де

$$\sin \Theta_{\text{фр}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad (\text{див. мал.}), \quad \text{тобто ковзне падіння пучка із}$$

більш оптично густого середовища на межу розділу з менш оптично густим. Цікавим ефектом у цьому випадку видається зміщення відбитого пучка на деяку величину Δx , яку в процесі розгляду необхідно визначити.

У першій частині задачі нами буде знайдений кут повороту поляризації відбитого променя відносно падаючого.

$$\mu = 1, \quad n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}.$$

$$k_{0z} = k_0 \cos \alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha; \quad |k_2|^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_2 = k_{2z}^2 + k_{2x}^2; \quad k_{2x} = k_{0x} = k_0 \sin \alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \sin \alpha;$$

$$\Rightarrow |k_{2z}| = \frac{\omega}{c} \sqrt{-\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \sin^2 \alpha}. \quad \text{Оскільки розглядається повне внутрішнє відбивання, то } k_{2z}$$

(променя, що пройшов межу розділу) має чисто уявний характер, тобто $k_{2z} = i|k_{2z}|$.

$$\text{Застосовуючи одну з формул Френнеля: } A_1^\perp = \frac{k_{0z} - i|k_{2z}|}{k_{0z} + i|k_{2z}|} A_0^\perp \text{ та враховуючи, що } |A_1^\perp| = |A_0^\perp|,$$

можна представити поворот у вигляді:

$$\frac{k_{0z} - i|k_{2z}|}{k_{0z} + i|k_{2z}|} = e^{-i\Delta\varphi}$$

$$\frac{a - ib}{a + ib} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - i \frac{2ab}{a^2 + b^2} = A e^{-i\varphi}; \quad \text{tg } \varphi = \frac{2ab}{a^2 - b^2} = \frac{2b/a}{1 - (b/a)^2} = \frac{2\text{tg}(\varphi/2)}{1 - \text{tg}^2(\varphi/2)}; \quad \text{tg } \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Отже, } \text{tg } \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{|k_{2z}|}{k_{0z}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \sin^2 \alpha - \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha}; \quad \boxed{\text{tg } \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \theta_{\text{фр}}}}{\cos \alpha}}$$

Частина друга.

Тепер, знаючи представлення падаючого та відбитого пучків у оберненому просторі – просторі хвильових чисел \vec{k} можна провести обернене Фур'є перетворення і отримати вигляд пучків у прямому просторі. Надалі застосовуватимемо модель ножеподібного пучка – тобто нульової товщини по y .

Розглянемо падаючий пучок:

$$\bar{E}_0(\vec{r}, t) = \bar{e}_y \iiint E_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d^3\vec{k}, \quad \text{де } E_0(k_x, k_y, k_z) = E_0(\Theta) \delta(|k| - k_0) \delta(k_y). \quad \text{Дельта-функції вказують на монохроматичність та ножеподібність пучка.}$$

$$\bar{E}_0(\vec{r}, t) = \bar{e}_y \iiint E_0(\Theta) \delta(|k| - k_0) \delta(k_y) \exp[i(k_x r_x + k_z r_z) - i\omega t] \cdot k \sin \Theta dk \cdot d\Theta \cdot dk_y =$$

$$= \bar{e}_y \iint E_0(\Theta) \delta(|k| - k_0) \exp[i(k_x r_x + k_z r_z) - i\omega t] \cdot k \sin \Theta dk \cdot d\Theta =$$

$$= \bar{e}_y \iint E_0(\Theta) \exp[i(k_x^0 x + k_z^0 z) - i\omega t] \cdot k_0 \sin \Theta d\Theta$$

$$\text{де } k_x^0 = k_0 \sin \Theta, \quad k_z^0 = k_0 \cos \Theta, \quad \text{тоді}$$

$\bar{E}_0(\bar{r}, t) = \bar{e}_y e^{-i\omega t} \int E_0(\Theta) \exp[ik_0(\sin \Theta \cdot x + \cos \Theta \cdot z)] \cdot k_0 \sin \Theta d\Theta$. Позначимо

$$\phi_0(x, z) = k_0(\sin \Theta \cdot x + \cos \Theta \cdot z)$$

Нехай пучок падає під кутом Θ_0 до нормалі, тоді напрям \bar{k} визначається кутом $\Theta = \tilde{\Theta}_0 + \psi$, де $\tilde{\Theta}_0 = \pi - \Theta_0$ - напрям «середини» пучка, ψ - малий параметр інтегрування та подальшого розкладу. $|\psi| \ll \Theta_0$.

$$\sin(\tilde{\Theta}_0 - \psi) = \sin(\pi - \Theta_0 - \psi) = \sin(\Theta_0 - \psi);$$

$\phi_0(x, z)$ залежить також від Θ . Щоб перейти до нової змінної ψ введемо відповідну заміну та проведемо усереднення з розкладом по ψ . Тоді $\phi_0(x, z)$ набуває вигляду:

$$\phi_0(x, z) = k_0[x(\sin \Theta_0 + \psi \cos \Theta_0) - z(\cos \Theta_0 - \psi \sin \Theta_0)].$$

Розглянемо інтенсивність падаючого пучка на межі розділу, тобто $z = 0$. Тоді:

$$I_0(x, z = 0) = c_1 |E_0(x, z = 0)|^2 = c_1 \left| \int E_0(\Theta_0 + \psi) \exp[ik_0 x (\sin \Theta_0 + \psi \cos \Theta_0)] \sin(\Theta_0 + \psi) d\psi \right|^2.$$

Знайдемо середину падаючого пучка: $\frac{dI_0(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x_0$. Інтенсивність в середині пучка:

$$I_0(x_0) = c_1 \left| \int E_0(\Theta_0 + \psi) \exp[ik_0 x_0 (\sin \Theta_0 + \psi \cos \Theta_0)] \sin(\Theta_0 + \psi) d\psi \right|^2 =$$

$$= c_2 \left| \int E_0(\Theta_0 + \psi) \exp[ik_0 x_0 \psi \cos \Theta_0] \sin(\Theta_0 + \psi) d\psi \right|^2 = c_2 \left| \int E_0(\Theta_0 + \psi) \exp[i\psi \beta_0(x_0)] \sin(\Theta_0 + \psi) d\psi \right|^2,$$

де $\beta_0(x_0) = k_0 x_0 \cos \Theta_0$.

Для відбитого пучка ϕ_1 (аналог ϕ_0 падаючого пучка) матиме наступний вигляд:

$\phi_1(x, z = 0) = k_0 x \sin \Theta_1 + \Delta\phi(\Theta_1)$, де Θ_1 вказує на напрямок розповсюдження відбитої хвилі і має вигляд $\Theta_1 = \Theta_0 + \psi'$, $|\psi'| \ll \Theta_0$ (кут падіння дорівнює куту відбивання + розклад по новому малому параметру).

Аналогічно проведенням викладкам для падаючого пучка записується інтенсивність відбитого у його центрі x_1 . А саме:

$$I_1(x_1) = c_3 \left| \int E_0(\Theta_0 + \psi') \exp[i\psi' \{\beta_0(x_1) + D\}] \sin(\Theta_0 + \psi') d\psi' \right|^2, \text{ де } D = \frac{\partial \Delta\phi}{\partial \psi'} \Big|_{\Theta_0}.$$

Згідно закону збереження енергії, інтенсивність падаючого пучка має дорівнювати інтенсивності відбитого, а це свідчить про відповідність вигляду двох інтегралів, отриманих для падаючого і відбитого променя. Отже,

$$\psi'(\beta_0(x_1) + D) = \psi \beta_0(x_0), \quad \beta_0(x_1) + D = \beta_0(x_0), \quad k_0 \cos \Theta_0 x_0 = k_0 \cos \Theta_0 x_1 + D,$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 = -\frac{D}{k_0 \cos \Theta_0}, \quad \frac{1}{k_0} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot n_1}.$$

Згідно результату першої частини задачі, D дорівнює наступній величині:

$$D = \frac{\partial \Delta\phi}{\partial \psi} = -\frac{\sin \Theta_0}{\sqrt{\sin^2 \Theta_0 - \sin^2 \Theta_{fir}}},$$

Отже, зсув визначено як:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = \frac{\lambda}{2\pi \cdot n_1} \frac{\operatorname{tg} \Theta_0}{\sqrt{\sin^2 \Theta_0 - \sin^2 \Theta_{fir}}}$$

86. Співвідношення невизначеності для фази хвилі і кількості фотонів.

Класична хвиля $\hat{E}(\vec{r}, t) = \hat{A}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$. Потік фотонів — потік частинок. Кожна частинка має певну енергію та імпульс: $\varepsilon = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, $|p| = \frac{\varepsilon}{c}$.

$I = |\vec{S}| = n_f \hbar\omega$, де n_f — кількість фотонів, що перетинають одиницю площі за одиницю часу.

Стан плоскої хвилі описується хвильовими векторами $\Psi_{\{n\}}$, $\{n\} = \{k_x, k_y, k_z; s\}$, де s — спин. N — кількість частинок, φ — фаза (стан певної хвилі).

$\Delta N \Delta \varphi \geq 2\pi$ — співвідношення невизначеності для фази хвилі і кількості фотонів.

$\varphi = k_x x$, $\hbar\omega + \hbar\omega \rightarrow 2\hbar\omega$.

Якщо $\Delta N = 0$, то отримаємо $\Delta \varphi \rightarrow \infty$. Один фотон не може характеризувати фазу.

$\Delta(k_x x) \geq \frac{2\pi}{N} \Rightarrow \Delta x \geq \frac{\lambda}{\Delta N}$, $\Delta N = 1 \Rightarrow \Delta x \geq \lambda$. Неможливо визначити положення точніше, ніж λ (в однофотонних ефектах).

В інших шпорах було додатково наступне (в конспекті нема):

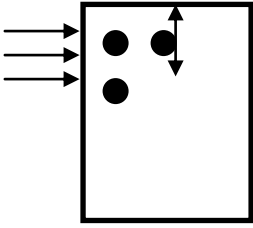
Існують ферміони та бозони $N = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$, розподіл Бозе

$$\langle N \rangle = \left(\exp \left[\frac{\hbar\omega - \mu}{k_0 T} \right] - 1 \right)^{-1}, \quad \mu = 0. \quad \delta = \frac{\sqrt{\langle \Delta N^2 \rangle}}{\langle N \rangle} = \sqrt{\frac{\langle N \rangle + 1}{\langle N \rangle}}$$

$$I \rightarrow 0, \langle N \rangle \rightarrow 0, \delta \rightarrow \infty$$

$$I \rightarrow \infty, \langle N \rangle \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 100\%$$

87. Дисперсія поляритонів.



Механізм: 1. падає ел - маг хвиля

2. якщо фотон затримався на атомі і збудив його, то спостерігається механічне випром.

О. в низькочастотному(далеко інфрачер обл., що наближається до радіо.) збудження кристалу носить змішане елетро - механічне

збудження хвилі. Кванти змішаних ел - маг хв. наз. **поляритонами**, які є частковим випадком фотонів у речовині.

(Фотон використовується у 2х знач : 1) квант елмаг. поля в вакуумі 2) фотон в речовині)

Тобто *поляритони*- частковий випадок фотонів у речовині, в оптично низькочастотній області. Вони х - зуються \vec{k} і ω (хвильовий вектор і частота, поляризацію спінів елетронів не розглядаємо).

$$[\vec{k}(\omega)]^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(\omega), \text{ де } \varepsilon(\omega) - \text{діелектрична проникність середовища. В більшості}$$

випадків $\varepsilon(\omega)$ можна приписати лише даній матерії.

В рамках моделі замінимо коливання ґратки на колив. *осциляторів*.

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \sum_n \frac{f_n \omega_{on}^2}{\omega_{on}^2 - \omega^2}, \quad \omega_{on} \neq \omega$$

f_n - сила осцилятора, $\omega_{on}^2 - \omega^2$ резонансні частоти. Нехай є

одна резонансна частота $\omega_{on} \rightarrow \omega_f$, тобто використовується модель однорезонансного випадку.

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_o - \varepsilon_\infty}{\omega_f^2 - \omega^2}$$

без врахування поглинання речовиною.

ε_∞ - сума, що не стосується резонансу, тобто спектр

$$\varepsilon_\infty(\omega) = 1 + \sum_{n \neq f} \frac{f_n \omega_{on}^2}{\omega_{on}^2 - \omega^2}, \quad \omega_{on} \neq \omega \quad \varepsilon(\omega = 0) = \varepsilon_o$$

, а отже ε_∞ діелектрична провідність на

високих частотах відносно резонансної частоти.

!! Далі під велич $k(\omega)$ розуміємо абсолютну величину хвильового вектора.

$$[\vec{k}(\omega)]^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[\varepsilon_\infty \left(1 - \frac{\omega_f^2}{\omega_f^2 - \omega^2}\right) + \frac{\varepsilon_o \omega_f^2}{\omega_f^2 - \omega^2} \right].$$

Будемо вважати що, k - аргумент, тоді

$$\varepsilon_\infty \omega^4(k) - \omega^3(k) [c^2 k^2 + \omega_f^2(k) \varepsilon_o] + \omega_f^2(k) c^2 k^2 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2(k) = \frac{1}{2\varepsilon_\infty} [(c^2 k^2 + \omega_f^2 \varepsilon_o) \pm \sqrt{(c^2 k^2 + \omega_f^2 \varepsilon_o)^2 - 4\varepsilon_\infty c^2 k^2 \omega_f^2}]$$

Поляритонове поле має заборонену зону, отже фотон з такою енергією не може пройти в кристал.

$$\Delta E_g = \omega_f \left[\sqrt{\frac{\epsilon_o}{\epsilon_\infty}} - 1 \right]$$

ширина

забороненої зони.

Якщо відійти від однорезонансного наближення, то в найпростішому випадку кубічного кристалу з фотонним резонансом на частоті ω_o маємо наступне рівняння для дисперсії поляритонів (без врахування згасання)

$$[\vec{k}(\omega)]^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[\epsilon_\infty \frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_o^2 - \omega^2} \right] \quad \text{де } \omega_L, \omega_o \text{ частоти поперечної та поздовжньої хвиль}$$

(оптичних фононів - кванти коливального руху ґратки кристала). Тут криві 1 і 2 дисперсія поляритонів, штриховані -- дисперсія фотонів, що не взаємодіють $k^2 c^2$

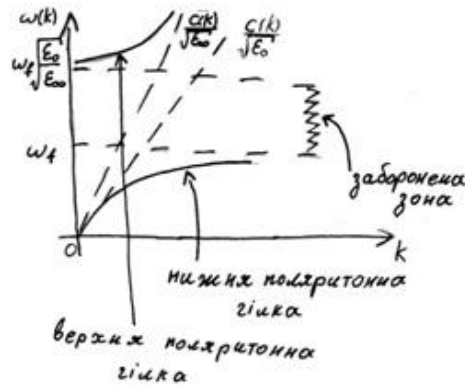
$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \epsilon_\infty$ 3, і поперечних фононів 4 при малих

$$k^2 c^2$$

значеннях k. 5 - дисперсія фотонів у вакуумі $\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1$.

Взаємодія призводить до виникнення 2х дисперсійних кривих, і забороненої зони від резонансних частот ω_o і до частоти поздовжнього оптичного фонона ω_L , з умови $\epsilon(\omega_L) = 0$. Отже поляритони представляють собою власні стани повної системи -- середовище плюс

електромагнітне поле, а фотони та фонони є нормальними хвилями лише далеко за областю резонансного перетину дисперсійних кривих взаємодіючих фотонів і фононів.



а) $k \rightarrow 0$ (додає як з хвилювими векторами набагато менше інших)
 б) $k \rightarrow \infty$ (додає як з хвилювими векторами набагато більший за інші)
 $\omega_+(k \rightarrow \infty) \approx \frac{c(k)}{\sqrt{\epsilon_\infty}}$
 $\omega_-(k \rightarrow \infty) \approx \omega_f$

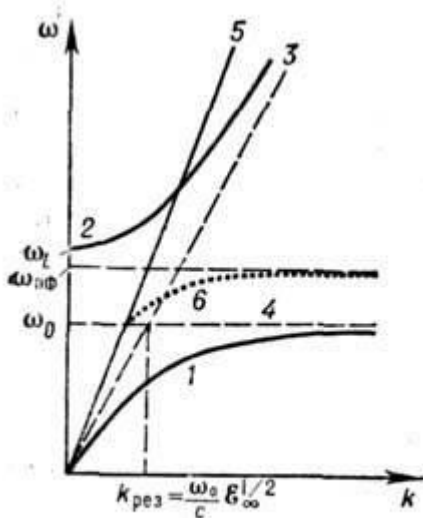


Рис. 1. Дисперсия фононных поляритонов.

88. Рівняння Максвелла-Лоренца.

Для дослідження полів в електродинаміці абстрагуються від «безглузвих» точкових значень напруженостей \mathbf{e} і \mathbf{h} , для цього і вводять поняття „нескінчено-малого об'єму (НМО).

НМО – частина досліджуваного об'єму, розмір якої менший за характеристичні значення шуканих параметрів. Таким чином, мікроскопічні параметри речовини \mathbf{e} і \mathbf{h} усереднюються по НМО і вводяться відповідні значення $\langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{E}$, $\langle \mathbf{h} \rangle = \mathbf{B}$.

Система диференціальних рівнянь, отримана Максвеллом для статистичних полів має

$$\text{rot} \mathbf{E} = 0, \text{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

вигляд: $\text{div} \mathbf{B} = 0, \text{rot} \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} / c$, де ρ і \mathbf{j} – густини мікроскопічних зарядів і мікроскопічних струмів відповідно.

Нам також відоме одне динамічне рівняння – закон Фарадея в диференціальній

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

формі: , тобто це рівняння вірно як в динамічному, так і в статистичному випадку.

Оскільки довести рівняння Максвелла неможливо, то спробуємо шляхом логічних переходів (як це напевно робив Максвелл) побудувати систему рівнянь, що адекватно описує змінні в часі поля.

1. Магнітних зарядів також немає і в динамічному випадку – статистичне рівняння: $\text{div} \mathbf{B} = 0$ не змінюється;

2. Диференціальна форма закону Фарадея є узагальненим рівнянням $\text{rote} = 0$ – тому для динамічного випадку будемо вважати $\text{rote} = (-d\mathbf{B}) / (c \cdot dt)$;

3. Диференціальна форма закону Гаусса має бути справедливою і в динаміці, оскільки потік \mathbf{E} через замкнену поверхню має бути пропорційним внутрішньому заряду: $\text{dive} = 4\pi\rho$;

4. Єдине рівняння, що має змінитись, є $\text{rot} \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} / c$. Воно суперечить закону збереження заряду, бо взявши div від обох частин отримаємо $0 = 4\pi \cdot \text{div} \mathbf{j} / c$. Помилка зникає, якщо записати закон Біо – Савара - Лапласа у вигляді: $\text{rot} \mathbf{B} = (4\pi\mathbf{j}) / (c) + (d\mathbf{E}) / (c \cdot dt)$.

В результаті отримуємо систему рівнянь Максвелла – Лоренца:

$$\text{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

89. Укорочені рівняння. Солітони.

$$\vec{D}(\vec{E}) \quad (1) \quad \text{rot}(\text{rot}\vec{E}) + 1 \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{j} = 0 \quad \text{rot}(\text{rot}\vec{F}) = \text{grad}(\text{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F} \quad (2) \quad (\text{grad}(\text{div}\vec{F}) \sim 0 \text{ поле буде поперечним, лише наближено})$$

Зазвичай середовище слабко нелінійне. Розглянемо такі нелінійні процеси, де частоти не змінюються.

$$|\Delta z_0| \gg \lambda \quad (4)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = A(r, t) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (5)$$

$$(5) \Rightarrow (3): \left(\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} + 2ik_z \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} - k_z^2 \right) e^{i(k_z z - \omega t)} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{D}(\vec{E}) = 0 \quad (6)$$

$$\vec{D} = (\epsilon_0 + \Delta(\vec{r}, t, \vec{E})) \cdot \vec{E} \quad (7)$$

Оскільки нелінійність слабка, то нехай

$$(\Delta_{\perp} \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} + 2ik_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} - k_z^2) + \left(\frac{\omega}{c} \right) (\epsilon_0 + \Delta\epsilon) \vec{A} = 0 \quad \Delta_{\perp} - \text{поперечний}$$

Лаплас

Щоб спростити рівняння:

$$k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon_0 \quad (8) \quad \left| \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} \right| \sim \frac{|A|}{\Delta z^2} \quad (*) \quad \left| 2ik_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \right| \sim 2 \frac{2\pi n_0}{\lambda} \frac{|\vec{A}|}{\Delta z_0} \quad (**)$$

$$\frac{(*)}{(**)} = \frac{\lambda}{4\pi n_0 z_0} \ll 1 \quad (10) \quad n_0 = \sqrt{\epsilon_0}$$

$$\Delta_{\perp} \vec{A} + 2ik_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \Delta\epsilon(\vec{E}) \vec{A} = 0 \quad (11)$$

Отже

Керровська нелінійність:

$$\Delta\varepsilon = \chi_2 |\vec{A}|^2 \quad (12)$$

$$\vec{A} \neq \vec{A}(x, y) \quad \text{для плоских хвиль (відсутня поперечна залежність)}$$

нелінійне рівняння Шредінгера :

$$i \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2|U|^2 U = 0 \quad (13) \quad z \rightarrow t$$

Це рівняння має два типи розв'язків

$$1. \quad U(x, t) = \frac{\text{const} \cdot \exp(i\varphi_s)}{\text{ch}(x - vt)} \quad (14) \quad \varphi_s = \varphi_s(x, t) \quad (\text{Солітони} \quad (\text{солітонні} \text{ рішення}))$$

Солітон – поодинокі хвиля.

$$I(z, x) = |A|^2 = \frac{I_0}{\text{ch}\left(\frac{x - cz}{a_0}\right)}$$

90. Фоторефракція і фотогальванічний ефект. Умови спостереження ефекту.

Фоторефракція – це явище зміни показника заломлення речовини під дією світла. (У наш час фоторефрактивні сегнетоелектрики – одні з найбільш зручних інструментів динамічної голографії.)

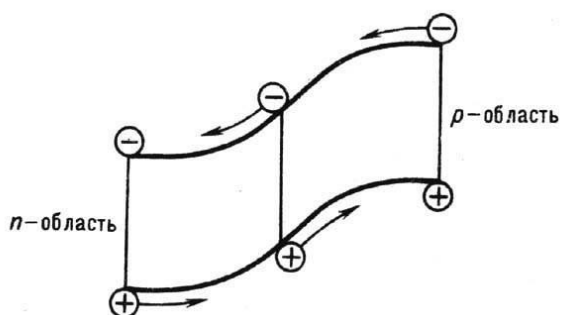
Фотогальванічний ефект – виникнення електричного струму при освітленні зразка з напівпровідника або діелектрика, увімкненого в замкнене коло (фотострум), або виникнення ЕРС на освітленому зразку при розімкненому зовнішньому колі (фотоЕРС). Розрізняють 2 типи фотогальванічного ефекту.

Фотогальванічний ефект першого типу виникає тільки при генерації світлом рухомих носіїв заряду одночасно обох знаків (електронів і дірок) і обумовлений розділом цих носіїв у просторі. Розділ викликається або неоднорідністю зразка (роль неоднорідності може грати поверхня), або неоднорідність освітлення (освітлення частини зразка, або поглинання світла біля поверхні). Поява ЕРС при неоднорідному освітленні також зумовлена може бути нагріванням електронів світлом. Цей механізм подібний до звичайного термоелектричного ефекту і може бути значним як при між зонному поглинанні, так і при внутрішньо зонному.

До фотогальванічного ефекту пов'язаного з просторовим розділенням носіїв належать:

1) ефект Дембера (виникнення електричного поля в однорідному напівпровіднику при його нерівномірному освітленні) – виникає при неоднорідному освітленні зразка через відмінні коефіцієнти дифузії електронів і дірок. Він може виникати і при однорідному освітленні унаслідок відмінності швидкостей поверхневої рекомбінації на протилежних гранях зразка.

2) Вентильна (бар'єрна) ЕРС – виникає в результаті розділення електронів і дірок



електричним полем приелектродного бар'єра Шоткі на контакті метал-напівпровідник, полем p-n-переходу або гетеропереходу (контакт двох різних за хімічними властивостями напівпровідників). На рисунку схематично показано розділення пар, які виникають при освітленні p-n-перехода. Вклад в струм дають як носії, генеровані в області безпосередньо p-

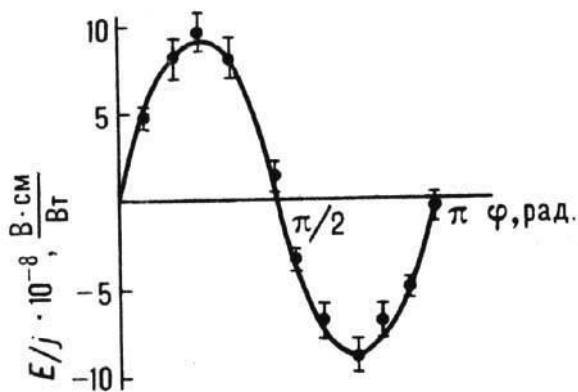
n-переходу, так і збуджені в приелектродних областях і ті, що досягають області сильного полля шляхом дифузії. У результаті розділення пар утворюється направлений потік електронів в n-область дірок в p-область переходу. При розімкненому колі утворюється ЕРС в пропусковому (прямому) напрямі p-n-переходу, яка компенсує цей струм.

Також є об'ємна фотоерс – викликано розділенням пар носіїв на неоднорідностях в об'ємі зразка, створюваних зміною концентрації легуючої домішки, або зміною хім..складу складних напівпровідників.

Лінійний фотогальванічний ефект не пов'язаний з передачею імпульса фотона електронам і тому не змінюється при зміні напрямку розповсюдження світла на зворотнє. (при фіксованій лінійній поляризації). Він зумовлений асиметрією розподілу фотоелектронів, яка створюється двома механізмами: балістичним, пов'язаним з появою направленої імпульсу при квантових переходах, і здвиговим, зумовленим зміщенням центра мас хвильового пакета електрона при переходах. При цьому вклад в струм дають як процеси поглинання світла, так і розсіювання і рекомбінації.

На рисунку: залежність фотоЕРС, зумовленою лінійним фотогальванічним ефектом в р-GaAs, від кута φ між площиною поляризації світла і віссю кристала. $T=300\text{K}$.

Також існують циркулярний фотогальванічний Еф. (в гіротропних кристалах, при освітленні циркулярно (еліптично) поляризованим світлом). Лінійний і циркулярний



фотогальванічний ефект використовують як ефект збільшення, використовують для створення без інерційних прийомників інтенсивного (лазерного) випромінювання.

Поверхневий фотогальванічний ефект – обумовлений розсіюванням збуджуваних світлом носіїв заряду на поверхні. При між зонному поглинанні виникає в умовах, коли значна частина носіїв може досягти її без розсіювання.

91. Однорезонансна модель діелектричної проникливості.

Електромагнітна хвиля характеризується:

\vec{k}, ω, \vec{S} \vec{S} - вектор поглинання
 \vec{k} - хвильовий вектор
 ω - частота

$$[k(\omega)]^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon(\omega) \quad (5)$$

В рамках моделі (однорезонансний випадок)

$$\epsilon(\omega) = 1 + \sum_n \frac{f_n \omega_{0n}^2}{\omega_{0n}^2 - \omega^2} \quad (\omega_{0n} \neq \omega) \quad (6)$$

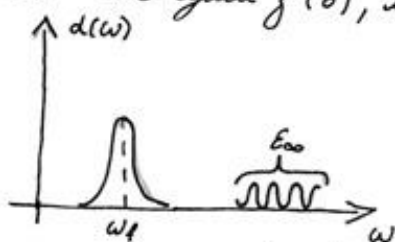
f_n - сила осцилятора

ω_{0n} - резонансна частота

$\omega_{0n} \rightarrow \omega_f$ (7) (є тільки одна резонансна частота)

$$\epsilon(\omega) = \frac{\epsilon_\infty + (\epsilon_0 - \epsilon_\infty)}{\omega_f^2 - \omega^2} \quad (8)$$

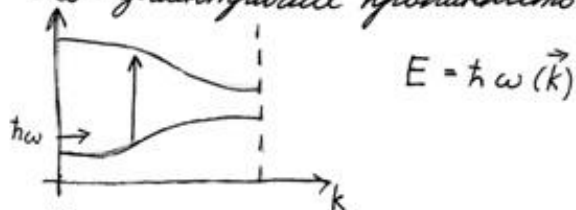
Не враховуючи поглинання
 ϵ_∞ - величина з (6), яка не стосується резонансного випадку



$$\epsilon_\infty = 1 + \sum_{n \neq f} \frac{f_n \omega_{0n}^2}{\omega_{0n}^2 - \omega^2} \quad (9)$$

$$\epsilon(\omega=0) = \epsilon_0 \quad (10)$$

ϵ_∞ - діелектрична проникність на високих частотах



Знаючи $k(\omega)$ можна знайти $\omega(k)$

$$\epsilon(\omega=0) = \epsilon_0$$

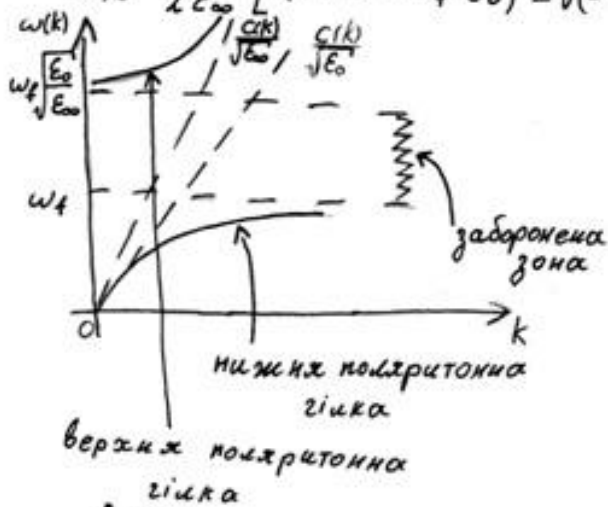
підставляємо (8) у (5)

$$[\vec{k}(\omega)]^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[\epsilon_\infty + \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\infty) \omega_f^2}{\omega_f^2 - \omega^2} \right] \quad (11)$$

Далі можна обидві частини на знаменник

$$\epsilon_{\infty} \omega^4(k) - \omega^2(k) [c^2 k^2 + \omega_f^2 \epsilon_0] + \omega_f c^2 k^2 = 0 \quad (12)$$

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2\epsilon_{\infty}} \left[(c^2 k^2 + \omega_f^2 \epsilon_0) \pm \sqrt{(c^2 k^2 + \omega_f^2 \epsilon_0)^2 - 4\epsilon_{\infty} \omega_f^2 c^2 k^2} \right] \quad (13)$$

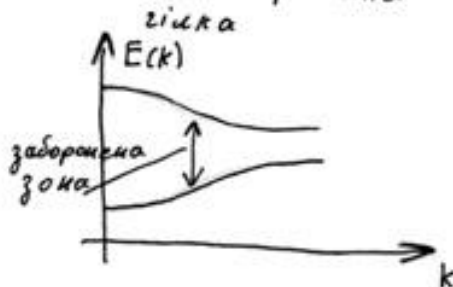


а) $k \rightarrow 0$ (додає ок з хвиловими векторами набагато менше інших)

б) $k \rightarrow \infty$ (додає ок з хвиловими векторами набагато більший за інші)

$$\omega_+(k \rightarrow \infty) \approx \frac{c(k)}{\sqrt{\epsilon_{\infty}}}$$

$$\omega_-(k \rightarrow \infty) \approx \omega_f$$

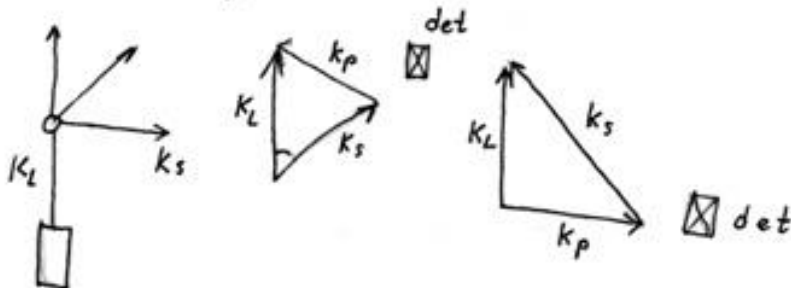


ширина забороненої зони:

$$\Delta E_g(\text{полпр}) = \omega_f \left[\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_{\infty}}} - 1 \right] \quad (14)$$

$$\begin{cases} E_L = E_s + E_p \\ \omega_L = \omega_s + \omega_p \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \vec{k}_L = \vec{k}_s + \vec{k}_p \\ \vec{p}_L = \vec{p}_s + \vec{p}_p \end{cases} \quad (16)$$



92. Повздовжні хвилі. Представлення плоских хвиль. Співвідношення Саха-Теллера.

Перепишем уравнение Максвелла в форме более удобной для дальнейшего анализа, имея в виду, что роторы \mathbf{E} и \mathbf{H} можно представить в виде определителей:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu\mu_0 \dot{\mathbf{H}}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \epsilon\epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_x = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_x = 0, \quad (2.10)$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — орты осей X, Y, Z .

Установим основные свойства электромагнитной волны на примере плоской волны. Направим ось X перпендикулярно волновым поверхностям. При этом \mathbf{E} и \mathbf{H} , а значит и их проекции на оси Y и Z , не будут зависеть от координат y и z , т. е. соответствующие производные по y и z будут равны нулю. Поэтому уравнения (2.9) и (2.10) упрощаются (останутся только производные по x) и принимают вид:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu\mu_0 \dot{H}_x, & 0 &= \epsilon\epsilon_0 \dot{E}_x, \\ -\partial E_z / \partial x &= -\mu\mu_0 \dot{H}_y, & -\partial H_z / \partial x &= \epsilon\epsilon_0 \dot{E}_y, \\ \partial E_y / \partial x &= -\mu\mu_0 \dot{H}_z, & \partial H_y / \partial x &= \epsilon\epsilon_0 \dot{E}_z, \\ \partial E_x / \partial x &= 0, & \partial H_x / \partial x &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из условий $\partial E_x / \partial x = 0$ и $\dot{E}_x = 0$ следует, что E_x не зависит ни от x , ни от t (аналогично и для H_x). Это значит, что отличные от нуля E_x и H_x могут быть обусловлены лишь постоянными однородными полями, накладывающимися на поле волны. А для переменного поля плоской волны $E_x = 0$ и $H_x = 0$, т. е. векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны направлению распространения волны — оси X . Значит, электромагнитная волна является *поперечной*.

Кроме того, оказывается, векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} в электромагнитной волне взаимно ортогональны. Чтобы убедиться в этом, объединим средние уравнения (2.11), содержащие, например, E_y и H_z , в пару:

$$\partial E_y / \partial x = -\mu\mu_0 \dot{H}_z, \quad \partial H_z / \partial x = -\epsilon\epsilon_0 \dot{E}_y, \quad (2.12)$$

(можно было бы взять и другую пару, содержащую производные E_z и H_y). Из этих уравнений видно, что изменение во времени, скажем, магнитного поля, направленного вдоль оси Z , порождает электрическое поле E_y вдоль оси Y . Изменение во времени поля E_y в свою очередь порождает поле H_z и т. д. Ни поля E_z , ни поля H_y при этом не возникает. А это и значит, что $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$.

Связь мгновенных значений E и H . В нашем случае, когда плоская волна распространяется вдоль оси X , например, в ее положительном направлении,

$$E_y = E_y(t - x/v), \quad H_z = H_z(t - x/v), \quad (2.13)$$

где E_y и H_z — некоторые функции, характеризующие форму волны. Введя обозначение $\varphi = t - x/v$, найдем производные E_y по x и H_z по t — в соответствии с (2.12):

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} \left(-\frac{1}{v} \right); \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \cdot 1.$$

Подставив эти выражения в первое уравнение (2.12), получим:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial \varphi},$$

или с учетом того, что $v = 1/\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}$,

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0} \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \sqrt{\mu \mu_0} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}.$$

Отсюда следует, что $\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E_y = \sqrt{\mu \mu_0} H_z + \text{const}$, где произвольная константа обусловлена наличием постоянного электрического и магнитного полей. Нас интересует только переменное поле, поэтому $\text{const} = 0$, в результате мы получим:

$$\boxed{\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E_y = \sqrt{\mu \mu_0} H_z.} \quad (2.14)$$

Это выражение означает, что \mathbf{E} и \mathbf{H} не только взаимно ортогональны, но и составляют правовинтовую систему с направлением распространения: мы ведь рассмотрели случай, когда волна распространяется в положительном направлении оси X (рис. 2.1).

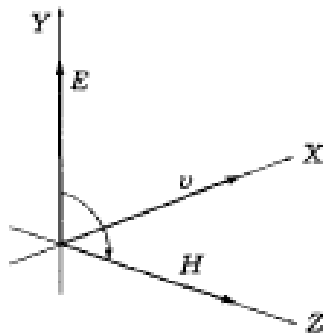


Рис. 2.1

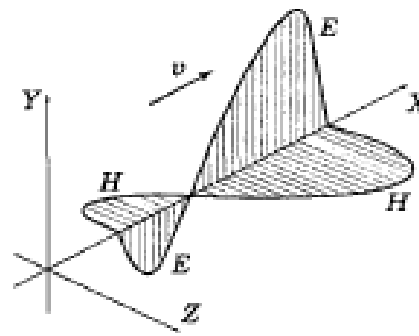


Рис. 2.2

Кроме того, E и H , согласно (2.14), изменяются при этом синфазно: E_y и H_z одинаковы в каждый момент по знаку, одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают максимума, что и показано на рис. 2.2 — мгновенная картина в некоторый момент.

Заметим, что если бы мы рассмотрели волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси X , то E_y и H_z изменялись бы в противофазе ($\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E_y = -\sqrt{\mu\mu_0} H_z$). Однако по-прежнему оба вектора, E и H , составляли бы правовинтовую систему с направлением распространения. Это же относится и к случаю, когда E направлен вдоль оси Z , а H — вдоль оси Y , т. е. их проекции E_z и H_y .

// Саха-Теллера не біло в лекціях

//Поперечні хвилі теж

Поляритоны – розв'язки рівнянь Максвелла для речовин ($\mu=1$, $\rho=0$):

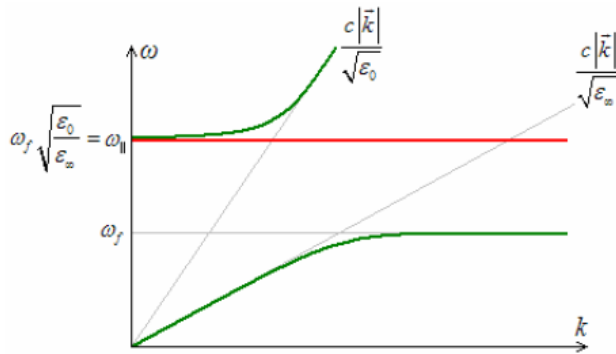
$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{H} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = 0 \end{cases}$$

$$\text{В представленні плоских хвиль: } \vec{u} = \vec{u}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]: \begin{cases} [\vec{k} \times \vec{H}] = -\frac{\omega}{c} \epsilon(\omega) \vec{E} \\ [\vec{k} \times \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{H} \\ (\vec{k} \cdot \vec{H}) = 0 \\ \epsilon(\omega)(\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0 \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{cases}$$

У цієї системи буде два розв'язки – поздовжні та поперечні поляритонні хвилі:

$\omega_{\parallel} = \omega_f \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{\infty}}} > \omega_f$ – не залежить від k , рівняння Саха-Теллера – поздовжня хвиля.

$\varepsilon(\omega_x) = \varepsilon_{\infty} + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty})\omega_f^2}{\omega_f^2 - \omega_x^2}$ – поперечна хвиля.



93. Сегнетоелектрика. Спонтанна поляризація.

21. Сегнетоелектрики .

Розглядаємо речовини, в яких ω_0 та ω_q дуже малі. Може бути навіть $\omega_0 \approx \omega_q$

1) Нехай $Q_1 > 0$ ($\omega_0 > \omega_q$) (1)

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_q^2} \quad (2)$$

Параметричний стан ($b_0(\bar{u})^2 \bar{u} \ll 1$)

В лінійному наближенні може бути таке, що $\bar{u} \approx \bar{E} \Rightarrow \bar{P} = \chi_p(\omega)\bar{E}$ (3)

Якщо брати до уваги нелінійні члени з (24) :

$$\bar{P} = \chi_p(\omega)\bar{E} + \chi^{(3)}E^3$$

$$\chi_p(\omega) = \chi_{\text{ст}} + \frac{Nq_*^2 / \mu_*}{\omega_p^2 - \omega^2} \quad (\Gamma \rightarrow 0) \quad (4) \quad (\text{всі величини перенормовані})$$

2) $Q_1 < 0$ ($\omega_0 < \omega_q$) (5)

$$\mu_* \ddot{\bar{u}} = |Q_1| \bar{u} - b_0(\bar{u})^2 \bar{u} + q_* \bar{E} \quad (6)$$

Розв'язок може мати вигляд $e^{i\lambda t}$ (але ж при $\lambda \rightarrow \infty$ p-зок $\rightarrow \infty$, при $\lambda \rightarrow -\infty$ p-зок $\rightarrow -\infty$)

$$\bar{u}(t) = \bar{u}_0 + \Delta \bar{u}(t) \quad (7)$$

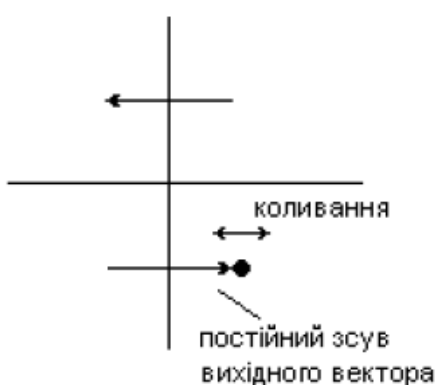
$$\mu_* \Delta \ddot{\bar{u}} = |Q_1| \bar{u}_0 + |Q_1| \Delta \bar{u} - b_0(\bar{u}_0 + \Delta \bar{u})^2 \bar{u}_0 - b_0(\bar{u}_0 + \Delta \bar{u})^2 \Delta \bar{u} + q_* \bar{E}(t) \quad (8)$$

Величина $\Delta \bar{u}(t)$ пов'язана з полем. Коли $\Delta \bar{u}$ - мале, ним нехтуємо :

$$(-|Q_1| + b_0(\bar{u}_0)^2) \bar{u}_0 = 0 \quad (9)$$

$$\bar{E} = \bar{e}_z E_z(t) \quad (10) \quad \text{не обов'язково залежить від часу.}$$

Розглянемо одновимірний випадок.



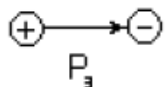
$$\mu_* \Delta \ddot{u}_z = [|Q_1| - 3b_0 u_{0z}^2] \Delta u_z + q_* E_z(t) \quad (11)$$

$$u_z = u_{0z} + \Delta u_z(t) \quad (u_{0z} - \text{статична компонента})$$

$$u_{0z} = \sqrt{\frac{|Q_1|}{b_0}} \quad (12) \quad (\text{з (9)})$$

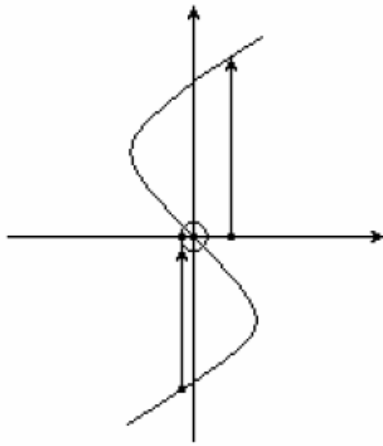
$$\bar{u} = \bar{u}_+ - \bar{u}_-$$

З'являється спонтанна поляризація (\rightarrow діелектричний стан)



Отже (5) : $Q_1 < 0$, $\omega_0 < \omega_q$: діелектричний стан

$$\mu_* \Delta \ddot{u} = [-2b_0 u_{0z}^2] \Delta u_z + q_* E_z(t)$$



$$\mu_* \Delta \ddot{u} = [-2|Q_1|] \Delta u_z + q_* E_z(t)$$

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \Delta \vec{P} \quad (13)$$

$$\Delta P = \chi_s(\omega) \vec{E} \quad (14)$$

$$\chi_f(\omega) = \chi_{en} + \frac{Nq_*^2 / \mu_*}{\omega_f^2 - \omega^2} \quad (15) \quad f = p, s$$

$$\omega_s = \sqrt{2(\omega_q^2 - \omega_0^2)} \quad (16)$$

Проблема поляризаційної катастрофи :

$$q_* = K_p q = \frac{q}{1 - \frac{4\pi N}{3}(\alpha_+ + \alpha_-)}$$

$$\varepsilon_{zz}(\omega) = \varepsilon_{zz}^\infty + \frac{(\varepsilon_{zz}^0 - \varepsilon_{zz}^\infty)\omega_f^2}{\omega_f^2 - \omega^2} \quad (17)$$

$$\hat{\varepsilon} = 1 + 4\pi\hat{\chi} \quad (18)$$

$$\varepsilon_{zz}^\infty = 1 + 4\pi\chi_{en} \quad (19)$$

$$\varepsilon_{zz}^0 = 1 + \frac{4\pi N q_*^2}{\mu_* \omega_f^2} \quad (20)$$

Проаналізуємо формулу (19) : $\varepsilon_{zz}^\infty - 1 = \frac{1 - 3 \frac{4\pi N}{3}(\alpha_+ + \alpha_-)}{1 - \frac{4\pi N}{3}(\alpha_+ + \alpha_-)} = \frac{1 - 3x}{1 - x} \quad (21)$

$$x = \frac{4\pi N}{3}(\alpha_+ + \alpha_-) = \frac{\varepsilon_{zz}^\infty - 1}{\varepsilon_{zz}^\infty + 2} \quad (22)$$

$$K_p = \frac{1}{1 - \frac{4\pi N}{3}(\alpha_+ + \alpha_-)} = \frac{\varepsilon_{zz}^\infty + 2}{3} > 0 \quad (23)$$

ε_{zz}^∞ – експериментально визначена величина

$$q_* = q \left(\frac{\varepsilon_{zz}^\infty + 2}{3} \right) \quad (24)$$

Інформацію можна записувати за допомогою сегнетоелектриків у об'ємі (розподіл P в об'ємі).
Наприклад : $LiNbO_3Fe$, SBN

Поки що невідомо, як її використати і «витягнути».

94. Хвилі ТМ в прямокутному хвилеводі.

ТМ хвилі це хвилі в яких немає повздовжньої z-ї компоненти магнітного поля, існує лише електрична компонента. Інакше кажучи це хвилі виду E_{mn} .

Враховуючи граничні умови $E_z = 0$. Тобто $E_z = 0$ при $x=0$, $x=a$ та при $y=0$ та $y=b$

Аналогічно $E_x = 0$ при $y=0$ та $y=b$, і $E_y = 0$ при $x=0$ та $x=a$ відповідно й похідні

$\frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$ при $y=0$ та $y=b$ та $\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$ при $x=0$ та $x=a$ Отже отримуємо краєву задачу

$\Delta E_z + g^2 E_z = 0$ тут (Δ - поперечний оператор Лапласа)

Методом відокремлення змінних отримуємо розв'язок

$E_z(x, y) = (A \sin(g_x x) + B \cos(g_x x))(C \sin(g_y y) + D \cos(g_y y))$ де $g_x^2 + g_y^2 = g^2$

Підставляємо краєві умови отримуємо

$$g = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$E_x = -j \frac{hm\pi}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jhz}$$

$$E_y = -j \frac{hn\pi}{g^2 b} E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jhz}$$

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jhz}$$

Ще дві проекції магнітного поля

$$H_x = jw\epsilon_0 \frac{n\pi}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jhz}$$

$$H_y = -jw\epsilon_0 \frac{m\pi}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jhz}$$

$$H_z = 0$$

$$\text{Довжина хвилі в хвилеводі } \lambda = \frac{2\pi}{h}$$

$$\text{Критична довжина хвилі } h = \sqrt{\beta^2 - g^2}$$

$$\text{Критичний випадок } \beta = g; \quad \beta_{krit} = \frac{2\pi}{\lambda_{krit}} = g; \quad \lambda_{krit} = \frac{2\pi}{g} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

Мінімально можливі індекси такої хвилі $m=1$, $n=1$.

95. Хвилі TE в прямокутному хвилеводі.

Хвилі типу H в прямокутному хвилеводі

H: має складову H_z , у той час як $E_z = 0$ (електричне поле поперечне).

$$E_x = \frac{-j\omega\mu}{g^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad H_x = \frac{-jh}{g^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad E_y = \frac{-j\omega\mu}{g^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad H_y = \frac{-jh}{g^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$H(x, y, z) = H_z(x, y)e^{-jhz} \quad D_{\perp}^2 H_z + g^2 H_z = 0 \quad . \text{ Межові умови: } E_x = 0, y = 0, y = b; \quad E_y = 0,$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \quad y = 0, y = b, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0, \quad x = a, x = 0$$

$$x = 0, x = a; \Rightarrow$$

$$\lambda_{\text{crit}} = \frac{2\pi}{g} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}, \quad V_{\Phi} = \frac{c}{(1 - (\lambda_0 / \lambda_{\text{cr}})^2)^{1/2}}$$

Критична довжина хвилі

Електричні та магнітні поля описуються формулами:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = j\omega\mu \frac{n\pi}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz} \\ E_y = j\omega\mu \frac{m\pi}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz} \\ E_z = 0 \\ H_x = j \frac{hm\pi}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz} \\ H_y = j \frac{hn\pi}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz} \\ H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz} \end{array} \right.$$

Хвиля типу H_{10} - критична. Для довідки: критична довжина хвилі визначається із мінімальності значень індексів m, n , але при умові, що усі компоненти хвиль не обернуться в нуль або константу (хвиля то повинна існувати).

96. Хвилі ТМ в циліндричному хвилеводі.

9.2. Волны типа Е в круглом волноводе

Задача о волнах электрического типа в круглом металлическом волноводе сводится к решению поперечного уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + g^2 E_z = 0 \quad (9.8)$$

при граничных условиях, согласно которым касательная составляющая электрического вектора на стенке волновода обращается в нуль. Очевидно, что из трех возможных проекций комплексной амплитуды \vec{E} , а именно \dot{E}_r , \dot{E}_φ и \dot{E}_z , касательным составляющим к стенкам могут отвечать лишь проекции \dot{E}_z и \dot{E}_φ . Поэтому необходимо потребовать, чтобы

$$E_z = 0 \text{ при } r = a, \quad (9.9)$$

$$E_\varphi = 0 \text{ при } r = a. \quad (9.10)$$

Из формул перехода (9.4) с очевидностью следует, что эти два условия не являются независимыми. Действительно, проекция \dot{E}_φ , пропорциональная в случае волн Е-типа частной производной $\partial \dot{E}_z / \partial \varphi$, обращается в нуль, если проекция \dot{E}_z постоянна на контуре поперечного сечения волновода. Таким образом, достаточно, чтобы на идеально проводящей стенке волновода выполнялось граничное условие (9.9). Вместе с уравнением Гельмгольца (9.8) оно образует требуемую краевую задачу.

Структура поля волны типа E_{mn} в круглом волноводе. Амплитуда продольной проекции электрического вектора волны типа E_{mn} в круглом волноводе на основании выражений (9.25) и (9.27) имеет следующий вид:

$$E_z = E_0 J_m \left(\frac{\gamma_{mn} r}{a} \right) \cos m\varphi. \quad (9.31)$$

Отсюда, используя формулы перехода (9.4), в которых, по определению, $\dot{H}_z = 0$, легко находим совокупность выражений, описывающих пространственные зависимости проекций векторов электромагнитного поля волны типа E_{mn} :

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= -jhE_0 \left[\frac{ma^2}{\gamma_{mn}^2 r} J_m \left(\frac{\gamma_{mn} r}{a} \right) - \frac{a}{\gamma_{mn}} J_{m+1} \left(\frac{\gamma_{mn} r}{a} \right) \right] \cos m\varphi e^{-jhz}, \\ \dot{E}_\varphi &= jhE_0 \frac{ma^2}{\gamma_{mn}^2 r} J_m \left(\frac{\gamma_{mn} r}{a} \right) \sin m\varphi e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z &= E_0 J_m \left(\frac{\gamma_{mn} r}{a} \right) \cos m\varphi e^{-jhz}, \end{aligned} \quad (9.32)$$

$$\dot{H}_r = -\frac{\omega \epsilon_0}{h} \dot{E}_\varphi, \quad \dot{H}_\varphi = \frac{\omega \epsilon_0}{h} \dot{E}_r, \quad \dot{H}_z = 0.$$

При выводе формул (9.32) учитывалось правило дифференцирования цилиндрических функций (9.24), а также равенство (9.27).

Подобно тому как это было сделано в теории прямоугольного волновода [см. формулу (8.60)], здесь также можно ввести полезный числовой параметр — характеристическое сопротивление

$$Z_{cE} = \frac{\sqrt{\dot{E}_r^* \dot{E}_r + \dot{E}_\varphi^* \dot{E}_\varphi}}{\sqrt{\dot{H}_r^* \dot{H}_r + \dot{H}_\varphi^* \dot{H}_\varphi}} = 120\pi \sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{kp})^2}. \quad (9.33)$$

97. Хвилі TE в циліндричному хвилеводі.

Круглий металічний хвилевід – це трубка радіуса a , вважаємо, що провідність стінок хвилеводу нескінченна, він сам нескінченно довгий і однорідний вздовж осі Z , а внутрішнім середовищем є повітря або вакуум. Можна бачити, що стінка хвилеводу співпадає з координатною поверхнею $r = a$ циліндричної системи координат (r, φ, z) . Тому дана система координат є дуже зручною для розв'язку даного типу задач.

Розглянемо хвилі, що розповсюджуються вздовж осі Z :

$$E(r, \varphi, z) = E(r, \varphi)e^{-jkz}$$

$$H(r, \varphi, z) = H(r, \varphi)e^{-jkz}$$

Слід розв'язати рівняння Гельмгольца: $\nabla^2 E_z + \frac{\omega^2}{c^2} E_z = 0$, $\nabla^2 H_z + \frac{\omega^2}{c^2} H_z = 0$, або переписати в циліндричних координатах і підставити характерну залежність від Z ,

$$\text{маємо } \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \xi^2 H_z = 0$$

Хвилі Н-типу:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \xi^2 H_z = 0, \text{ оскільки } E_z = 0, \text{ то граничні умови мають}$$

$$\text{вигляд } E_\varphi = \frac{i\omega\mu_0}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0, \text{ при } r = a \Rightarrow \xi_{mn} a = \mu_{mn}, \text{ а } \xi_{mn} = \frac{\mu_{mn}}{a}.$$

$$\text{Тоді } E_z = 0 \quad E_r = \frac{i\omega\mu_0^2 m a^2}{\mu_{mn}^2 r} H_0 J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right) \sin(m\varphi) e^{-ikz},$$

$$E_\varphi = i\omega\mu_0 H_0 \left[\frac{m a^2}{\mu_{mn}^2 r} J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right) - \frac{a}{\mu_{mn}} J_{m+1}\left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right) \right] \cos(m\varphi) e^{-ikz}$$

$$H_r = -\frac{k}{\omega\mu_0} E_\varphi; \quad H_\varphi = \frac{k}{\omega\mu} E_r$$

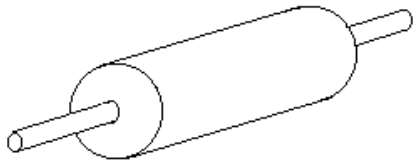
$$H_z = H_0 J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right) \cos(m\varphi) e^{-ikz},$$

інші формули:

$$\lambda_{\text{КР}} H_{mn} = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}}; \quad \lambda_{\text{ХВ}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{КР}}}\right)^2}}; \quad \vartheta_{\Phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{КР}}}\right)^2}}.$$

Найбільше $\lambda_{\text{КР}}$ для $H_n : \lambda_{\text{КР}} = 3.41a$.

98. Хвилі TEM в коаксіальному хвилеводі.



Коаксіальний хвилевід – 2 металевих циліндри радіуса a і b , розділені діелектриком.

Розглянемо циліндричну систему координат, де вісь z співпадає з віссю системи ($b > a$).

Хвилею TEM-типу (або поперечною електромагнітною хвилею) прийнято називати

хвилю, у якої $E_z = H_z = 0$. Тоді перші два рівняння Максвела мають вигляд:

$$\text{rot} \mathbf{H} = j\omega \epsilon_a \mathbf{E}, \quad \text{rot} \mathbf{E} = -j\omega \mu_a \mathbf{H}, \quad \text{або по координатам:}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega \epsilon_a E_x, \quad -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega \mu_a H_x; \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = j\omega \epsilon_a E_y, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega \mu_a H_y$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0;$$

Звідки можна отримати рівняння Гельмгольца $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \beta E_x = 0$, де $\beta = \frac{\omega}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$, тоді

можна переписати, що $E_x(x, y, z) = E_x(x, y)e^{\pm j\beta z}$, отже

$$\vartheta_\Phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{c}{n}. \quad \text{Це означає, що хвилі типу TEM на відміну від } E \text{ - і } H \text{ -}$$

хвиль, не мають частотної дисперсії фазової швидкості. Для цих хвиль

$$k = \beta = \frac{\omega}{c_n} \Rightarrow \xi = 0, \quad \lambda_{\text{КР}} = \frac{2\pi}{\xi} = \infty. \quad \text{Отже, хвилевод з хвилею типу TEM}$$

пропускає коливання будь-яких частот, поглинаючи з постійного струму.

Як бачимо, рівняння $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ задовольняється при $\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi$, де φ -

потенціал. Оскільки $\text{div} \mathbf{E} = 0 = \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial x} \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$

Для коаксіального хвиеводу $\nabla\varphi(r)=0$, $\varphi(a)=U$, $\varphi(b)=0$, або

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = A , \quad \varphi = A \ln r + B , \text{ з крайових умов}$$

$$A \ln a + B = U ; \quad A \ln b + B = 0 ,$$

тоді $A = \frac{U}{\ln \frac{a}{b}} , \quad B = \frac{-U \ln b}{\ln \frac{a}{b}} \Rightarrow \varphi(r) = \frac{U \ln \frac{r}{b}}{\ln \frac{a}{b}} .$

Тоді $E(r) = -\text{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{i}_r = \frac{U}{\ln \frac{b}{a} r} \vec{i}_r$

Припустимо, що простір між циліндрами заповнено діелектриком без втрат ($\sigma = 0$)

з заданими ε_a, μ_a , тоді $E(r, z) = \frac{U}{\ln \frac{b}{a} r} e^{-j\beta z \vec{i}_r}$, де $\beta = \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$, тоді

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega \mu_a} \text{rot} E = \frac{j}{\omega \mu_a} \frac{\partial E_r}{\partial z} \vec{i}_\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} \frac{U}{\ln \frac{b}{a} r} e^{-j\beta z \vec{i}_\varphi}$$

Отже \vec{E} вектор має єдину проекцію, вздовж вектора \vec{i}_r , а силові лінії \vec{H} вектора являють собою концентричні кола, які охоплюють внутрішній провідник хвиеводу.

\vec{i}_r - радіальна компонента вектора струму

\vec{i}_φ - кутова

j – уявна одиниця

99. Коефіцієнт згасання хвиль в хвилеводах.

Існує 2 основних джерела втрат:

1. скінченне значення провідності метала, з якого виготовлено хвилевод (тангенціальна складова вектора напруж. ел. поля не обертається в нуль, силові лінії вигинаються і виникає складова усередненого вектора Пойтінга, що направлена всередину металу);
2. струми провідності в діелектрику, яким заповнено хвилевод.

Т. ч. слід вважати, що $k = k' - ik''$, а отже $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) e^{-k''z} e^{-ik'z}$, $\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}(x, y) e^{-k''z} e^{-ik'z}$, де k' — коефіцієнт фази, k'' — коефіцієнт згасання хвилі. Для прикладу, в хвилеводі довжиною 1 м амплітуда хвилі зменшиться за рахунок втрат $E_{вх} < E_{вх}$, тоді з наведених вище формул:

$k'' = \ln(E_{вх} / E_{вх}) = [Hn / м]$ (непер на метр). В радіотехніці використовуються:

$\Delta = 20 \lg(E_{вх} / E_{вх}) = [\text{дБ} / м]$, $\Delta = 8,686 k''$. Для потужностей $\Delta = 10 \lg(P_{вх} / P_{вх})$

. При $k''L \gg 1$ майже вся потужність розсіюється у стінках.

Розглянемо довільний хвилевод з втратами, вісь якого направлена вздовж z . Оскільки відомі ф-ли для \vec{E} та \vec{H} , то середня потужність, яку переносить хвиля

$P(z) = P_0 \exp(-2k''z)$, $P_0 = P(z=0)$. Продиференціювавши, маємо: $\frac{dP}{dz} = -2k''P$

або $k'' = -\frac{dP / dz}{2P}$. Величина dP — втрати на відрізок хвилеводу довжиною dz . Тоді

маємо $dP = -dz \int_L |\vec{\Pi}_{сер.вт.}| dl$, де $\vec{\Pi}_{сер.вт.}$ — вектор Пойтінга (ним характ. густ.

середньої потужності втрат). $P = \int_S \vec{\Pi}_{сер.} d\vec{S}$ — потужність, що переноситься. Тоді

$k'' = \frac{\int_L |\vec{\Pi}_{сер.вт.}| dl}{2 \int_S \vec{\Pi}_{сер.} d\vec{S}}$, де за означенням $\vec{\Pi}_{сер.вт.} = \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{\vec{E}}_\tau \dot{\vec{H}}_\tau^*]$, $\dot{\vec{E}}_\tau$ і $\dot{\vec{H}}_\tau$ — комплексні

амплітуди, тангенціальна складова. Вважаємо, що $\dot{\vec{H}}_\tau = \dot{\vec{H}}_\tau (\sigma = \infty)$ (тобто таке ж, як і в ідеального хвилеводу). Щоб знайти комплексну амплітуду вектора напруженості

електричного поля скорист. умовами Леонтовича $|\dot{\vec{E}}_\tau| = Z_m |\dot{\vec{H}}_\tau|$, де Z_m —

характеристичний опір метала. $Z_m = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} (1 + i)$, (відносна магнітна проникність 1).

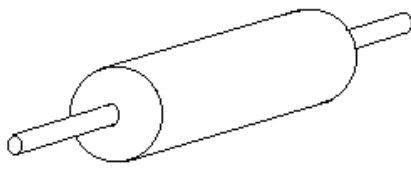
Якщо врахувати $\dot{\vec{H}}_\tau \perp \dot{\vec{E}}_\tau$, то $\int_L |\vec{\Pi}_{\text{сеп.вт.}}| dl = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}} \int_L |\dot{\vec{H}}_\tau|^2 dl$ і остаточно:

$$k'' = \frac{\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{8\sigma}} \int_L |\dot{\vec{H}}_\tau|^2 dl}{\operatorname{Re} \int_S [\dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}}^*] dS}.$$

Т. ч. щоб обчислити погонне затухання, необхідно знати робочу частоту, питому провідність матеріала стінок і мати дані про структуру силових ліній ел-магн. поля хвилі у хвилеводі з тими ж геометричними характеристиками, але без втрат.

Часткові випадки (в це питання не входить) — Баскаков с. 224-226 (коаксіальний), с. 226-228 (прямокутний), с. 228-229 (круглий).

100. Затухання TEM хвилі в коаксіальному хвилеводі.



Коаксіальний хвилевід – 2 провідних циліндри радіуса a і b , розділені діелектриком.

Розглянемо циліндричну систему координат, де вісь Z співпадає з віссю системи ($b > a$).

Хвилею TEM-типу (або поперечною електромагнітною хвилею) прийнято називати хвилю, у якої $E_z = H_z = 0$.

Це означає, що хвилі типу TEM не мають частотної дисперсії фазової швидкості. Для

цих хвиль $k = \beta = \frac{\omega}{c_n} \Rightarrow \xi = 0$, тобто $\lambda_{\text{КР}} = \frac{2\pi}{\xi} = \infty$. Значить хвилевод з хвилею типу TEM пропускає коливання будь-яких частот.

Існує 2 основних джерела втрат:

1. Скінчене значення провідності метала, з якого зроблені стінки хвилеводу (внаслідок чого силові лінії спотворюються і виникає складова вектора Умова-Пойтінга, направлена всередину метала) Втрати на нагрівання хвилеводу.
2. Струми провідності в діелектрику, яким заповнений хвилевод.

Покладемо, що діелектрик немагнітний ($\mu = 1$) і в ньому відсутні омичні втрати.

Комплексні амплітуди проекцій векторів електромаг поля TEM хвилі коакс. хвилеводі без втрат

$$\vec{E}_r = \frac{A}{r} e^{-j\beta z}, \quad \vec{H}_\varphi = \frac{\sqrt{\epsilon} A}{120\pi r} e^{-j\beta z}$$

тут A = константа з розмірністю

напруги. $\beta = \omega \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu_0}$ коефіцієнт фази (поздовжній хвильовий вектор). Звідки потужність, що переноситься вздовж осі z в області між провідниками

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S [\vec{E} \vec{H}^*] dS = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \vec{E}_r \vec{H}_\varphi^* r dr = \frac{\sqrt{\epsilon} A^2}{120} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$h'' = \frac{\sqrt{\frac{\omega \mu_0}{8\sigma}} \int_L |\dot{H}_{\tau m}|^2 dl}{\operatorname{Re} \int_S [\vec{E} \vec{H}^*] dS}$$

Знаходимо значення чисельника з $\int_L |\dot{H}_{\tau m}|^2 dl$, (dl- частина

поперечного перерізу контуру передачі хвилі) де h'' коефіцієнт затухання, що вимірюється в неперах на метр Нп/м, або в дБ/м (погонний). Непер безрозмірна величина поділу двох значень.

$$1 \text{ Нп} = 20 \log_{10} e \text{ dB} \approx 8.685889638 \text{ dB}$$

$$1 \text{ dB} = \frac{1}{20 \log_{10} e} N_p \approx 0.115129254 N_p.$$

$$h'' = \frac{\sqrt{\omega \mu_0 / (8\sigma)} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \sqrt{\epsilon}}{120\pi \ln(b/a)}$$

в Нп/м, Звідки погонне затухання

коаксіальному хвилеволі в дБ/м

$$\Delta_{\text{пор}} = \frac{\sqrt{\omega \mu_0 / (8\sigma)} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \sqrt{\epsilon}}{43.4 \ln(b/a)}$$

Пример 11.2. Коаксиальный кабель марки РК-50-3-13 имеет полиэтиленовую изоляцию ($\epsilon=2.25$) и следующие размеры в поперечном сечении: $a=0.45$ мм, $b=1.5$ мм. Найти погонное затухание Т-волны в данном кабеле при частоте сигнала $f=750$ МГц, считая, что $\sigma=5.7 \cdot 10^7$ См/м.

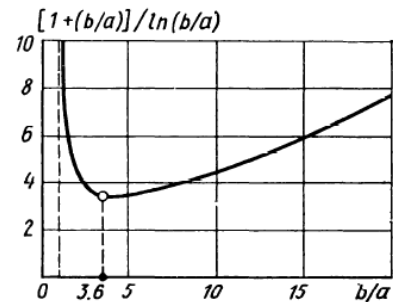
Здесь значение параметра $\sqrt{\omega \mu_0 / (8\sigma)} = 3.6 \cdot 10^{-3}$ Ом. Тогда в соответствии с формулой (11.20)

$$\Delta_{\text{пор}} = \frac{3.6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 (1/0.45 + 1/1.5)}{43.4 \ln(1.5/0.45)} = 0.2 \text{ дБ/м.}$$

Итак, погонное затухание типичного коаксиального кабеля на частотах около 1 ГГц составляет несколько десятых долей децибел на метр.

Зафіксувавши радіус зовнішнього провідника модна так підібрати радіус внутрішнього, що погонний коеф. затухання буде мінімальний. Розглядаючи праву частину останньої формули, можна представити

$$\frac{1/a + 1/b}{\ln(b/a)} = \frac{1}{b} \frac{1 + (b/a)}{\ln(b/a)}$$



Мінімум при $b/a=3.6$. При $\epsilon=2.25$ $Z_v = \frac{138}{\sqrt{2.25}} \lg 3.6 = 51$ Ом. Фізична

причина існує мін: якщо сильно зменшити внутр. радіус, то втрати зростають внаслідок збільшення густини струму; якщо відношення радіусів прямує до 1, то втрати теж зростають оск. через скорочення площі тої частини хвилевода, по якій переноситься електромаг енергія.

101. Електромагнітні коливання в прямокутному резонаторі.

Об'ємний резонатор являє собою повністю або частинно заповнений об'єм з провідними стінками. Розглянемо переріз прямокутного резонатора, обмеженого провідні поверхні при $z = 0$, $z = l$ (вісь z напрямлена вздовж резонатора). Нехай розповсюджується хвиля H_{10} :

$$E_{\text{пад}} = E \sin(\pi x / a) e^{-i h z} \quad , \text{виникає відбита хвиля} \quad E_{\text{отр}} = E \sin(\pi x / a) e^{i h z} \quad . \text{ При } z = 0, E_y = E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}} \Rightarrow A = 1. \text{ За формулою Ейлера } E_y = -2i E \sin(\pi x / a) \sin(kz) \Rightarrow \text{двовимірна стояча хвиля.}$$

$$\text{З граничних умов } E_y = 0 \text{ при } z=l \Rightarrow kl = \pi p \Rightarrow k = p\pi / l, \quad \lambda = 2\pi / k = 2l / p \quad \lambda_{\text{critical}} = 2a \quad . \text{ Так як для } H_{10} \text{ . Для нашого значення параметру «р» визначилась власна резонансна довжина хвилі. Для будь-якої довжини}$$

$$\text{хвилі } \lambda_{\text{рез}} = \frac{2l}{p}, \text{ але } \frac{1}{\lambda_{\text{рез}}^2} = \frac{1}{\lambda_{\text{хв.рез}}^2} + \frac{1}{\lambda_{\text{crit}}^2}, \text{ але } \lambda = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 - (n/b)^2}} .$$

$$\lambda_{\text{рез}} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/l)^2}} .$$

Коливання E_{mn0} можуть існувати, а H_{mn0} – ні. Основний тип хвилі – мода з резонансною довжиною хвилі (2 індекси рівні між собою, а третій є нуль). Враховуючи

$$\text{рівняння Гельмгольца: } \nabla^2 E_z + \beta^2 E_z = 0 \quad \text{Граничні умови: } E_r|_s = 0 ,$$

$$\beta^2 = (2\pi / \lambda)^2 = (m\pi / a)^2 + (n\pi / b)^2 + (p\pi / l)^2$$

$\text{div} E = 0, H = \text{rot} E = 0. \text{ (для } E_{mn0}).$

$$E_x = -c \frac{p m \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right)}{a((m/a)^2 + (n/b)^2)}$$

$$E_y = \frac{-c p n}{b c ((m/a)^2 + (n/b)^2)} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right)$$

$$E_z = C \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right)$$

$$H_x = iC h / b \frac{w\epsilon}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right)$$

$$H_y = iC \frac{\mu}{a} w\epsilon \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right)$$

$$H_z = 0$$

102. Електромагнітні коливання в циліндричному резонаторі.

В якості моделі резонатора беремо круглий циліндр, заповнений з обох кінців металевими стінками з провідника. Оскільки ми хочемо аналізувати стоячі хвилі в резонаторі, то залежність полів від z повинна задаватися умовою:

$$A \sin kz + B \cos kz$$

Причому для ТЕ і ТМ хвиль коефіцієнти будуть різними. Нехай торцеві стінки розміщені в координатах $z = 0, z = d$. Тоді граничні умови виконуються лише при значеннях k , які задовольняють умовам:

$$k = \frac{n\pi}{d}, \text{ де } n = 1, 2, 3, \dots$$

Для ТМ коливань з умови перетворення компоненти E_z в нуль отримаємо:

$$E_z = \psi(x, y) \cos\left(\frac{\pi n z}{d}\right), n \in N$$

Аналогічно для ТЕ коливань з умови перетворення B_z в нуль маємо:

$$B_z = \psi(x, y) \sin\left(\frac{\pi n z}{d}\right), n \in N$$

Поперечні компоненти поля всередині хвилеводу (резонатора) виражаються через поздовжні (див. ТЕ, ТМ хвилі CPC №1).

ТМ хвилі:

$$E_t = -\frac{n\pi}{\chi^2 d} \sin\left(\frac{\pi n z}{d}\right) \text{grad}_t \psi; \quad B_t = \frac{i\mu\epsilon\omega}{\chi^2 c} \cos\left(\frac{\pi n z}{d}\right) \left[\vec{e}_z \times \text{grad}_t \psi \right]$$

ТЕ хвилі:

$$E_t = \frac{i\omega}{\chi^2 c} \sin\left(\frac{\pi n z}{d}\right) \left[\vec{e}_z \times \text{grad}_t \psi \right]; \quad B_t = \frac{n\pi}{\chi^2 d} \cos\left(\frac{\pi n z}{d}\right) \text{grad}_t \psi$$

Граничні умови очевидно виконуються. $\chi^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2$

Кожне значення χ задає власну частоту резонатора:

$$\omega_n = \frac{c^2}{\mu\epsilon} \left[\chi^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \right]$$

Таким чином резонатор характерний дискретним набором частот можливих коливань, які утворюють стоячі хвилі.

103. Добротність резонатора.

1.(з книжки Сугакова):

Резонаторами називаються області простору, з усіх боків обмежені металевими стінками. Найпростішими прикладами резонаторів можуть бути хвилеводи, обмежені при $z = 0$ і $z = d$ провідними площинами. Тому щоб дослідити ел\м поле всередині резонатора, можна використовувати результати попередніх параграфів, доповнивши їх граничними умовами на площинах $z = 0$ і $z = d$:

$$E_x = E_y = 0 \Big|_{z=0,d} \text{ для Е-хвиль, } \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \Big|_{z=0,d} \text{ для Н-хвиль. Унаслідок відбивання}$$

хвиль від додаткових поверхонь ($z = 0, d$) електромагнітне поле всередині резонатора є суперпозицією хвиль, що рухаються в протилежних напрямках.

Електромагнітні хвилі в резонаторі можуть мати лише певний дискретний спектр частот. Ці частоти називаються власними частотами. Якщо провідність стінок резонатора нескінченно велика, то власні коливання в резонаторі не послаблюються. При скінченній провідності стінок існує потік енергії всередину провідника. При цьому енергія коливань у резонаторі зменшується, і вони затухають з часом. Втрати енергії характеризуються **добротністю** резонаторів, яка визначається так:

$$Q = \frac{\omega \text{ енергія ел \ м поля в резонаторі}}{2\pi \text{ енергія, яка втрачається за період}}$$

Де ω - частота коливань при відсутності втрат. Величина Q не залежить від амплітуди коливань.

2) зі старих шпор:

Будем считать, что в момент времени $t=0$ источник возбуждения отключается, тогда

$$E(t) = E_0 e^{-t/\tau} \cos \omega t, \quad \tau = 2Q/\omega$$

. Как известно, Пусть ϵ_0 - начальное значение энергии в резонаторе при $t=0$. За первый период амплитуда уменьшится до уровня $E_0 \exp(-2\pi/(\omega\tau)) = \exp(-\pi/Q) = E(t)$. Следовательно, вследствие потерь

будет рассеиваться энергия $W = \omega(1 - \exp(-2\pi/Q))$. Так как в радиоэлектронике $Q \gg 1$, то $\exp(-2\pi/Q) = 1 - 2\pi/Q \Rightarrow W = TP(\text{средних потерь}) = 2\pi/\omega \cdot P$

$$\Rightarrow a = \omega \text{рез} \omega_0 / P_{\text{ср. потерь}}. W_0 = \epsilon_0 / 2 \int E^2 dV = \mu_0 / 2 \int H^2 dV$$

$$\eta_{\text{потер}} = 1/2 \operatorname{Re} z_m |H_\tau|^2 = \sqrt{\frac{\omega \mu}{8\sigma}} |H_\tau|^2 \Rightarrow P_{\text{потер}} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{8\sigma}} \int |H_\tau|^2 dV \Rightarrow Q = \frac{\int \sqrt{2\omega \mu_0 \sigma} |H|^2 dV}{\int |H_\tau|^2 dS}$$

, где ω – резонансная частота.

Рассмотрим отдельные случаи

1) E₀₁₀: $H_{\varphi} = H_0 J_1(v_{01} r / a)$ (круглый резонатор длиной l и диаметром a)

$$\int H^2 dV = 2\pi l H_0^2 \int_0^a J_1^2(v_a r / a) r dr = \pi l a^2 J_1^2(v_m)$$

$$\int H_{\tau}^2 dS = H_{v1}^2(v_a) 2\pi a l + H_0^2 J_1^2(v_a) 2\pi a^2 = 2\pi a(l + a) H_0^2 J_1^2(v_a) \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{w \mu \sigma} l a}{\sqrt{2(l + a)}}$$

. Для этой моды $\lambda_0^{\text{рез}} = 2b / a$, $w_{\text{рез}} = \frac{2\pi c}{\lambda_0^{\text{рез}}} = 2.40 \pi c / a \Rightarrow$

$$Q_{E_{010}} = 21.3 \sqrt{\sigma a l / (a + l)}$$

104. Метод електростатичних зображень. Метод конформних відображень.

§3.4. Метод електростатичних зображень

Вище ми розглянули прямі методи розв'язування статичних задач. Вони приводили до безпосереднього інтегрування рівнянь Пуассона. Існує простіший метод розв'язування статичних задач з металевими поверхнями, так званий *метод електростатичних зображень*. Ідея метода полягає в тому, щоб підібрати систему фіктивних зарядів, які забезпечують необхідний потенціал на металевій поверхні. Тобто поверхня метала збігається з одною з еквіпотенціалей для цієї системи зарядів. Такі заряди називають *зображеннями*.

Розглянемо простий приклад. Нехай потрібно знайти поле точкового заряду q , що знаходиться на відстані l від металеві площини. В даному випадку достатньо ввести фіктивний заряд $q' = -q$ в точці, дзеркально симетричній відносно площини. Тоді потенціал поля заряду q та його зображення q' дорівнює

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} - \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{q'}|}, \quad (3.39)$$

де \mathbf{r}_q — радіус-вектор заряду q ($|\mathbf{r}_q| = l$), а $\mathbf{r}_{q'}$ — радіус-вектор заряду q' . На межевій площині $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{q'}|$, отже потенціал $\phi = 0$.

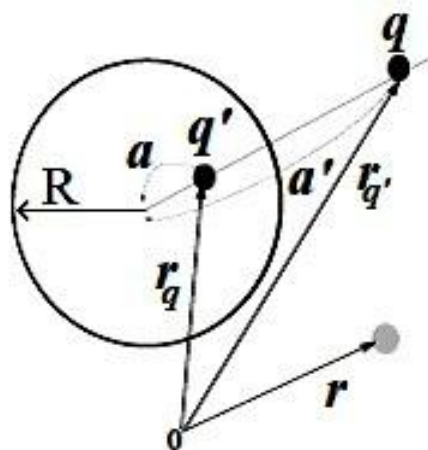


Рис. 3.9.

На заряд q діє сила $F = q^2/(2l)^2$, що притягує його до поверхні метала, так звана *сила зображення*. Розподіл поверхневих зарядів, які наводяться на поверхні метала обчислюються за формулою (2.39):

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{q'}|} = -\frac{q}{2\pi} \cdot \frac{l}{r^3}. \quad (3.40)$$

Розглянемо тепер більш складну задачу про поле точкового заряду q , що знаходиться на відстані l від центру заземленої металеві сфери, радіус якої дорівнює R . Для цього скористаємось

наступним результатом, який легко перевіряється безпосереднім розрахунком. Потенціал поля, що утворюється двома точковими зарядами q та q' дорівнює

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{q'}|}. \quad (3.41)$$

Він приймає нульове значення на сферичній поверхні, радіус якої дорівнює R . Центр поверхні знаходиться на прямій, що з'єднує заряди, на відстані a та a' від цих точок (див. рис. 3.9). Параметри a , a' і R пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a'} &= \left(\frac{q}{q'} \right)^2, & a \cdot a' &= R^2, \\ \text{звідки} \quad a' &= \frac{R^2}{a}, & q' &= -q \frac{R}{a}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

З огляду на (3.42), потенціал системи (3.41) набуває вигляду

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} - \frac{qR}{a \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{q'}|}. \quad (3.43)$$

Енергія взаємодії заряду зі сферою

$$\mathcal{E} = \frac{qq'}{2(a - a')} = -\frac{q^2 R}{2(a^2 - R^2)},$$

а сила, з якою заряд притягується до сфери

$$F = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = -\frac{q^2 a R}{(a^2 - R^2)^2}.$$

Розглянуті вище приклади можуть бути узагальнені при використанні принципу суперпозиції.

Нехай точковий заряд q знаходиться на відстані l від центру сферичного виступу (радіус R , де $R < l$) з металеві площини на осі симетрії системи. Потрібно знайти потенціал цієї системи (див. рис. 3.10).

Поверхня метала складається зі сфери та площини. Кожну з цих задач вже розв'язано. Забезпечимо спочатку умови на виступі. Для цього слід помістити фіктивний заряд $q' = -qR/l$ на відстані $l' = R^2/l$ відносно центра сферичного виступу (зображення відносно сфери). Але така система не відповідає умовам на металевій площині. Отже необхідно помістити два додаткових дзеркальних зображення зарядів 1 та 2 відносно площини (відповідно заряди 3 та 4). Таким чином потенціал усієї системи має вигляд

$$\phi = \frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} - \frac{q}{r_3} - \frac{q'}{r_4}. \quad (3.44)$$

Нажаль, не завжди можливо підібрати скінчену кількість зарядів для забезпечення необхідних умов на поверхні метала. В цьому розумінні метод зображень не є універсальний. Однак кожного разу є майже безліч розв'язаних задач. Для тієї самої зарядженої частинки біля нескінченної поверхні провідника: скільки еквіпотенціальних поверхонь — стільки і розв'язаних задач.

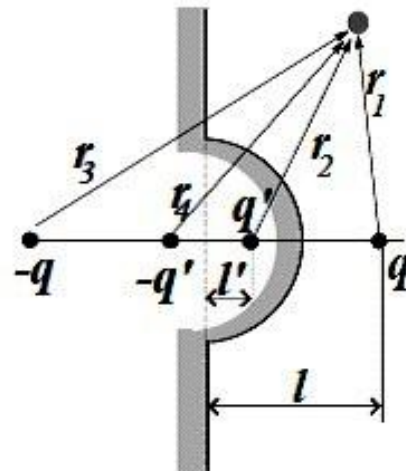


Рис. 3.10.

Метод конформних відображень(загальний опис, приклади: Шека ст. 76-93)

Пригадаємо, як визначається конформне перетворення. Нехай маємо аналітичну функцію

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (3.60)$$

яка здійснює взаємно однозначне перетворення.

Згідно з означенням функція (3.60) здійснює конформне перетворення, якщо в околі довільної точки z головна лінійна частина цього відображення є ортогональним перетворенням, яке зберігає орієнтацію. З наведеного означення випливають дві основні властивості конформних перетворень:

1. Конформне перетворення відображує нескінченно малі кола в такі ж нескінченно малі кола (з точністю до величини другого порядку малості).
2. Конформне перетворення зберігає кути між кривими в точках їх перетину.

Нагадаємо також геометричний зміст похідної $f'(z)$ від функції комплексної змінної: модуль похідної $|f'(z)|$ є коефіцієнт розтягу, а аргумент $\alpha = \arg(f'(z))$ — кут повороту головної лінійної частини відображення $w = f(z)$ у точці z . Інакше кажучи, коефіцієнт розтягу та кут повороту самого відображення $w = f(z)$ у точці z .

Для того, щоб функція $w = f(z)$ здійснювала конформне відображення в області D_z необхідно та достатньо виконання таких властивостей.

1. Функція повинна бути однолисною.
2. Аналітичною.
3. Похідна $f'(z)$ скрізь у області D_z має бути відмінною від нуля.

Таблиця 3.2.

«Старі змінні» (розв'язана задача)	Конформне перетворення	«Нові змінні» (нова задача)
Комплексний потенціал $\Phi(z)$ $z = x + iy$	$z = z(w)$ або $w = w(z)$	Комплексний потенціал $\Psi(w)$ $w = u + iv$

і для вихідних змінних, рівняння екіпотенціалей має вигляд $\operatorname{Re}\Psi = \operatorname{const}$, а рівняння силових ліній — $\operatorname{Im}\Psi = \operatorname{const}$, ці дві системи ліній ортогональні між собою.

	Номер питання							
<i>Шепелицький</i>	1	14	27	40	53	66	79	92
<i>Дибовський</i>	2	15	28	41	54	67	80	93
<i>Чумак</i>	3	16	29	42	55			94
<i>Ліщук</i>	4	17	30	43	56			95
<i>Кутовий</i>	5	18	31	44				
<i>Горєлов</i>					57	70	83	96
<i>Медюков</i>	6	19	32	45	58	71	84	97
<i>Гринько</i>	7		33		59		85	
<i>Сингаївська</i>		20		46		72		98
<i>Данько</i>	8	21	34	47	60	73	86	99
<i>Гайдар</i>	9	22	35	48	61	74	87	100
<i>Склярів</i>	10	23	36	49	62	75	88	101
<i>Дяченко</i>	11	24	37	50	63	76	89	102
<i>Нечепуренко</i>	12	25	38	51	64	77	90	103
<i>Глебова</i>	13	26	39	52		78		
<i>Малюк</i>					65		91	104
<i>Роботницький</i>	68	69	81	82				