

## 1. ВЛАСТИВОСТІ ЯДЕРНОЇ МАТЕРІЇ (ст.1)

**Приклад 1 (ст.3).** Оцінити густину та концентрацію ядерної речовини. Знайти частину об'єму ядра, яка зайнята нуклонами.

**Приклад 2 (ст.4).** Використовуючи формулу Вайцеккера, знайти енергію, яка виділяється під час спонтанного поділу ядра  $^{235}\text{U}$  на два уламки з приблизним відношенням мас 2 : 3 (взяти масові числа уламків рівними 94 та 141).

**Приклад 3 (ст.5).** За допомогою формули Вайцеккера розрахувати енергію відділення нейтронів для парно-парного ізотопу  $^{40}\text{Ca}$ .

**Приклад 4 (ст.6).** Маса нейтрального атома  $^{16}\text{O}$   $m_0 = 15.9949 \text{ а.о.м.}$ . Визначити питому енергію зв'язку  $\varepsilon$  ядра  $^{16}\text{O}$ .

**Приклад 5 (ст.7).** Вважаючи, що при рівномірному розподілі заряду по об'єму ядра різниця енергій зв'язку дзеркальних ядер визначається тільки різницею енергій кулонівської взаємодії протонів в цих ядрах, обчислити радіуси дзеркальних ядер  $^{23}_{11}\text{Na}$  та  $^{23}_{12}\text{Mg}$ .  $E_{\text{зв}}(^{23}\text{Na}) = 186,56 \text{ МеВ}$  та  $E_{\text{зв}}(^{23}\text{Mg}) = 181,72 \text{ МеВ}$  – відповідні енергії зв'язку. Порівняти отримані радіуси цих ядер з розрахованими за формулою  $R = 1,22 \cdot A^{1/3} \text{ фм}$ .

**Приклад 6 (ст.9).** Визначити за допомогою формули Вайцеккера найбільш стабільний по відношенню до  $\beta$  – розпаду елемент з масовим числом  $A = 40$ .

**Приклад 7 (ст.10).** Одне зі складових повної енергії зв'язку ядра в формулі Вайцеккера має вигляд  $E_{\text{сим}} = \frac{\varepsilon_{\text{сим}} (Z - N)^2}{A}$ , де  $\varepsilon_{\text{сим}}$  – нормуюча константа.

Середня енергія відриву одного нейтрона від ядра близька до значення  $E_1 = 8 \text{ МеВ}$ . Згідно до однієї з основних квантово-механічних моделей, ядро є сферою, в межах якої  $N = A - Z$  нейтронів та  $Z$  протонів вільно рухаються, утворюючи два взаємно незалежні нерелятивістські вироджені фермі-гази нуклонів. Виходячи з цієї моделі, визначити:

- 1) енергію Фермі газу протонів  $E_{Fp}$  та нейтронів  $E_{Fn}$ ;
- 2) глибину потенціальної ями для нейтронів в ядрі  $E_n$ ;
- 3) середню кінетичну енергію, яка приходить на один протон та
- 4) нейтрон  $\langle E(Z) \rangle$  та  $\langle E(N) \rangle$ ;
- 5) повну кінетичну енергію протонів та нейтронів у ядрі  $E(Z, N)$ ;
- 6) показати, що при заданому значенні масового числа  $A$  величина  $E(Z, N)$  має мінімум при оптимальному значенні  $Z_{\text{opt}} = A/2$ ;;
- 7) знайти залежність  $E(Z, N)$  від малої різниці  $Z - N$ , в цьому наближенні знайти коефіцієнт  $C_{\text{сим}}$ .

## 2. ПРИРОДНА РАДІОАКТИВНІСТЬ ТА ЗАКОНИ СПОНТАННОГО РОЗПАДУ (ст.23)

**Приклад 1 (ст.24).** До крові людини увели невелику кількість розчину, який містить  $^{24}\text{Na}$  з активністю  $A_0 = 2,1 \cdot 10^3 \text{ Бк}$ . Активність  $1 \text{ см}^3$  крові, взятої через  $t = 5$  год після цього, складала  $a = 0,28 \text{ Бк/см}^3$ . Знайти об'єм крові людини.

**Приклад 2 (ст.25).** Радіонуклід  $^{124}_{51}\text{Sb}$  утворюється зі сталою швидкістю  $q = 1,0 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ . Шляхом  $\beta^-$  – розпаду з періодом піврозпаду  $T = 60$  діб він перетворюється на стабільний нуклід  $^{124}_{52}\text{Te}$ . Знайти проміжок часу після початку утворення, коли активність нукліда  $^{124}_{51}\text{Sb}$  становитиме  $A = 3,7 \cdot 10^5 \text{ Бк}$ . Визначити,

яка маса нукліду  $^{124}_{52}\text{Te}$  накопичиться в препараті за час  $t = 120$  діб після початку його утворення.

**Приклад 3 (ст.27).** Під час радіоактивного розпаду ядер нукліда  $A_1$  утворюється радіонуклід  $A_2$ . Їх сталі розпаду дорівнюють  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  відповідно, причому  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Вважаючи, що в початковий момент часу препарат містить лише ядра нукліда  $A_1$  у кількості  $N_{10}$ , визначити:

- 1) кількість ядер нукліда  $A_2$  в момент часу  $t$ ;
- 2) момент часу  $t_m$ , коли кількість ядер нукліда  $A_2$  виявиться максимальною;
- 3) в якому випадку може виникнути стан перехідної рівноваги, при якому відношення кількостей обох нуклідів буде залишатись сталим? Чому дорівнюватиме це відношення?

**Приклад 4 (ст.30).** При  $\beta$  – розпаді  $^{112}\text{Pd}$  виникає  $\beta$  – активний нуклід  $^{112}\text{Ag}$ . Їх періоди піврозпаду дорівнюють  $T_1 = 21$  год та  $T_2 = 3,2$  год, відповідно. Знайти відношення максимальної активності нукліда  $^{112}\text{Ag}$  до початкової активності препарату, якщо в початковий момент часу він містив лише нуклід  $^{112}\text{Pd}$ .

**Приклад 5 (ст.32).** На даний момент часу в природному урані міститься 99,28%  $^{238}\text{U}$  та 0,72%  $^{235}\text{U}$ . Яким було співвідношення між  $^{238}\text{U}$  та  $^{235}\text{U}$  на момент утворення Землі, якщо вік Землі складає  $4 \cdot 10^9$  років? Періоди піврозпаду  $^{238}\text{U}$  та  $^{235}\text{U}$  дорівнюють, відповідно,  $T_1 = 4,51 \cdot 10^9$  років та  $T_2 = 0,713 \cdot 10^9$  років.

**Приклад 6 (ст.33).** Радіонуклід  $^{99}\text{Mo}$  з періодом піврозпаду 67 год. в результаті  $\beta$  – розпаду перетворюється в стабільний нуклід  $^{99}\text{Tc}$ . При цьому 75%  $\beta$  – перетворювань відбуваються через ізомерний стан  $^{99}\text{Tc}^m$ , період піврозпаду якого становить 6,04 год. Визначити відносну кількість стабільних ядер в препараті через 5,00 год., покладаючи, що в початковий момент часу препарат містив тільки радіонуклід  $^{99}\text{Mo}$ .

### 3. АЛЬФА-РОЗПАД ВАЖКИХ ЯДЕР (ст.38)

**Приклад 1 (ст.40).** Оцінити висоту кулонівського бар'єра для  $\alpha$  – частинок, що випускаються ядрами  $^{222}_{86}\text{Rn}$  (заокругленням верхівки потенціального бар'єра знехтувати). Якою в цих ядрах буде ширина бар'єра (тунельна відстань) для  $\alpha$  – частинок з енергією 5,5 MeV? (Рис. 3.1).

**Приклад 2 (ст.44).** Ядра  $^{210}\text{Po}$  випускають  $\alpha$  – частинки з кінетичною енергією  $E_\alpha = 5,3$  MeV, при цьому практично всі дочірні ядра опиняються безпосередньо в основному стані. Знайти повну енергію, що вивільнюється під час одного акту розпаду. Визначити початкову активність препарату  $^{210}\text{Po}$ , якщо за час, що дорівнює його періоду піврозпаду, препарат виділив 2,2 кДж тепла.

**Приклад 3 (ст.46).** Визначити кінетичні енергії  $\alpha$  – частинок  $E_\alpha$ , що утворюються під час розпаду ядра  $^{212}\text{Bi}$  на збуджені рівні ядра  $^{208}\text{Tl}$  з енергіями 0,49 MeV та 0,61 MeV (Рис. 3.2). Енергія зв'язку  $E_{\text{зв}}(Z, A)$  ядра  $^{212}\text{Bi}$  – 1654,32 MeV, ядра  $^{208}\text{Tl}$  – 1632,23 MeV та  $\alpha$  – частинки – 28,3 MeV.

**Приклад 4 (ст.48).** Розпад ядер  $^{210}\text{Po}$  відбувається з основного стану й супроводжується випусканням двох груп  $\alpha$  – частинок: основної з енергією  $E_\alpha = 5,3$  MeV та слабкої (за інтенсивністю) з енергією  $E'_\alpha = 4,5$  MeV. Знайти енергію  $\alpha$  – розпаду цих ядер та енергію  $\gamma$  – квантів, що випромінюються дочірніми ядрами.

**Приклад 5 (ст.50).** Під час розпаду ядер  $^{212}\text{Po}$  випускаються чотири групи  $\alpha$  – частинок: основна з енергією 8,78 MeV та довгопробіжні з енергіями

9,492; 10,422 та 10,542 MeV. Розрахувати та побудувати схему рівнів ядра  $^{212}\text{Po}$ , якщо відомо, що дочірні ядра в усіх випадках опиняються безпосередньо в основному стані.

**Приклад 6 (ст.51).** Оцінити відношення висоти відцентрового бар'єра до висоти кулонівського бар'єра для  $\alpha$ -частинок, що вилітають з ядра  $^{230}_{90}\text{Th}$ .

#### 4. БЕТА-РОЗПАД ЯДЕР (ст.58)

**Приклад 1 (ст.59).** Ядро  $^{32}\text{P}$  зазнає  $\beta^-$ -розпаду, в результаті якого дочірнє ядро опиняється безпосередньо в основному стані. Визначити максимальні значення кінетичної енергії та імпульсу  $\beta$ -частинок та відповідну кінетичну енергію віддачі дочірнього ядра.

**Приклад 2 (ст.63).** Ядра  $^{37}\text{Ar}$  зазнають  $K$ -захоплення, в результаті якого дочірні ядра опиняються безпосередньо в основному стані. Нехтуючи енергією зв'язку  $K$ -електрона, визначити кінетичну енергію та швидкість дочірнього ядра.

**Приклад 3 (ст.65).** Визначити можливі типи  $\beta$ -розпаду ядра  $^{114}\text{In}$ . Енергії зв'язку відповідних ядер:  $E_{\text{зв}}(^{114}\text{In}) = 970,2 \text{ MeV}$ ,  $E_{\text{зв}}(^{114}\text{Cd}) = 972,4 \text{ MeV}$ ,  $E_{\text{зв}}(^{114}\text{Sn}) = 971,4 \text{ MeV}$ .

**Приклад 4 (ст.66).** Знайти енергію нейтрино при  $K$ -захопленні в атомах  $^{131}\text{Cs}$ , якщо енергія зв'язку  $K$ -електрона в дочірньому атомі  $35 \text{ keV}$ , а повна енергія, яка виділяється в процесі, дорівнює  $355 \text{ keV}$ . Дочірнє ядро опиняється безпосередньо в основному стані.

**Приклад 5 (ст.67).** Обчислити сумарну кінетичну енергію частинок, які виникають під час  $\beta^-$ -розпаду нейтрона, що знаходиться у стані спокою.

**Приклад 6 (ст.68).**  $K$ -захоплення в атомах  $^7\text{Be}$  частково відбувається через збуджений стан дочірнього ядра, яке випромінює при цьому  $\gamma$ -квант з енергією  $720 \text{ keV}$ . Визначити кінетичну енергію дочірнього ядра після випромінювання  $\gamma$ -кванта, якщо кут між напрямками руху нейтрино та ядра віддачі дорівнює  $90^\circ$ . Якою є ця енергія в тому випадку, коли дочірнє ядро виникає безпосередньо в основному стані?

#### 5. ГАММА-ВИПРОМІНЮВАННЯ. ЕФЕКТ МЕСБАУЕРА (ст.78)

**Приклад 1 (ст.82).** Ізомерне ядро  $^{109}\text{Ag}^m$  під час переходу до основного стану випромінює або  $\gamma$ -квант з енергією  $87 \text{ keV}$ , або конверсійний  $K$ -електрон з параметром  $B\rho = 860 \text{ Гс} \cdot \text{см}$ . Розрахувати енергію зв'язку  $K$ -електрона.

**Приклад 2 (ст.84).** Знайти кількість конверсійних електронів, що випускаються за  $t = 1 \text{ с}$  препаратом  $^{59}\text{Fe}$ , активність якого  $3,7 \cdot 10^7 \text{ Бк}$ . Схему  $\beta$ -розпаду ядер  $^{59}\text{Fe}$  зображено на Рис. 5.2. Коефіцієнти внутрішньої конверсії відповідних  $\gamma$ -квантів дорівнюють:  $\alpha_{\gamma_1} = 1,8 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha_{\gamma_2} = 1,4 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha_{\gamma_3} = 7 \cdot 10^{-3}$ . Ймовірності випромінювання квантів  $\gamma_2$  та  $\gamma_3$  відносяться як 1:15.

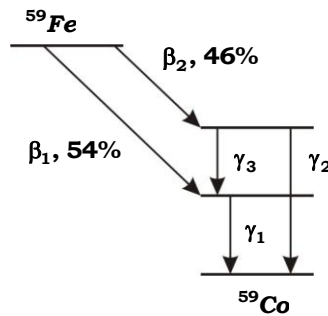


Рис. 5.2. Схема розпаду ізотопу  $^{59}\text{Fe}$

**Приклад 3 (ст.87).** Вільне ядро масою  $M$ , що знаходилося у спокої, перейшло зі збудженого стану до основного, випроменивши  $\gamma$ -квант. Знайти: а) енергію випроміненого  $\gamma$ -кванта та енергію віддачі  $E_{\text{від}}$  ядра, якщо енергія збудження складає  $E_{12}$ . Отримати числове значення для ядра  $^{191}\text{Ir}$ , якщо  $E_{12} = 129 \text{ кеВ}$ ; б) різницю енергій випроміненого та поглинутого  $\gamma$ -квантів у випадку вільних ядер. Порівняти цю різницю з природною ( $\Gamma$ ) та доплерівською шириною ліній (доплерівська ширина дорівнює  $E_d = E_{12} \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}}$ ) при  $T = 300 \text{ К}$ ; в) температуру  $T_0$ , при якій доплерівська ширина дорівнюватиме різниці енергій для випромінювання та поглинання.

**Приклад 4 (ст.91).** Ефект Месбауера полягає в тому, що в кристалах можуть реалізуватись процеси випромінювання та поглинання  $\gamma$ -квантів без передачі енергії віддачі, або «без віддачі ядер». В цьому випадку закон збереження імпульсу виконується за рахунок передачі імпульсу всьому кристалу (колективний процес). Лінії випромінювання та поглинання без віддачі мають природну ширину.

Кристал  $^{191}\text{Ir}$  випромінює  $\gamma$ -кванти з енергією  $\hbar\omega_0 = 129 \text{ кеВ}$ . Лінія Месбауера має ширину  $\Gamma = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ еВ}$ . Припустимо, що кристал, який випромінює  $\gamma$ -кванти, рухається зі швидкістю  $\vec{v}$ , а кристал, що поглинає, знаходиться у спокої. Знайти найменшу швидкість  $\vec{v}$  джерела, яку можна зареєструвати за зміною величини поглинання  $\gamma$ -квантів. Вважати, що з упевненістю можна зареєструвати доплерівську зміну частоти  $\gamma$ -квантів, яка дорівнює  $\frac{1}{6}$  ширини месбауерівської лінії.

**Приклад 5 (ст.92).** Джерело  $\gamma$ -квантів розташоване над поглиначем на висоті  $20 \text{ м}$ . З якою швидкістю треба рухати вгору джерело, щоб у місці розташування поглиначя повністю компенсувати гравітаційну зміну енергії  $\gamma$ -кванта, обумовлену гравітаційним полем Землі?

**Приклад 6 (ст.93).** Під час випромінювання  $\gamma$ -квантів, які відповідають месбауерівській лінії, середній імпульс атома, що випромінює, не змінюється. Середня ж кінетична енергія такого атома, яка відповідає коливальному стану атома в матриці, зростає внаслідок зменшення його маси на величину  $\frac{\hbar\omega_0}{c^2}$ , де  $\hbar\omega_0$  — енергія  $\gamma$ -кванта. Це призводить до того, що частота месбауерівської лінії виявляється дещо меншою за частоту переходу  $\omega_0$ , а саме:  $\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{\langle v \rangle^2}{2c^2} \right)$ , де

$\langle v \rangle^2$  — квадрат середньої квадратичної швидкості атома.

а) Отримати цей вираз з енергетичних міркувань та пояснити, в якому випадку такий ефект можна спостерігати за допомогою звичайної техніки спостереження ефекту Месбауера.

б) На скільки градусів температура джерела повинна бути більшою за температуру поглиначя, щоб температурне зміщення месбауерівської  $\gamma$ -лінії  $^{57}\text{Fe}$  повністю

компенсувало гравітаційне зміщення, якщо джерело знаходиться над поглиначем на відстані  $l = 20 \text{ м}$ ? Вважати, що середня кінетична енергія атомів у кристалі дорівнює  $\frac{3}{2}kT$ .

## 6. ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ З ЗАРЯДЖЕНИМИ ЧАСТИНКАМИ (ст.101)

**Приклад 1 (ст.104).** Літієву мішень опромінюють пучком протонів з кінетичною енергією, яка в  $\eta = 1,5$  рази перевищує порогове значення. Знайти енергію нейтронів, які вилітають в результаті реакції  ${}^7\text{Li}(p,n){}^7\text{Be} - 1,65 \text{ MeV}$  під кутом  $90^\circ$  до пучка протонів.(3)

**Приклад 2 (ст.106).** Обчислити енергію реакції  ${}^{14}\text{N}(\alpha,p){}^{17}\text{O}$ , якщо енергія  $\alpha$ -частинок, які налітають на мішень, складає  $E_{\kappa\alpha} = 4 \text{ MeV}$ , а протон, який вилетів під кутом  $\theta = 60^\circ$  до напрямку руху  $\alpha$ -частинок, має кінетичну енергію  $E_{\kappa p} = 2,08 \text{ MeV}$ .(4)

**Приклад 3 (ст.108).** Знайти енергію нейтронів, які вилітають при фоторозщепленні берилію за реакцією  ${}^9\text{Be}(\gamma,n){}^8\text{Be}$   $\gamma$ -квантами з енергією  $\hbar\omega = 1,78 \text{ MeV}$ . Енергетичний вихід реакції складає  $Q = -1,65 \text{ MeV}$  (5)

**Приклад 4 (ст.109).** Під час опромінювання товстої алюмінієвої мішені пучком  $\alpha$ -частинок з кінетичною енергією  $E_{\kappa\alpha} = 7 \text{ MeV}$  в результаті реакції  $(\alpha,n)$  випромінюється потік нейтронів  $J_n = 1,6 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ . Знайти вихід та середній переріз даної реакції, якщо струм  $\alpha$ -частинок складає  $I_\alpha = 50 \text{ мкА}$ .(6)

**Приклад 5 (ст.111).** Залізну мішень опромінюють пучком протонів з енергією  $E_{\kappa p} = 22 \text{ MeV}$ . В результаті ядерної реакції  $(p,n)$ , вихід якої складає  $w = 1,2 \cdot 10^{-3}$ , утворюється радіонуклід  ${}^{56}\text{Co}$  з періодом піврозпаду  $T = 77,2 \text{ доби}$ . Визначити активність мішені через час  $\tau = 2,5$  годин після початку опромінювання при струмі протонів  $I_p = 21 \text{ мкА}$ .(7)

**Приклад 6 (ст.113).** У камеру, яка заповнена повітрям за нормальних умов, впускають пучок  $\alpha$ -частинок з кінетичною енергією  $E_\kappa = 7,8 \text{ MeV}$ . Довжина камери вздовж пучка більша за довжину пробігу  $\alpha$ -частинок з даною енергією. Знайти середній переріз реакції  ${}^{14}\text{N}(\alpha,p){}^{17}\text{O} - 1,2 \text{ MeV}$ , якщо вихід цієї реакції складає  $w = 2 \cdot 10^{-6}$ . Вміст азоту в повітрі складає  $\eta = 78 \%$  за об'ємом.(8)

**Приклад 7 (ст.115).** Визначити порогову енергію  $E_{\text{пор}}$ , яка потрібна для народження пари нуклон-антинуклон у випадку зіткнення двох протонів, та порівняти її з енергією реакції.(9)

## 7. ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ ЗА УЧАСТЮ НЕЙТРОНІВ (ст.122)

**Приклад 1 (ст.125).** Для одержання потужних потоків швидких нейтронів в ядерному реакторі розташовують дейтерид літію  $\text{LiD}$ , в якому повільні нейтрони реактора збуджують реакцію  ${}^6\text{Li}(n,\alpha){}^3\text{H} + 4,8 \text{ MeV}$ . Ядра тритію, в свою чергу, збуджують реакції а)  $D(t,n){}^4\text{He} + 17,6 \text{ MeV}$  та б)  ${}^7\text{Li}(t,n){}^9\text{Be} + 10,4 \text{ MeV}$ , які й є джерелом швидких нейтронів. Знайти максимальну та мінімальну енергію цих нейтронів.(12)

**Приклад 2 (ст.129).** Тонку платівку з фосфору з масовою товщиною  $1,0 \text{ г/см}^2$  опромінювали протягом часу  $\tau = 4,0 \text{ год}$  потоком нейтронів  $j_n = 2,0 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  з кінетичною енергією  $2 \text{ MeV}$ . Через час  $t = 1,0 \text{ год}$  після закінчення опромінювання активність пластинки становила  $3,9 \cdot 10^6 \text{ Бк}$ . Відомо, що активність обумовлена

нуклідом  $^{31}\text{Si}$ , який виникає в результаті реакції  $(n, p)$ . Визначити переріз даної реакції.(15)

**Приклад 3 (ст.130).** Берилієву платівку опромінюють потоком нейтронів з кінетичною енергією  $14\text{ MeV}$ , який падає нормально до її поверхні. Оцінити товщину платівки, необхідну для 10% – го відтворення нейтронів за реакцією  $(n, 2n)$ , переріз якої при такій енергії нейтронів  $\sigma = 0,50\text{ барн}$ . Вважати, що інших процесів немає і що вторинні нейтрони у платівці не поглинаються.(16)

**Приклад 4 (ст.132).** Було досліджено, що під час взаємодії теплових нейтронів з енергією  $0,025\text{ eV}$  з ядрами  $^{113}\text{Cd}$  переріз розсіювання складає 0,22% від перерізу радіаційного захоплення. Визначити відношення ймовірності розпаду складного ядра з випромінюванням нейтронів до ймовірності випромінювання  $\gamma$  – квантів при резонансній енергії нейтронів  $E_{n0} = 0,178\text{ eV}$  (17)

**Приклад 5 (ст.134).** За допомогою формули Брейта-Вігнера визначити:

а) ширину  $\Gamma$  рівня проміжного ядра, яке виникає під час захоплення нейтрона ядром  $^{113}\text{Cd}$ , якщо переріз радіаційного захоплення при енергії нейтрона  $E_n = 2E_{n0}$  у 50 разів менший за переріз цього процесу в резонансі (при  $E_n = E_{n0}$ ), де  $E_{n0} = 0,178\text{ eV}$ . Вважати, що  $\Gamma$  не залежить від енергії нейтронів ( $\Gamma_\gamma \ll \Gamma_n$ );

б) показати, що у випадку, коли ширина  $\Delta E$  резонансного максимуму кривої  $\sigma_{n\gamma}(E_n)$  на половині його висоти мала ( $\Delta E \ll E_{n0}$ ), то  $\Delta E \approx \Gamma$ .(18)

**Приклад 6 (ст.136).** Знайти відношення резонансного перерізу пружного розсіювання нейтронів ядрами  $^{55}\text{Mn}$  до геометричного перерізу даних ядер, якщо  $E_{n0} = 337\text{ eV}$ ,  $\Gamma_{n0} \approx \Gamma \ll E_{n0}$  та спін рівня проміжного ядра, через яке відбувається процес,  $J = 2$ . (20)

**Приклад 7 (ст.137).** Оцінити, у скільки разів послабиться вузький пучок швидких нейтронів з кінетичною енергією  $10\text{ MeV}$  під час проходження через свинцеву платівку товщиною  $4\text{ см}$ . Вважати, що ефективний переріз ядра  $\sigma = 2\pi(R + \lambda)^2$ , де  $R$  — радіус ядра,  $\lambda$  — перенормована довжина хвилі де Бройля нейтрона.(20)

**Приклад 8 (ст.138).** Інтенсивність вузького пучка повільних моноенергетичних нейтронів зменшується у 20 разів під час проходження через платівку з бору природного ізотопного складу. Масова товщина платівки  $1,0\text{ г/см}^2$ . Визначити енергію нейтронів, маючи на увазі, що в даному випадку є справедливим закон  $\sigma \propto 1/v$ , де  $v$  — швидкість нейтронів.(21)

## 8. РЕАКЦІЇ ДІЛЕННЯ ВАЖКИХ ЯДЕР. ЯДЕРНІ РЕАКТОРИ (ст.145)

**Приклад 1 (ст.148).** Кулонівське відштовхування протонів сприяє діленню атомного ядра, а сили поверхневого натягу протидіють цьому. Виразити умову енергетичної вигідності поділу ядра на два приблизно однакові уламки через параметр  $Z^2/A$ , користуючись формулою Вайцеккера для кулонівської  $E_c$  та поверхневої  $E_\sigma$  енергій.

**Приклад 2 (ст.153).** Ядро, яке виникає під час захоплення нейтрона ядром  $^{238}\text{U}$ , зазнає ділення, якщо кінетична енергія нейтрона є більшою за  $1,4\text{ MeV}$ , а ядро  $^{235}\text{U}$  зазнає ділення під час захоплювання теплових нейтронів. Знайти енергію активації ядер  $^{238}\text{U}$  та  $^{235}\text{U}$  по відношенню до реакції ділення.

**Приклад 3 (ст.156).** Під час захоплювання теплових нейтронів атомними ядрами конкурують два процеси:

а) радіаційне захоплення з перерізом  $\sigma_{n\gamma}$ ;

б) ділення ядра з перерізом  $\sigma_f$ .

Під час одного акту поділу в середньому виділяється  $\nu$  нейтронів. Знайти коефіцієнт  $\eta$ , який дорівнює кількості нейтронів на один акт ділення, які в подальшій ланцюговій реакції призвели б до поділу в чистих ізотопах  $^{233}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$  та  $^{239}\text{Pu}$ , якби вони були нескінченими. Скористатись даними таблиці 1 для перерізів взаємодії нейтрона з енергією 0,025 еВ.

Порівняти значення коефіцієнта  $\eta_m$  на теплових нейтронах для природного та збагаченого (1,5%  $^{235}\text{U}$ ) урану.

Таблиця 8.1.

Ізотопи	$\sigma_f, 10^{-24} \text{ см}^2$	$\sigma_{ny}, 10^{-24} \text{ см}^2$	$\nu$
$^{233}\text{U}$	527	54	2,52
$^{235}\text{U}$	582	112	2,41
$^{239}\text{Pu}$	746	280	2,92

**Приклад 4 (ст.158).** Показати, що в природній суміші урану неможлива ланцюгова реакція ділення на швидких нейтронах. На кожен акт ділення ядер  $^{235}\text{U}$  та  $^{238}\text{U}$  під час взаємодії зі швидкими нейтронами виникає в середньому 2,5 нейтрони ділення. Переріз поділу ядра  $^{238}\text{U}$  складає близько  $\sigma_f^8 = 0,5 \text{ барн}$ , ядра  $^{235}\text{U}$  —  $\sigma_f^5 = 2 \text{ барн}$ , переріз непружного розсіювання нейтронів ядрами  $^{238}\text{U}$   $\sigma_c^8 \approx 2 \text{ барн}$ , перерізи радіаційного захоплення швидких нейтронів ядрами  $^{235}\text{U}$  та  $^{238}\text{U}$  дорівнюють приблизно  $\sigma_{ny}^5 \approx \sigma_{ny}^8 \approx 0,2 \text{ барн}$ . Врахувати також, що у спектрі ділення лише 60% нейтронів мають енергію вищу за ефективний поріг  $E_{\text{пор}} \approx 1,4 \text{ МеВ}$  для  $^{238}\text{U}$ .

**Приклад 5 (ст.159).** Оцінити проміжок часу, необхідний для поділу 1 кг речовини середовищі  $^{235}\text{U}$  (без урахування виходу нейтронів за межі активної зони), якщо середня енергія нейтронів ділення 1,6 МеВ, переріз ділення урану  $^{235}\text{U}$  для цієї енергії становить близько 2 барн та коефіцієнт розмноження  $k_\infty = 1,001$ . Вважати, що в початковий момент розділилось одне ядро. Як зміниться результат, якщо  $k_\infty = 1,01$ ? Прийняти, що середній час життя одного покоління нейтронів в  $^{235}\text{U}$   $\tau_n = 10^{-7} \text{ с}$ .

**Приклад 6 (ст.161).** Реактивністю реактора називається величина  $\rho = \frac{k-1}{k}$ , де  $k$  — коефіцієнт розмноження нейтронів. Якщо  $|k-1| \ll 1$ , то  $\rho \approx k-1$ . Знайти в цьому наближенні закон зміни потужності реактора  $P(t)$  в надкритичному режимі, коли  $k > 1$ . Визначити період  $T$  реактора, тобто час, за який потужність зростає в  $e$  разів. Середній час життя одного покоління нейтронів дорівнює  $\bar{\tau}$ . Вважати, що під час однієї реакції поділу виділяється енергія  $Q_0$ , кількість ядер в активній зоні, що зазнали поділу в початковий момент часу —  $N_0$ .

**Приклад 7 (ст.162).** Під час радіаційного захоплення нейтрона ядро  $^{238}\text{U}$  в результаті ряду реакцій перетворюється в ядро  $^{239}\text{Pu}$ . (Як і  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  ділиться тепловими нейтронами). В результаті такого процесу «неядерне паливо»  $^{238}\text{U}$  перетворюється на «ядерне паливо»  $^{239}\text{Pu}$ . Коефіцієнтом відтворення «ядерного палива»  $k_g$  називається відношення кількості атомів створеного «палива» до кількості атомів витраченого. Нехай в початковий момент часу у ТВЕЛах (ТВЕЛ — тепловиділяючий елемент) містилось 10%  $^{239}\text{Pu}$  та 90%  $^{238}\text{U}$ . При якому значенні  $P_m(k_g - 1)$ , де  $P_m$  — теплова потужність реактора, віднесена до одиниці ваги «палива», частина плутонію збільшиться удвічі за 10 років неперервної роботи реактора?

**Приклад 8 (ст.164).** Нехай  $N(t)$  — кількість нейтронів в активній зоні ядерного реактора,  $C(t)$  — кількість уламків ділення, які здатні випускати нейтрони із запізненням. Час життя покоління миттєвих нейтронів дорівнює  $\tau = 10^{-3}$  с. Середній час запізнення нейтронів  $\tau_s = 13$  с. Рівняння динаміки реактора записуються наступним чином:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \frac{k(1-\beta)-1}{\tau} N + \frac{1}{\tau_s} C, \\ \frac{dC}{dt} &= \frac{\beta k}{\tau} N - \frac{1}{\tau_s} C,\end{aligned}\tag{8.8.1}$$

де  $\beta$  — відносна частина нейтронів, що запізнюються,  $k$  — коефіцієнт розмноження нейтронів.

а) Розглянути критичний режим реактора, при якому  $k = 1$ . Знайти стаціонарний розв'язання та час встановлення стаціонарного режиму.

б) Знайти період реактора  $T$  в слабо надкритичному режимі, коли  $k - 1 \ll 1$ .

## 9. РЕАКЦІЇ ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗУ (ст.173)

**Приклад 1 (ст.181).** Основна реакція у водневому середовищі в центрах зірок



відбувається за рахунок слабкої взаємодії з дуже малим перерізом. Наприклад, при енергії протонів  $1 \text{ MeV}$  переріз реакції (9.1.1)  $\sigma = 10^{-47} \text{ см}^2$ , а при енергії  $1 \text{ keV}$   $\sigma = 10^{-51} \text{ см}^2$ . Одна з можливостей здійснити цю реакцію в лабораторних умовах — бомбардування пучком протонів товстої мішені, що складається з води. Розрахувати, яким має бути струм протонів з енергією  $1 \text{ MeV}$ , які падають на таку мішень, щоб за 1 годину відбулась одна реакція синтезу. Масова довжина пробігу протона у воді  $\rho l = 8 \cdot 10^{-4} \frac{\text{г}}{\text{см}^2}$ .

**Приклад 2 (ст.182).** Відомо, що важка вода ( $D_2O$ ) міститься в морській воді в кількості 1 молекули приблизно на кожні 6000 молекул звичайної води. Яка енергія виділиться в термоядерному реакторі під час спалювання всього дейтерію, який міститься в 1 л води? Реакції дейтерієвого синтезу при відносній енергії частинок  $E \approx 1 \text{ MeV}$  відбуваються приблизно з рівною ймовірністю і проходять наступним чином:



**Приклад 3 (ст.184).** Оцінити мінімальну температуру дейтерієвої плазми, при якій дейтрони з найбільш імовірною швидкістю відносного руху зможуть подолати висоту кулонівського бар'єра. Радіус дейтрона  $R \approx 2,0 \text{ фм}$ .

**Приклад 4 (ст.185).** Для однойменно заряджених частинок з кінетичною енергією відносного руху  $\tilde{T}$ , значно меншою за висоту кулонівського бар'єра, коефіцієнт прозорості бар'єра за відсутності екранування має вид:

$$D \approx \exp\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\tilde{T}}}\right), \quad \alpha = \pi q_1 q_2 \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}, \tag{9.4.1}$$

де  $q_1, q_2$  — заряди частинок,  $\mu$  — їх зведена маса.

а) Отримати цю формулу за допомогою загального виразу для коефіцієнта прозорості тунельного бар'єра:

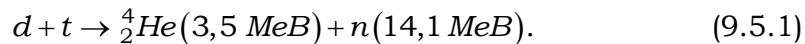
$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U-T)} dx\right), \tag{9.4.2}$$

тут  $m, T$  — маса та кінетична енергія частинки, яка тунелює через бар'єр,  $x_1, x_2$  — координати точок, між якими  $U > T$ ;



б) Розрахувати значення  $D$  для дейтронів з найбільш імовірною швидкістю відносного руху в плазмі з температурою  $1,0 \text{ кеВ}$  та  $10,0 \text{ кеВ}$ .

**Приклад 5 (ст.188).** У першому поколінні термоядерних реакторів планують використати реакцію дейтерію з тритієм:



Величина  $\langle \sigma v \rangle$ , де  $\sigma$  — переріз реакції, а  $v$  — відносна швидкість руху частинок, що реагують, усереднена за максвелівським розподілом швидкостей, дорівнює:

$$\langle \sigma v \rangle = 5,5 \cdot 10^{-21} \text{ см}^3/\text{с} \text{ при } \theta = 1 \text{ кеВ},$$

$$\langle \sigma v \rangle = 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3/\text{с} \text{ при } \theta = 10 \text{ кеВ}.$$

Припускаючи, що плазма містить рівну кількість атомів дейтерію та тритію, розрахувати густину теплової потужності та повну потужність  $W$  термоядерної установки, якщо об'єм плазми  $500 \text{ м}^3$ , а густина електронів  $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .

**Приклад 6 (ст.189).** Яким був би радіус сферичного термоядерного реактора, заповненого дейтерієвою плазмою з концентрацією дейтронів  $n$  при температурі  $\theta$ , якби тепло з активної зони відводилось лише у вигляді теплового випромінювання у відповідності до закону Стефана-Больцмана? Знайти температуру  $\theta_m$ , при якій радіус реактора буде мінімальним та обрахувати його значення, якщо  $n = 1,0 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ .

**Приклад 7 (ст.191).** Згідно критерію Лоусена, термоядерна реакція в суміші дейтерію та тритію буде самопідтримуваною при  $\theta = 10 \text{ кеВ}$ , якщо  $n\tau > 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$ , де  $n$  — концентрація електронів у плазмі,  $\tau$  — енергетичний час життя плазми, який визначається її випромінюванням, теплопровідністю та дифузією. (Енергетичним часом життя плазми називають відношення енергії плазми до потужності втрат енергії з плазми  $P$ ). Втрати енергії компенсуються зарядженими продуктами реакції, у даному випадку – ядрами гелію. Розрахувати при  $n = 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$  та  $n\tau = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$  густину потужності  $P$  теплових втрат плазми (без урахування електромагнітного випромінювання).

**Приклад 8 (ст.192).** В умовах попереднього прикладу перевірити, що критерій Лоусена для енергетично вигідної, але не самопідтримуваної термоядерної реакції при  $\theta = 10 \text{ кеВ}$  та  $n = 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$  має вигляд:

$$n\tau > 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}.$$

Енергетично вигідною вважається реакція, при якій втрати енергії з плазми втричі менші, ніж повна термоядерна енергія, яка виділяється в реакторі.

## 10. ПРИСКОРЮВАЧІ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК (ст.200)

**Приклад 1 (ст.204).** Визначити для електрона та протона, які рухаються по коловим орбітам в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 10 \text{ кГс}$ , періоди обертання та радіуси орбіт, якщо кінетична енергія частинок становить  $E_k = 10 \text{ MeВ}$ . (24)

**Приклад 2 (ст.207).** В циклотроні іони рухаються в однорідному магнітному полі й отримують прискорення в проміжку між двома прискорюючими електродами (дуантами). Для резонансного прискорення повинна виконуватись умова синфазності — частота обертання іона та частота електричного поля повинні співпадати. Проте частота обертання іона не лишається постійною, оскільки маса його зростає згідно співвідношенню  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ . В циклотроні відбувається

порушення синфазності, тому іони не можуть досягти дуже великих енергій. Очевидно, що найбільшу енергію іонам можна надати, якщо розбалансування, тобто різниця між частотою прискорюючого поля та частотою обертання, буде найменшою. Яку треба вибрати частоту прискорюючого поля, необхідну для

прискорення протнів в циклотроні з магнітом, який створює постійне поле з напруженістю 15 кГс та має радіус 65 см, щоб порушення синфазності циклотрону було найменшим?(26)

**Приклад 3 (ст.208).** Для того, щоб у циклотроні не виникало порушення синфазності (див. Розділ 10, Приклад 2), можна повільно змінювати з часом магнітне поле. В такому випадку частота обертання частинки залишатиметься постійною. Такий прискорювач називається синхротроном. Винахідником синхротрону, як і фазотрону (прискорювача, в якому повільно змінюється частота електричного поля), є В.І.Векслер. Знайти зміну радіуса орбіти в синхротроні в однорідному магнітному полі, що змінюється за законом  $B(t) = B_0 \sin \omega_0 t$  Частота прискорюючого електричного поля дорівнює  $\Omega$ , а енергія спокою частинки, що прискорюється,  $E_0$ . В яких межах змінюється радіус орбіти електрона, який прискорюється від 2 до 100 МеВ, якщо частота електричного поля  $\Omega = 7 \cdot 10^8 \text{ рад/с}$ , частота зміни магнітного

поля  $\omega_0 = 314 \text{ рад/с}$ ?(27)

**Приклад 4 (ст.210).** Бетатроном називається установка для прискорення заряджених частинок до великих енергій. Між полюсами електромагніту, струм збудження якого можна змінювати з часом згідно заданого закону, розташовують вакуумну камеру, в якій частинка може вільно рухатись по колу. Прискорення здійснюється за рахунок вихрового електричного поля, яке виникає під час зміни магнітного поля. Довести, що у випадку, коли потік магнітної індукції  $\Phi(r)$  через площу, обмежену контуром з радіусом  $r$ , в кожен момент часу вдвічі більший за  $\pi r^2 B_{орб}$ , де  $B_{орб}$  — індукція магнітного поля на орбіті, то радіус орбіти електрона залишатиметься постійним (стаціонарна орбіта).(28)

**Приклад 5 (ст.212).** Нехай в бетатроні магнітний потік всередині рівноважної орбіти з радіусом зростає від нуля з постійною швидкістю

$d\Phi/dt = 5 \cdot 10^9 \text{ Мкс/с}$ . Визначити: а) напруженість вихрового електричного поля на

орбіті та енергію, що її отримує електрон за  $5 \cdot 10^5$  обертів; б) пройдений електроном шлях протягом часу  $\tau = 3 \text{ мс}$  та отриману ним за цей час енергію.(29)

**Приклад 6 (ст.214).** Під час руху по колу електрон випромінює електромагнітні

хвилі і втрачає за один повний оберт енергію  $\frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{r} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^4$ , де  $r$  — радіус орбіти,

$m_0$  — маса спокою електрона,  $E$  — його повна енергія. Ця формула є справедливою, якщо втрати енергії протягом одного оберту значно менші за повну енергію електрона. Розрахувати, яку енергію втрачатиме електрон за один оберт в бетатроні на 100 МеВ наприкінці процесу прискорення, якщо радіус орбіти становить 80 см. Визначити, при якій енергії втрати на випромінювання за один оберт дорівнюватимуть енергії, що електрон отримує від вихрового електричного поля,

якщо  $\frac{dB_{орб}}{dt} = 2 \cdot 10^6 \text{ Гс/с}$  ( $B_{орб}(t)$  — індукція магнітного поля на орбіті електрона).(30)

**Приклад 7 (ст.215).** Лінійний прискорювач частинок побудовано наступним чином: пучок іонів проходить всередині трубок різної довжини, розташованих на одній лінії. Прискорення відбувається в проміжку між трубками (Рис.10.1). Трубки приєднано до протилежних клем генератора почергово, так що в кожен заданий момент часу різниця потенціалів в парних проміжках дорівнює  $V_0 \cos \omega t$ , а в непарних —  $-V_0 \cos \omega t$ . Припускаючи, що іони впускаються до прискорювача з початковою енергією  $W_{ноч}$  та що проміжки між трубками складають 25% від довжини трубок, знайти необхідну довжину трубок в лінійному прискорювачі. Розглянути прискорювач для протонів на 40 МеВ:  $W_{ноч} = 4 \text{ МеВ}$ ,  $\Omega = 12,56 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ . Протон за один прохід через прискорюючий проміжок отримує енергію 1 МеВ.(31)

**Приклад 8 (ст.218).** Лінійний прискорювач з біжучою хвилею являє собою циліндричний діафрагмований хвилевід, вздовж осі якого поширюється електромагнітна хвиля з осовою складовою  $E_z$ . За допомогою кільцевих діафрагм з отворами досягається збільшення фазової швидкості хвилі вздовж хвилеводу, причому частинка, яка прискорюється, знаходиться весь час приблизно в одній і тій самій фазі хвилі (Рис. 10.2). Для прискорення електронів іноді фазову швидкість поширення хвилі обирають постійною і рівною швидкості світла.(33).

## 11. ГАЛЬМУВАННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК ТА ГАММА-КВАНТІВ У СЕРЕДОВИЩІ. ВЗАЄМОДІЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ З РЕЧОВИНОЮ (ст.227)

**Приклад 1 (ст.232).** Обчислити іонізаційні втрати енергії дейтрона з кінетичною енергією  $4 \text{ MeV}$  на одиниці шляху в азоті за нормальних умов.

**Приклад 2 (ст.233).** Знайти залежність радіаційної довжини  $L_{\text{рад}}$  електрона від порядкового номера речовини  $Z$ . Обчислити  $L_{\text{рад}}$  для електрона в азоті (за нормальних умов), в алюмінії та в свинці.

**Приклад 3 (ст.235).** Знайти середній пробіг протонів з кінетичною енергією  $3 \text{ MeV}$  у свинці.

**Приклад 4 (ст.236).** Який відсоток  $\beta^-$ -частинок, що випромінюються ізотопом  $^{32}\text{P}$ , поглинається в алюмінієвій фользі з масовою товщиною  $20 \frac{\text{мг}}{\text{см}^2}$ ?

**Приклад 5 (ст.237).** Оцінити кінетичну енергію електронів, за якої радіаційні втрати енергії в алюмінії складатимуть  $\frac{3}{4}$  від всіх втрат. Обчислити величину критичної енергії електрона в цьому випадку та величину іонізаційних втрат для електрона з кінетичною енергією  $9 \text{ MeV}$ .

**Приклад 6 (ст.239).** При гальмуванні електронів достатньо великих енергій в полі ядра переріз випромінювання  $\gamma$ -квантів в інтервалі частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  поблизу максимальної частоти гальмівного випромінювання визначається формулою  $d\sigma = \frac{1}{nL_{\text{рад}}} \frac{d\omega}{\omega}$ , де  $n$  — кількість ядер в одиниці об'єму, а  $L_{\text{рад}}$  — радіаційна довжина. Знайти ймовірність того, що електрон втратить більше 90% своєї початкової енергії під час проходження через цинкову пластинку товщиною  $L = 1 \text{ мм}$ .

**Приклад 7 (ст.241).** Моноенергетичний пучок  $\gamma$ -квантів під час проходження алюмінієвої платівки товщиною  $2,9 \text{ см}$  послаблюється в 2,6 рази. Знайти відповідний масовий коефіцієнт розсіювання. Обчислити середню довжину пробігу такого пучка випромінювання.

**Приклад 8 (ст.242).** Для створення джерела монохроматичних фотонів з енергією, яка регулюється, можна використати комптонівське розсіяння лазерного випромінювання на прискорених електронах. Енергія  $E_\gamma$  фотона, що розсіявся, буде залежати від швидкості  $v$  прискореного пучка електронів, початкової енергії фотонів  $E_{\gamma 0}$  та кута зіткнення  $\vartheta$  фотонів лазерного випромінювання з пучком електронів, а також від кута  $\phi$  між напрямками руху первісних та розсіяних фотонів:  $E_\gamma = E_{\gamma 0} \frac{1 - \beta \cos \vartheta}{1 - \beta \cos(\vartheta - \phi)}$ , де  $\beta = \frac{v}{c}$ . Обчислити максимальну енергію отриманого монохроматичного випромінювання, якщо в якості джерела первісних фотонів використано випромінювання рубінового лазера ( $E_{\gamma 0} = 1,78 \text{ eV}$ ), а електрони мають кінетичну енергію, яка дорівнює  $E_{\text{ке}} = 1 \text{ GeV}$ .

## 12. АСТРОФІЗИКА (ст.253)

**Приклад 1 (ст.263).** Гравітаційний радіус об'єкта, який має масу  $M$ , або радіус Шварцшильда, визначається співвідношенням  $r_G = \frac{2GM}{c^2}$ , де  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$  — гравітаційна стала. Визначити гравітаційний радіус для Землі, Сонця та Місяця.

**Приклад 2 (ст.264).** Зірка являє собою повністю іонізовану плазмову сферу із водню масою  $M$  та радіусом  $R$ . Прийняти, що електрони утворюють вироджений нерелятивістський газ однакової по об'єму густини. Визначити рівноважний стан зірки за умови, що єдиною утримуючою силою, яка протидіє гравітації, є кінетичний тиск газу вироджених електронів.

**Приклад 3 (ст.268).** Зірка являє собою повністю іонізовану плазмову сферу із заліза масою  $M$  та радіусом  $R$ , причому електрони утворюють вироджений релятивістський газ однакової по об'єму густини. Визначити рівноважний стан зірки та її можливу еволюцію (стискання до виродженого стану ядер, стискання до проміжного стану, необмежений розліт, інше) в залежності від параметрів задачі ( $M$  та  $R$ ) за умови, що єдиною утримуючою силою, яка протидіє гравітації, є кінетичний тиск газу вироджених електронів. Взяти масу рівною 1 та 1,5 мас Сонця.

**Приклад 4 (ст.271).** Визначити, за яких умов для зірки з масою Сонця в стисненому стані вироджених релятивістських електронів буде відбуватися процес нейтронізації кожного з типів ядер (наприклад,  $p \rightarrow n$ ,  $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{B}$ ,  $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn}$ ). Енергії зв'язку для ядер  $^{12}\text{C}$ ,  $^{12}\text{B}$ ,  $^{56}\text{Fe}$  та  $^{56}\text{Mn}$  складають 92,2 MeV, 79,6 MeV, 492,2 MeV та 489,3 MeV, відповідно. Для процесу  $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn}$  записати другу реакцію нейтронізації та розрахувати її поріг (енергія зв'язку для нукліда  $^{56}\text{Cr}$  дорівнює 488,44 MeV).

**Приклад 5 (ст.274).** Зірка являє собою водневу повністю іонізовану плазмову сферу масою  $M$  та радіусом  $R$ , причому електрони утворюють вироджений нерелятивістський газ. В інтервалі  $0 < r < R_1$  зірка складається з іонізованого вуглецю  $^{12}\text{C}$  та має масу  $M_1$ , а в інтервалі  $R_1 < r < R$  — з іонізованого водню та має масу  $M - M_1$  (див. Рис. 12.2). В кожному з шарів густина електронів однакова по об'єму. Визначити рівноважний стан зірки та двох її шарів за умови, що єдиною утримуючою силою, яка протидіє гравітації, є кінетичний тиск газу вироджених електронів.

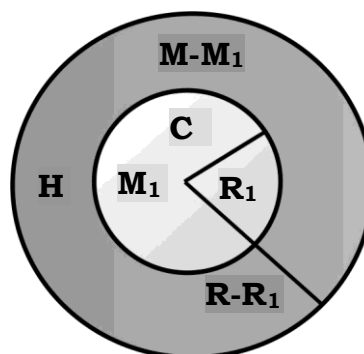


Рис.12.2. Двошарова зірка масою  $M$  та радіусом  $R$ .

# 1. ВЛАСТИВОСТІ ЯДЕРНОЇ МАТЕРІЇ

## 1.1. Теоретичні відомості

Ядро складається з  $Z$  протонів і  $N$  нейтронів. В узагальненому сенсі протони і нейтрони називаються *нуклонами*. Ядра з однаковим зарядовим числом  $Z$  називаються *ізотопами*, з однаковими масовими числами  $A$  – *ізобарами*, а з однаковою кількістю нейтронів  $N$  – *ізотонами*. Ядра з однаковими  $Z$ ,  $N$  та  $A$ , але різними магнітними, електричними та квадрупольними моментами – *ізомерами*.

Зв'язок між масовим  $A$ , зарядовим  $Z$  числами та кількістю нейтронів  $N$  атомного ядра:

$$A = N + Z.$$

Атомне ядро з великим значенням  $A \gg 1$  можна наближено вважати сферою з радіусом:

$$R = R_0 A^{1/3},$$

де  $R_0 = 1,2 \dots 1,5$  фм. Для визначеності можна покласти  $R_0 = 1,22$  фм (ця оцінка використовується в багатьох дослідженнях). При такому означенні концентрація нуклонів в ядрі є постійною:

$$n(r) = 1 / \left( \frac{4\pi}{3} R_0^3 \right) = n_0.$$

Детальне вивчення структури ядра показало, що концентрація нуклонів в реальних ядрах описується функцією, близькою до розподілу Фермі:

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + \exp \left\{ \frac{r - R}{\Delta R} \right\}},$$

в якому  $\Delta R \approx 5,5 \cdot 10^{-14}$  см.

Маса ядра залежить від взаємодії між нуклонами. Коли немає взаємодії, то маса є адитивною функцією маси нуклонів. В ядрі нуклони взаємодіють між собою і сумарна енергія ядра є меншою, ніж енергія окремих нуклонів до взаємодії. Ця різниця є енергією зв'язку  $E_{зв}$  атомного ядра:

$$E_{зв} = \Delta \cdot c^2 \text{ або } E_{зв} (\text{MeV}) = 931,5 \cdot \Delta (a.o.m.), \text{ де } c - \text{швидкість світла.}$$

Енергія зв'язку показує, яку роботу треба виконати, щоб розділити його на протони та нейтрони, з яких воно складається. Замість енергії зв'язку часто зручно розглядати питому енергію зв'язку:

$$\varepsilon_{зв} = \frac{E_{зв}}{A}.$$

Дефект маси  $\Delta_A$  ядра:

$$\Delta_A = m_{я} - A,$$

де  $m_{я}$  – маса ядра (нукліда) в атомних одиницях маси (а.о.м.),  
 $1 \text{ а.о.м.} = 1/12 m(^{12}\text{C}) = 1,6582 \cdot 10^{-24} \text{ г}.$

Дефект маси нейтрального атома  $\delta_A$  можна представити як

$$\delta_A = M_{ат} - A,$$

де  $M_{ат}$  – маса атома.

Напівемпірична формула Вайцзеккера для енергії зв'язку ядра має вигляд:

$$E_{зв}(Z, A) = \varepsilon_1 A - \varepsilon_2 A^{2/3} - \varepsilon_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \varepsilon_4 \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + \varepsilon_5 \frac{\delta}{A^{3/4}},$$

де коефіцієнти частково розраховуються, а частково підбираються з умов найкращого збігу кривої модельного розподілу  $E_{зв}(Z, A)$  з експериментальними даними. Така процедура може бути проведена по-різному, тому існує декілька наборів коефіцієнтів для формули Вайцзеккера. Одна з кращих апроксимацій відповідає величинам:

$$\varepsilon_1 = 15,75 \text{ MeV}, \quad \varepsilon_2 = 17,8 \text{ MeV}, \quad \varepsilon_3 = 0,712 \text{ MeV}, \quad \varepsilon_4 = 94,8 \text{ MeV}, \\ \varepsilon_5 = 34 \text{ MeV},$$

$$\delta = \begin{cases} +1, & \text{для ядер з парним } A \text{ та парним } Z, \\ 0, & \text{для ядер з непарним } A, \\ -1, & \text{для ядер з парним } A \text{ та непарним } Z. \end{cases}$$

Хоча формула Вайцзеккера є наближеною, але вона є дуже корисною при вивченні загальних властивостей ядер та дослідженню напрямку та параметрів ядерних перетворень.

Енергія відділення одного нейтрона від ядра складає приблизно  $8 \text{ MeV}$  та виражається наступним чином:

$$E_N = E_{зв}(Z, A) - E_{зв}(Z, A - 1).$$

## 1.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.** Оцінити густину та концентрацію ядерної речовини. Знайти частину об'єму ядра, яка зайнята нуклонами.

**Розв'язання.** Маса протона та нейтрона дуже близькі за числовим значенням, тому часто для спрощення розрахунків їх можна вважати рівними. Отже, маса одного нуклона в ядрі  $m_N \approx 1 \text{ а.о.м.} = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ . Середня густина ядерної матерії  $\rho$  дорівнює відношенню маси ядра  $M = Am_N$  до його об'єму  $V = 4\pi R^3 / 3$ , де  $A$  – масове число ( $A = Z + N$ ). Якщо вважати ядро сферичним, то радіус визначатиметься за формулою  $R = R_0 A^{1/3} = 1,22 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3} \text{ (см)}$ . Значення параметра  $R_0$  для важких ядер може варіюватися в межах  $(1,2 \div 1,5) \text{ фм}$ , в залежності від методу його визначення. Слід зауважити, що середня густина ядерної речовини не залежить від масового числа  $A$ , тобто однакова для всіх ядер:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Am_N}{4\pi R_0^3 A} = \frac{3m_N}{4\pi R_0^3} = \frac{3 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}}{4\pi \cdot (1,22 \cdot 10^{-13} \text{ см})^3} = 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3. \quad (1.1.1)$$

Концентрацію нуклонів в ядрі можна визначити як відношення густини ядерної речовини до маси одного нуклона:

$$n = \frac{\rho}{m_N} = \frac{2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3}{1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}} = 1,2 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}. \quad (1.1.2)$$

Частина об'єму ядра  $\eta$ , яка зайнята нуклонами, запишеться як відношення об'єму всіх нуклонів у ядрі до загального об'єму ядра  $V$ :

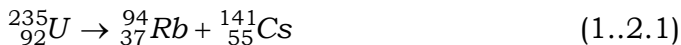
$$\eta = \frac{AV_N}{V} = \frac{4\pi AR_N^3 / 3}{4\pi R^3 / 3} = \frac{AR_N^3}{R_0^3 A} = \left( \frac{R_N}{R_0} \right)^3. \quad (1.1.3)$$

Тут  $V_N$  та  $R_N$  – об'єм та радіус одного нуклона відповідно. Будемо вважати, що радіуси нейтрона та протона приблизно однакові та дорівнюють  $R_N = 0,4 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ . Тоді підстановка числових значень у (1.1.3) дає

$$\eta = \left( \frac{0,4 \cdot 10^{-13}}{1,22 \cdot 10^{-13}} \right)^3 = 0,035 \text{ або } 3,5 \%.$$

**Приклад 2.** Використовуючи формулу Вайцеккера, знайти енергію, яка виділяється під час спонтанного поділу ядра  $^{235}\text{U}$  на два уламки з приблизним відношенням мас 2:3 (взяти масові числа уламків рівними 94 та 141).

**Розв'язання.** В результаті поділу ізотопу урану-235 в нашому випадку утворюються два уламки (рубідій-94 та цезій-141):



Енергія поділу  $Q$  ядра на два уламки виражається через різницю енергій зв'язку ядра  $^{235}\text{U}$  та ядер-уламків:

$$Q = E_{\text{зв Rb}}(Z_{\text{Rb}}, A_{\text{Rb}}) + E_{\text{зв Cs}}(Z_{\text{Cs}}, A_{\text{Cs}}) - E_{\text{зв U}}(Z_{\text{U}}, A_{\text{U}}), \quad (1.2.2)$$

де  $E_{\text{зв U}}$ ,  $E_{\text{зв Rb}}$  та  $E_{\text{зв Cs}}$  – енергії зв'язку ядер урану та уламків. Тут зарядові числа  $Z_{\text{U}} = 92$ ,  $Z_{\text{Rb}} = 37$  та  $Z_{\text{Cs}} = 55$ . Масові числа дорівнюють  $A_{\text{U}} = 235$ ,  $A_{\text{Rb}} = 94$  та  $A_{\text{Cs}} = 141$ .

В загальному випадку, енергія зв'язку ядра описується формулою Вайцеккера [13]:

$$E_{\text{зв}}(Z, A) = \varepsilon_1 A - \varepsilon_2 A^{2/3} - \varepsilon_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \varepsilon_4 \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + \varepsilon_5 \frac{\delta}{A^{3/4}}, \quad (1.2.3)$$

Оскільки формула Вайцеккера отримана в припущенні нестисливості ядерної речовини, можна не враховувати перший доданок, тому що його величина не змінюється при поділі ядра. Також, енергія симетрії (четвертий доданок в формулі Вайцеккера) не змінюється до та після поділу ядра.

Коефіцієнт  $\delta$  для даних парно-непарних ізотопів урану  $^{235}\text{U}$  та цезію  $^{141}\text{Cs}$  складає  $\delta_{\text{U}} = \delta_{\text{Cs}} = 0$ , тому енергія парності для них  $E_{\text{U}}^{\text{nap}} = E_{\text{Cs}}^{\text{nap}} = 0$ . Для ізотопу  $^{94}\text{Rb}$   $\delta_{\text{Rb}} = -1$  та енергія парності складатиме:

$$E_{\text{Rb}}^{\text{nap}} = -\frac{\varepsilon_5}{A_{\text{Rb}}^{3/4}} = -\frac{34 \text{ MeV}}{37^{3/4}} = -2,27 \text{ MeV}. \quad (1.2.4)$$

Тому під час розгляду поділу урану зміну п'ятого доданку (енергії парності)  $\varepsilon_5 \frac{\delta}{A^{3/4}}$  з формули (1.2.3) треба також враховувати.



Тобто, енергія поділу ядра буде залежати від другого, третього та п'ятого членів формули Вайцзеккера (поверхневої  $E^{nos} = \varepsilon_2 A^{2/3}$  та кулонівської  $E^{кул} = \frac{\varepsilon_3 Z^2}{A^{1/3}}$  енергій та енергії парності  $\varepsilon_5 \frac{\delta}{A^{3/4}}$ ):

$$Q = E_U^{nos} + E_U^{кул} - E_{Rb}^{nos} - E_{Rb}^{кул} - E_{Cs}^{nos} - E_{Cs}^{кул} - E_{Rb}^{пар}. \quad (1.2.5)$$

Поверхнева енергія:

$$1) \text{ урану } E_U^{nos} = \varepsilon_2 \cdot A_U^{2/3} = 17,8 \cdot 235^{2/3} = 677,8 \text{ MeV};$$

$$2) \text{ рубідію } E_{Rb}^{nos} = \varepsilon_2 \cdot A_{Rb}^{2/3} = 17,8 \cdot 94^{2/3} = 368 \text{ MeV};$$

$$3) \text{ цезію } E_{Cs}^{nos} = \varepsilon_2 \cdot A_{Cs}^{2/3} = 17,8 \cdot 141^{2/3} = 482,2 \text{ MeV}.$$

Кулонівська енергія:

$$4) \text{ урану } E_U^{кул} = \varepsilon_3 \cdot \frac{Z_U^2}{A_U^{1/3}} = 0,712 \cdot \frac{92^2}{235^{1/3}} = 976,6 \text{ MeV};$$

$$5) \text{ рубідію } E_{Rb}^{кул} = \varepsilon_3 \cdot \frac{Z_{Rb}^2}{A_{Rb}^{1/3}} = 0,712 \cdot \frac{37^2}{94^{1/3}} = 241,4 \text{ MeV};$$

$$6) \text{ цезію } E_{Cs}^{кул} = \varepsilon_3 \cdot \frac{Z_{Cs}^2}{A_{Cs}^{1/3}} = 0,712 \cdot \frac{55^2}{141^{1/3}} = 413,8 \text{ MeV}.$$

Отже, з виразу (1.2.5) енергія поділу ядра  $Q$ , яка вивільнюється в результаті зміни кулонівської та поверхневої енергії вихідного ядра та уламків, дорівнюватиме

$$Q = (677,8 + 976,6 - 368 - 241,4 - 482,2 - 413,8 + 2,27) \text{ MeV} = 151,27 \text{ MeV}$$

**Приклад 3.** За допомогою формули Вайцзеккера розрахувати енергію відділення нейтронів для парно-парного ізотопу  $^{40}\text{Ca}$ .

**Розв'язання.** Енергія відділення нейтрона від ядра з масовим  $A$  та зарядовим  $Z$  числами дорівнює енергії зв'язку нейтрона в тому ж ядрі:

$$E_n(Z, A) = (m_n + m_\gamma(Z, A-1) - m_\gamma(Z, A))c^2. \quad (1.3.1)$$

$$\text{Маса ядра } m_\gamma(Z, A) = (Zm_p + (A-Z)m_n) - E_{зв}(A, Z)/c^2.$$

Тобто,

$$E_n(Z, A) = (m_n + Zm_p + (A - 1 - Z)m_n)c^2 - E_{\text{зв}}(Z, A - 1) - \\ - (Zm_p + (A - Z)m_n)c^2 + E_{\text{зв}}(Z, A) = E_{\text{зв}}(Z, A) - E_{\text{зв}}(Z, A - 1). \quad (1.3.2)$$

Розрахуємо за формулою Вайцзеккера (1.2.3) енергії зв'язку ядер  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$  та  ${}^{39}_{20}\text{Ca}$  відповідно, вважаючи, що  $Z = 20$  та  $A_1 = 40$ ,  $A_2 = 39$ :

$$E_{\text{зв}}(20, 40) = 15,75 \cdot 40 - 17,8 \cdot 40^{2/3} - 0,712 \cdot 20 \cdot (20 - 1)/40^{1/3} - \\ - 94,8 \cdot (40/2 - 20)^2/40 + 34/40^{3/4} = 344,84 \text{ MeV}, \\ E_{\text{зв}}(20, 39) = 15,75 \cdot 39 - 17,8 \cdot 39^{2/3} - 0,712 \cdot 20 \cdot (20 - 1)/39^{1/3} - \\ - 94,8 \cdot (39/2 - 20)^2/39 = 329,15 \text{ MeV}.$$

Їх різниця визначає енергію відділення нейтрона від ядра  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ :

$$E_n(20, 40) = E_{\text{зв}}(20, 40) - E_{\text{зв}}(20, 39) = 344,8 - 329,2 = 15,7 \text{ MeV}$$

Така аномально велика енергія відриву нейтрона обумовлена тим, що ядро  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$  є так званим «двічі магічним» ядром та має велику питому енергію зв'язку (див. питання 1).

**Приклад 4.** Маса нейтрального атома  ${}^{16}\text{O}$   $m_{\text{O}} = 15.9949 \text{ а.о.м.}$

Визначити питому енергію зв'язку  $\varepsilon$  ядра  ${}^{16}\text{O}$ .

**Розв'язання.** Питома енергія зв'язку ядра, тобто енергія зв'язку, яка приходить на один нуклон в ядрі:

$$\varepsilon(Z, A) = \frac{E_{\text{зв}}(Z, A)}{A}. \quad (1.4.1)$$

Ця величина є мірою стабільності ядра та приблизно однакова майже для всіх стабільних ядер:  $\varepsilon(Z, A) \approx 8 \frac{\text{MeV}}{\text{нуклон}}$ .

Повна енергія зв'язку ядра:

$$E_{\text{зв}}(Z, A) = (Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}(Z, A))c^2 = \\ = (Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{ат}}(Z, A) + Zm_e)c^2, \quad (1.4.2)$$

де  $m_{\text{я}}$  – маса ядра, а  $M_{\text{ат}}$  – маса атома.

Взагалі, маса ядра визначається як сума його масового числа  $A$  та надлишку маси нукліда. Для ядра з масовим числом  $A$  надлишок маси нукліда також називається дефектом маси ядра  $\Delta_A$ :

$$\Delta_A = m_{\text{я}} - A, \quad (1.4.3)$$

В таблицях зазвичай вказується дефект маси атома  $\delta_A$ :

$$\delta_A = M_{\text{ат}} - A, \quad (1.4.4)$$

$M_{\text{ат}}$  відрізняється від  $m_{\text{я}}$  масою електронної оболонки:

$$m_{\text{я}} = M_{\text{ат}} - Zm_e = \delta_A + A - Zm_e. \quad (1.4.5)$$

Значення дефектів мас ядер можна взяти з довідкових таблиць (див. [8,9]).

Тобто, питома енергія зв'язку ядра:

$$\varepsilon(Z, A) = \frac{(Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{ат}}(Z, A) + Zm_e)c^2}{A}. \quad (1.4.6)$$

Відомо, що енергії спокою протона, нейтрона та електрона складають, відповідно,  $m_p c^2 = 938,28 \text{ MeV}$ ,  $m_n c^2 = 939,57 \text{ MeV}$  та  $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$ .

Виразимо атомну одиницю маси в енергетичних одиницях:

$$\begin{aligned} 1 \text{ а.о.м.} \cdot c^2 &= 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot (2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с})^2 = \\ &= 14,92 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} \approx 931,5 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Використаємо ці значення та врахуємо, що для  $^{16}\text{O}$   $Z = 8$ ,  $A = 16$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon(8, 16) &= (8 \cdot 938,28 \text{ MeV} + (16 - 8) \cdot 939,57 \text{ MeV} - \\ &- 15,9949 \cdot 931,5 \text{ MeV} + 8 \cdot 0,511 \text{ MeV}) / 16 = 7,98 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

**Приклад 5.** Вважаючи, що при рівномірному розподілі заряду по об'єму ядра різниця енергій зв'язку дзеркальних ядер визначається тільки різницею енергій кулонівської взаємодії протонів в цих ядрах, обчислити радіуси дзеркальних ядер  $^{23}_{11}\text{Na}$  та  $^{23}_{12}\text{Mg}$ .  $E_{\text{зв}}(^{23}\text{Na}) = 186,56 \text{ MeV}$  та  $E_{\text{зв}}(^{23}\text{Mg}) = 181,72 \text{ MeV}$  – відповідні енергії зв'язку. Порівняти отримані радіуси цих ядер з розрахованими за формулою  $R = 1,22 \cdot A^{1/3} \text{ фм}$ .

**Розв'язання.** Дзеркальними називаються два ядра з однаковими масовими числами  $A$ , кожне з яких отримується з іншого заміною всіх протонів нейтронами, а всіх нейтронів – протонами. Позначимо заряд ядра  ${}^{23}_{11}\text{Na}$  як  $Z-1$ , а заряд ядра  ${}^{23}_{12}\text{Mg}$  як  $Z$ . Тоді різниця енергій зв'язку цих ядер дорівнює

$$\Delta E_{\text{зв}} = E_{\text{зв}}(Z-1, A) - E_{\text{зв}}(Z, A) = 186,56 - 181,72 = 4,84 \text{ MeV}. \quad (1.5.1)$$

Можливою є реакція  $\beta^+$ -розпаду для нукліду  ${}^{23}_{12}\text{Mg}$  з перетворенням його на дзеркальне ядро  ${}^{23}_{11}\text{Na}$ :  ${}^{23}_{12}\text{Mg} \rightarrow {}^{23}_{11}\text{Na} + \beta^+ + \nu$ .

Оскільки масове число  $A$  однакове для дзеркальних ядер, то для них в формулі Вайцзеккера (1.2.3) перший, другий та п'ятий доданки однакові. Четвертий доданок також співпадає для дзеркальних ядер. Це легко показати. Розглянемо, наприклад,  $\beta^+$ -перетворення (позитронний розпад). Тоді ядро з зарядовим числом  $Z$  після такого розпаду перетвориться в дзеркальне ядро з  $Z-1$  протонами. Також згадаємо, що масове число є  $A = Z + N$ . Значить, для ядра з  $Z$  протонами та  $Z-1$  нейтронами енергія симетрії дорівнюватиме

$$E_{\text{сим}1} = \varepsilon_4 \frac{(A/2 - Z)^2}{A} = \frac{\varepsilon_4}{A} \left( \frac{Z + Z - 1}{2} - Z \right)^2 = -\frac{\varepsilon_4}{4A}, \quad (1.5.2)$$

а для дзеркального йому ядра з  $Z-1$  протонами та  $Z$  нейтронами отримується, відповідно, те саме:

$$E_{\text{сим}2} = -\frac{\varepsilon_4}{4A}. \quad (1.5.3)$$

Тобто для дзеркальних ядер енергія зв'язку буде відрізнятися лише третім доданком в (1.2.3) (енергією кулонівської взаємодії  $\varepsilon_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ ).

Кулонівська енергія рівномірно зарядженого сферичного ядра з радіусом  $R$  визначається співвідношенням [1]

$$E_{\text{кул}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{(Ze)^2}{R}. \quad (1.5.4)$$

Знайдемо різницю кулонівської енергії для дзеркальних ядер:

$$\Delta E_{\text{кул}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{(Ze)^2}{R} - \frac{3}{5} \cdot \frac{((Z-1)e)^2}{R} = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R} (Z^2 - Z^2 + 2Z - 1) = \frac{3e^2(2Z-1)}{5R}.$$

Отже, для радіуса ядра вираз буде наступним:

$$R = \frac{3}{5} \cdot \frac{(2Z-1)e^2}{\Delta E_{\text{зв}}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{(2 \cdot 12 - 1) \cdot (4,8 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЕ})^2}{4,84 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг}} = 4,1 \cdot 10^{-13} \text{ см} = 4,1 \text{ фм}.$$

Розрахований радіус є “електричним” радіусом ядра, тобто дає інформацію про розподіл електричного заряду всередині ядра.

Для цих нуклідів проведемо також розрахунок за емпіричною формулою, яка дає значення радіуса ядра за методом розсіяння швидких електронів на атомних ядрах:

$$R = 1,22 \cdot A^{1/3} \text{ фм} = 1,22 \cdot 23^{1/3} = 3,5 \text{ фм}.$$

**Приклад 6.** Визначити за допомогою формули Вайцзеккера найбільш стабільний по відношенню до  $\beta$  – розпаду елемент з масовим числом  $A = 40$ .

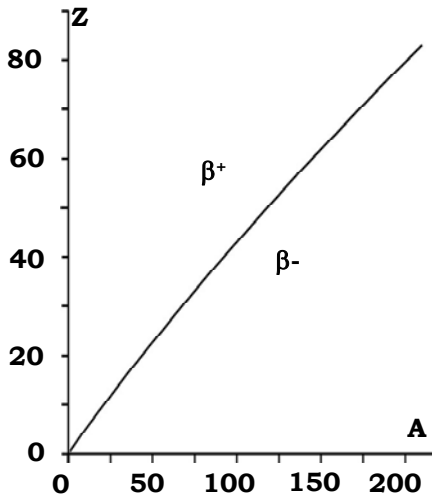
**Розв’язання.** Очевидно, що найстабільніші ізобари повинні мати мінімальну масу при заданій кількості нуклонів. Тому знайдемо зарядове число  $Z$ , при якому енергія зв’язку ядра буде максимальною. Для цього дослідимо на екстремум функцію (1.2.3):

$$\left. \frac{\partial E_{\text{зв}}(Z, A)}{\partial Z} \right|_{A=\text{const}} = -\frac{\varepsilon_3}{A^{1/3}} \cdot 2Z - \frac{\varepsilon_4}{A} \cdot 2 \left( \frac{A}{2} - Z \right) \cdot (-1) = 0. \quad (1.6.1)$$

Звідси отримаємо рівняння так званої «доріжки стабільності» ядер (див. Рис. 1.1):

$$Z_{\text{стаб}} = \frac{A}{2 + 2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4} A^{2/3}} = \frac{A}{2 + 2 \frac{0,712}{94,8} A^{2/3}} = \frac{A}{2 + 0,015 A^{2/3}}. \quad (1.6.2)$$

Всі ядра, що знаходяться вище кривої (1.6.2), мають надлишкову кількість протонів, тому є  $\beta^+$  – радіоактивними (надлишкові протони в ядрі перетворюються на нейтрони згідно реакції  ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + \beta^+ + \nu$ ). Аналогічним чином, ядра, що мають меншу за оптимальну кількість протонів (знаходяться нижче «доріжки стабільності»), позбавляються від надлишкових нейтронів шляхом  $\beta^-$  – розпаду згідно реакції  ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + \beta^- + \bar{\nu}$ . П’ятий доданок в формулі Вайцзеккера (1.2.3), який пов’язаний з парністю нуклонів у ядрі, ми враховуємо непрямым чином за допомогою (1.6.2).



**Рис.1.1.1.** Залежність зарядового числа  $Z$  від масового числа  $A$  для стабільних по відношенню до  $\beta$ -розпаду ядер («Доріжка стабільності»).

Конкретне значення масового числа  $A = 40$  дає стабільний ізобар з зарядовим числом

$$Z = \left[ \frac{40}{2 + 0,015 \cdot 40^{2/3}} \right] = [18,4] = 18. \quad (1.6.3)$$

Це парно-парне ядро аргона  ${}^{40}_{18}\text{Ar}$ . Дійсно, цей ізотоп аргону є стабільним по відношенню до  $\beta^+$ - та  $\beta^-$ -розпадів. Його масовий вміст в природній суміші ізотопів дорівнює 99,6%.

**Приклад 7.** Одне зі складових повної енергії зв'язку ядра в формулі Вайцзеккера має вигляд  $E_{\text{сим}} = \frac{\varepsilon_{\text{сим}} (Z - N)^2}{A}$ , де  $\varepsilon_{\text{сим}}$  – нормуюча константа. Середня енергія відриву одного нейтрона від ядра близька до значення  $E_1 = 8 \text{ MeV}$ . Згідно до однієї з основних квантово-механічних моделей, ядро є сферою, в межах якої  $N = A - Z$  нейтронів та  $Z$  протонів вільно рухаються, утворюючи два взаємно незалежні нерелятивістські вироджені фермі-гази нуклонів. Виходячи з цієї моделі, визначити:

- 1) енергію Фермі газу протонів  $E_{Fp}$  та нейтронів  $E_{Fn}$ ;
- 2) глибину потенціальної ями для нейтронів в ядрі  $E_n$ ;
- 3) середню кінетичну енергію, яка приходить на один протон та
- 4) нейтрон  $\langle E(Z) \rangle$  та  $\langle E(N) \rangle$ ;
- 5) повну кінетичну енергію протонів та нейтронів у ядрі  $E(Z, N)$ ;
- 6) показати, що при заданому значенні масового числа  $A$  величина

$E(Z, N)$  має мінімум при оптимальному значенні  $Z_{opt} = A/2$ ;

- 7) знайти залежність  $E(Z, N)$  від малої різниці  $Z - N$ , в цьому наближенні знайти коефіцієнт  $C_{сим}$ .

**Розв'язання.** Напівемпірична формула Вайцеккера для енергії зв'язку ґрунтується на моделі ядра у вигляді рідкої краплі. Це дуже спрощена модель, оскільки ядро має багато властивостей, які можна пояснити, базуючись лише на моделі незалежного руху нуклонів у ньому. Одна з найбільш простих моделей (модель незалежних нуклонів) представляє ядро у вигляді виродженого фермі-газу з нуклонів. Припустимо, що нуклони в ядрі рухаються абсолютно вільно всередині кулі радіусом  $R = R_0 A^{1/3} = 1,22 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3} (\text{см})$  та підкоряються тільки принципу заборони Паулі.

Такий підхід проілюстровано на Рис. 1.2, на якому зображені дві потенціальні ями: одна для нейтронів, а друга – для протонів.

Дно протонної ями знаходиться вище за дно нейтронної ями на величину повної кулонівської енергії відштовхування протонів  $E_c$ . Крім того, протонна яма повинна мати кулонівський бар'єр, який оточує її, оскільки протони, які намагаються проникнути всередину ядра ззовні, відштовхуються електричним зарядом ядра; також протони, які знаходяться всередині ядра, мають подолати цей бар'єр для того, щоб вийти назовні. Тому протони або змушені тунелювати крізь бар'єр, або повинні мати енергію, що більша за висоту кулонівського бар'єра [3].

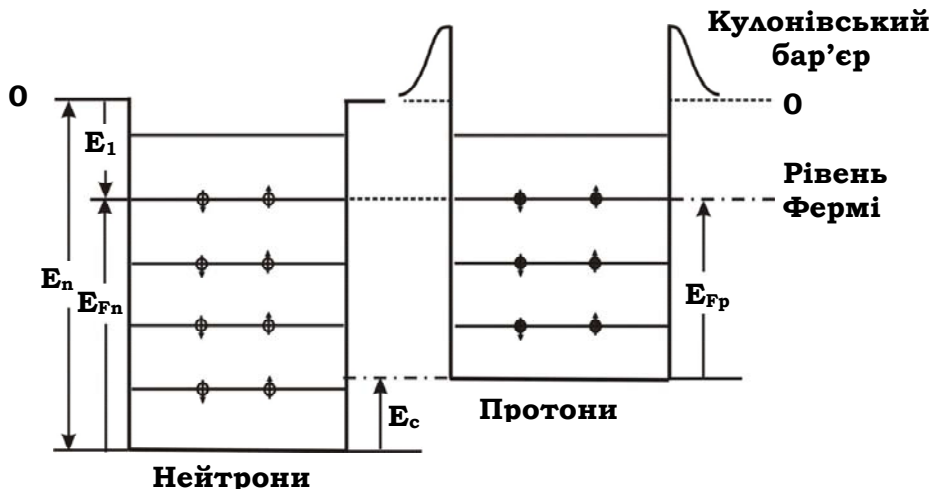


Рис.1.2. Потенціальні ями для нейтронів та протонів в ядрі.

1) Надалі наведемо розрахунки тільки для нейтронів. Для протонів результати відрізнятимуться наступними параметрами: а) кількістю частинок, тобто  $N$  для нейтронів треба замінити на  $Z$  для протонів; б) масою нуклонів; в) дно протонної ями піднімається на величину  $E_c$ .

Можлива кількість станів для нейтронів виражається через фазовий об'єм  $\Gamma$  наступним чином:

$$N = \frac{2\Gamma}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (1.7.1)$$

де  $N$  – загальна кількість нейтронів у ядрі.

В формулі (1.7.1) використано квазікласичне наближення: якою б не була фазова траєкторія, в одновимірному випадку на один ступінь вільності буде приходиться площа  $2\pi\hbar$ . Двійка в чисельнику цієї формули з'являється внаслідок виродження станів нуклонів відносно орієнтації спіну (зміна спінової орієнтації відповідає новому стану) – врахування принципу Паулі для ферміонів.

Фазовий об'єм у тривимірному просторі узагальнених координат  $q_x, q_y, q_z$  та імпульсів  $p_x, p_y, p_z$  складає:

$$\Gamma = \iiint d^3 p \iiint d^3 q. \quad (1.7.2)$$

В моделі сферичного ядра зручно перейти до сферичної системи координат. Тоді вираз (1.7.2) перепишеться наступним чином:



$$\Gamma = V \int d\Omega \int p^2 dp, \quad (1.7.3)$$

де  $\Omega$  – тілесний кут, а  $p^2$  – яacobіан переходу від декартової до сферичної системи координат.

Оскільки повний тілесний кут дорівнює  $\int d\Omega = 4\pi$ , то фазовий об'єм в сферичних координатах запишеться як

$$\Gamma = 4\pi V \int p^2 dp. \quad (1.7.4)$$

При абсолютному нулі температури протони та нейтрони, як і будь-які частинки, що підкоряються статистиці Фермі-Дірака, будуть послідовно заповнювати найнижчі можливі рівні енергії, тобто фермі-газ є виродженим. Максимально можливою енергією нуклонів є енергія Фермі  $E_F$ , якій відповідає імпульс Фермі  $p_F$ .

Модель передбачає, що нуклони в ядрі розглядаються як нерелятивістські частинки. Дійсно, протони та нейтрони, які вилітають з ядра, мають швидкості в 10–12 разів менші за швидкість світла, тому таку модель можна використати для спрощення розрахунків. Зв'язок між імпульсом та енергією в цьому випадку виражається наступним чином:

$$E = \frac{p^2}{2m}. \quad (1.7.5)$$

Розглянемо окремо нейтронний фермі-газ.

З урахуванням (1.7.5), число можливих станів одного нейтрона в тривимірному випадку складає за формулою (1.7.1):

$$N = \frac{V \int_0^{p_{Fn}} p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3} = \frac{V p_{Fn}^3}{3\pi^2 \hbar^3} = \frac{V (2m_n E_{Fn})^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad (1.7.6)$$

де  $m_n$  – маса спокою нейтрона.

За допомогою формули (1.7.6) концентрація нейтронів у ядрі визначатиметься наступним чином:

$$n_n = \frac{N}{V} = \frac{(2m_n E_{Fn})^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}. \quad (1.7.7)$$

З формули (1.7.7) виразимо енергію Фермі нейтронів:

$$E_{Fn} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_n} n_n^{2/3}. \quad (1.7.8 \text{ a})$$

Для протонів формула для енергії Фермі буде відрізнятися лише масою та концентрацією частинок:

$$E_{Fp} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_p} n_p^{2/3}. \quad (1.7.8 \text{ б})$$

Можна оцінити величину енергії Фермі для протонів і для нейтронів, взявши для ферміонів типову концентрацію ядерної матерії  $n_n \approx n_p \approx n \approx 10^{38} \text{ см}^{-3}$ ; маси нуклонів вважатимемо приблизно однаковими ( $m_n \approx m_p \approx m \approx 2 \cdot 10^{-24} \text{ з}$ ):

$$\begin{aligned} E_{Fn} = E_{Fp} &= \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m} n^{2/3} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} (10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с})^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-24} \text{ з}} (10^{38} \text{ см}^{-3})^{2/3} = \\ &= 5,15 \cdot 10^{-5} \text{ ерг} = 32,2 \text{ МеВ}. \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

Видно, що енергія Фермі нуклонів залежить тільки від їх концентрації в ядрі.

2) Для знаходження глибини потенціальної ями для нейтронів в ядрі  $E_n$  треба знову звернутися до Рис. 1.2. Є очевидним, що сума середньої енергії відриву одного нейтрона з ядра  $E_1$  та енергії Фермі нейтронів  $E_{Fn}$  задають глибину потенціальної ями для нейтронів:

$$E_n = E_1 + E_{Fn} = (8 + 32,2) \text{ МеВ} = 40,2 \text{ МеВ}. \quad (1.7.10)$$

3) Середню кінетичну енергію, яка припадає на один протон та нейтрон  $\langle E(Z) \rangle$  та  $\langle E(N) \rangle$ , можна обрахувати за правилом знаходження середніх величин. Для цього треба ввести поняття густини станів для протонів  $\rho_p(E)$  та нейтронів  $\rho_n(E)$ .

Густина станів для нейтронів показує, наскільки щільно заповнені частинками енергетичні рівні в системі. Густина станів складатиме:

$$\rho_n(E) = \frac{dN}{dE}. \quad (1.7.11)$$

Скористаємося нормуванням частинок на їх максимальну кількість. Для протонів та нейтронів відповідно:

$$Z = \int_0^{E_{Fp}} \rho_p(E) dE \quad \text{та} \quad N = \int_0^{E_{Fn}} \rho_n(E) dE. \quad (1.7.12)$$

Розрахуємо тепер  $N$  – число нейтронів, які заповнюють всі можливі стани з енергією від нуля до енергії Фермі (повна кількість нейтронів у ядрі). З формули (1.7.6) в межах від нульової до певної енергії  $E$  кількість нейтронів  $N'$  складатиме:

$$N' = \frac{V(2m_n E)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (1.7.13)$$

Відповідно, густину станів для нейтронів отримаємо, диференціюючи формулу (1.7.13) по енергії:

$$\rho_n(E) = \frac{\sqrt{2}V}{\pi^2 \hbar^3} m_n^{3/2} E^{1/2}. \quad (1.7.14)$$

Згідно визначенню, середня кінетична енергія  $\langle E(N) \rangle$ , яка припадає на один нейтрон, запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned} \langle E(N) \rangle &= \frac{\int_0^{E_{Fn}} E \cdot \rho_n(E) dE}{\int_0^{E_{Fn}} \rho_n(E) dE} = \frac{1}{N} \int_0^{E_{Fn}} E \cdot \rho_n(E) dE = \frac{\sqrt{2}V}{\pi^2 \hbar^3 N} m_n^{3/2} \int_0^{E_{Fn}} E^{3/2} dE = \\ &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi^2 \hbar^3 N} m_n^{3/2} \frac{2}{5} E_{Fn}^{5/2} = \frac{2^{3/2} V}{5\pi^2 \hbar^3 N} m_n^{3/2} E_{Fn}^{5/2}. \end{aligned} \quad (1.7.15)$$

Оскільки вираз для енергії Фермі нам вже відомий зі співвідношення (1.7.8 а,б), остаточно середня кінетична енергія нейтронів  $\langle E(N) \rangle$  дорівнюватиме:

$$\langle E(N) \rangle = \frac{2^{3/2} V}{5\pi^2 \hbar^3 N} m_n^{3/2} \frac{(3\pi^2)^{5/3}}{(2m_n)^{5/2}} \hbar^5 \left( \frac{N}{V} \right)^{5/3} = \frac{3^{5/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{10m_n} n_n^{2/3}. \quad (1.7.16)$$

Врахувавши, що ми працюємо з моделлю ядра у вигляді сфери, тобто об'єм ядра становить  $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 A$ , альтернативно формулу (1.7.16) можна записати наступним чином:

$$\langle E(N) \rangle = \frac{3^{5/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{10m_n} \cdot \frac{N^{2/3}}{\left( \frac{4}{3} \pi R_0^3 A \right)^{2/3}} = \frac{\left( \frac{3}{2} \right)^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{5m_n R_0^2} \cdot \left( \frac{N}{A} \right)^{2/3}. \quad (1.7.17)$$

Аналогічно, середня кінетична енергія, що припадає на один протон, становитиме:

$$\langle E(Z) \rangle = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{5m_p R_0^2} \cdot \left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3}. \quad (1.7.18)$$

4) Повну кінетичну енергію протонів та нейтронів у ядрі  $E(Z, N)$  знайдемо як суму кінетичної енергії всіх протонів та кінетичної енергії всіх нейтронів за умови приблизної рівності мас протона та нейтрона:

$$E(Z, N) = N \langle E(N) \rangle + Z \langle E(Z) \rangle = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{5m_n R_0^2 A^{2/3}} \left( N^{5/3} + Z^{5/3} \right). \quad (1.7.19)$$

5) Можна показати, що при заданому значенні масового числа  $A$  величина  $E(Z, N)$  має мінімум при оптимальному значенні  $Z_{\text{opt}} = A/2$ , знайшовши екстремум повної енергії протонів та нейтронів у ядрі по зарядовому числу  $Z$ . Врахуємо, що загальна кількість нейтронів у ядрі становить  $N = A - Z$ . З формули (1.7.19) отримаємо:

$$\frac{dE(Z, N)}{dZ} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{5m_n R_0^2 A^{2/3}} \frac{d}{dZ} \left( (A - Z)^{5/3} + Z^{5/3} \right) = 0, \quad (1.7.20)$$

звідси

$$-\frac{5}{3}(A - Z)^{2/3} + \frac{5}{3}Z^{2/3} = 0, \Rightarrow Z_{\text{opt}} = A/2.$$

Що і треба було довести в цьому пункті задачі.

б) А тепер знайдемо залежність повної енергії протонів та нейтронів у ядрі  $E(Z, N)$  від малої різниці  $\Delta = Z - N$ . Щоб дослідити поведінку цієї енергії в околі мінімуму, при фіксованому масовому числі  $A$  покладемо наступний малий параметр:  $\frac{Z - N}{A} = \frac{\Delta}{A} \ll 1$ .

Тобто отримаємо просту систему рівнянь, врахувавши, що  $N = A - Z$ :

$$\begin{cases} Z = \frac{A}{2} \left( 1 + \frac{\Delta}{A} \right), \\ N = \frac{A}{2} \left( 1 - \frac{\Delta}{A} \right). \end{cases} \quad (1.7.21)$$

Підставимо величини  $Z$  та  $N$  у такому вигляді до виразу для повної енергії нуклонів (1.7.19):

$$E(Z, N) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2 A}{2^{5/3} \cdot 5 m_n R_0^2} \left[ \left(1 - \frac{\Delta}{A}\right)^{5/3} + \left(1 + \frac{\Delta}{A}\right)^{5/3} \right]. \quad (1.7.22)$$

Тут зручно скористатися формулою розкладання виразу в ряд за малим параметром (біноміальний розклад):

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \pm \dots, \text{ де для нашого випадку ступінь}$$

складатиме  $n = \frac{5}{3}$ , а сама змінна є  $x = \frac{\Delta}{A}$ .

Після розкладу виразу (1.7.22) в ряд до квадратичного доданку отримаємо:

$$\begin{aligned} E(Z, N) &= \frac{3^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2 A}{80 m_n R_0^2} \left[ 1 - \frac{5}{3} \cdot \frac{\Delta}{A} + \frac{5}{9} \cdot \frac{\Delta^2}{A^2} + 1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{\Delta}{A} + \frac{5}{9} \cdot \frac{\Delta^2}{A^2} + \dots \right] = \\ &= \frac{3^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{40 m_n R_0^2} \left( A + \frac{5}{9} \cdot \frac{\Delta^2}{A} + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.7.23)$$

Тепер підставимо значення параметра  $\varepsilon = Z - N$  у (1.7.23):

$$E(Z, N) = \frac{3^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{40 m_n R_0^2} \left( A + \frac{5}{9} \cdot \frac{(Z - N)^2}{A} + \dots \right). \quad (1.7.24)$$

Перший (основний) доданок в цій формулі пропорційний до масового числа  $A$  та відображає вклад об'ємної енергії. Другий доданок має вигляд енергії симетрії. Константу, яка входить до енергії  $E(Z, N)$

перед виразом  $\frac{(Z - N)^2}{A}$ , можна визначити. Це й буде коефіцієнт

$C_{\text{сим}}$  при енергії симетрії:

$$C_{\text{сим}} = \frac{3^{1/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{8 m_n R_0^2} = \frac{3^{1/3} \pi^{4/3} (10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с})^2}{8 \cdot 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ з} \cdot (1,22 \cdot 10^{-13} \text{ см})^2} = \quad (1.7.25)$$

$$= 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ ерг} = 20,8 \text{ Мев.}$$

Зв'язок між коефіцієнтом  $C_{\text{сим}}$  та коефіцієнтом  $\varepsilon_4$ , що входить до формули Вейцзеккера, є таким:  $\varepsilon_4 = 4C_{\text{сим}}$ . Підставляючи отримане значення  $C_{\text{сим}}$  з (1.7.25), знайдемо  $\varepsilon_{4\text{теор}} = 83,2 \text{ МеВ}$ . Нагадаємо, що емпіричне значення для цього коефіцієнту  $\varepsilon_4 = 94,8 \text{ МеВ}$ . Таким чином, коефіцієнт  $C_{\text{сим}}$ , який ми оцінили, виходячи з представленої моделі, відрізняється від його емпіричного значення. Це пов'язано з тим, що нами не було враховано магнітну взаємодію між протонами та нейтронами, тоді як середня взаємодія окремо між протонами та окремо між нейтронами менша, ніж середня взаємодія між нейтронами та протонами через дію принципу заборони Паулі. Принцип Паулі послаблює взаємодію між однаковими частинками, оскільки забороняє визначені двохчастинкові стани. Взаємодія ж між нейтроном та протоном не підкоряється такому обмеженню.

### 1.3. Запитання та відповіді

1. Які особливості властиві нуклідам з «магічними» числами? З двічі «магічними» числами?

Магічні (число протонів чи нейтронів дорівнює 2, 8, 20, 28, 50 чи 82, або число нейтронів дорівнює 126) та в особливості двічі «магічні» ядра («магічним» є й число протонів, й число нейтронів) відрізняються підвищеною стійкістю (тобто мають більші питомі енергії зв'язку) та більшою розповсюдженістю в природі у порівнянні з іншими ядрами. Це можна пояснити наступним чином. Згідно до оболонкової моделі, ядра, що містять „магічну” кількість нуклонів, мають заповнені зовнішні оболонки. Також енергія альфа – та бета-розпаду ядер при переході через магічні числа зазнає різкого стрибка. Інша особливість – такі ядра мають максимальну кількість ізотопів та ізотонів. А квадрупольний електричний момент ядер з «магічними» числами є нульовим, оскільки ці ядра характеризуються сферичною симетрією розподілу зарядів у незбуджених станах.

2. Нуклони в ядрі утримуються за рахунок сильної взаємодії, радіус дії якої згідно експериментальних даних становить  $1,3 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ . Поясніть механізм дії ядерних сил на основі положень квантової теорії поля.

В природі існує чотири типи взаємодій: гравітаційна, електромагнітна, слабка та сильна. Сучасна квантова теорія поля

постулює, що кожному полю відповідає певна частинка (квант поля), яка є його носієм. Так, носіями електромагнітного поля є фотони, слабого —  $W^\pm$  та  $Z^0$  — проміжні векторні бозони, сильного — глюони, а гравітаційного — поки що гіпотетичні (оскільки експериментально досі не підтверджено їх існування) гравітони. Взаємодія відбувається за рахунок того, що одна частинка випромінює квант поля, а інша його поглинає. Проте згідно законів збереження ізольована частинка не може випромінити чи поглинути квант, тому вважають, що взаємодія здійснюється за рахунок віртуальних квантів, тобто таких, для яких не виконуються закони збереження енергії та імпульсу. Згідно співвідношення невизначеностей, закон збереження енергії може порушуватись для проміжків часу  $\Delta t \approx \hbar / mc^2$ , де  $mc^2$  — енергія кванта поля. Іншими словами, віртуальний квант випромінюється або поглинається внаслідок порушення звичайного зв'язку між енергією та імпульсом.

Протягом часу  $\Delta t$  віртуальна частинка відходить від джерела поля на відстань, не більшу за  $R = c\Delta t = \hbar / mc$ , ця відстань дорівнює комптонівській довжині хвилі частинки масою  $m$ . З останнього виразу легко оцінити масу частинки-носія сильної взаємодії:

$$mc^2 = \hbar c / R = 0,197 \cdot 10^{-4} \text{ eV} \cdot \text{см} / 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ см} \approx 151 \text{ MeV}.$$

### 3. В чому виражається насичення ядерних сил?

Ядерні сили є короткодійними, тобто радіус дії таких сил порядку розміру нуклона. Насичення ядерних сил означає, що кожен нуклон може взаємодіяти тільки з сусідніми, а не з усіма нуклонами в ядрі. Це дає приблизну сталість середньої енергії зв'язку ядра, яка приходить на один нуклон для різних ядер. Перший („об'ємний“) доданок в формулі Вайцзеккера виражає цю властивість ядерних сил.

Насиченням пояснюється пропорційність енергії зв'язку стабільних не дуже легких ( $A > 20$ ) ядер до масового числа  $A$ . З насиченням пов'язано й той факт, що густина ядерної речовини практично не залежить від масового числа. Це дає можливість застосувати до ядра модель рідкої краплі. Найбільш точною ця модель є для важких ядер.

4. З чим пов'язане зменшення енергії зв'язку в легких та важких ядрах?

Для важких ядер ефект цей обумовлено наявністю кулонівських сил відштовхування між протонами. Для легких ядер ядерні сили переважають над кулонівськими приблизно на два порядки. Проте для важких ядер ситуація змінюється: кулонівські сили є далекодіючими, їх енергія пропорційна до  $Z(Z-1) \approx Z^2$ , тоді як енергія ядерної взаємодії пропорційна до  $Z$ .

Енергія зв'язку зменшується також за рахунок поверхневих ефектів. Якщо нуклон знаходиться поблизу поверхні, кількість зв'язків його з іншими нуклонами зменшується. Останній ефект є дуже суттєвим для легких ядер, оскільки його вплив тим більший, чим більше відношення поверхні ядра до його об'єму.

5. Які ядра мають більшу енергію зв'язку: парно-парні чи непарно-непарні?

Детальне вивчення енергії зв'язку як функції змінних  $Z$  та  $N$  виявляє, що поверхня (в математичному розумінні)  $E_{\text{зв}}(Z, N)$  розщеплюється на 3 поверхні: вище за всіх лежить поверхня, на якій розташовуються парно-парні ядра (парне  $Z$ , парне  $N$ ). Посередині лежить поверхня, що містить парно-непарні ядра. Нижче за всіх розташовані непарно-непарні ядра. Відстань між сусідніми поверхнями має порядок 1 МеВ. Цей факт свідчить про існування явища "спаровування" (тобто об'єднання в деякому сенсі в пари) нуклонів одного типу в ядрі, причому при паруванні енергія зв'язку збільшується приблизно на 1 МеВ. Більша енергія зв'язку відповідає парно-парним ядрам. Це показує останній доданок в формулі

Вайцеккера – доданок парності  $\frac{\epsilon_{\text{пар}}}{A^{3/4}}$ . Для парно-парних ядер він має

додатний знак.

6. Опишіть методи визначення радіуса атомного ядра.

Різні методи визначення радіуса ядра поділяються на дві групи. В одних методах реєструється наявність ядерної речовини, в них використовуються явища, обумовлені ядерними силами.

Друга група методів використовує електромагнітну взаємодію та досліджує розподіл електричного заряду в ядрі. До цієї групи відносяться: дослід Резерфорда по розсіюванню  $\alpha$ -частинок (грубий метод для оцінки верхньої межі радіуса ядра), дослід по розсіюванню нейтронів, електронів та елементарних частинок на атомних ядрах.



Ще один метод – дослідження рентгенівських спектрів мезоатомів, які виникають під час захоплення  $\mu^-$  – мезонів атомами. Особливо точні результати таким методом отримують на важких ядрах.

Найбільш точні результати по визначенню радіуса ядра отримують при дослідженні розсіювання швидких електронів на ядрах. Саме з цих дослідів було отримане значення  $R_0 = (1,2 - 1,3) \text{ фм}$  та підтверджено нерівномірність розподілу електричного заряду всередині ядра.

Один з методів – за допомогою енергії зв'язку дзеркальних ядер – описано в прикладі 5 цього розділу. Цей метод дозволяє отримати інформацію про «електричний» радіус, тобто про розподіл електричного заряду всередині ядра.

7. Якою має бути енергія частинок в дослідах по розсіюванню на атомних ядрах (див. попереднє питання)?

Для помітного розсіювання необхідно, щоб довжина хвилі де Бройля  $\lambda$  розсіюваної частинки була того ж порядку або меншою за розмір ядра. Цю умову можна виразити через енергію частинки.

Довжина хвилі де Бройля дорівнює  $\lambda = \frac{h}{p}$ , де  $p$  – імпульс частинки. Для нейтронів скористаємось нерелятивістським наближенням:  $p = \sqrt{2m_n E_k}$ . Таким чином, отримаємо кінетичну

енергію нейтрона:  $E_k = \frac{(hc)^2}{2m_n c^2 \lambda^2}$ . Скористаємось числовими

значеннями:  $hc = 1,24 \cdot 10^{-4} \text{ еВ} \cdot \text{см}$ , енергія спокою нейтрона  $m_n c^2 = 939,6 \text{ МеВ}$  та отримаємо вираз для кінетичної енергії нейтрона:

$$E_k = \frac{8,18}{\lambda^2 (\text{см}^2)} \cdot 10^{-24} \text{ МеВ}.$$

Наприклад, для дослідження ядер  $^{197}\text{Au}$  ( $R \approx 1,22 \cdot 197^{1/3} \approx 7 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ ), енергія нейтронів повинна складати  $E_k > 17 \text{ МеВ}$ .

Для ультрарелятивістських електронів формула для кінетичної енергії матиме вигляд:  $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1,24}{\lambda(\text{см})} \cdot 10^{-4} \text{ eV}$ . Для дослідження

того ж ізотопу  $^{197}\text{Au}$  енергія електронів дорівнюватиме  $E > 180 \text{ MeV}$ .

За кутовим розподілом пружно розсіяних електронів можна робити висновки про розміри ядра та його структуру.

8. Які експериментальні факти свідчать про неможливість існування в ядрах легких частинок, зокрема електронів?

Є декілька фактів, що свідчать про неможливість існування електрона в атомному ядрі. Власна енергія електрона є значно меншою за енергії зв'язку ядер, а невизначеність області локалізації електрона (довжина хвилі Комптона) є більшою, ніж розміри ядер. Також магнітні моменти ядер є малими порівняно з магнітними моментами електронів. Протонно-електронна модель ядра дає значення спіну ядер, яке не узгоджується з експериментальним.

9. Чи однакові за розміром ядра ізотопів та ізобарів одного хімічного елемента?

Ізотопів – істотно різні, ізобарів – приблизно однакові. Невелика різниця в розмірах ізобарів пов'язана з тим, що в ядрі є невелика відмінність в функції розподілу протонів та нейтронів ("розмитість" розподілу нейтронів  $\Delta R$  біля поверхні ядра є більшою, ніж у протонів, тому "нейтронний" радіус ядра є трохи більшим, ніж "протонний" радіус). З цієї причини ізобари з більшою кількістю нейтронів мають трохи більший розмір.

10. Як експериментально можна підтвердити несферичність атомного ядра?

Взаємодія магнітного моменту ядра з магнітним моментом електронної оболонки атома спричиняє появу надтонкої структури спектральних ліній. Додаткова причина існування розщеплення енергетичних рівнів – наявність у ядра квадрупольного моменту. Власний квадрупольний момент ядра є мірою відхилення розподілу електричного заряду в ядрі від сферичного. Зазвичай вважають, що ядро має форму еліпсоїда обертання. Несферичність форми проявляється в появі в енергетичному спектрі ядра обертальних енергетичних рівнів.

## 2. ПРИРОДНА РАДІОАКТИВНІСТЬ ТА ЗАКОНИ СПОНТАННОГО РОЗПАДУ

### 2.1. Теоретичні відомості

Радіоактивністю називають самодовільну зміну стану атомного ядра, яка відбувається протягом часу, значно більшого за характерний ядерний час —  $\tau_{\text{яд}} \approx 10^{-22}$  с. Ядра, що зазнають радіоактивного розпаду, є *радіоактивними*, а такі, що не зазнають — *стабільні*.

Існує багато видів радіоактивного розпаду, основними вважають такі: 1)  $\alpha$  – розпад, 2)  $\beta$  – розпад, 3) спонтанний поділ атомного ядра, 4) протонний розпад тощо. Перші три види розпаду буде детально розглянуто в подальших розділах.

Радіоактивний розпад – явище статистичне. Неможливо визначити, які конкретно атоми розпадуться у зразку протягом певного часу, проте можна з практично повною достовірністю розрахувати, скільки атомів розпадуться протягом цього часу. Імовірність розпаду ядра протягом одиниці часу називається *сталою розпаду*  $\lambda$  радіоактивних ядер даного сорту. Якщо в препараті міститься  $N$  радіоактивних ядер, за одиницю часу в середньому розпадеться  $\lambda N$  таких ядер. Величина  $\lambda N$  називається *активністю* радіоактивного джерела. Іншими словами, активність характеризує швидкість зміни кількості ядер з часом:

$$A = -\frac{dN}{dt}.$$

Історично першою введеною одиницею радіоактивності був кюрі (Ки) [1,5]. Один кюрі приблизно дорівнює активності одного граму ізотопу радію  $^{226}_{88}\text{Ra}$ , що відповідає

$$1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ розп/с}$$

Одиницею активності в системі СІ є 1 розпад за секунду. Ця одиниця має назву *бекерель (Бк)*. В літературі також зустрічається одиниця *резерфорд*:  $1 \text{ Рд} = 10^6 \text{ Бк}$ .

Сталу розпаду можна виразити через *середній час життя*  $\tau$  радіоактивних ядер:  $\tau = 1/\lambda$ . Закон зміни кількості радіоактивних ядер з часом (закон радіоактивного розпаду) матиме вигляд:

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де  $N_0$  — кількість ядер в початковий момент часу.

Час, протягом якого кількість радіоактивних ядер зменшується вдвічі, називається *періодом піврозпаду*  $T$ :

$$T = \tau \ln 2 = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Якщо одночасно відбуваються два конкуруючих процеси, таким чином, що ядра  $N$  одночасно можуть випускати частинки одного сорту  $N_1$  зі сталою розпаду  $\lambda_1$  згідно рівнянню  $dN_1 = -\lambda_1 N dt$ , та частинки іншого сорту  $N_2$  згідно рівнянню  $dN_2 = -\lambda_2 N dt$ , то закон зміни кількості ядер  $N$  знаходиться з диференційного рівняння

$$dN = dN_1 + dN_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2) N dt.$$

Звідси випливає, що обернена величина «результуючого» часу життя  $\tau$  дорівнює сумі обернених величин часів життя  $\tau_1$  і  $\tau_2$ :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}.$$

## 2.2. Приклади розв'язку задач

**Приклад 1.** До крові людини увели невелику кількість розчину, який містить  $^{24}\text{Na}$  з активністю  $A_0 = 2,1 \cdot 10^3$  Бк. Активність  $1 \text{ см}^3$  крові, взятої через  $t = 5$  год після цього, складала  $a = 0,28$  Бк/см<sup>3</sup>. Знайти об'єм крові людини.

**Розв'язання.** Активність препарату за визначенням є швидкість зміни кількості радіоактивних ядер, що дорівнює:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N, \quad (2.1.1)$$

де  $N$  — кількість радіоактивних ядер в довільний момент часу,  $\lambda$  — стала розпаду, а знак «-» вказує на зменшення кількості ядер з часом.

Початкова кількість ядер ізотопу  $^{24}\text{Na}$  визначається як  $N_0 = \frac{A_0}{\lambda}$ .

Закон зміни кількості радіоактивних ядер з часом внаслідок їх спонтанного розпаду має вигляд:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (2.1.2)$$

Таким чином, через час  $t$  активність препарату дорівнюватиме:

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (2.1.3)$$

Активність одиниці об'єму речовини, з урахуванням (2.1.3),

$$a = \frac{A}{V} = \frac{A_0}{V} e^{-\lambda t}. \quad (2.1.4)$$

З (2.1.4) виражаємо об'єм:

$$V = \frac{A_0}{a} e^{-\lambda t} = \frac{A_0}{a} \exp\left(-\frac{\ln 2}{T} t\right), \quad (2.1.5)$$

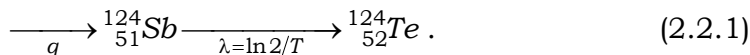
де враховано зв'язок між сталою розпаду  $\lambda$  та періодом піврозпаду  $T$ :  $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ .

Підставляючи у (2.1.5) параметри задачі, та врахувавши, що період піврозпаду  $^{24}\text{Na}$  становить 15 год., знаходимо об'єм крові людини:

$$V = \frac{2,1 \cdot 10^3}{0,28} \exp\left(-\frac{\ln 2}{1,5} \cdot 5\right) = 6,08 \cdot 10^3 \text{ см}^3 \approx 6 \text{ л.}$$

**Приклад 2.** Радіонуклід  $^{124}_{51}\text{Sb}$  утворюється зі сталою швидкістю  $q = 1,0 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ . Шляхом  $\beta^-$  – розпаду з періодом піврозпаду  $T = 60$  діб він перетворюється на стабільний нуклід  $^{124}_{52}\text{Te}$ . Знайти проміжок часу після початку утворення, коли активність нукліда  $^{124}_{51}\text{Sb}$  становитиме  $A = 3,7 \cdot 10^5 \text{ Бк}$ . Визначити, яка маса нукліду  $^{124}_{52}\text{Te}$  накопичиться в препараті за час  $t = 120$  діб після початку його утворення.

**Розв'язання.** Ланцюжок утворення та розпаду ізотопу  $^{124}_{51}\text{Sb}$  має вигляд:



Позначимо:  $N_1$  та  $N_2$  – кількості ядер ізотопів  $^{124}_{51}\text{Sb}$  та  $^{124}_{52}\text{Te}$  відповідно,  $\lambda$  – стала розпаду ізотопу  $^{124}_{51}\text{Sb}$ . Закони зміни кількості ядер з часом будуть описуватись такими рівняннями:

$$\frac{dN_1}{dt} = q - \lambda N_1, \quad (2.2.2)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda N_1. \quad (2.2.3)$$

Перший доданок в (2.2.2) враховує утворення ядер  $^{124}_{51}\text{Sb}$  з постійною швидкістю  $q$ , другий – зменшення кількості за рахунок розпаду. Аналогічно, рівняння (2.2.3) описує зростання кількості ядер  $^{124}_{52}\text{Te}$  за рахунок розпаду ядер  $^{124}_{51}\text{Sb}$ . Розв'язок рівняння (2.2.2) будемо шукати у вигляді:

$$N_1 = C_1 + C_2 e^{-\lambda t}, \quad (2.2.4)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -C_2 \lambda e^{-\lambda t}, \quad (2.2.5)$$

де  $C_1$  та  $C_2$  – константи, що визначаються з початкових умов. Вважатимемо, що в початковий момент часу кількість ядер ізотопу  $^{124}_{51}\text{Sb}$   $N_{10} = 0$ . Підставивши (2.2.4) та (2.2.5) у рівняння (2.2.2), отримаємо рівняння:

$$-C_2 \lambda \cdot e^{-\lambda t} = q - \lambda C_1 - \lambda C_2 \cdot e^{-\lambda t}.$$

З останнього виразу знаходимо константу  $C_1 = \frac{q}{\lambda}$ . Для знаходження іншої константи скористаємось початковими умовами:

$$N_{10} = 0 = \frac{q}{\lambda} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{q}{\lambda}.$$

Таким чином, закон накопичення ядер  $^{124}_{51}\text{Sb}$  остаточно набуде вигляду:

$$N_1 = \frac{q}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}). \quad (2.2.6)$$

Знайдемо тепер закон накопичення ядер стабільного ізотопу  $^{124}_{52}\text{Te}$ . Підставивши (2.2.6) у (2.2.3), отримаємо:

$$\frac{dN_2}{dt} = q (1 - e^{-\lambda t}). \quad (2.2.7)$$

Інтегруючи рівняння (2.2.7) по часу в межах від нуля до поточного моменту часу  $t$ , отримаємо вираз для  $N_2$ :

$$N_2 = qt + \frac{q}{\lambda} e^{-\lambda t} + C. \quad (2.2.8)$$

Константу  $C$  знаходимо з урахуванням початкових умов, а саме: в початковий момент часу  $N_{20} = 0$ . Отже,

$$N_{20} = 0 = \frac{q}{\lambda} + C \Rightarrow C = -\frac{q}{\lambda}. \quad (2.9)$$

Підставляючи (2.9) у (2.8), остаточно знаходимо закон зміни кількості ядер нукліду  $^{124}_{52}\text{Te}$  з часом:

$$N_2 = qt + \frac{q}{\lambda}(e^{-\lambda t} - 1) = \frac{q}{\lambda}(e^{-\lambda t} + \lambda t - 1). \quad (2.2.10)$$

Активність нукліда  $^{124}_{51}\text{Sb}$  через проміжок часу  $t$  складатиме:

$$A = \lambda N_1 = q(1 - e^{-\lambda t}). \quad (2.2.11)$$

З (2.2.11) виражаємо час:

$$e^{\lambda t} = \frac{q}{q - A} \Rightarrow t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(1 - \frac{A}{q}\right) = -\frac{T}{\ln 2} \ln\left(1 - \frac{A}{q}\right). \quad (2.2.12)$$

Підставляючи у (2.2.12) числові дані, знайдемо проміжок часу після початку утворення нукліду  $^{124}_{51}\text{Sb}$ , коли активність становитиме  $A = 3,7 \cdot 10^8$  Бк :

$$t = -\frac{60}{\ln 2} \ln\left(1 - \frac{3,7 \cdot 10^8}{10^9}\right) = 40 \text{ діб}.$$

Масу нукліду  $^{124}_{52}\text{Te}$  знайдемо з допомогою закону (2.2.10):

$$\Delta m = m_0 \frac{qT}{\ln 2} (e^{-\lambda t} + \lambda t - 1), \quad (2.2.13)$$

де  $m_0 \approx 124$  а.о.м. – маса ядра  $^{124}_{52}\text{Te}$ . Підставивши числові дані, отримаємо з (2.2.13)

$$\Delta m = 124 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \frac{5,184 \cdot 10^{15}}{\ln 2} \left( \exp\left(-\frac{\ln 2}{60} \cdot 120\right) + 2 \ln 2 - 1 \right) = 9,8 \cdot 10^{-7} \text{ г}.$$

**Приклад 3.** Під час радіоактивного розпаду ядер нукліда  $A_1$  утворюється радіонуклід  $A_2$ . Їх сталі розпаду дорівнюють  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  відповідно, причому  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Вважаючи, що в початковий момент часу препарат містить лише ядра нукліда  $A_1$  у кількості  $N_{10}$ , визначити:

- 1) кількість ядер нукліда  $A_2$  в момент часу  $t$ ;
- 2) момент часу  $t_m$ , коли кількість ядер нукліда  $A_2$  виявиться максимальною;

3) в якому випадку може виникнути стан перехідної рівноваги, при якому відношення кількостей обох нуклідів буде залишатись сталим? Чому дорівнюватиме це відношення?

**Розв'язання.** Позначимо через  $N_1$  та  $N_2$  кількість материнських ( $A_1$ ) та дочірніх ( $A_2$ ) ядер, відповідно. Закони зміни кількості ядер будуть описуватись такими рівняннями:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \quad (2.3.1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2. \quad (2.3.2)$$

Перше рівняння показує, що кількість материнських ядер  $A_1$  може тільки зменшуватись за рахунок розпаду. При цьому з кожного материнського ядра виникає одне дочірнє ядро (перший доданок у правій частині рівняння (2.3.2)). Другий доданок у (2.3.2) враховує зменшення кількості дочірніх ядер за рахунок радіоактивного розпаду зі сталою  $\lambda_2$ . Розв'язання рівняння (2.3.1) має вигляд:

$$N_1 = N_{10} e^{-\lambda_1 t}, \quad (2.3.3)$$

де  $N_{10}$  – початкова кількість материнських ядер. Врахувавши (2.3.3), (2.3.2) перепишемо наступним чином:

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}. \quad (2.3.4)$$

Частинний розв'язок цього лінійного неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді:

$$N_2 = N_{10} (C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.3.5)$$

Для того, щоб отримати загальний розв'язок, до (2.3.5) необхідно додати загальний розв'язок однорідного рівняння, що відповідає (2.3.4), тобто  $N_2(0) e^{-\lambda_2 t}$ . Таким чином, загальний розв'язок буде наступним:

$$N_2 = N_2(0) e^{-\lambda_2 t} + N_{10} (C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.3.6)$$

Підставляючи (2.3.6) у (2.3.4) та врахувавши, що

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2(0) e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 N_{10} C_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_{10} C_2 e^{-\lambda_2 t},$$



отримаємо таке рівняння:

$$-\lambda_1 N_{10} C_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 N_{10} C_1 e^{-\lambda_1 t} = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}.$$

Звідси знаходимо константу  $C_1$  :

$$-\lambda_1 N_{10} C_1 + \lambda_2 N_{10} C_1 = \lambda_1 N_{10} \Rightarrow C_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (2.3.7)$$

Для знаходження константи  $C_2$  необхідно використати початкові умови: в момент часу  $t=0$  кількість дочірніх ядер  $N_2(0) = N_{20}$ . У такому випадку з (2.3.6), з урахуванням (2.3.7), знаходимо

$$N_2(0) = N_{20} + N_{10} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + C_2 \right) \Rightarrow C_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (2.3.8)$$

Остаточно, закон зміни кількості дочірніх ядер  $A_2$  запишеться так:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \left( N_{20} - \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) e^{-\lambda_2 t}. \quad (2.3.9)$$

У випадку, якщо початкова кількість дочірніх ядер  $N_{20} = 0$ , вираз (2.3.9) спрощується:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.3.10)$$

Для знаходження моменту часу, при якому кількість дочірніх ядер буде максимальною, дослідимо функцію (2.3.10) на екстремум:

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_m} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_m}) = 0 \Rightarrow \\ e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t_m} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Rightarrow t_m = \frac{\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Оскільки, згідно умови,  $\lambda_2 > \lambda_1$ , то через проміжок часу достатньо великий порівняно з середньою тривалістю життя материнської речовини, буде виконуватись співвідношення  $\exp(-\lambda_1 t) \gg \exp(-\lambda_2 t)$ , тому в формулі (2.3.10) другим доданком можна буде знехтувати, так що

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}. \quad (2.3.12)$$

Це означатиме, що кількість ядер обох речовин буде зменшуватись зі швидкістю розпаду материнських ядер, а їх відношення залишатиметься незмінним:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (2.3.13)$$

Такий стан називають перехідною рівновагою.

Важливим є випадок, коли материнське ядро має великий час життя, а дочірнє, порівняно з ним, розпадається швидко, тобто виконується співвідношення  $\lambda_1 \ll \lambda_2$ . При цьому час спостереження є набагато меншим за час життя материнських ядер, тобто  $\lambda_1 t \ll 1$  (це співвідношення виконується при розрахунку розпаду важких  $\alpha$ -радіоактивних ядер, наприклад, урану). В такому разі протягом часу спостереження можна знехтувати зміною кількості материнських ядер, вважаючи, що  $N_1 = \text{const}$  і з (2.3.10) отримати:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.3.14)$$

оскільки величиною  $\lambda_1$  в знаменнику можна знехтувати. При  $t \rightarrow \infty$  кількість дочірніх атомів асимптотично наближується до насичення:

$$N_2(\infty) = \frac{\lambda_1 N_1}{\lambda_2}, \quad (2.3.15)$$

і в стані насичення виконуватиметься умова:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2. \quad (2.3.16)$$

Рівність (2.3.16) називається умовою радіоактивної рівноваги, фізичний зміст якої полягає в тому, що розпад дочірніх ядер в будь-який момент часу компенсується збільшенням їх кількості за рахунок розпаду материнської речовини. Як приклад, можна навести рівновагу між радоном ( $T_1 = 1620$  років) та радієм ( $T_2 = 3,8$  діб). Через 2 місяці між радоном та радієм встановлюється рівновага. Кількість радію, що перетвориться протягом цього часу, складатиме лише  $7 \cdot 10^{-5}$  від його початкової кількості. У такому випадку рівновага називається віковою.

**Приклад 4.** При  $\beta$  — розпаді  $^{112}\text{Pd}$  виникає  $\beta$  — активний нуклід  $^{112}\text{Ag}$ . Їх періоди піврозпаду дорівнюють  $T_1 = 21$  год та  $T_2 = 3,2$  год, відповідно. Знайти відношення максимальної активності нукліда

$^{112}\text{Ag}$  до початкової активності препарату, якщо в початковий момент часу він містив лише нуклід  $^{112}\text{Pd}$ .

**Розв'язання.** Скористаємось розв'язком попереднього прикладу. Закон накопичення дочірніх ядер  $^{112}\text{Ag}$  має вигляд:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.4.1)$$

Зміна активності дочірнього нукліда з часом запишеться так:

$$A = \lambda_2 N_2 = N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.4.2)$$

Для знаходження максимальної активності  $^{112}\text{Ag}$  необхідно дослідити функцію (2.4.2) на екстремум:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) = 0 \Rightarrow \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_m} &= \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_m} \Rightarrow t_m = \frac{\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Підставивши значення  $t_m$  у (2.4.2), отримаємо максимальну активність нукліда  $^{112}\text{Ag}$ :

$$A_{\max} = N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t_m} - e^{-\lambda_2 t_m}),$$

врахувавши, що  $A_0 = \lambda_1 N_{10}$ , знайдемо відношення  $A_{\max}$  до початкової активності препарату:

$$\frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t_m} - e^{-\lambda_2 t_m}). \quad (2.4.4)$$

Приймаючи до уваги, що  $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ , з (2.4.3) та (2.4.4) остаточно знаходимо:

$$\frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \left( 2^{\frac{t_m}{T_1}} - 2^{\frac{t_m}{T_2}} \right), \quad (2.4.5)$$

$$t_m = \frac{\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}{\ln 2} \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}. \quad (2.4.6)$$

Підставимо у (2.4.5) та (2.4.6) параметри прикладу і одержимо:

$$t_m = \frac{\ln\left(\frac{21}{3,2}\right)}{\ln 2} \frac{21 \cdot 3,2}{17,8} = 10,25 \text{ год.}$$

$$\frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{21}{17,8} \left( 2^{-\frac{10,25}{21}} - 2^{-\frac{10,25}{3,2}} \right) = 0,713.$$

**Приклад 5.** На даний момент часу в природному урані міститься 99,28%  $^{238}\text{U}$  та 0,72%  $^{235}\text{U}$ . Яким було співвідношення між  $^{238}\text{U}$  та  $^{235}\text{U}$  на момент утворення Землі, якщо вік Землі складає  $4 \cdot 10^9$  років? Періоди піврозпаду  $^{238}\text{U}$  та  $^{235}\text{U}$  дорівнюють, відповідно,  $T_1 = 4,51 \cdot 10^9$  років та  $T_2 = 0,713 \cdot 10^9$  років.

**Розв'язання.** Позначимо:  $N_1$  та  $N_2$  – кількості ядер ізотопів  $^{238}\text{U}$  та  $^{235}\text{U}$ , відповідно,  $k_1 = 0,9928$  та  $k_2 = 0,0072$  – вміст в урановій руді ізотопів  $^{238}\text{U}$  та  $^{235}\text{U}$  на даний момент часу. Будемо вважати, що в даний момент в урановій руді містяться лише ізономи  $^{238}\text{U}$  та  $^{235}\text{U}$ . Тоді

$$k_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2}, \quad k_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2}. \quad (2.5.1)$$

Знайдемо закон зміни з часом коефіцієнтів  $k_1$  та  $k_2$ . Використовуючи закон радіоактивного розпаду, для кількостей ядер запишемо:

$$N_1 = N_{10} \exp\left(-\frac{\ln 2}{T_1} t\right), \quad (2.5.2)$$

$$N_2 = N_{20} \exp\left(-\frac{\ln 2}{T_2} t\right). \quad (2.5.3)$$

де  $N_{10}$  та  $N_{20}$  – кількості ізотопів  $^{238}\text{U}$  та  $^{235}\text{U}$  в початковий момент часу. Розділимо (2.5.2) на (2.5.3):

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{N_{10}}{N_{20}} \exp\left\{-t \ln 2 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right\}. \quad (2.5.4)$$

Припустимо, що на момент утворення Землі не існувало інших ізотопів урану, крім тих, про які йдеться в прикладі (звичайно, це припущення не зовсім вірне, оскільки в невеликій кількості існували й інші ізотопи, наприклад,  $^{234}\text{U}$ , період піврозпаду якого є значно меншим за вік Землі). В такому разі для коефіцієнтів  $k_{10}$  та  $k_{20}$ , що характеризують початковий вміст ізотопів урану, отримаємо два рівняння:

$$\begin{cases} \frac{k_1}{k_2} = \frac{k_{10}}{k_{20}} \exp \left\{ -t \ln 2 \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right\} \\ k_{10} + k_{20} = 1 \end{cases} \quad (2.5.5)$$

Розв'язуючи систему (2.5.5), знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{k_2} \exp \left\{ t \ln 2 \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right\} &= \frac{k_{10}}{1 - k_{10}} \Rightarrow \\ k_{10} &= \frac{1}{1 + \frac{k_1}{k_2} \exp \left\{ t \ln 2 \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right\}}, k_{20} = 1 - k_{10}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Підставляючи числові значення у (2.5.6), знаходимо початковий вміст ізотопу  $^{238}\text{U}$ :

$$k_{10} = \frac{1}{1 + \frac{0,0072}{0,9928} \exp \left\{ \ln 2 \cdot 4 \cdot \left( \frac{1}{0,713} - \frac{1}{4,51} \right) \right\}} = 0,876$$

та ізотопу  $^{235}\text{U}$ :  $k_{20} = 0,124$ . Таким чином,  $4 \cdot 10^9$  років тому кількість  $^{235}\text{U}$  складала 12,4%, а  $^{238}\text{U}$  – 87,6%.

**Приклад 6.** Радіонуклід  $^{99}\text{Mo}$  з періодом піврозпаду 67 год. в результаті  $\beta$  – розпаду перетворюється в стабільний нуклід  $^{99}\text{Tc}$ . При цьому 75%  $\beta$  – перетворювань відбуваються через ізомерний стан  $^{99}\text{Tc}^m$ , період піврозпаду якого становить 6,04 год. Визначити відносну кількість стабільних ядер в препараті через 5,00 год., покладаючи, що в початковий момент часу препарат містив тільки радіонуклід  $^{99}\text{Mo}$ .

**Розв'язання.** Покладаємо, що в початковий момент часу препарат містив лише ядра  $^{99}\text{Mo}$  у кількості  $N_{10}$ . Позначимо  $\eta=0,75$  – частина ядер  $^{99}\text{Mo}$ , що перетворюються по каналу 1:  $^{99}\text{Mo} \xrightarrow{\lambda_1} ^{99}\text{Tc}^m \xrightarrow{\lambda_2} ^{99}\text{Tc}$ ;  $1-\eta=0,25$  – частина ядер, що перетворюються по каналу 2:  $^{99}\text{Mo} \xrightarrow{\lambda_1} ^{99}\text{Tc}$ , де  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  – сталі розпаду  $^{99}\text{Mo}$  та  $^{99}\text{Tc}^m$ , відповідно.

Знайдемо спочатку кількість стабільних ядер  $^{99}\text{Tc}$ , що виникають у першому каналі. Закони зміни кількості ядер  $^{99}\text{Mo}(N_1)$  та  $^{99}\text{Tc}^m(N_2)$  записуються так (див. приклад №3):

$$N_1 = \eta N_{10} e^{-\lambda_1 t}, \quad (2.6.1)$$

$$N_2 = \eta N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.6.2)$$

Для швидкості накопичення стабільного нукліду  $^{99}\text{Tc}$  з урахуванням (2.6.2) можемо записати рівняння:

$$\frac{dN_3^{(1)}}{dt} = \lambda_2 N_2 = \eta N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.6.3)$$

Інтегруючи рівняння (2.6.3), отримаємо:

$$N_3^{(1)}(t) = \eta N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ -\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \right\} + C. \quad (2.6.4)$$

Константу в (2.6.4) знаходимо з початкової умови  $N_3(0) = 0$ :

$$C = -\eta N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right\} = \eta N_{10}. \quad (2.6.5)$$

Остаточно, закон зміни кількості ядер  $^{99}\text{Tc}$  за першим каналом запишеться так:

$$N_3^{(1)}(t) = \eta N_{10} \left\{ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} - \frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right) + 1 \right\}. \quad (2.6.6)$$

Зміна кількості ядер  $^{99}\text{Tc}$  у другому каналі відбувається за законом (пропонуємо переконатись у цьому самостійно):

$$N_3^{(2)}(t) = N_{10} (1 - \eta) (1 - e^{-\lambda_1 t}). \quad (2.6.7)$$

Таким чином, відносна кількість стабільних ядер в препараті з часом змінюється наступним чином:

$$\frac{\sum N_3}{N_{10}} = \frac{N_3^{(1)}(t) + N_3^{(2)}(t)}{N_{10}} = 1 + \frac{\lambda_1(1-\eta) - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\eta\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}. \quad (2.6.8)$$

Врахувавши, що  $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ , (2.6.8) перепишемо наступним чином:

$$\frac{\sum N_3}{N_{10}} = 1 + \frac{T_2(1-\eta) - T_1}{T_1 - T_2} 2^{-t/T_1} + \frac{\eta T_2}{T_1 - T_2} 2^{-t/T_2}. \quad (2.6.9)$$

Підставимо дані з умови прикладу й отримаємо відносну кількість стабільних ядер, що накопичиться в препараті протягом 5 годин:

$$\frac{\sum N_3}{N_{10}} = 1 + \frac{6,04 \cdot 0,25 - 67}{60,96} 2^{-5/67} + \frac{0,75 \cdot 6,04}{60,96} 2^{-5/6,04} = 0,0217.$$

### 2.3. Запитання та відповіді

#### 1. Записати залежність сталої розпаду від часу.

Стала розпаду  $\lambda$  від часу не залежить. Це проявляється в тому, що різні моменти часу нічим не виділені один відносно іншого з точки зору ймовірності розпаду, який відбудеться. Ймовірність розпаду на протязі нескінченно малого інтервалу часу не залежить від конкретного моменту часу. Іншими словами, атомні ядра не «старіють», а характеризуються тільки середнім часом життя.

Примітка. При строгому аналізі задачі методами квантової електродинаміки впливає, що в початковий момент часу після створення радіоактивного ядра (при  $\Delta t \leq \hbar/mc^2$ , де  $m$  — маса нуклона) стала розпаду  $\lambda \approx 0$ . Справжній розпад з постійною величиною  $\lambda = \text{const}$  починається при  $t \gg \Delta t \approx 10^{-21}$  с. Оскільки період піврозпаду  $T \gg \Delta t$ , можна вважати, що  $\lambda = \text{const}$ .

#### 2. Чи завжди виконується закон радіоактивного розпаду?

Оскільки радіоактивний розпад має статистичний характер, закон  $N = N_0 e^{-\lambda t}$  буде виконуватись точно лише в тому випадку, коли кількість радіоактивних ядер дуже велика. При малих  $N$  спостерігатимуться відхилення від експоненційного закону. Статистичні відхилення від середніх значень характеризуються

дисперсією  $D = \langle (n - \bar{n})^2 \rangle = \bar{n}^2 - \bar{n}^2$ , де  $\bar{n}$  – середнє значення кількості зареєстрованих частинок. Вводяться також поняття стандартного відхилення (середньоквадратичної похибки)  $\delta = \sqrt{D}$  та відносної похибки  $\Delta = \frac{\delta}{\bar{n}}$ . Відносна похибка, виражена у відсотках, безпосередньо визначає точність вимірів.

Спонтанний розпад є характерним прикладом ергодичного випадкового процесу (процесу без «пам'яті»), який описується нормальним (гаусовим) законом розподілу. Для цього закону вищенаведені формули матимуть вигляд:  $D = \bar{n}$ ;  $\delta = \sqrt{\bar{n}}$ ;  $\Delta = 1/\sqrt{\bar{n}} = 1/\sqrt{N\lambda t}$ .

3. Як експериментально визначити період піврозпаду радіоактивного препарату?

Для визначення періоду піврозпаду або сталої розпаду біля препарату ставлять лічильник. Кількість відліків протягом рівних проміжків часу пропорційна до активності  $A = \lambda N$ . Після цього будують графік залежності  $\ln A$  як функцію часу. У випадку простого одиночного розпаду ця залежність матиме вигляд прямої:

$\ln\left(-\frac{dN}{dt}\right) = \ln(\lambda N_0) - \lambda t$ , а тангенс кута нахилу визначає сталу

розпаду. Пряму через експериментальні точки проводять за методом найменших квадратів, тобто так, щоб середньоквадратичне відхилення точок від прямої було мінімальним. Після проведення прямої слід переконатись, що стандартне відхилення  $\delta$  не перевищує  $\sqrt{\bar{n}}$  (див. попереднє питання). В протилежному випадку може виявитись, що зареєстроване явище більш складне, ніж простий розпад (при умові, що належним чином було враховано апаратні похибки та фоновий сигнал).

4. Підрахунок кількості сцинтиляцій показав, що в результаті розпаду  $1\text{ г }^{238}\text{U}$  виділяється приблизно  $1,21 \cdot 10^4$   $\alpha$ -частинок за 1 с. Якою є стала розпаду  $^{238}\text{U}$  ?



Реакція  $\alpha$  – розпаду ізотопу  $^{238}\text{U}$  має вигляд:  $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{234}_{90}\text{Th} + ^4_2\text{He}$ . В

1 г міститься 
$$N_0 = \frac{m}{M(^{238}\text{U})} N_A = \frac{1 \text{ г} \cdot 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}}{238,029 \text{ г/моль}} = 2,5 \cdot 10^{21}$$

атомів  $^{238}\text{U}$ . З закону радіоактивного розпаду виразимо сталу розпаду  $^{238}\text{U}$ :  $\lambda = \frac{1}{t} \ln \left( \frac{N_0}{N} \right)$ . Кількість ядер в урановій руді, що

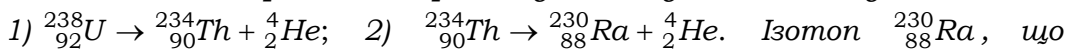
залишаться через час  $t$ , дорівнює:  $N = N_0 - N_\alpha$ , де  $N_\alpha$  – число зареєстрованих  $\alpha$  – частинок. Остаточна, стала розпаду може бути

розрахована з формули:  $\lambda = \frac{1}{t} \ln \left\{ \left( 1 - \frac{N_\alpha}{N_0} \right)^{-1} \right\}$ . Підставимо числові

значення та отримаємо:  $\lambda = 4,8 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$ . Відповідне значення періоду піврозпаду складатиме  $T = 4,57 \cdot 10^9$  років.

5. Визначте порядковий номер та атомну масу іонію, що утворюється з  $^{238}\text{U}$  в результаті двох  $\alpha$  – перетворень та двох  $\beta$  – перетворень. Ізотопом якого елементу є іоній?

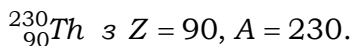
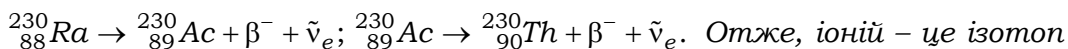
Дві послідовні реакції  $\alpha$  – розпаду ізотопу  $^{238}\text{U}$  записуються так:



утворюється при цьому, зазнає  $\beta$  – розпаду. Визначимо, який саме тип  $\beta$  – розпаду є енергетично вигідним в даному випадку. За допомогою формули (1.6.2) (Розділ 1, приклад 6) визначимо оптимальне значення зарядового числа для ізотопу з  $A = 230$ :

$$Z_{\text{стаб}} = \frac{230}{2 + 0,015 \cdot 230^{2/3}} \approx 90. \text{ Таким чином, нуклід } ^{230}_{88}\text{Ra} \text{ має}$$

надлишок нейтронів, тому зазнаватиме двох послідовних  $\beta^-$  – розпадів. Відповідні реакції запишуться так:



6. Пояснити якісно, чому не існує нейтронної радіоактивності, практично не спостерігається протонна радіоактивність і в той же час існує  $\alpha$  – радіоактивність.

Радіоактивністю називають затриманий розпад атомних ядер у випадку, коли такий розпад є енергетично вигідним. Нейтронної радіоактивності не існує, оскільки нейтрони не мають заряду та для них не існує кулонівського бар'єру. Якщо ядру енергетично вигідно випустити нейтрон, цей процес відбувається протягом короткого часу:  $t \sim 10^{-14}$  с. Мінімальний час затримки, при якому має сенс говорити про явище радіоактивності, дорівнює приблизно  $t_r \sim 10^{-9} - 10^{-10}$  с (такі часи є характерними для  $\beta$ -розпаду, обумовленого слабкою взаємодією). Якщо ядра мають надлишок протонів, то можлива як протонна радіоактивність, так і  $\beta^+$ -розпад. З іншого боку, протонний розпад дуже гальмується внаслідок наявності кулонівського бар'єру. Прозорість цього бар'єру для позитронів на багато порядків більша. Крім того, якщо ядро має надлишок протонів, для нього енергетично вигідніше випустити  $\alpha$ -частинку, ніж 2 протони та 2 нейтрони окремо (в цьому пропонуємо переконатись самостійно).

#### 7. Чим відрізняються природна та штучна радіоактивність?

Природна радіоактивність – це радіоактивність ядер, які існують за нормальних умов, а штучною називається радіоактивність нуклідів, синтезованих в лабораторних умовах. Тобто, фактично, сам процес розпаду нічим не відрізняється. Відмінність тільки в походженні самих ядер.

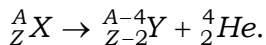
#### 8. Поясніть сутність радіовуглецевого аналізу.

Після загибелі організму кількість нукліда  $^{12}\text{C}$ , який накопичено на протязі усього часу життя організму, залишається сталим, тоді як половина ядер  $^{14}\text{C}$  розпадається за кожні  $\approx 5800$  років. Ядра  $^{14}\text{C}$  постійно утворюються в атмосфері за рахунок дії космічних променів і накопичуються тільки в живих організмах. Вважається, що потік цих променів є сталим на протязі останнього мільйону років. За зміною співвідношення між кількістю нуклідів  $^{12}\text{C}$  та  $^{14}\text{C}$  можна відносно точно визначити вік мертвого організму.

### 3. АЛЬФА-РОЗПАД ВАЖКИХ ЯДЕР

#### 3.1. Теоретичні відомості

Альфа-розпад – це спонтанний процес випускання ядром альфа-частинки, який відбувається згідно схеми:



Для того, щоб  $\alpha$  – розпад відбувся, необхідно, проте недостатньо, щоб енергія зв'язку материнського ядра  ${}^A_ZX$  перевищувала сумарну енергію зв'язку дочірнього ядра  ${}^{A-4}_{Z-2}Y$  та  $\alpha$  – частинки. В такому разі кінетична енергія  $\alpha$  – частинки становитиме (якщо материнське ядро знаходилося в стані спокою та нехтуючи малою кінетичною енергією ядра віддачі):

$$E_k(\alpha) = E_{\text{зв}}(Z-2, A-4) + E_{\text{зв}}(\alpha) - E_{\text{зв}}(Z, A).$$

Альфа-розпад відбувається тільки у важких ядер ( $Z \geq 82$ ) та у невеликої групи рідкоземельних елементів ( $A = 140 \div 160$ ). Всього існує більше двохсот  $\alpha$  – радіоактивних ізотопів.

Характерна особливість альфа-розпаду – дуже сильна залежність періоду піврозпаду  $T_{1/2}$  ядра від енергії вилітаючої  $\alpha$  – частинки  $E_\alpha$ .

Емпірично встановлений зв'язок між цими величинами описується законом Гейгера-Неттола:

$$\lg T_{1/2} = C + \frac{D}{\sqrt{E_\alpha}},$$

де  $C$  та  $D$  – константи, значення яких практично не залежить від масового числа  $A$  і слабо змінюються зі зміною зарядового числа  $Z$ .

Цей закон добре узгоджується з експериментальними результатами тільки для парно-парних ядер. Для непарно-парних та непарно-непарних ядер спостерігаються відхилення від закону Гейгера-Неттола, іноді дуже значні. В такому випадку говорять про неполегшений альфа-розпад.

Згідно сучасних уявлень, процес альфа-розпаду відбувається за рахунок тунелювання  $\alpha$  – частинок через кулонівський потенціал (теорія Гамова альфа-розпаду [6]). Для спрощення припускають, що  $\alpha$  – частинка до початку акту розпаду вже існує всередині материнського ядра, яке складається з дочірнього ядра та

$\alpha$  – частинки. Таким чином, кулонівську енергію взаємодії  $\alpha$  – частинки з ядром (без урахування впливу атомних електронів) можна апроксимувати модельною функцією:

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 = \text{const}, & r < R; \\ \frac{2(Z-2)e^2}{r}, & r > R, \end{cases}$$

де  $Z$  – заряд материнського ядра,  $R = R_0 A^{1/3}$  – радіус дочірнього ядра. Чим більшою буде енергія вибітої  $\alpha$  – частинки, тим меншим буде її шлях тунелювання, а отже, період піврозпаду.

При наявності атомних електронів відбувається часткове екранування кулонівського поля ядра, що рівноцінно зменшенню ширини потенціального бар'єру. В цьому випадку кулонівська енергія взаємодії має вигляд

$$U(r) = \frac{2(Z-2)e^2}{r} e^{-r/r_0}, \quad r > R,$$

де  $r_0$  – радіус електронного екранування.

Якщо  $\alpha$  – частинка, що вибітає з ядра, має ненульовий орбітальний момент  $|\vec{P}_L| = \hbar l(l+1) \neq 0$ , то для неї існує додатковий відцентровий бар'єр:

$$U_{цб} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_\alpha^* R^2},$$

який збільшує величину потенціального бар'єра, зменшуючи тим самим сталу розпаду  $\lambda$ . В останній формулі  $m_\alpha^* = \frac{m_\alpha M}{m_\alpha + M}$  – зведена маса  $\alpha$  – частинки,  $M$  – маса дочірнього ядра.

### 3.2. Приклади розв'язку задач

**Приклад 1.** Оцінити висоту кулонівського бар'єра для  $\alpha$  – частинок, що випускаються ядрами  $^{222}_{86}\text{Rn}$  (заокругленням верхівки потенціального бар'єра знехтувати). Якою в цих ядрах буде ширина бар'єра (тунельна відстань) для  $\alpha$  – частинок з енергією 5,5 MeV? (Рис. 3.1).

**Розв'язання.** Для  $\alpha$ -частинки, що знаходиться всередині ядра, існує потенціальний бар'єр в області  $r > R$  ( $R$  – радіус ядра), який вона має подолати шляхом тунелювання (підбар'єрне проходження). Цей бар'єр зумовлений дією кулонівського поля протонів. В межах ядра  $r \leq R$  рух і стан  $\alpha$ -частинки визначається дією сумарного потенціалу, який складається з кулонівського потенціалу, що формується розподіленими протонами, і потенціалу сильної взаємодії, який є результатом усереднення по об'єму ядра потенціалу Юкави, зумовленого обміном  $\pi$ -мезонами з масою  $m_\pi$  між сусідніми нуклонами:

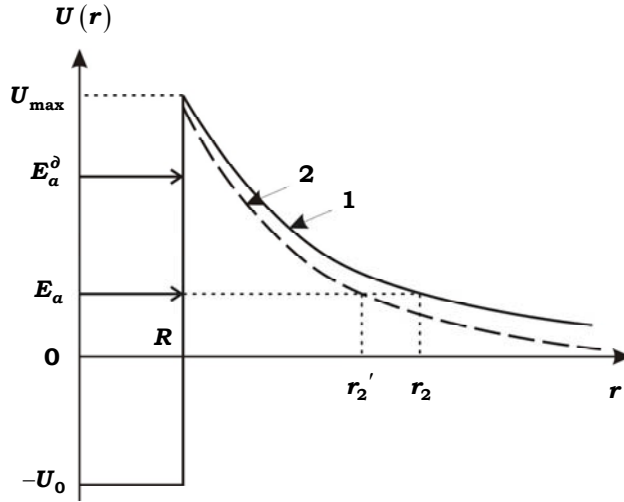
$$U_\pi(r) = -\frac{1,45 \cdot \hbar c}{r} \exp\left\{-\frac{m_\pi c r}{\hbar}\right\} \quad (3.1.1)$$

Сумарний потенціал в області  $r \leq R$  можна замінити моделлю прямокутної потенціальної ями. На відстані, більшій за радіус дії ядерних сил, залишається лише кулонівська взаємодія. Таким чином, потенціал  $U(r)$  можна апроксимувати модельною функцією (Рис. 3.1):

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 = \text{const}, & r < R; \\ \frac{zZe^2}{r}, & r > R, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

де  $z, Z$  – заряд  $\alpha$ -частинки та дочірнього ядра відповідно,  $R$  – радіус дочірнього ядра,  $R \cong 1,3 \cdot A^{1/3}$  фм,  $A$  – масове число дочірнього ядра,  $e_0$  – електрична стала. Якщо знехтувати заокругленням верхівки, висоту кулонівського бар'єра в ядрі  ${}^{218}_{84}\text{Po}$ , яке утворюється після  $\alpha$ -розпаду ядра  ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ , можемо оцінити за допомогою формули:

$$U_{\max} = \frac{zZe^2}{R} = \frac{2 \cdot 84 \cdot 4,8^2 \cdot 10^{-20}}{1,3 \cdot 218^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ см}} = 4,95 \cdot 10^{-5} \text{ ерг} \approx 31 \text{ Мев}.$$



**Рис. 3.1. 1 – кулонівський потенціальний бар'єр для  $\alpha$ -частинки, що знаходиться всередині ядра.  $-U_0$  – потенціал всередині ядра,  $E_\alpha$  – енергія  $\alpha$ -частинки,  $r_2$  – координата точки виходу з бар'єра 1; 2 – екранований кулонівський потенціал,  $r_2'$  – координата точки виходу з бар'єра 2;  $E_\alpha^d$  – енергія довгопробіжної  $\alpha$ -частинки**

Ширина бар'єра для  $\alpha$ -частинки, що вилітає з ядра, визначається її енергією. Так, координата виходу з тунельного бар'єра визначається з умови:

$$E_\alpha = U(r) \Rightarrow r_2 = \frac{zZe^2}{E_\alpha}. \quad (3.1.3)$$

З (3.1.3) знаходимо

$$r_2 = \frac{2 \cdot 84 \cdot 4,8^2 \cdot 10^{-20} \text{ CGSE}^2}{5,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг}} \approx 4,4 \cdot 10^{-12} \text{ см} = 44 \text{ фм.}$$

Радіус дочірнього ядра  $^{218}_{84}\text{Po}$   $R = 1,3 \cdot 218^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ см} = 7,8 \text{ фм}$ . Таким чином, тунельна відстань для  $\alpha$ -частинок з енергією 5,5 MeV становить  $\Delta r = r_2 - R = 44 - 7,8 = 36,2 \text{ фм}$ .

Врахуємо тепер, що електрони, які рухаються між ядрами, екранують кулонівський потенціал [7]:

$$U(r) = \frac{zZe^2}{r} e^{-r/r_0}, \quad (3.1.4)$$

де  $r_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon(0)E_F}{3\pi n_0 e^2}}$  – довжина екранування для виродженого електронного Фермі-газу,  $E_F$  – енергія Фермі електронів,  $n_0$  – їх концентрація,  $\varepsilon(0)$  – діелектрична проникність середовища.

В нерелятивістському випадку енергія Фермі електронів визначається згідно формули [7]:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2)^{2/3} n_0^{2/3}. \quad (3.1.5)$$

Концентрація електронів в речовині, що складається з ізотопів полонію  $^{218}_{84}\text{Po}$ , приблизно дорівнює  $n_0 \approx 3 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ . В такому випадку енергія Фермі становитиме

$$E_F = \frac{1,05^2 \cdot 10^{-54}}{2 \cdot 0,911 \cdot 10^{-27}} (3\pi^2)^{2/3} 10^{15} \approx 6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг} = 3,75 \text{ еВ},$$

а довжина екранування

$$r_0 = \sqrt{\frac{3 \cdot 6 \cdot 10^{-12}}{3\pi \cdot 10^{23} \cdot 4,8^2 \cdot 10^{-20}}} = 7,4 \cdot 10^{-9} \text{ см},$$

якщо прийняти, що діелектрична проникність середовища  $\varepsilon(0) \approx 2$ .

Отже, врахування екранування кулонівського потенціалу ядра електронами призведе до незначного зменшення шляху тунелювання для  $\alpha$  – частинок:

$$r_2' = \frac{zZe^2}{E_\alpha} e^{-r_2'/r_0}. \quad (3.1.6)$$

Враховуючи, що  $r_2' \ll r_0$ , можемо розкласти експоненту в (3.1.6) та спростити останній вираз:

$$r_2' \approx \frac{r_0}{1 + r_0 \frac{E_\alpha}{zZe^2}}. \quad (3.1.7)$$

Підставляючи числові дані у (3.1.7), отримаємо значення  $r_2' \approx 43,97 \text{ фм}$ , а отже, шлях тунелювання  $\Delta r = r_2' - R = 36,17 \text{ фм}$ .

Такі оцінки відповідають екрануванню за рахунок, наприклад, електронів провідності в металах. Більш ефективним є екранування за рахунок власних електронів атома, для яких довжина екранування згідно моделі Томаса-Фермі виражається величиною  $r_0 = 0,885 \frac{a}{Z^{1/3}}$ , де  $a \approx 0,5 \cdot 10^{-8}$  см – перший борівський радіус,  $Z$  –

заряд ядра. За цією моделлю для того ж ядра  $^{218}_{84}\text{Po}$  маємо  $r_0 \approx 10^{-9}$  см,  $r_2' \approx 43,8$  фм.

Набагато більшим буде ефект екранування кулонівського потенціалу ядер мюонами, які захоплені на орбіту атома, під час пропускання через речовину повільних від'ємних  $\mu$ -мезонів. При цьому будуть утворюватись мезоатоми (мезон захоплюється атомом на борівську орбіту замість електрона), в яких  $\mu$ -мезони рухатимуться по периферії ядра. В такому випадку значним чином «зрізується» найбільш широка частина кулонівського потенціального бар'єра, внаслідок чого час життя  $\alpha$ -радіоактивних ядер може суттєво зменшуватись (мюонний каталіз) [13].

Слід зауважити, що на практиці такий метод екранування поля ядра може бути застосований тільки для легких ядер (наприклад, дейтерію), оскільки неможливо одночасно захопити  $Z \gg 1$  мюонів важким ядром.

**Приклад 2.** Ядра  $^{210}\text{Po}$  випускають  $\alpha$ -частинки з кінетичною енергією  $E_\alpha = 5,3$  МеВ, при цьому практично всі дочірні ядра опиняються безпосередньо в основному стані. Знайти повну енергію, що вивільнюється під час одного акту розпаду. Визначити початкову активність препарату  $^{210}\text{Po}$ , якщо за час, що дорівнює його періоду піврозпаду, препарат виділив 2,2 кДж тепла.

**Розв'язання.** Запишемо реакцію  $\alpha$ -розпаду ядра  $^{210}\text{Po}$  :



Повна енергія, що звільняється у такому процесі, дорівнює сумі кінетичних енергій дочірнього ядра  $^{206}\text{Pb}$  та  $\alpha$ -частинки. Позначимо:  $p_2, p_\alpha$  – імпульси дочірнього ядра та  $\alpha$ -частинки,  $m_1, m_2, m_\alpha$  – маси материнського ядра  $^{210}\text{Po}$ , дочірнього ядра  $^{206}\text{Pb}$



та  $\alpha$  – частинки, відповідно. У випадку, коли материнське ядро знаходиться у спокої, закон збереження імпульсу для реакції (3.2.1) записується так:

$$0 = \vec{p}_2 + \vec{p}_\alpha \Rightarrow p_2 = p_\alpha \quad (3.2.2)$$

Дочірнє ядро отримує кінетичну енергію за рахунок віддачі:

$$E_{k2} = \frac{p_2^2}{2m_2}. \quad (3.2.3)$$

Враховуючи (3.2.2), з (3.2.3) знаходимо кінетичну енергію ядра  $^{206}\text{Pb}$ :

$$E_{k2} = \frac{p_\alpha^2}{2m_2} = \frac{m_\alpha}{m_2} E_\alpha. \quad (3.2.4)$$

Таким чином, енергетичний вихід реакції (3.2.1) становитиме:

$$Q_1 = E_{k2} + E_\alpha = \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_2}\right) E_\alpha. \quad (3.2.5)$$

Згідно закону радіоактивного розпаду, активність препарату  $^{210}\text{Po}$  з часом змінюється так:

$$A = A_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}, \quad (3.2.6)$$

де  $A_0$  – початкова активність препарату,  $T_{1/2}$  – період піврозпаду  $^{210}\text{Po}$ ,  $T = 138$  діб. Через час, що дорівнює періоду піврозпаду, активність становитиме  $A = \frac{A_0}{2}$ . Кількість ядер, що розпадаються протягом цього часу,

$$\Delta N = N_0 - N = \frac{N_0}{2}. \quad (3.2.7)$$

Повна енергія, що виділяється при цьому:

$$Q = \Delta N \cdot Q_1 = Q_1 \frac{N_0}{2}. \quad (3.2.8)$$

З (3.2.8), з урахуванням (3.2.5), знайдемо початкову активність препарату  $^{210}\text{Po}$ :

$$A_0 = \lambda N_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{2Q}{Q_1} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{2Q}{\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_2}\right) E_\alpha}. \quad (3.2.9)$$

Масу ядра в атомних одиницях маси можна виразити через масове число та дефект мас:  $m_{\text{я}} = A + \Delta(Z, A)$ . Внаслідок того, що величина  $\Delta(Z, A)$  є малою порівняно з масовим числом, при розрахунках нею іноді нехтують. Якщо врахувати дефекти мас  $\Delta(2, 4) = 0,002604 \text{ а.о.м.}$ ,  $\Delta(82, 206) = -0,02554 \text{ а.о.м.}$ , точне значення маси  $\alpha$ -частинки та ядра  $^{206}\text{Pb}$  становитиме:  $m_{\alpha} = 4,002604 \text{ а.о.м.}$ ,  $m_{\text{Pb}} = 205,97446 \text{ а.о.м.}$ , відповідно. В такому випадку відношення мас  $\frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Pb}}} = \frac{4,002604}{205,97446} \approx 1,943 \cdot 10^{-2}$ , тоді як відношення масових чисел відповідних ядер становить  $\frac{A_{\alpha}}{A_{\text{Pb}}} = \frac{4}{206} \approx 1,942 \cdot 10^{-2}$ . Як бачимо, похибка є зовсім несуттєвою, тому надалі при подібних розрахунках замість маси ядра будемо для спрощення використовувати значення його масового числа.

Підставимо у (3.2.5) та (3.2.9) дані з умови та знайдемо повну енергію, що виділяється під час одного акту розпаду:

$$Q_1 = \left(1 + \frac{4}{206}\right) \cdot 5,3 = 5,4 \text{ MeV}, \quad (3.2.10)$$

та початкову активність препарату  $^{210}\text{Po}$ :

$$A_0 = \frac{\ln 2}{138 \cdot 24 \cdot 3600} \frac{2 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{5,403 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,96 \cdot 10^8 \text{ Бк} = 8 \text{ мКі.}$$

**Приклад 3.** Визначити кінетичні енергії  $\alpha$ -частинок  $E_{\alpha}$ , що утворюються під час розпаду ядра  $^{212}\text{Bi}$  на збуджені рівні ядра  $^{208}\text{Tl}$  з енергіями  $0,49 \text{ MeV}$  та  $0,61 \text{ MeV}$  (Рис. 3.2). Енергія зв'язку  $E_{\text{зв}}(Z, A)$  ядра  $^{212}\text{Bi}$  –  $1654,32 \text{ MeV}$ , ядра  $^{208}\text{Tl}$  –  $1632,23 \text{ MeV}$  та  $\alpha$ -частинки –  $28,3 \text{ MeV}$ .

**Розв'язання.** Енергія  $\alpha$ -розпаду з основного стану материнського ядра до основного стану дочірнього ядра визначається з виразу:

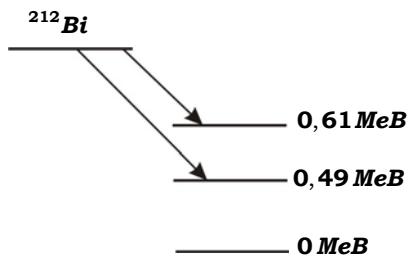
$$Q_0 = (m(Z, A) - m(Z - 2, A - 4) - m_{\alpha}) c^2 = \\ = E_{\text{зв}}(Z - 2, A - 4) + E_{\text{зв}}(2, 4) - E_{\text{зв}}(Z, A), \quad (3.3.1)$$

де  $m(Z, A)$  – маса материнського ядра,  $m(Z - 2, A - 4)$  – маса дочірнього ядра,  $m_{\alpha}$  – маса  $\alpha$ -частинки,

$E_{38}(Z, A), E_{38}(Z - 2, A - 4), E_{38}(2, 4)$  – відповідні енергії зв'язку. Якщо  $\alpha$  – розпад відбувається на збуджені рівні дочірнього ядра, енергія розпаду визначається співвідношенням:

$$Q = Q_0 - E^*, \quad (3.3.2)$$

де  $E^*$  – енергія збудження дочірнього ядра.



**Рис. 3.2. Схема  $\alpha$  – розпаду ядра  $^{212}\text{Bi}$  на збуджені енергетичні рівні ядра  $^{208}\text{Tl}$ .**

Енергія  $Q$  виділяється у вигляді кінетичної енергії продуктів розпаду: дочірнього ядра та  $\alpha$  – частинки:

$$Q = E_{\alpha} + E_{\text{доч}}. \quad (3.3.3)$$

Враховуючи, що  $p_{\alpha} = p_{\text{доч}}$ , де  $p_{\text{доч}}$  – імпульс дочірнього ядра, отримаємо співвідношення між кінетичними енергіями продуктів розпаду:

$$E_{\text{доч}} = \frac{m_{\alpha}}{m(Z - 2, A - 4)} E_{\alpha}. \quad (3.3.4)$$

Приймаючи до уваги (3.3.2), (3.3.3) та (3.3.4), знаходимо енергію  $\alpha$  – частинки:

$$Q_0 - E^* = E_{\alpha} \left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{m(Z - 2, A - 4)} \right) \Rightarrow$$

$$E_{\alpha} = (Q_0 - E^*) \frac{m(Z - 2, A - 4)}{m_{\alpha} + m(Z - 2, A - 4)}. \quad (3.3.5)$$

Підставляючи параметри задачі, з (3.3.1) знаходимо енергію  $Q_0$  реакції  $\alpha$  – розпаду ядра  $^{212}\text{Bi}$ :

$$Q_0 = 1632,23 + 28,3 - 1654,32 = 6,21 \text{ MeV}.$$

Кінетична енергія  $\alpha$  – частинок, що випускаються під час розпаду ядра  $^{212}\text{Bi}$  на перший збуджений рівень ядра  $^{208}\text{Tl}$  (0,49 MeV) з (3.3.5):

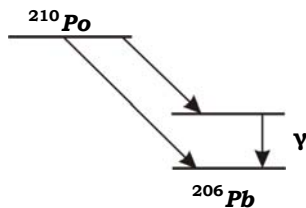
$$E_{\alpha 1} = (6,21 - 0,49) \frac{208}{212} = 5,61 \text{ MeV},$$

Під час розпаду на другий збуджений рівень (0,61 MeV) енергія  $\alpha$  – частинки дорівнюватиме:

$$E_{\alpha 2} = (6,21 - 0,61) \frac{208}{212} = 5,49 \text{ MeV}.$$

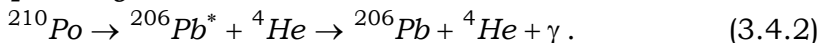
**Приклад 4.** Розпад ядер  $^{210}\text{Po}$  відбувається з основного стану й супроводжується випусканням двох груп  $\alpha$  – частинок: основної з енергією  $E_{\alpha} = 5,3 \text{ MeV}$  та слабкої (за інтенсивністю) з енергією  $E'_{\alpha} = 4,5 \text{ MeV}$ . Знайти енергію  $\alpha$  – розпаду цих ядер та енергію  $\gamma$  – квантів, що випромінюються дочірніми ядрами.

**Розв’язання.** Запишемо реакцію  $\alpha$  – розпаду ядра  $^{210}\text{Po}$ , при якому випускаються  $\alpha$  – частинки основної групи:



**Рис. 3.3.** Схема  $\alpha$  – розпаду ядра  $^{210}\text{Po}$ .

Очевидно, що у випадку випускання  $\alpha$  – частинок слабкої групи, дочірнє ядро  $^{206}\text{Pb}$  утворюється в збудженому стані. Зняття збудження ядра  $^{206}\text{Pb}$  відбувається шляхом випромінювання  $\gamma$  – кванта. Реакція розпаду за цим каналом матиме вигляд:



Схему розпаду ядер  $^{210}\text{Po}$  за двома каналами зображено на Рис. 3.3. Задачу будемо розраховувати окремо для кожної групи  $\alpha$  – частинок. Позначимо:  $p'_{\alpha}$  – імпульс  $\alpha$  – частинки слабкої групи,

$p_\gamma$  - імпульс  $\gamma$ -кванта,  $m_1, m_2, m_\alpha$  - маси материнського ядра  $^{210}\text{Po}$ , дочірнього ядра  $^{206}\text{Pb}$  та  $\alpha$ -частинки, відповідно. У випадку основної групи  $\alpha$ -частинок енергію реакції (3.4.1) запишемо так:

$$Q = (m_1 - m_2 - m_\alpha)c^2 = E_\alpha + E_{k2}. \quad (3.4.3)$$

Скористаємось розв'язком (3.2.5) прикладу №2:

$$Q = E_\alpha \left( 1 + \frac{m_\alpha}{m_2} \right) = 5,3 \left( 1 + \frac{4}{206} \right) \approx 5,4 \text{ MeV}. \quad (3.4.4)$$

Це і є енергія реакції  $\alpha$ -розпаду ядер  $^{210}\text{Po}$ . Частина, яку складає кінетична енергія дочірнього ядра

$$\frac{E_2}{Q} = \frac{\frac{m_\alpha}{m_2} E_\alpha}{\left( 1 + \frac{m_\alpha}{m_2} \right) E_\alpha} = \frac{m_\alpha}{m_2 + m_\alpha} = \frac{4}{210} \approx 0,02 \text{ або } 2\%. \quad (3.4.5)$$

Розрахуємо тепер енергію  $\gamma$ -квантів, що випромінюються дочірніми ядрами  $^{206}\text{Pb}$ . Закон збереження енергії для реакції (3.4.2) матиме вигляд:

$$Q = (m_1 - m_2 - m_\alpha)c^2 = E'_\alpha + E'_{k2} + E_\gamma. \quad (3.4.6)$$

Закон збереження імпульсу для реакції (3.4.2) записується так:

$$0 = \vec{p}'_2 + \vec{p}'_\alpha + \vec{p}_\gamma. \quad (3.4.7 \text{ а})$$

Імпульс  $\gamma$ -кванта є набагато меншим за імпульс ядер-продуктів реакції (3.4.2). Доведемо це, зробивши деякі оцінки. Імпульс  $\gamma$ -кванта

з енергією 1 MeV:  $p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{1,6 \cdot 10^{-13}}{3 \cdot 10^8} \approx 5,3 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$ . Імпульс

$\alpha$ -частинки з енергією 5 MeV  $p_\alpha = \sqrt{2m_\alpha E_\alpha} \approx 1 \cdot 10^{-19} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$  та

ядра  $^{206}\text{Pb}$  з енергією  $5,1 \cdot 0,02 = 0,1 \text{ MeV}$

$p_{Pb} = \sqrt{2m_{Pb} E_{Pb}} \approx 1 \cdot 10^{-19} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$ . Як бачимо, у рівнянні (3.4.7а) можна знехтувати імпульсом  $\gamma$ -кванта, тобто

$$0 \approx \vec{p}'_2 + \vec{p}'_\alpha \Rightarrow p'_2 = p'_\alpha = p. \quad (3.4.7 \text{ б})$$

Враховуючи (3.4.7 б), з рівняння (3.4.6) знайдемо енергію  $\gamma$ -кванта:

$$E_{\gamma} = Q - E'_{\alpha} - E'_{k2} = Q - E'_{\alpha} \left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{m_2} \right). \quad (3.4.8)$$

Підставляючи параметри задачі та числове значення (3.4.4) у (3.4.8), знаходимо енергію  $\gamma$  – кванта:

$$E_{\gamma} = 5,4 - 4,5 \left( 1 + \frac{4}{206} \right) = 0,81 \text{ MeV}.$$

**Приклад 5.** Під час розпаду ядер  $^{212}\text{Po}$  випускаються чотири групи  $\alpha$  – частинок: основна з енергією 8,78 MeV та довгопробіжні з енергіями 9,492; 10,422 та 10,542 MeV. Розрахувати та побудувати схему рівнів ядра  $^{212}\text{Po}$ , якщо відомо, що дочірні ядра в усіх випадках опиняються безпосередньо в основному стані.

**Розв’язання.** Реакція, за якою відбувається  $\alpha$  – розпад ядер  $^{212}\text{Po}$ , записується так:

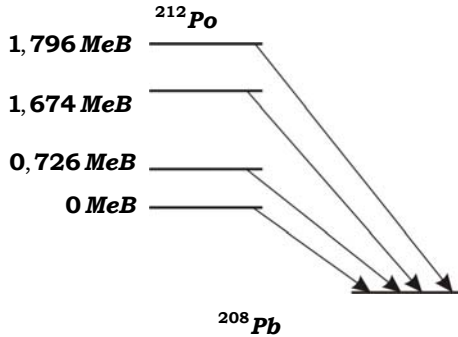


причому материнські ядра  $^{208}\text{Po}^*$  знаходяться у збуджених станах. Позначимо:  $p_{2i}$ ,  $p_{\alpha i}$  – імпульси дочірнього ядра та  $\alpha$  – частинки відповідної групи,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_{\alpha}$  – маси материнського ядра  $^{212}\text{Po}$ , дочірнього ядра  $^{208}\text{Pb}$  та  $\alpha$  – частинки відповідно.

Закон збереження енергії для реакції (3.5.1) матиме вигляд:

$$(m_1 - m_2 - m_{\alpha})c^2 + E_i^* = Q + E_i^* = E_{2i} + E_{\alpha i}, \quad (3.5.2)$$

де  $Q$  – енергія  $\alpha$  – розпаду ядер  $^{212}\text{Po}$ ,  $E_i^*$  – енергія збудження ядра  $^{208}\text{Po}^*$ ,  $E_{2i}$  та  $E_{\alpha i}$  – кінетичні енергії дочірнього ядра та альфа-частинки відповідно. При умові, що материнське ядро знаходилося у спокої, закон збереження імпульсу матиме вигляд:



**Рис. 3.4. Схема  $\alpha$  - розпаду зі збуджених станів ядра  $^{212}\text{Po}$  до основного стану ядра  $^{208}\text{Pb}$ .**

$$0 = \vec{p}_{2i} + \vec{p}_{\alpha i} \Rightarrow p_{2i} = p_{\alpha i}. \quad (3.5.3)$$

Отже, рівняння (3.5.2) можемо переписати наступним чином:

$$Q + E_i^* = E_{\alpha i} \left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{m_2} \right). \quad (3.5.4)$$

З (3.5.4) виражаємо енергію збудження материнського ядра  $E_i^*$ :

$$E_i^* = E_{\alpha i} \left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{m_2} \right) - Q. \quad (3.5.5)$$

Енергетичні рівні ядра  $^{212}\text{Po}$  знайдемо з (3.5.5):

$$E_i^* - E_1 = (E_{\alpha i} - E_{\alpha 1}) \left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{m_2} \right). \quad (3.5.6)$$

Зручно покласти, що енергія першого енергетичного рівня  $E_1 = 0$  (для основної групи  $\alpha$ -частинок). Підставляючи у (3.5.6) енергію довгопробіжних  $\alpha$ -частинок  $E_{\alpha i}$  та енергію основної групи  $E_{\alpha 1}$ , знаходимо положення енергетичних рівнів материнського ядра:

$$E_2^* = 0,726 \text{ MeV};$$

$$E_3^* = 1,674 \text{ MeV};$$

$$E_4^* = 1,796 \text{ MeV}.$$

Енергія реакції (3.5.1) становитиме  $Q = E_{\alpha 1} \left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{m_2} \right) = 8,95 \text{ MeV}$ .

Схему енергетичних рівнів ядра  $^{212}\text{Po}$  зображено на Рис. 3.4.

**Приклад 6.** Оцінити відношення висоти відцентрового бар'єра до висоти кулонівського бар'єра для  $\alpha$ -частинок, що вилітають з ядра  $^{230}_{90}\text{Th}$ .

Розв'язання: Якщо  $\alpha$ -частинка вилітає з ядра, маючи при цьому ненульовий орбітальний момент імпульсу  $|\vec{P}_L| = \hbar \sqrt{l(l+1)}$ ,  $l \neq 0$ , то на неї діятиме відцентрова сила. Якщо врахувати, що  $\alpha$ -розпад є підбар'єрним процесом, відцентрова сила сприятиме зростанню потенціального бар'єра та збільшуватиме його ширину, що призводить до збільшення періоду піврозпаду  $T$   $\alpha$ -радіоактивного ядра. Таким чином, потенціал  $U(r)$  (див. приклад 1) матиме вигляд:

$$U(r) = U_{\text{кул}} + U_{\text{цб}} = \frac{2(Z-2)e^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_{\alpha}^* r^2}, \quad (3.6.1)$$

де  $Z$  — заряд материнського ядра,  $m_{\alpha}^* = \frac{m_{\alpha} M}{m_{\alpha} + M}$  — зведена маса  $\alpha$ -частинки,  $M$  — маса дочірнього ядра.

Оцінимо значення моменту імпульсу для  $\alpha$ -частинки в ядрі. Згідно співвідношенню невизначеностей,  $\Delta r \Delta x \approx \hbar$ . Приймаючи  $\Delta r \approx r = m_{\alpha} v$ ,  $\Delta x \approx R$ , де  $R$  — радіус ядра, знайдемо  $m_{\alpha} v R = |\vec{P}_L| \approx \hbar$ , так що орбітальне квантове число  $l$  може приймати значення, не більше за кілька одиниць, наприклад,  $l < 4$ . Максимальне значення відцентрового потенціального бар'єру для ядра  $^{230}_{90}\text{Th}$  становитиме:

$$U_{\text{цб}} = \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{2m_{\alpha}^* c^2 R^2} < \frac{(1,05 \cdot 3 \cdot 10^{-17})^2 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3,93 \cdot 931,5 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \cdot \left( 1,22 \cdot 230^{1/3} \cdot 10^{-13} \right)^2} \approx \\ \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ ерг} \approx 1,88 \text{ MeV}.$$



Знайдемо величину кулонівського потенціального бар'єру для  $\alpha$  – частинки в ядрі  ${}^{230}_{90}\text{Th}$  :

$$U_{\text{кул}} = \frac{2(Z-2)e^2}{R} = \frac{2 \cdot 88 \cdot 4,8^2 \cdot 10^{-20}}{1,22 \cdot 226^{1/3} \cdot 10^{-13}} = 5,45 \cdot 10^{-5} \text{ ерг} \approx 34 \text{ МеВ}.$$

Таким чином, висота відцентрового бар'єра майже у 20 разів менша за висоту кулонівського бар'єра:  $\frac{U_{\text{цб}}}{U_{\text{кул}}} = 0,055$ . Крім того,

відцентрова енергія спадає з відстанню швидше (за законом  $\frac{1}{r^2}$ ), ніж кулонівська, тому її наявність мало змінює форму потенціальної кривої. Відцентровий бар'єр, як правило, лише незначно збільшує період піврозпаду радіоактивних ядер.

### 3.3. Запитання та відповіді

1. В чому проявляється тонка структура  $\alpha$  – розпаду?

Переходи з основного чи збудженого стану материнського ядра до основного чи одного зі збуджених станів дочірнього ядра утворюють тонку структуру  $\alpha$  – розпаду. Спектр  $\alpha$  – частинок, що виникають під час розпаду материнського ядра, являє собою ряд моноенергетичних ліній. Відносний розкид енергії в кожній групі  $\alpha$  – частинок можна оцінити наступним чином. Співвідношення між часом перебування ядра в збудженому стані та невизначеністю енергії  $\alpha$  – частинки є таким:  $\tau \Delta E \approx \hbar$ , де  $\tau = 1/\lambda$  – середній час життя радіоактивного ядра. Приймаючи значення  $\tau \approx 10^{-4}$  с (для короткоживучих ядер, що випускають довгопробіжні частинки), знайдемо для  $\Delta E$  наступну оцінку:  $\Delta E \approx 10^{-11}$  еВ. Тоді відносна невизначеність енергії  $\alpha$  – частинки становитиме  $\Delta E/E \approx 10^{-17}$ .

Найбільш точні дані про енергію  $\alpha$  – частинок можна отримати за допомогою магнітного спектрографа, наприклад, спектрографа з фокусуванням поперечним однорідним магнітним полем на  $180^\circ$ . Складнощі такого методу пов'язані з необхідністю отримання сильних однорідних магнітних полів (близько 43000 Е) на великій площі.

Аналіз тонкої структури спектрів  $\alpha$ -частинок є важливим методом дослідження енергетичної структури рівнів важких радіоактивних ядер.

2. Які пристрої використовують для вимірювання енергії альфа-частинок?

Загалом, діапазон зміни кінетичної енергії  $\alpha$ -частинок знаходиться в межах від 1,83 МеВ для ізотопу  $^{144}\text{Nd}$  до 11,65 МеВ для ізомеру  $^{212}\text{Po}^m$ .

Для визначення енергії та інтенсивності потоку  $\alpha$ -частинок, які випромінюються  $\alpha$ -активними ядрами, використовують спектрометри, а також газорозрядні та напівпровідникові детектори частинок. Поверхнево-бар'єрні кремнієві напівпровідникові детектори дозволяють отримати значення енергії  $\alpha$ -частинок з точністю до 12 кеВ (для частинок з енергією  $E_\alpha = 6 \text{ МеВ}$ ) при світлосилі  $\sim 0,1\%$ .

В якості прикладу також можна навести метод визначення енергії  $\alpha$ -частинок за їх пробігом у речовині (зазвичай, на практиці вимірюють пробіг у повітрі) [Дяченко, Горчинський, лаб по ядерці].

3. Теорія Гамова  $\alpha$ -розпаду не дозволяє пояснити деякі особливості цього процесу. Так, для непарних ядер та переходів до збуджених станів дочірніх ядер періоди піврозпаду, розраховані за методом Гамова, відрізняються на два-три порядки від експериментальних значень. Які методи опису  $\alpha$ -розпаду використовують для отримання точних результатів?

Сучасний підхід до опису альфа-розпаду ґрунтується на методах, взятих з теорії ядерних реакцій. Ширина рівня ядра  $\Gamma_\alpha$  відносно до  $\alpha$ -розпаду пов'язана з періодом піврозпаду наступним співвідношенням:  $\Gamma_\alpha = \hbar \ln 2 / T_{1/2}$ . Для  $\alpha$ -розпаду за каналом С ширина рівня

$$\Gamma_{\alpha C} = 2\gamma_C^2 (R_C) P_C(R_C),$$

де  $2\gamma_C^2 (R_C)$  - приведена ширина, яка визначається ступенем перекриття хвильових функцій початкового та кінцевого станів ядер. Ця величина характеризує імовірність появи  $\alpha$ -частинки на поверхні ядра (на радіусі каналу  $R_C$ ).  $P_C(R_C)$  - проникність

ефективного бар'єру  $V$ , утвореного ядерним, кулонівським та центробіжним потенціалами:

$$V = V_{\text{яд}} + \frac{Ze^2}{r} - \frac{\hbar^2}{2m_{\alpha}^*} \frac{l(l+1)}{r^2}.$$

В останній формулі  $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$  — орбітальний момент  $\alpha$  — частинки,  $m_{\alpha}^* = \frac{m_{\alpha}M}{m_{\alpha} + M}$  — її зведена маса,  $M$  — маса ядра.

Метою більшості досліджень альфа-розпаду є вимірювання приведених ширин та порівняння їх з обрахованими на основі різних теоретичних уявлень про ядро. Абсолютні значення ширин є особливо чутливими до величини радіусу каналу  $R_C$ . Найбільш точні результати отримують під час аналізу відношення ширин для переходів на різні рівні одного дочірнього ядра  $\Gamma_{\alpha C1}/\Gamma_{\alpha C2}$ .

Аналіз приведених ширин дозволив зробити висновок, що  $\alpha$  — частинки з деякою скінченою імовірністю виникають на поверхні ядра перед вилітанням. Крім того, в поверхневому шарі важких ядер можуть існувати  $\alpha$  — частинкові групи нуклонів —  $\alpha$  — кластери. Утворення  $\alpha$  — частинки є багато більш імовірним, якщо вона утворюється з нейтронних та протонних пар, порівняно з утворенням з неспарених нуклонів.

#### 4. Що таке довгопробіжні $\alpha$ — частинки?

Довгопробіжними називаються  $\alpha$  — частинки, які мають енергію, що перевищує енергію  $\alpha$  — частинок основної групи (довжина треку таких частинок у камері Вільсона більша, ніж у частинок основної групи). Довгопробіжні  $\alpha$  — частинки виникають під час переходів зі збуджених станів материнського ядра до основного стану дочірнього ядра. За рахунок великих енергій довгопробіжних  $\alpha$  — частинок тунельна відстань для них суттєво зменшується (див. Рис. 3.1). Це призводить до того, що періоди піврозпаду ядер, які випускають довгопробіжні  $\alpha$  — частинки, є малими. Так, наприклад, період піврозпаду ізотопу  $^{212}\text{Po}$ , що випускає довгопробіжні  $\alpha$  — частинки, складає всього  $3 \cdot 10^{-7}$  с.

5. Які величини інтенсивності довгопробіжних  $\alpha$  — частинок у порівнянні з  $\alpha$  — частинками основної групи: більша чи менша?

Величина інтенсивності довгопробіжних  $\alpha$  — частинок менша, ніж у  $\alpha$  — частинок основної групи, тому що переходи з утворенням

довгопробіжних частинок є менш імовірними. Оскільки довгопробіжні частинки утворюються зі збуджених станів материнських ядер, є велика імовірність, що збудження ядра буде зняте шляхом випромінювання  $\gamma$ -кванту. Останній процес є набагато більш імовірним, ніж випускання довгопробіжної  $\alpha$ -частинки. Так, в середньому на  $10^6$   $\gamma$ -квантів випромінюється одна  $\alpha$ -частинка.

6. Якою є умова  $\alpha$ -активності ядер з області зарядових чисел  $Z < 82$ ?

Такою умовою є дефіцит нейтронів. В цьому випадку кількість протонів в ядрі перевищує ту оптимальну кількість протонів, яка відповідає максимуму енергії зв'язку, тому кулонівське відштовхування сприяє розпаду ядер. Дефіцит нейтронів у ядрі може зменшуватися за рахунок процесів  $\alpha$ -розпаду,  $\beta^+$ -розпаду та електронного захвату, які часто конкурують між собою.

7. Чи можна змінити сталу розпаду по відношенню до альфа-розпаду для конкретного ізотопу?

Оскільки процес альфа-розпаду відбувається шляхом тунелювання альфа-частинки через кулонівський бар'єр, змінюючи його форму, можна змінити сталу розпаду ядра. Так, відомо, що наявність атомних електронів спричиняє екранування кулонівського потенціалу (див. приклад 1) і збільшує ефективну енергію альфа-частинки. Тому якщо іонізувати атоми, зменшивши при цьому кількість електронів на електронних оболонках, можна стабілізувати ядерний матеріал, набагато збільшивши період піврозпаду. І навпаки, сильне стискання речовини може призводити до зменшення ширини бар'єру.

Іншим фактором, який суттєво впливає на сталу розпаду, є радіус ядра. Стала розпаду залежить від радіуса ядра наступним чином:

$$\lambda = \frac{\hbar}{mR^2} \exp \left( - \frac{2R\sqrt{2mB}}{\hbar} \left\{ \sqrt{\frac{B}{E_\alpha}} \arccos \sqrt{\frac{E_\alpha}{B}} - \sqrt{1 - \frac{E_\alpha}{B}} \right\} \right), \quad (3.1)$$

де  $B = zZe^2/R$  – висота кулонівського бар'єру,  $E_\alpha$  – енергія альфа-частинки. Тому зміна розмірів ядер може суттєво змінити сталу розпаду. Так, за рахунок стискання ядер можна прискорити їх розпад. При взаємному проникненні ядер утворюється тимчасове складове ядро з тією ж густиною. Однак слід відзначити, що таке взаємне проникнення вимагає надзвичайно великої енергії для

подолання протидії кулонівського бар'єру, і тому такі ядра будуть сильно збудженими.

8. Чому альфа-розпад є найбільш імовірним для ядер з масовими числами  $A=145$  та  $A=215$ ?

Загальна енергія, що виділяється під час альфа-розпаду, визначається енергіями зв'язку материнського, дочірнього ядер та альфа-частинки:  $\Delta E = E_{\text{зв}}(z-2, A-4) + E_{\text{зв}\alpha} - E_{\text{зв}}(z, A)$ . В областях  $A=145$  та  $A=215$  експериментальні дані для величини  $\Delta E$  демонструють наявність чітких максимумів. Максимум при  $A=145$  пов'язаний з заповненням нейтронної оболонки до магічного числа  $N=A-Z=82$ , а максимум при  $A=215$  — з заповненням протонної оболонки при  $Z=82$ . Значення енергії  $\Delta E$  знижене, коли материнське ядро має замкнену оболонку, і збільшене, коли заповнену оболонку має дочірнє ядро. Саме таким оболонковим ефектом пояснюється альфа-радіоактивність рідкоземельних елементів ( $N=84=82+2$ ), а важкі ядра проявляють  $\alpha$ -активність починаючи з  $Z=82$ .

9. Що таке полегшений та неполегшений альфа-розпади?

Формулу (3.1) слід вважати такою, що дає приблизну оцінку для сталої  $\alpha$ -розпаду. Якщо ця формула виконується добре, говорять про полегшений  $\alpha$ -розпад. Якщо ж реальний період піврозпаду перевищує розрахований більше ніж на порядок, процес називають неполегшеним. Причину появи неполегшених розпадів можна пояснити на основі теорії несферичних ядер [2]. В несферичному ядрі нуклони незалежно рухаються в полі несферичного потенціалу. Одним з квантових чисел, що описують стан нуклона в такому потенціалі, є проекція  $K$  повного моменту нуклона на вісь симетрії ядра. Нуклони одного сорту об'єднуються в пари з рівними за абсолютними значеннями та протилежними за знаком значеннями  $K$ . Для утворення  $\alpha$ -частинки четвірка нуклонів повинна знаходитись в станах з нульовими відносними моментами кількості руху. Тому найпростіше  $\alpha$ -частинку утворити з двох спарених протонів та двох спарених нейтронів, оскільки спарені нуклони з найбільшою імовірністю мають нульовий відносний момент. Найбільш імовірними, тобто полегшеними, розпадами будуть такі, для яких  $\Delta K=0$  й парність не змінюється. Ці умови завжди виконуються для парно-парних ядер. Для інших ядер ситуація може змінитись за рахунок існування неспареного нуклона.

## 4. БЕТА-РОЗПАД ЯДЕР

### 4.1. Теоретичні відомості

Бета-розпадом називають спонтанний процес, в якому нестабільне ядро  ${}^A_ZX$  перетворюється в ядро-ізобар  ${}^A_{Z+1}Y$  або  ${}^A_{Z-1}Y$ .

Бета-активних ядер існує велика кількість, практично для кожного зарядового числа  $Z$  існують нестабільні ізотопи, які є  $\beta$  – активними.

Розрізняють три види  $\beta$  – розпаду:

1)  $\beta^-$  – розпад (електронний)  ${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z+1}Y + \beta^- + \tilde{\nu}_e$ , в якому виділяються електрон та електронне антинейтрино ( $\tilde{\nu}_e$ );

2)  $\beta^+$  – розпад (позитронний)  ${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + \beta^+ + \nu_e$ , в якому виділяються позитрон та електронне нейтрино ( $\nu_e$ );

3) електронне захоплення ( $e$  – захоплення)  ${}^A_ZX + \beta^- \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + \nu_e$ . Зазвичай електрон поглинається з  $K$  – оболонки атома (найближчої до ядра), тому таке  $e$  – захоплення називається також  $K$  – захопленням. Електронне захоплення займає особливе місце у випадку важких ядер, у яких  $K$  – оболонка розташована близько до ядра.

При  $\beta^-$  – розпаді відбувається перетворення в ядрі нейтрона на протон:  $n \rightarrow p + \beta^- + \tilde{\nu}_e$ , що означає збільшення зарядового числа ядра на одиницю. При  $\beta^+$  – розпаді протон перетворюється на нейтрон:  $p \rightarrow n + \beta^+ + \nu_e$ , а зарядове число нукліда на одиницю зменшується. Отже,  $\beta$  – активними будуть всі ядра, що мають надлишок (по відношенню до стабільного значення) протонів або нейтронів (див. Розділ 1, приклад №6 ).

Згідно сучасних представлень, бета-розпад зумовлений перетвореннями кварків: при  $\beta^-$  – розпаді один  $d$  кварк, який входить до складу нуклона, перетворюється на  $u$  кварк, при  $\beta^+$  – розпаді відбувається зворотне перетворення.

Утворення частинки "нейтрино" та античастинки "антинейтрино" підтверджує закони збереження спінового числа та лептонного заряду для  $\beta^\pm$  – розпаду та  $e$  – захоплення, а також закон збереження енергії. Так, лептонний заряд  $L_e = +1$  для електрона  $e^-$  та електронного

нейтрино  $\nu_e$ ;  $L_e = -1$  для позитрона  $e^+$  та електронного антинейтрино  $\bar{\nu}_e$ . Тому виконання закону збереження лептонного заряду при  $\beta^-$ -розпаді вимагає, щоб разом з електроном утворювалось електронне антинейтрино ( $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ), оскільки сумарний лептонний заряд цих двох частинок дорівнює нулеві. Аналогічна ситуація має місце при  $\beta^+$ -розпаді та електронному захопленні.

Умови енергетичної вигідності (умови протікання)  $\beta$ -розпаду:

1) для електронного та позитронного розпаду:  
 $Q = (m_X - m_Y - m_\beta - m_{\nu_e})c^2 > 0$ , де  $m_X$  – маса материнського (початкового), а  $m_Y$  – дочірнього (кінцевого) ядра;

2) для  $e$ -захоплення:  $Q = (m_X + m_e - m_Y - m_{\nu_e})c^2 > 0$ .

В цих співвідношеннях  $m_{\nu_e}$  – маса нейтрино або антинейтрино. Згідно сучасних даних, ця маса є дуже малою ( $m_{\nu_e} c^2 \leq 0,1 \text{ eV}$ ), тому без істотної похибки можна покласти  $m_{\nu_e} \approx 0$ . Особливою рисою бета-розпаду є те, що енергія, яка виділяється в процесі  $\beta$ -розпаду (енергія реакції  $Q$ ), розподіляється довільним чином між електроном (позитроном) та антинейтрино (нейтрино). Це призводить до того, що кінетична енергія електронів знаходиться в межах від 0 до максимальної енергії, рівної  $Q$ . Іншими словами, енергетичний спектр електронів, які випускаються при  $\beta$ -розпаді, є неперервним (на відміну від альфа-спектра).

## 4.2. Приклади розв'язку задач

**Приклад 1.** Ядро  $^{32}\text{P}$  зазнає  $\beta^-$ -розпаду, в результаті якого дочірнє ядро опиняється безпосередньо в основному стані. Визначити максимальні значення кінетичної енергії та імпульсу  $\beta$ -частинок та відповідну кінетичну енергію віддачі дочірнього ядра.

**Розв'язання:** Реакція  $\beta^-$ -розпаду даного ізотопу фосфору записується наступним чином:



Радіоактивні атоми одного й того ж сорту випускають електрони з різними енергіями, починаючи від нуля та закінчуючи граничним значенням, яке характерне для кожного окремого  $\beta$  – випромінювача. Це граничне значення називається верхньою границею  $\beta$  – спектра. Тобто  $\beta$  – спектр є суцільним, енергія не квантується (на противагу, наприклад,  $\alpha$  – розпаду). Верхня межа  $\beta$  – спектра відповідає випадку, коли на долю електрона припадає вся енергія, що виділяється в результаті реакції розпаду. При цьому енергію антинейтринно можна вважати приблизно рівною нулю. До речі, коли йдеться про нейтринно та антинейтринно, то під енергією частинки розуміють її кінетичну енергію.

Енергетичний вихід реакції (4.1.1) можна представити як різницю мас материнського ядра та частинок, які утворилися в результаті  $\beta^-$  – розпаду:

$$Q = (m_P - m_e - m_S) c^2, \quad (4.1.2)$$

де  $m_P$  та  $m_S$  — маси ядер фосфору та сірки відповідно;  
 $m_e = 5,486 \cdot 10^{-4}$  а.о.м. — маса електрона.

Скориставшись довідковими даними, можна записати енергетичний вихід за допомогою дефектів мас ядер:

$$Q = [\Delta_P + A_P - m_e - \Delta_S - A_S] c^2 = [\Delta_P - \Delta_S - m_e] c^2. \quad (4.1.3)$$

Дефекти мас відповідних нуклідів фосфору та сірки становлять відповідно  $\Delta_P = -0,026092$  а.о.м. та  $\Delta_S = -0,027926$  а.о.м. [8,9].

Користуючись числовими значеннями, знайдемо з (4.1.3) енергетичний вихід реакції (4.1.1):

$$Q = (-0,026092 - 5,486 \cdot 10^{-4} + 0,027926) \cdot 931,5 \text{ MeV} = 1,197 \text{ MeV}. \quad (4.1.4)$$

З іншого боку, енергетичний вихід реакції дорівнює різниці кінетичних енергій материнського ядра та частинок, які утворилися в результаті реакції. Запишемо, таким чином, закон збереження енергії:

$$Q = E_{\kappa S} + E_{\kappa \beta} + E_{\kappa \bar{\nu}} - E_{\kappa P}. \quad (4.1.5)$$

Тут  $E_{\kappa P}$ ,  $E_{\kappa S}$ ,  $E_{\kappa \beta}$  та  $E_{\kappa \bar{\nu}}$  — кінетичні енергії фосфору, сірки, електрона та антинейтринно відповідно. Оскільки материнське ядро знаходилося у спокої,  $E_{\kappa P} = 0$ . Кінетична енергія електронів, які



утворилися при  $\beta^-$  – розпаді, буде максимальною в тому випадку, коли енергія антинейтрино буде мінімальною. Тому для антинейтрино вважатимемо кінетичну енергію  $E_{\bar{\nu}} \approx 0$  та імпульс  $\vec{p}_{\bar{\nu}} \approx 0$ .

Отже, (4.1.5) переписеться як

$$Q = E_{\kappa S} + E_{\kappa\beta}^{\max}. \quad (4.1.6)$$

Запишемо закон збереження імпульсу у векторному вигляді:

$$\vec{p}_P = \vec{p}_S + \vec{p}_{\beta} + \vec{p}_{\bar{\nu}}, \quad (4.1.7)$$

або в скалярному вигляді у випадку верхньої границі  $\beta$  – спектра:

$$0 = p_S - p_{\beta}^{\max}. \quad (4.1.8)$$

Для ядра сірки через його досить велику масу можна застосувати нерелятивістське наближення для імпульсу, тобто

$$p_S = \sqrt{2m_S E_{\kappa S}}. \quad (4.1.9)$$

Але для електрона, як для досить легкої частинки, релятивізм вже треба враховувати. (Зазвичай для оцінки ступеню релятивізму частинки застосовують порівняння з її енергією спокою. Так, якщо виконується співвідношення  $m_0 c^2 \gg E_k$ , користуються нерелятивістським наближенням, якщо ж  $E_k > m_0 c^2$ , слід застосовувати релятивістські формули). Максимальна кінетична енергія електрона:

$$E_{\kappa\beta}^{\max} = \sqrt{\left(p_{\beta}^{\max}\right)^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2, \quad (4.1.10)$$

де  $m_e$  – маса спокою електрона.

Звідси виражаємо імпульс електрона:

$$p_{\beta}^{\max} = \frac{\sqrt{E_{\kappa\beta}^{\max} \left( E_{\kappa\beta}^{\max} + 2m_e c^2 \right)}}{c}. \quad (4.1.11)$$

Підставимо формули (4.1.9) та (4.1.11) до закону збереження імпульсу (4.1.8):

$$0 = \sqrt{2m_S E_{\kappa S}} - \frac{\sqrt{E_{\kappa\beta}^{\max} \left( E_{\kappa\beta}^{\max} + 2m_e c^2 \right)}}{c}. \quad (4.1.12)$$

Розв'яжемо (4.1.6) та (4.1.12) як систему з двох рівнянь та отримаємо наступне квадратне рівняння відносно максимальної кінетичної енергії електрона:

$$\left(E_{\kappa\beta}^{\max}\right)^2 + 2(m_S + m_e)c^2 \cdot E_{\kappa\beta}^{\max} - 2m_Sc^2 \cdot Q = 0. \quad (4.1.13)$$

Оцінімо окремо величини, що входять до цієї формули. Маса ядра сірки:

$$\begin{aligned} m_S &= M_{amS} - Z_S m_e = \Delta_S + A_S = -0,027926 + 32 = \\ &= 31,97207 \text{ а.о.м.} \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Очевидно, що можна взяти суму мас електрона та ядра сірки приблизно рівною масі сірки (4.1.14), похибка при цьому складе всього  $\approx 4,6 \cdot 10^{-4}\%$ , тобто

$$m_S + m_e \cong m_S \quad (4.1.15)$$

Рівняння (4.1.13) має єдиний фізичний розв'язання, який дає максимальну кінетичну енергію  $\beta$  – частинки:

$$\begin{aligned} E_{\kappa\beta}^{\max} &= -m_Sc^2 + m_Sc^2 \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_Sc^2}} = m_Sc^2 \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_Sc^2}} \right\} = \\ &= 31,97207 \cdot 931,5 \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1,197}{31,97207 \cdot 931,5}} \right\} = 1,194 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

$$\text{Або } E_{\kappa\beta}^{\max} = 1,91 \cdot 10^{-6} \text{ ерг} = 1,91 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Це точний розв'язання рівняння (4.1.13). А можна знайти його наближений розв'язання, записавши  $E_{\kappa\beta}^{\max}$  в формулі (4.1.14) з урахуванням співвідношення (4.1.15) та розклавши корінь в (4.1.16) в ряд Тейлора з точністю до квадратичного доданку:

$$\begin{aligned} E_{\kappa\beta}^{\max} &= -m_Sc^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_Sc^2}} \right) \cong m_Sc^2 \left( \frac{Q}{m_Sc^2} - \frac{Q^2}{2m_S^2c^4} \right) = \\ &= Q - \frac{Q^2}{2m_Sc^2}. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Квадратичний доданок  $\frac{Q^2}{2m_Sc^2}$  складає  $2,9 \cdot 10^{-3}\%$  від енергетичного виходу реакції  $Q$ , а значить можна вважати, що в максимумі  $\beta$  – спектра кінетична енергія електрона фактично дорівнює енергетичному виходу реакції розпаду:

$$E_{\kappa\beta}^{\max} \cong Q. \quad (4.1.18)$$

Співвідношення (4.1.18) підтверджується розрахунком в (4.1.16).  
Максимальне значення імпульсу  $\beta$  – частинки можна знайти, підставивши числові значення до формули (4.1.11):

$$p_{\beta}^{\max} = \frac{\sqrt{1,91 \cdot 10^{-13} \left( 1,91 \cdot 10^{-13} + 2 \cdot 0,511 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \right) \text{ Дж}^2}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} \cong \\ \cong 0,87 \cdot 10^{-21} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Тут враховано, що маса спокою електрона дорівнює  $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV} \approx 0,82 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$ .

Відповідно, кінетична енергія ядра сірки визначатиметься зі співвідношення (4.1.17):

$$E_{\kappa S} = \frac{Q^2}{2m_S c^2} = \frac{\left( 1,197 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} \right)^2}{2 \cdot 31,97207 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2} = \\ = 3,84 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 24 \text{ eV}.$$

**Приклад 2.** Ядра  $^{37}\text{Ar}$  зазнають  $K$  – захоплення, в результаті якого дочірні ядра опиняються безпосередньо в основному стані. Нехтуючи енергією зв'язку  $K$  – електрона, визначити кінетичну енергію та швидкість дочірнього ядра.

**Розв'язання:** Реакція електронного захоплення  $^{37}\text{Ar}$ , при якій ядро захоплює електрон з найближчої до нього  $K$  – оболонки, записується наступним чином:



Закон збереження енергії для цього процесу має вигляд:

$$Q = E_{\nu} + E_{\kappa \text{Cl}} - E_{\kappa \text{Ar}}. \quad (4.2.2)$$

Ядро аргону до  $K$  – захоплення знаходилося в стані спокою, тому його кінетична енергія  $E_{\kappa \text{Ar}} = 0$  та імпульс  $p_{\text{Ar}} = 0$ .

Закон збереження імпульсу в векторному вигляді:

$$0 = \vec{p}_{\text{Ar}} = \vec{p}_{\text{Cl}} + \vec{p}_{\nu}, \quad (4.2.3)$$

або в проекціях на обрану вісь:

$$0 = p_{\text{Cl}} - p_{\nu}. \quad (4.2.4)$$

Піднесемо (4.2.4) до квадрата та помножимо на  $c^2$ , врахувавши, що  $E_\nu = p_\nu c$  та  $E_{\kappa Cl} = \frac{p_{Cl}^2}{2M_{Cl}}$  (тут  $M_{Cl}$  – маса ядра хлору):

$$2M_{Cl}E_{\kappa Cl}c^2 = E_\nu^2. \quad (4.2.5)$$

Зі співвідношення (4.2.2) виразимо енергію нейтрино:  $E_\nu = Q - E_{\kappa Cl}$ , тому (4.2.5) запишеться як

$$E_{\kappa Cl}^2 - 2(Q + M_{Cl}c^2)E_{\kappa Cl} + Q = 0. \quad (4.2.6)$$

З цього рівняння отримаємо вираз для кінетичної енергії ядра хлору:

$$E_{\kappa Cl} = Q + M_{Cl}c^2 - \sqrt{M_{Cl}c^2(M_{Cl}c^2 + 2Q)}. \quad (4.2.7)$$

Маси ядер хлору та аргону:

$$M_{Cl} = A_{Cl} + \Delta_{Cl} = (37 - 0,034104) \text{ а.о.м.} = 36,965896 \text{ а.о.м.};$$

$$M_{Ar} = A_{Ar} + \Delta_{Ar} = (37 - 0,033228) \text{ а.о.м.} = 36,966772 \text{ а.о.м.},$$

де  $\Delta_{Cl}$  та  $\Delta_{Ar}$  – надлишки мас відповідних нуклідів, а  $A_{Cl}$  та  $A_{Ar}$  – їх масові числа.

Енергетичний вихід реакції (4.2.1):

$$\begin{aligned} Q &= (M_{Ar} - M_{Cl})c^2 = (36,966772 - 36,965896) \cdot 931,5 \text{ MeV} = \\ &= 0,816 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Отже, кінетична енергія ядра хлору дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} E_{\kappa Cl} &= 0,816 + 36,965896 \cdot 931,5 - \\ &- \sqrt{36,965896 \cdot 931,5(36,965896 \cdot 931,5 + 2 \cdot 0,816)} = 9,7 \text{ eV}. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Наведемо наближений вигляд співвідношення (4.2.7), розклавши корінь у (4.2.7) в ряд Тейлора з точністю до квадратичного доданку:

$$\begin{aligned} E_{\kappa Cl} &= Q + M_{Cl}c^2 - M_{Cl}c^2 \sqrt{1 + \frac{2Q}{M_{Cl}c^2}} \cong Q + M_{Cl}c^2 - M_{Cl}c^2 \left( 1 + \frac{Q}{M_{Cl}c^2} - \frac{Q^2}{2M_{Cl}^2c^4} \right) = \\ &= \frac{Q^2}{2M_{Cl}c^2} = \frac{0,816^2 \text{ MeV}}{2 \cdot 36,965896 \cdot 931,5} \cong 9,7 \cdot 10^{-6} \text{ MeV} = 9,7 \text{ eV}. \end{aligned}$$

Цей результат ідентичний по числовому значенню до точного розв'язку (4.2.9).

Знайдемо швидкість дочірнього ядра:

$$v_{Cl} = \sqrt{\frac{2E_{\kappa Cl}}{M_{Cl}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг}}{36,965896 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ з}}} = 7,1 \cdot 10^5 \text{ см/с} . \quad (4.2.10)$$

**Приклад 3.** Визначити можливі типи  $\beta$ -розпаду ядра  $^{114}\text{In}$ . Енергії зв'язку відповідних ядер:  $E_{38}(^{114}\text{In}) = 970,2 \text{ MeV}$ ,  $E_{38}(^{114}\text{Cd}) = 972,4 \text{ MeV}$ ,  $E_{38}(^{114}\text{Sn}) = 971,4 \text{ MeV}$ .

**Розв'язання:** Можливі реакції  $\beta$ -розпадів ядра  $^{114}\text{In}$  виглядатимуть як:

$$\beta^- - \text{розпад } ^{114}_{49}\text{In} \rightarrow ^{114}_{50}\text{Sn} + \beta^- + \tilde{\nu}_e, \quad (4.3.1)$$

$$\beta^+ - \text{розпад } ^{114}_{49}\text{In} \rightarrow ^{114}_{48}\text{Cd} + \beta^+ + \nu_e, \quad (4.3.2)$$

$$e - \text{захоплення } ^{114}_{49}\text{In} + \beta^- \rightarrow ^{114}_{48}\text{Cd} + \nu_e. \quad (4.3.3)$$

Необхідною та достатньою умовою спонтанного розпаду є додатне значення енергетичного виходу відповідної реакції.

Запишемо енергетичні виходи реакцій (4.3.1)-(4.3.3):

$$Q_{\beta^-} = (m_{\text{In}} - m_{\text{Sn}} - m_e)c^2,$$

$$Q_{\beta^+} = (m_{\text{In}} - m_{\text{Cd}} - m_e)c^2,$$

$$Q_e = (m_{\text{In}} + m_e - m_{\text{Cd}})c^2,$$

де  $m_{\text{In}}$ ,  $m_{\text{Sn}}$  та  $m_{\text{Cd}}$  – маси ядер індію, олова та кадмію відповідно.

Використаємо формулу для енергії зв'язку:

$$E_{38} = Zm_H + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}, \quad (4.3.4)$$

де  $m_p$ ,  $m_n$  – маси протона та нейтрона, виражені в енергетичних одиницях. Звідси отримаємо вираз для маси ядра:

$$m_{\text{я}} = Zm_p + (A - Z)m_n - E_{38}(Z, A). \quad (4.3.5)$$

З урахуванням (4.3.5), запишемо вираз для енергетичного виходу реакцій:

$$Q_{\beta^-} = (m_n - m_p - m_e)c^2 + E_{38}(^{114}\text{Sn}) - E_{38}(^{114}\text{In}); \quad (4.3.6)$$

$$Q_{\beta^+} = (m_p - m_n - m_e)c^2 + E_{38}(^{114}\text{Cd}) - E_{38}(^{114}\text{In}); \quad (4.3.7)$$

$$Q_e = (m_p - m_n + m_e)c^2 + E_{38}(^{114}\text{Cd}) - E_{38}(^{114}\text{In}); \quad (4.3.8)$$

Перший доданок в формулах (4.3.6) – (4.3.8) враховує перетворення протона на нейтрон або нейтрона на протон в процесі  $\beta$  – розпаду. Використовуючи числові значення мас протона, нейтрона та електрона:

$$m_p = 1,007825 \text{ а.о.м}, \quad m_n = 1,008665 \text{ а.о.м},$$

$m_e = 5,486 \cdot 10^{-4} \text{ а.о.м}$ , знайдемо енергії (4.3.6) – (4.3.8):

$$Q_{\beta^-} = 0,27 \text{ MeV} + 1,2 \text{ MeV} = 1,47 \text{ MeV};$$

$$Q_{\beta^+} = -1,29 \text{ MeV} + 2,2 \text{ MeV} = 0,907 \text{ MeV};$$

$$Q_e = -0,27 \text{ MeV} + 2,2 \text{ MeV} = 1,93 \text{ MeV};$$

Отже, всі три енергетичні виходи реакцій додатні, тобто для ядра  $^{114}\text{In}$  можливими є всі три типи розпаду. Проте енергетично найбільш вигідним, згідно розрахунку, є процес  $e$  – захоплення.

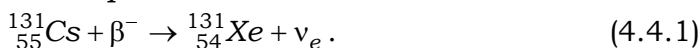
Знайдемо стабільний ізобар з масовим числом 114. Для цього використаємо вираз для «доріжки стабільності» (1.6.2) з розділу 1, підставивши в нього значення масового числа даного ізотопу індію:

$$Z_{\text{стаб}} = \frac{A}{2 + 0,015A^{2/3}} = \left[ \frac{114}{2 + 0,015 \cdot 114^{2/3}} \right] = 48.$$

Таким чином, найбільш стабільним ізобаром з масовим числом 114 буде саме  $^{114}\text{Cd}$ . Обидва ізотопи, що утворюються під час  $\beta^-$  – розпаду ядра  $^{114}\text{In}$ , є стабільними, проте вміст ізотопу  $^{114}\text{Sn}$  в природній суміші складає 0,65%, тоді як вміст ізотопу  $^{114}\text{Cd}$  в природній суміші становить 29%. Це може означати, що більша частина перетворень  $^{114}\text{In}$  йде саме шляхом  $e$  – захоплення.

**Приклад 4.** Знайти енергію нейтрино при  $K$  – захопленні в атомах  $^{131}\text{Cs}$ , якщо енергія зв'язку  $K$  – електрона в дочірньому атомі 35 кеВ, а повна енергія, яка виділяється в процесі, дорівнює 355 кеВ. Дочірнє ядро опиняється безпосередньо в основному стані.

**Розв'язання:** Реакція електронного захоплення для атома  $^{131}\text{Cs}$ :



Закон збереження енергії з урахуванням стану спокою ядра цезію ( $E_{\kappa\text{Cs}} = 0$ ):

$$Q = E_{\kappa\text{Xe}} + E_{\nu} + \varepsilon_{3\text{в}e}. \quad (4.4.2)$$

Тут  $E_{\kappa Xe}$  та  $E_\nu$  – кінетичні енергії атома ксенону та нейтрино, а  $\varepsilon_{3\beta e}$  – енергія зв'язку електрона на  $K$  – оболонці дочірнього атома.

Енергія нейтрино в цьому процесі дорівнюватиме:

$$E_\nu = Q - \varepsilon_{3\beta e} - E_{\kappa Xe}. \quad (4.4.3)$$

Кінетична енергія дочірнього ядра є невеликою в порівнянні з енергією нейтрино, тому нею можна знехтувати. Покажемо це.

Закон збереження імпульсу в скалярному вигляді:

$$p_{Xe} = p_\nu. \quad (4.4.4)$$

Або, що те ж саме:

$$2M_{Xe}E_{\kappa Xe} = \left(\frac{E_\nu}{c}\right)^2. \quad (4.4.5)$$

Таким чином, з (4.4.3) та (4.4.5) отримаємо просте квадратне рівняння відносно енергії нейтрино:

$$E_\nu^2 + 2M_{Xe}c^2E_\nu + (\varepsilon_{3\beta e} - Q) = 0, \quad (4.4.6)$$

єдиний фізичний розв'язання якого

$$E_\nu = M_{Xe}c^2 \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2(Q - \varepsilon_{3\beta e})}{M_{Xe}c^2}} \right) \cong Q - \varepsilon_{3\beta e} - \frac{(Q - \varepsilon_{3\beta e})^2}{2M_{Xe}c^2}. \quad (4.4.7)$$

При цьому третім доданком у (4.7) можна знехтувати, оскільки його значення відносно величини  $Q - \varepsilon_{3\beta e}$  становить:

$$\frac{Q - \varepsilon_{3\beta e}}{2M_{Xe}c^2} = \frac{0,355 - 0,035}{2 \cdot 131 \cdot 931,5} = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ або } 1,3 \cdot 10^{-4}\%.$$

Тому можна вважати, що  $E_\nu \cong Q - \varepsilon_{3\beta e} = 355 - 35 = 320 \text{ кеВ}$ .

**Приклад 5.** Обчислити сумарну кінетичну енергію частинок, які виникають під час  $\beta^-$  – розпаду нейтрона, що знаходиться у стані спокою.

**Розв'язання:** Тільки один з нуклонів є стабільним у вільному стані – протон. Вільні нейтрони можуть існувати тільки протягом короткого часу. Одна з причин цього – поглинання нейтронів ядрами, друга –  $\beta$  – радіоактивність вільного нейтрона. Його час життя у вільному просторі складає приблизно 10 хвилин. Нейтрон перетворюється на протон, випромінюючи електрон та

антинейтрино. Вільні нейтрони виникають в природі або їх отримують в лабораторії тільки в результаті ядерних перетворень.

Реакція  $\beta^-$  – розпаду нейтрона має вигляд:

$$n \rightarrow p + \beta^- + \tilde{\nu}_e. \quad (4.5.1)$$

Запишемо масу до розпаду:

$$m_1 = m_n = 1,008665 \text{ а.о.м.} \quad (4.5.2)$$

Маса спокою системи частинок після розпаду становить:

$$\begin{aligned} m_2 = m_p + m_e &= (1,007276 + 5,486 \cdot 10^{-4}) \text{ а.о.м.} = \\ &= 1,0078246 \text{ а.о.м.} \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Різниця мас  $\Delta m$  визначить енергетичний вихід реакції реакції (енергію перетворення нейтрона на протон):

$$Q = \Delta mc^2 = (m_1 - m_2)c^2 = (1,008665 - 1,0078246) \cdot 931,5 \text{ MeV} = 0,78 \text{ MeV}.$$

Ця енергія й дорівнює сумарній кінетичній енергії частинок, які виникають під час  $\beta^-$  – розпаду нейтрона, що знаходиться у стані спокою:

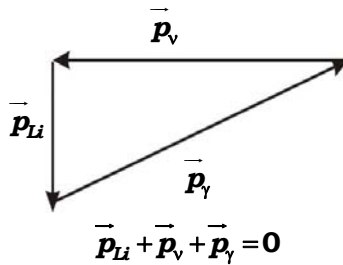
$$Q = E_{kp} + E_{ke} + E_{\tilde{\nu}}. \quad (4.5.4)$$

**Приклад 6.**  $K$  – захоплення в атомах  ${}^7\text{Be}$  частково відбувається через збуджений стан дочірнього ядра, яке випромінює при цьому  $\gamma$  – квант з енергією  $720 \text{ кеВ}$ . Визначити кінетичну енергію дочірнього ядра після випромінювання  $\gamma$  – кванта, якщо кут між напрямками руху нейтрино та ядра віддачі дорівнює  $90^\circ$ . Якою є ця енергія в тому випадку, коли дочірнє ядро виникає безпосередньо в основному стані?

**Розв’язання:** Реакція, яка відповідає умові прикладу, є двохступеневою з утворенням проміжного збудженого стану ядра  ${}^7\text{Li}^*$ :

$${}^7_4\text{Be} + \beta^- \rightarrow {}^7_3\text{Li}^* + \nu \rightarrow {}^7_3\text{Li} + \nu + \gamma. \quad (4.6.1)$$





**Рис. 4.1. Векторна діаграма імпульсів (до прикладу 4.6.)**

Двохступеневу реакцію практично неможливо розрахувати, тому треба вважати, що процес випромінювання кванту відбувається відразу після утворення літію.

Закон збереження імпульсу в скалярному вигляді, з урахуванням умови прикладу (кут між напрямками руху нейтрино та літію складає  $90^\circ$ ) (див. Рис. 4.1) запишеться як:

$$p_{Li}^2 = p_\gamma^2 - p_\nu^2 \quad (4.6.2)$$

Врахуємо, що нейтрино та  $\gamma$ -квант рухаються зі швидкістю світла, тобто їх енергії відповідно складають  $E_\nu = p_\nu c$  та  $\hbar\omega = p_\gamma c$ .

Якщо помножити рівняння (4.6.2) на  $c^2$ , то воно буде пов'язувати між собою енергії частинок:

$$2m_{Li}E_{\kappa Li}c^2 = (\hbar\omega)^2 - E_\nu^2. \quad (4.6.3)$$

З іншого боку, треба ще одне співвідношення, яке міститиме енергію нейтрино, щоб розрахувати шукану енергію ядра літію. Таким співвідношенням буде закон збереження енергії, записаний за умови, що материнське ядро знаходилося в стані спокою:

$$Q = \hbar\omega + E_\nu + E_{\kappa Li}, \quad (4.6.4)$$

де енергетичний вихід реакції можна виразити через дефекти мас ядер берилію  $\Delta_{Be}$  та літію  $\Delta_{Li}$  (див. приклад №4, розділ 1):

$$Q = (m_{Be} + m_e - m_{Li})c^2 = (\Delta_{Be} - \Delta_{Li} + m_e)c^2. \quad (4.6.5)$$

Підстановка числових значень до (4.6.5) дає

$$Q = (0,016931 - 0,016005 + 5,486 \cdot 10^{-4}) \cdot 931,5 \text{ MeV} = 1,37 \text{ MeV}$$

Отже, квадратне рівняння відносно шуканої кінетичної енергії атома літію можна записати за допомогою (4.6.3) та (4.6.4):

$$E_{\kappa Li}^2 + 2E_{\kappa Li}(m_{Li}c^2 + \hbar\omega - Q) + Q(Q - 2\hbar\omega) = 0 \quad (4.6.6)$$

Єдиний фізичний розв'язання рівняння (4.6.6):

$$E_{\kappa Li} = Q - \hbar\omega - m_{Li}c^2 + \sqrt{(\hbar\omega + m_{Li}c^2)^2 - 2m_{Li}c^2Q}. \quad (4.6.7)$$

Окремо порахуємо масу спокою ядра літію:

$$m_{Li}c^2 = \Delta_{Li} + A_{Li} = 7,016005 \cdot 931,5 = 6535,41 \text{ MeV}.$$

Значення кінетичної енергії ядра віддачі дорівнюватиме

$$E_{\kappa Li} = \sqrt{(0,72 + 6535,41)^2 - 2 \cdot 6535,41 \cdot 1,37} + 1,37 - 0,72 - 6535,41 \approx 7,34 \text{ eV}. \quad (4.6.8)$$

Формулу (4.6.7) можна суттєво спростити, якщо знехтувати в (4.6.6) доданком  $E_{\kappa Li}^2$  (правомірність цього є очевидною). В такому випадку кінетична енергія літію виражатиметься наступним чином:

$$E_{\kappa Li} \approx \frac{Q(2\hbar\omega - Q)}{2(m_{Li}c^2 + \hbar\omega - Q)}. \quad (4.6.9)$$

Числове значення енергії, розрахованої за формулою (4.6.10), становить:

$$E_{\kappa Li} = \frac{1,37(2 \cdot 0,72 - 1,37)}{2(6535,41 + 0,72 - 1,37)} = 7,338 \text{ eV}. \quad (4.6.11)$$

Як бачимо, ми отримали практично той самий результат, що й при обчисленні за точною формулою (4.6.7).

Якщо ж дочірнє ядро виникає безпосередньо в основному стані, то такому процесу відповідатиме реакція



При цьому закони збереження імпульсу та енергії виглядатимуть наступним чином:  $p_{Li} = p_\nu$  та  $Q = E_\nu + E_{\kappa Li}$ . Розв'яжемо систему з цих двох рівнянь відносно  $E_{\kappa Li}$ :

$$Q = p_\nu c + \frac{p_\nu^2}{2m_{Li}} \Rightarrow p_\nu = m_{Li}c \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_{Li}c^2}} \right) \Rightarrow$$

$$E_{Li} = Q - p_\nu c = Q - m_{Li}c^2 \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_{Li}c^2}} \right). \quad (4.6.13)$$

Розкладемо вираз (4.6.13) у ряд Тейлора з точністю до квадратичного доданку:

$$E_{Li} \approx Q - m_{Li} c^2 \left( \frac{Q}{m_{Li} c^2} - \frac{Q^2}{2 m_{Li}^2 c^4} \right) = \frac{Q^2}{2 m_{Li} c^2}. \quad (4.6.14)$$

Підставивши числові значення, отримаємо кінетичну енергію віддачі при утворенні дочірнього ядра в основному стані:

$$E_{Li} = \frac{1,37^2 \text{ MeV}^2}{2 \cdot 7,016005 \cdot 931,5 \text{ MeV}} = 143,6 \text{ eV}. \quad (4.6.15)$$

Розрахунок показує, що кінетична енергія дочірнього ядра буде більшою у випадку утворення ядра в основному стані. При утворенні ядра в збудженому стані частина енергії „виноситься” електронним нейтрино та  $\gamma$  – квантом.

### 4.3. Запитання та відповіді

#### 1. Чи можливе $L$ – захоплення?

$L$  – захоплення – це захоплення електрона з  $L$  – оболонки атома. З фізичної точки зору процес захоплення відбувається за рахунок реакції слабкої взаємодії між одним з нуклонів в ядрі і одним з атомних електронів, які зі скінченою і не рівною нулю ймовірністю

$\int_{V_R} |\Psi_e(\vec{r})|^2 dV$  можуть знаходитись в межах ядра. В цьому виразі

$\Psi_e(\vec{r})$  – хвильова функція електрона,  $V_R$  – об'єм ядра. Процес  $L$  – захоплення можливий, але малоімовірний, оскільки  $L$  – оболонка знаходиться далі від ядра, ніж  $K$  – оболонка, а ймовірність знаходження  $L$  – електрона в межах ядра є значно меншою, ніж  $K$  – електрона. Внаслідок цього, частіше переважає процес захоплення електрона саме з  $K$  – оболонки атома.

#### 2. Чим визначається максимальна енергія $\beta$ – спектра?

Різницею мас початкового (материнського) та кінцевого (дочірнього) ядер, тобто енергією  $Q$ , яка виділяється в процесі  $\beta$  – розпаду.

#### 3. Які види нейтрино існують?

Під час  $\beta^+$  – розпаду разом з позитроном з'являється електронне нейтрино  $\nu_e$ . В подальшому були відкриті інші типи нейтрино: мюонне нейтрино  $\nu_\mu$  та таонне нейтрино  $\nu_\tau$ . Відповідні

антинейтрино: електронне  $\tilde{\nu}_e$ , мюонне  $\tilde{\nu}_\mu$  та таонне  $\tilde{\nu}_\tau$ . Мюонні нейтрино та антинейтрино утворюються при розпаді заряджених піонів ( $\pi$  – мезонів), мюонів та  $K$  – мезонів. Таонні нейтрино та антинейтрино з'являються при розпаді  $\tau$  – лептонів.

4. Яким видом фундаментальних взаємодій обумовлений  $\beta$  – розпад?

$\beta$  – розпад зумовлений слабкою взаємодією. Цей процес є внутрішньонуклонним. При  $\beta^-$  – розпаді нейтрон перетворюється на протон:  $n \rightarrow p + \beta^- + \tilde{\nu}_e$ , при  $\beta^+$  – розпаді відбувається зворотнє перетворення:  $p \rightarrow n + \beta^+ + \nu_e$ . Згідно теорії єдиної електрослабкої взаємодії слабка взаємодія виникає в результаті обміну віртуальними дуже важкими частинками зі спіном, що дорівнює 1: проміжними зарядженими  $W^+, W^-$  – бозонами та нейтральним проміжним  $Z^0$  – бозоном. Наприклад, розпад нейтрона відбувається так: нейтрон перетворюється на протон і на короткий час випускає проміжний  $W^-$  – бозон, який розпадається на електрон та антинейтрино  $\tilde{\nu}_e$ .

5. Які лічильники використовують для реєстрації  $\beta$  – частинок?

Зареєструвати електрони чи позитрони можна, наприклад, за допомогою торцевих лічильників Гейгера-Мюллера, в яких торець закритий дуже тонким екраном (товщиною в одиниці мікрон, зазвичай виготовленим зі слюди), через котрий всередину лічильника можуть потрапляти частинки для реєстрації.

6. Якою є характерна ознака того, що в ядрі відбулось електронне захоплення?

Наявність спонтанного характеристичного рентгенівського випромінювання. Якщо, наприклад, ядро захоплює електрон з  $K$  – оболонки атома, на його місці утворюється вакансія. Після цього відбувається серія каскадних переходів, які супроводжуються випромінюванням рентгенівських квантів.

7. Позитронний  $\beta$  – розпад та е-захоплення у випадку ядер одного сорту призводять до однакових кінцевих станів. Тому ці два процеси можуть іти одночасно, конкуруючи між собою. Чому в легких та середніх ядрах більш імовірним є  $\beta^+$  – розпад, а у важких – е-захоплення?

Це пов'язане з тим, що в легких та середніх ядрах імовірність знаходження електрона з  $K$ -шару в об'ємі, зайнятому ядром є надзвичайно малою порівняно з імовірністю знаходження ззовні. Це відношення дорівнює  $(ZR/a_0)^3$ , де  $R = R_0 A^{1/3} \approx 2 \cdot 10^{-13} \div 10^{-12}$  (см) – радіус ядра,  $a_0$  – радіус першої борівської орбіти,  $Z$  – заряд ядра, тому відношення  $(ZR/a_0)^3 \approx 10^{-15} \div 10^{-9}$ . Оскільки для важких ядер радіус ядра зростає, а радіус  $K$ -шару  $a_0/Z$  навпаки, зменшується, то відношення  $(ZR/a_0)^3 \sim Z^3 A^{1/3}$  значно збільшується. Основним процесом, який іде у важких ядрах, перевантажених протонами, є  $e$  – захоплення.

8. Що таке дозволений та заборонений  $\beta$ -спектр? Пояснити ефекти збагачення та збіднення низькоенергетичної частини  $\beta$ -спектру.

Функція розподілу  $\beta$ -електронів за енергіями має вигляд [2, с.227]:

$$\frac{dN}{dE} = N_0 B \sqrt{E(E + 2mc^2)} (E + mc^2) (E_m - E)^2, \quad (1)$$

де  $B = \frac{16\pi^2}{c^4} D$ ,  $D$  — константа, яка характеризує інтенсивність

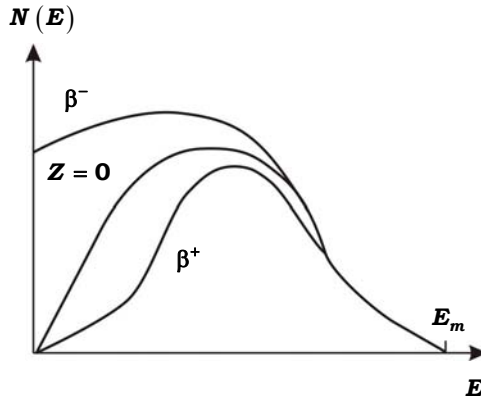
слабкої взаємодії,  $E_m$  — максимальна енергія  $\beta$ -спектру. У випадку дуже малих енергій електрона (нерелятивістський випадок) формула (9.1) спрощується:

$$N(E) \approx \sqrt{E} (E_m - E)^2, E \ll m_0 c^2; \quad (2)$$

а в ультрарелятивістському випадку набуває вигляду:

$$N(E) \approx E^2 (E_m - E)^2, E \gg m_0 c^2. \quad (3)$$

Якщо  $\beta$ -спектри описуються формулами (1)-(3), в такому випадку вони називаються дозволеними. Якщо форма спектру відрізняється від дозвленої, він називається забороненим. Відхилення спектра від дозвोलеного свідчить про вплив структури ядра на процес  $\beta$ -розпаду.



**Рис. 4.2. Збагачення та збіднення низькоенергетичної частини  $\beta$  – спектрів внаслідок взаємодії з кулонівським полем ядра. Крива  $Z = 0$  відповідає гіпотетичному випадку незарядженого ядра.**

Якщо  $\beta$  – електрон має малу енергію, форма спектру спотворюється за рахунок взаємодії електрона з кулонівським полем ядра. У випадку  $\beta^-$  – розпаду кулонівське поле зменшує енергію електрона, оскільки на нього діють сили притягання, а у випадку  $\beta^+$  – розпаду енергія позитрону зростає внаслідок дії відштовхувального потенціалу. В результаті  $\beta^-$  – спектри збагачуються, а  $\beta^+$  – спектри збіднюються на низькоенергетичні частинки (див. Рис. 4.2). Якщо врахувати кулонівські ефекти, функція (1) набуде вигляду:

$$\frac{dN}{dE} = N_0 B_{\text{сп}} (E + m_e c^2) (E_m - E)^2 F(Z, E), \quad (3)$$

де функція  $F(Z, E)$  точно обраховується.

9. Коли вперше було зареєстровано дію вільних антинейтрино на ядерні процеси?

Вперше такий дослід було здійснено в США Рейнесом та Коуеном у 1953р. Можливість така з'явилась лише після створення потужних ядерних реакторів, оскільки переріз взаємодії антинейтрино з ядрами дуже малий —  $\sigma_{\bar{\nu}_e} \approx 10^{-43} \text{ см}^2$ . Уламки ділення в реакторах перевантажені нейтронами, тому вони є  $\beta^-$  – радіоактивними. При

потужності реактора 100 МВт густина потоку антинейтрино складає близько  $10^{19} \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$ . В досліді було зареєстровано реакцію зворотного  $\beta^-$  – розпаду:  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + \beta^+$ . В якості мішені було використано два шари води по 7 см кожен. В процесі тривалої роботи детектор реєстрував в середньому  $2,88 \pm 0,22$  імпульсів за годину.

10. Як можна визначити експериментально енергію нейтрино?

Найзручнішим способом є визначення енергії віддачі легкого ядра в процесі К - захоплення, оскільки в такому випадку сумарний імпульс нейтрино та ядра дорівнюватиме нулеві. Ідея досліді була запропонована А.І.Аліхановим та А.І.Аліханьяном, сам дослід здійснено у 1942р. Дж.Алленом (США). В якості вихідного ядра було використано найбільш легке ядро, в якому відбувається К - захоплення —  ${}^7_4\text{Be}$ . Реакція відбувається наступним чином:

${}^7_4\text{Be} + \beta^- \rightarrow {}^7_3\text{Li} + \nu_e$ . Енергія такої реакції

$Q = M_{\text{ат}}({}^7_4\text{Be}) - M_{\text{ат}}({}^7_3\text{Li}) = 0,864 \text{ MeV}$ . Закон збереження імпульсу має вигляд:  $\vec{p}_{\text{Li}} + \vec{p}_{\nu} = 0$ , тому кінетична енергія ядра віддачі становитиме

$E_{\text{Li}} = \frac{p_{\text{Li}}^2}{2M_{\text{Li}}} = \frac{p_{\nu}^2 c^2}{2M_{\text{Li}} c^2} \approx \frac{Q^2}{2M_{\text{Li}} c^2}$ , оскільки нейтрино виносить практично

всю енергію реакції. Кінетичну енергію літію можна визначити експериментально та порівняти з виведеною формулою, що й було зроблено.

11. Згідно теорії імовірності, імовірність переходу з якогось конкретного стану пропорційна до кількості можливих кінцевих станів, в які система може перейти. Під час  $\beta^-$  – розпаду електрон та нейтрино розглядають як вільні частинки, якщо їх енергія перевищує потенціал іонізації К-оболонки. Енергія  $\beta^-$  – розпаду перерозподіляється між електроном та нейтрино пропорційно до кількості рівнів в кінцевому стані, віднесений до одиничного інтервалу енергії:  $dN/dE$  – густина станів,  $E$  – енергія електрона

або нейтрино. Величина  $dN/dE$  набуватиме різних значень для різних розподілів загальної енергії  $\beta^-$  – розпаду між електроном та нейтрино. Розрахуйте цю величину, яка пропорційна до густини

імовірності розподілу енергії електрона або нейтрино (спіни частинок не враховувати).

Спектр вільних частинок є неперервним, проте якщо частинки знаходяться в деякому об'ємі квантування  $V = a^3$ , спектр стає дискретним. Об'єм квантування визначається зазвичай з умови періодичності хвильової функції частинки на протилежних гранях. При цьому весь простір можна розділити на щільну послідовність таких об'ємів. Наприклад, під час руху вздовж осі  $x$  довжина хвилі де Бройля  $\lambda = \frac{h}{p_x}$  повинна вкладатись ціле число разів вздовж грані куба,

рівної  $a$ . Таким чином, отримуємо відношення  $\frac{a}{\lambda} = \frac{ap_x}{h} = N$ , де  $N$  —

ціле число. Відстань між рівнями складає  $dp_x = \frac{h}{a}$ . Аналогічно проводиться розгляд для інших координатних осей. В імпульсному просторі, в якому вздовж осей відкладено  $p_x, p_y, p_z$ , в об'ємі  $\frac{(2\pi\hbar)^3}{a^3}$  знаходиться лише один рівень.

Кількість станів нейтрино та електрона в фазовому просторі дорівнює:

$$dN = \frac{4\pi p_e^2 dp_e 4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{(2\pi\hbar)^6} V^2 = 4\pi p_e^2 dp_e 4\pi p_\nu^2 dp_\nu,$$

оскільки всі напрямки є рівноправними, нескінченно малий об'єм всередині фазової траєкторії записується як  $4\pi V p^2 dp$ , де  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ . Оскільки ми маємо справу з двома частинками, кількість станів дорівнює добутку можливих станів для електрона та нейтрино.

Використаємо релятивістський вираз для енергії частинок:

$$E_\nu^2 = p_\nu^2 c^2 \Rightarrow p_\nu dp_\nu = \frac{E_\nu}{c^2} dE_\nu;$$

$$E_e^2 - m_e^2 c^4 = p_e^2 c^2 \Rightarrow p_e dp_e = \frac{E_e}{c^2} dE_e,$$

співвідношення  $dE_e = dE_\nu = dE$  та закон збереження енергії  $E = E_e + E_\nu$ , та отримуємо вираз для густини станів:



$$\rho = \frac{dN}{dE} = \frac{16\pi^2}{c^6} E_v^2 \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} E_e dE_e = \frac{16\pi^2}{c^6} (E - E_e)^2 E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} dE_e,$$

тут  $m_e$  – маса спокою електрона,  $m_v \approx 0$ .

12. Який вигляд мало б навколишнє середовище, якби слабка взаємодія зникла?

Якщо б така взаємодія зникла під час Великого Вибуху (в перші долі секунди), то з кварків утворилися б нейтрони та протони (порівну), з яких дуже швидко утворилися б дейтрони, а потім – також дуже швидко – альфа-частинки. Після охолодження і подальшого розширення Всесвіту відбулося б захоплення електронів і Всесвіт став би гелійовим. З гелію поступово утворилися б скупчення, аналогічні зіркам, але це були б холодні і невидимі об'єкти, тому що термоядерні реакції за участю ядер гелію потребують дуже високої температури, яка недосяжна без попереднього розігріву центру зірки за рахунок водневих реакцій, які неможливі без слабкої взаємодії (більш детально нижче). Рідкі і яскраві спалахи були б можливі тільки тоді, коли стикалися б такі холодні зірки і утворювалися дуже великі маси, що є умовою для гравітаційного колапсу і вибуху Наднових зірок.

Якби ця взаємодія зникла б пізніше (після 3 секунд з часу Великого Вибуху і після початкової стадії розширення), то Всесвіт складався б з водню (75%) та гелію (25%). Поступово, за рахунок сил гравітації і структурування Всесвіту, ці атоми об'єдналися б у зірки. Оскільки початковою реакцією ядерного синтезу у зірках є  $p + p \rightarrow {}^2_1\text{d} + \beta^+ + \nu_e$ , то неможливість слабкої взаємодії зупинила б початок ядерних перетворень в зірках, а значить і їх розігрів за рахунок цих реакцій. Був би тільки невеликий розігрів за рахунок стискання, але такі об'єкти швидко охолоджуються. Реакції за участю  $\alpha$ -частинок потребують дуже високої температури, яка недосяжна без попереднього розігріву центру зірки за рахунок "водневих" реакцій. Синтез важких елементів був би неможливий. Тому у Всесвіті була б повна темрява.

Якщо ж припустити, що слабка взаємодія зникла пізніше, то зросла б кількість стабільних частинок. Зокрема, підвищилася б частка стабільних нуклідів, світ став би більш різноманітним.

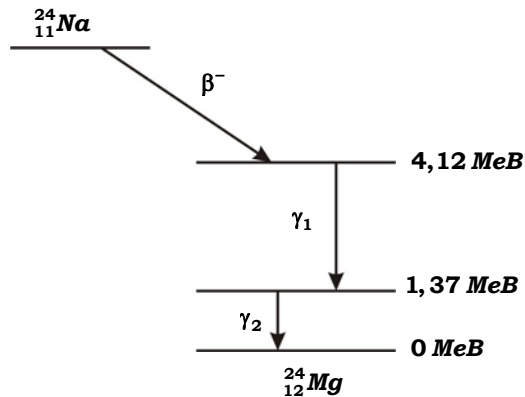
## 5. ГАММА-ВИПРОМІНЮВАННЯ. ЕФЕКТ МЕСБАУЕРА

### 5.1. Теоретичні відомості

Гамма-випромінювання виникає під час переходів атомних ядер зі збуджених на більш низькі енергетичні рівні. В таких процесах не змінюється кількість протонів та нейтронів у ядрі, лише випромінюються  $\gamma$ -кванти. Спектр  $\gamma$ -випромінювання завжди дискретний, енергія квантів знаходиться в діапазоні приблизно від 5 KeV до 10–15 MeV.

Зняття збудження ядра за допомогою  $\gamma$ -випромінювання може відбуватись як за рахунок однократного випромінювання, так і за рахунок каскадних переходів (послідовного випускання кількох  $\gamma$ -квантів). Як приклад можна навести схему  $\beta$ -розпаду ізотопу  ${}^{24}_{11}\text{Na}$ , зображену на Рис. 5.1. В результаті такого розпаду утворюється ізотоп  ${}^{24}_{12}\text{Mg}$  у другому збудженому стані, перехід до нормального стану супроводжується випромінюванням двох  $\gamma$ -квантів з енергіями 2,75 MeV та 1,37 MeV.

Збуджене ядро може перейти до основного стану шляхом передачі надлишкової енергії електрону атомної оболонки ( $K$ -,  $L$ -,  $M$ -електрону тощо). Такий процес конкурує з процесом  $\gamma$ -випромінювання і називається *внутрішньою конверсією*, а випромінені електрони називаються *конверсійними електронами*. Оскільки процес такої передачі пов'язаний з безпосередньою взаємодією атомного електрона з нуклонами, то найбільшу ймовірність має внутрішня конверсія за участю  $K$ -електронів, які мають найбільшу ймовірність знаходження в ядрі. Відношення середньої кількості конверсійних електронів до середньої кількості випромінених  $\gamma$ -квантів для даного переходу називають *коефіцієнтом внутрішньої конверсії*. Для ядер з великим часом життя коефіцієнт конверсії може бути дуже великим і досягати декількох тисяч. І навпаки, для короткоживучих ядер цей коефіцієнт значно менший за одиницю. Внутрішня конверсія супроводжується рентгенівським випромінюванням, яке виникає в результаті каскадних переходів між електронними оболонками під час заповнення вакансії, утвореної конверсійним електроном.



**Рис. 5.1. Схема  $\beta^-$  – розпаду ізотопу  $^{24}_{11}\text{Na}$**

У випадку повністю іонізованого атома процес внутрішньої конверсії стає неможливим, що збільшує повний час життя ядра.

Ядерні  $\gamma$  – переходи характеризуються такими ж правилами відбору по орбітальному, магнітному та спіновому квантовим числам, як і електронні переходи.

Якщо  $\gamma$  – активне ядро утворюється в невисокому збудженому стані, перехід з якого заборонений в дипольному наближенні і може відбутися лише за рахунок переходів вищої мультипольності, то час життя такого ядра різко зростає. Збільшенню часу життя також сприяє мала енергія збудженого стану. Дія цих двох факторів приводить до того, що можуть існувати ядерні переходи з дуже великим часом життя (від часток секунди до багатьох днів – наприклад у ядра  $^{119}\text{Sn}^m$  час життя перевищує 250 днів). Ядра в такому випадку називають *ізомерами* і позначають верхнім індексом  $m$  (від англ. metastable), наприклад,  $^{234}_{91}\text{Pa}^m$ ,  $^{80}_{35}\text{Br}^m$ ,  $^{124}_{51}\text{Sb}^m$ .

Під час випромінювання та поглинання  $\gamma$  – квантів вільними ядрами, слід враховувати ефект віддачі ядра, на який витрачається частина енергії ядерного переходу. Кінетична енергія віддачі при випромінюванні та поглинанні  $\gamma$  – кванта вільним ядром приблизно дорівнює:

$$E_{\text{кя}} \approx \frac{E^{*2}}{2M_{\text{я}}c^2},$$

де  $E^*$  – енергія збудження ядра.

Таким чином, за рахунок віддачі енергія  $\gamma$  – кванта зменшується на величину  $E_{кя}$ :  $E_{\gamma} = E - E_{кя}$ . Лінії випромінювання та поглинання  $\gamma$  – квантів зсунуті на величину:

$$\Delta E = E'_{\gamma} - E_{\gamma} \approx 2E_{кя}$$

Для можливості резонансного поглинання  $\gamma$  – кванта, який випромінюється аналогічним збудженим ядром, необхідне виконання умови  $\Gamma \geq E_{кя}$ , де  $\Gamma$  – ширина лінії випромінювання або поглинання. Існує кілька механізмів уширення спектральної лінії. Для ядер, які входять до складу вільних атомів або молекул (газ, плазма) найбільше значення має доплерівське уширення, обумовлене тепловим рухом атомів:

$$\Gamma_{don} = \frac{E}{c} \sqrt{\frac{2kT}{M_{яд}}}$$

Для ядер, що входять до складу атомів, які знаходяться в конденсованому стані (в твердому тілі або рідині) основний механізм уширення пов'язаний з наявністю спектру теплових коливань середовища, який в узагальненому вигляді характеризується температурою Дебая  $T_D$ . По порядку величини для більшості речовин  $T_D \approx 300 - 1000^{\circ}\text{C}$ . Наближено можна вважати, що в цьому випадку ширина спектру випромінювання або поглинання визначається попередньою формулою, в яку замість температури газу треба підставити температуру Дебая.

Якщо поглинання відбувається на вільному ядрі, ширина лінії називається *природною*, вона обумовлена скінченим часом життя  $\tau$  ядра в збудженому стані:

$$\Gamma_{np} \approx \frac{\hbar}{\tau}$$

Зазвичай величина природного уширення становить  $\Gamma_{np} \approx 10^{-8} \text{ eV}$  і  $\Gamma_{np} \ll E_{кя}$ , так що резонансне поглинання на вільних атомах неможливе. Для забезпечення резонансного поглинання раніше (до відкриття ефекту Месбауера) використовували ефект Доплера – рухали поглинаючі ядра назустріч випромінюючим з такою швидкістю, яка дозволяє компенсувати зсув лінії випромінювання за рахунок ефекту квантової віддачі. Як правило, ця швидкість відповідала величині в декілька сотень метрів за секунду.

У 1958 р. Месбауер вперше експериментально дослідив резонансне поглинання  $\gamma$ -квантів в кристалах  $^{191}_{77}\text{Ir}$ . Було доведено, що таке резонансне поглинання та випромінювання відбувається *без передачі енергії від ядра до кристалічної ґратки*. Такий ефект спостерігається за рахунок досить сильної колективної взаємодії між ядрами в кристалічній ґратці, а його ймовірність зростає при зменшенні температури ґратки, збільшенні енергії хімічного зв'язку між атомами в ґратці, зменшенні енергії переходу та при збільшенні маси ядер. Для характеристики відносної кількості процесів випромінювання  $\gamma$ -квантів без віддачі імпульсу вводиться ймовірність ефекту Месбауера:

$$f = \exp\left(-\frac{\langle r^2 \rangle}{\lambda^2}\right),$$

де  $\langle r^2 \rangle$  — середнє значення амплітуди теплових коливань атома в матриці кристалу в напрямку випромінювання або поглинання кванта,  $\lambda$  — довжина хвилі  $\gamma$ -кванта.

Найбільше значення  $f$ -коефіцієнту має ізоотоп  $^{57}_{26}\text{Fe}$ , у якого  $f > 0,5$  при кімнатній температурі і зростає при її зниженні. Для деяких ізоотопів ця величина дуже мала. Наприклад, для ізоотопу  $^{191}_{77}\text{Ir}$ , на якому Месбауер зробив своє відкриття,  $f \approx 0,02$  при температурі рідкого гелію.

Роздільна здатність методу месбауерівської спектроскопії характеризується відносною шириною лінії  $\Gamma/E$ . Найбільшу роздільну здатність з досліджених ізоотопів має ізоотоп  $^{67}_{30}\text{Zn}$ :  $\Gamma/E \approx 5 \cdot 10^{-16}$ , проте недоліком цього ізоотопу є низький  $f$ -коефіцієнт, який навіть при  $T = 4 \text{ K}$  становить лише  $f \approx 0,3$ .

За допомогою ефекту Месбауера були досліджені такі прецизійні явища, як *гравітаційне зміщення* спектральних ліній (дослід Паунда та Ребке, 1959 р.), вплив електронних оболонок на процеси, що відбуваються всередині ядра тощо.

## 5.2. Приклади розв'язку задач

**Приклад 1.** Ізотопне ядро  $^{109}\text{Ag}^m$  під час переходу до основного стану випромінює або  $\gamma$  – квант з енергією  $87\text{keV}$ , або конверсійний К-електрон з параметром  $B_r = 860\text{ Гс} \cdot \text{см}$ . Розрахувати енергію зв'язку К-електрона.

**Розв'язання:** Перетворення ізотопного ядра  $^{109}\text{Ag}^m$  відбувається за двома можливими каналами, що конкурують між собою:

$$^{109}_{47}\text{Ag}^m \rightarrow ^{109}_{47}\text{Ag} + \gamma; \quad (5.1.1)$$

$$^{109}_{47}\text{Ag}^m \rightarrow ^{109}_{47}\text{Ag}^+ + \beta^-. \quad (5.1.2)$$

Для характеристики імовірності перетворення за каналом (5.1.2) вводить коефіцієнт внутрішньої конверсії, що дорівнює відношенню імовірності випускання конверсійного електрона до імовірності випромінювання  $\gamma$  – кванта. Як правило, коефіцієнти внутрішньої конверсії є набагато меншими за одиницю (див. приклад 2).

Під час подальших розрахунків будемо вважати, що материнське ядро знаходиться у спокої. Запишемо закон збереження енергії для реакції (5.1.1):

$$E^* = E_{\text{KAg}} + \hbar\omega, \quad (5.1.3)$$

де  $E^*$  — енергія збудження ізотопного ядра  $^{109}\text{Ag}^m$ ,  $E_{\text{KAg}}$  — кінетична енергія ядра віддачі. Приймаючи до уваги, що початковий імпульс ядра нульовий, виразимо зв'язок між енергіями  $\gamma$  – кванта та ядра віддачі:

$$E_{\text{KAg}} = \frac{p^2}{2m_{\text{Ag}}} = \frac{(\hbar\omega)^2}{2m_{\text{Ag}}c^2}, \quad (5.1.4)$$

де враховано, що  $\hbar\omega = pc$ ,  $p$  — імпульс  $\gamma$  – кванта. З урахуванням (5.1.4), рівняння (5.1.3) перепишемо наступним чином:

$$E^* = \frac{(\hbar\omega)^2}{2m_{\text{Ag}}c^2} + \hbar\omega. \quad (5.1.5)$$

Закон збереження енергії для реакції (5.1.2) матиме вигляд:

$$E^* = E'_{\text{KAg}} + E_{\text{ze}} + E_{\beta}, \quad (5.1.6)$$

де  $E'_{\text{KAg}}$  — кінетична енергія ядра віддачі в реакції (5.1.2),  $E_{\text{ze}}, E_{\beta}$  — енергія зв'язку в дочірньому атомі та кінетична енергія конверсійного електрона. Зв'язок між кінетичною енергією релятивістського

електрона та його імпульсом в загальному випадку записується так:

$$E_{\beta} = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2. \quad (5.1.7)$$

Враховуючи, що імпульс електрона, який рухається в однорідному магнітному полі з індукцією  $B$  в площині, перпендикулярній до силових ліній поля, дорівнює (в системі СІ):

$$p = eB\rho, \quad (5.1.8)$$

де  $\rho$  — радіус траєкторії електрона, перепишемо вираз (5.1.7):

$$E_{\beta} = \sqrt{(eB\rho c)^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 = m_e c^2 \left( -1 + \sqrt{\left( \frac{eB\rho}{m_e c} \right)^2 + 1} \right). \quad (5.1.9)$$

Імпульси продуктів реакції (5.1.2) рівні, оскільки материнське ядро знаходилося у спокої. В такому разі можемо з (5.1.7) виразити імпульс електрона:

$$\begin{aligned} (E_{\beta} + m_e c^2)^2 &= p^2 c^2 + m_e^2 c^4 \Rightarrow \\ p^2 &= \frac{E_{\beta}^2 + 2m_e c^2 E_{\beta}}{c^2} \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

та підставити його у вираз для кінетичної енергії ядра віддачі:

$$E'_{kAg} = \frac{p^2}{2m_{Ag}} = \frac{E_{\beta}^2 + 2m_e c^2 E_{\beta}}{2m_{Ag} c^2}. \quad (5.1.11)$$

З урахуванням (5.1.11), закон збереження енергії (5.1.6) перепишеться так:

$$E^* = \frac{E_{\beta}^2}{2m_{Ag} c^2} + \left( 1 + \frac{m_e}{m_{Ag}} \right) E_{\beta} + E_{ze} \approx \frac{E_{\beta}^2}{2m_{Ag} c^2} + E_{\beta} + E_{ze}, \quad (5.1.12)$$

оскільки виконується співвідношення  $m_e \ll m_{Ag}$ , причому  $E_{\beta}$  задається виразом (5.1.9). З (5.1.12) знаходимо енергію зв'язку конверсійного електрона:

$$E_{ze} = E^* - \frac{E_{\beta}^2}{2m_{Ag} c^2} - E_{\beta}, \quad (5.1.13)$$

або, приймаючи до уваги (5.1.5),

$$E_{\text{зв}} = \frac{(\hbar\omega)^2}{2m_{\text{Ag}}c^2} + \hbar\omega - \frac{E_{\beta}^2}{2m_{\text{Ag}}c^2} - E_{\beta}. \quad (5.1.14)$$

Вираз (5.1.14) можна суттєво спростити, якщо врахувати, що  $(\hbar\omega)^2, E_{\beta}^2 \ll 2m_{\text{Ag}}c^2$ ; в такому разі отримуємо наближену формулу для розрахунку енергії зв'язку К-електрона:

$$E_{\text{зв}} \approx \hbar\omega - E_{\beta} = \hbar\omega + m_e c^2 \left( 1 - \sqrt{\left( \frac{eB\rho}{m_e c} \right)^2 + 1} \right). \quad (5.1.15)$$

Підставивши в (5.1.15) дані з умови задачі, отримаємо:

$$E_{\text{зв}} \approx 87 \cdot 10^3 \text{ eV} - 0,511 \cdot 10^6 \text{ eV} \left( \sqrt{\left( \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 860 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} \cdot \text{м}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} \right)^2 + 1} - 1 \right) =$$

$$= 25,8 \cdot 10^3 \text{ eV} \approx 26 \text{ кеВ}.$$

Точний розрахунок за формулою (5.1.14) приводить до наступного результату:

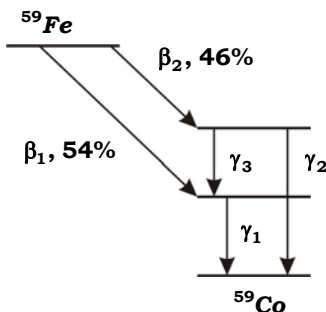
$$E_{\text{зв}} = 87 \cdot 10^3 - 61,2 \cdot 10^3 + \frac{(87)^2 \cdot 10^6}{2 \cdot 109 \cdot 931,5 \cdot 10^6} - \frac{61,2^2 \cdot 10^6}{2 \cdot 109 \cdot 931,5 \cdot 10^6} =$$

$$= 25,8 \cdot 10^3 + 1,88 \cdot 10^{-2} (\text{кеВ}).$$

Як бачимо, похибка внаслідок неврахуванням двох малих доданків у (5.1.14) складає лише  $7 \cdot 10^{-5} \%$ .

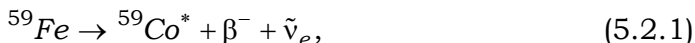
**Приклад 2.** Знайти кількість конверсійних електронів, що випускаються за  $t = 1 \text{ с}$  препаратом  $^{59}\text{Fe}$ , активність якого  $3,7 \cdot 10^7 \text{ Бк}$ . Схему  $\beta$ -розпаду ядер  $^{59}\text{Fe}$  зображено на Рис. 5.2. Коефіцієнти внутрішньої конверсії відповідних  $\gamma$ -квантів порівнюють:  $\alpha_{\gamma 1} = 1,8 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha_{\gamma 2} = 1,4 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha_{\gamma 3} = 7 \cdot 10^{-3}$ . Ймовірності випромінювання квантів  $\gamma_2$  та  $\gamma_3$  відносяться як 1:15.





**Рис. 5.2. Схема розпаду ізотопу  $^{59}\text{Fe}$**

**Розв'язання:** Запишемо реакцію  $\beta$  – розпаду ядер  $^{59}\text{Fe}$  :



Позначимо:  $N_0 = 3,7 \cdot 10^7$  — кількість збуджених ядер  $^{59}\text{Co}^*$ , які утворюються щосекунди,  $\eta = 0,46$  — відносна кількість ядер  $^{59}\text{Co}^*$ , що утворюються в другому збудженому стані, після чого відбувається випромінювання квантів  $\gamma_2$  та  $\gamma_3$ ,  $1 - \eta = 0,54$  — відносна кількість ядер  $^{59}\text{Co}^*$ , які утворюються в першому збудженому стані, причому збудження знімається шляхом випромінювання кванта  $\gamma_1$ . Згідно визначення, коефіцієнти внутрішньої конверсії дорівнюють:

$$\alpha_1 = \frac{N_{K1}}{N_{\gamma1}}; \alpha_2 = \frac{N_{K2}}{N_{\gamma2}}; \alpha_3 = \frac{N_{K3}}{N_{\gamma3}}, \quad (5.2.2)$$

де  $N_{\gamma1}, N_{\gamma2}, N_{\gamma3}$  — кількість  $\gamma$  – квантів  $\gamma_1, \gamma_2$  та  $\gamma_3$ ,  $N_{K1}, N_{K2}, N_{K3}$  — кількість відповідних конверсійних електронів, що випромінюються за одиницю часу. Крім того, згідно умови, маємо відношення ймовірностей випромінювання квантів  $\gamma_2$  та  $\gamma_3$  :

$$\frac{w_{\gamma2}}{w_{\gamma3}} = \frac{N_{\gamma2}}{N_{\gamma3}} = \frac{1}{15} = \frac{1}{k}. \quad (5.2.3)$$

Будемо вважати, що переходи зі збуджених станів дочірнього ядра  $^{59}\text{Co}^*$  відбуваються миттєво, тобто кількість ядер, що утворюються, дорівнює кількості ядер, що розпадаються (умова рівноваги). У випадку, коли ядро  $^{59}\text{Co}^*$  утворюється на другому збудженому рівні, рівноважне рівняння запишеться так:

$$\eta N_0 = N_{\gamma 3} + N_{K3} + N_{\gamma 2} + N_{K2}, \quad (5.2.4)$$

аналогічно, у випадку утворення ядер  $^{59}\text{Co}^*$  на першому збудженому рівні

$$(1 - \eta)N_0 + N_{\gamma 3} + N_{K3} = N_{\gamma 1} + N_{K1}. \quad (5.2.5)$$

У лівій частині (5.2.5) враховано, що ядра  $^{59}\text{Co}^*$  перейшли з другого збудженого рівня на перший шляхом випромінювання квантів  $\gamma_3$  та відповідних конверсійних електронів. Приймаючи до уваги (5.2.2), рівняння (5.2.4) та (5.2.5) перепишемо наступним чином:

$$\eta N_0 = N_{\gamma 3} (1 + \alpha_3) + N_{\gamma 2} (1 + \alpha_2), \quad (5.2.6)$$

$$(1 - \eta)N_0 + N_{\gamma 3} (1 + \alpha_3) = N_{\gamma 1} (1 + \alpha_1). \quad (5.2.7)$$

З рівняння (5.2.6), з урахуванням (5.2.3), виражаємо кількість квантів  $\gamma_2$ :

$$\eta N_0 = N_{\gamma 2} (k(1 + \alpha_3) + 1 + \alpha_2) \Rightarrow N_{\gamma 2} = \frac{\eta N_0}{k(1 + \alpha_3) + 1 + \alpha_2}, \quad (5.2.8)$$

і відповідну кількість конверсійних електронів  $N_{K2}$ :

$$N_{K2} = \alpha_2 N_{\gamma 2} = \frac{\eta \alpha_2 N_0}{k(1 + \alpha_3) + 1 + \alpha_2}. \quad (5.2.9)$$

Кількість конверсійних електронів  $N_{K3}$  знайдемо з наступної рівності:

$$N_{K3} = \alpha_3 N_{\gamma 3} = \alpha_3 k N_{\gamma 2} = \frac{\eta \alpha_3 k N_0}{k(1 + \alpha_3) + 1 + \alpha_2}. \quad (5.2.10)$$

Приймаючи до уваги (5.2.10), з (5.2.7) можемо знайти число квантів  $\gamma_1$ , які щосекунди випромінюються радіоактивним препаратом:

$$\begin{aligned} N_{\gamma 1} &= \frac{(1 - \eta)N_0 + N_{\gamma 3} (1 + \alpha_3)}{1 + \alpha_1} = \frac{(1 - \eta)N_0 + \frac{\eta k N_0 (1 + \alpha_3)}{k(1 + \alpha_3) + 1 + \alpha_2}}{1 + \alpha_1} = \\ &= N_0 \frac{k(1 + \alpha_3) + (1 - \eta)(1 + \alpha_2)}{(1 + \alpha_1)(k(1 + \alpha_3) + 1 + \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Кількість конверсійних електронів  $N_{K1}$  з (5.2.11)

$$N_{K1} = \alpha_1 N_{\gamma 1} = N_0 \alpha_1 \frac{k(1+\alpha_3) + (1-\eta)(1+\alpha_2)}{(1+\alpha_1)(k(1+\alpha_3) + 1 + \alpha_2)}. \quad (5.2.12)$$

Таким чином, сумарна кількість конверсійних електронів, які випускаються щосекунди препаратом  $^{59}\text{Fe}$ , становитиме:

$$\begin{aligned} N_K &= N_{K1} + N_{K2} + N_{K3} = N_0 \alpha_1 \frac{k(1+\alpha_3) + (1-\eta)(1+\alpha_2)}{(1+\alpha_1)(k(1+\alpha_3) + 1 + \alpha_2)} + \\ &+ \frac{\eta \alpha_2 N_0}{k(1+\alpha_3) + 1 + \alpha_2} + \frac{\eta \alpha_3 k N_0}{k(1+\alpha_3) + 1 + \alpha_2} = \\ &= N_0 \frac{\alpha_1 (k(1+\alpha_3) + (1-\eta)(1+\alpha_2)) + \eta(\alpha_2 + \alpha_3 k)(1+\alpha_1)}{(1+\alpha_1)(k(1+\alpha_3) + 1 + \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Підставляючи у (5.2.13) дані з умови задачі, знаходимо:

$$\begin{aligned} N_K &= 3,7 \cdot 10^7 \left\{ \frac{1,8 \cdot 10^{-4} (15(1+7 \cdot 10^{-3}) + 0,54(1+1,4 \cdot 10^{-4}))}{(1+1,8 \cdot 10^{-4})(15(1+7 \cdot 10^{-3}) + 1+1,4 \cdot 10^{-4})} + \right. \\ &+ \left. \frac{0,46(1,4 \cdot 10^{-4} + 15 \cdot 7 \cdot 10^{-3})(1+1,8 \cdot 10^{-4})}{(1+1,8 \cdot 10^{-4})(15(1+7 \cdot 10^{-3}) + 1+1,4 \cdot 10^{-4})} \right\} = 1,18 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

**Приклад 3.** Вільне ядро масою  $M$ , що знаходилося у спокої, перейшло зі збудженого стану до основного, випроменивши  $\gamma$ -квант. Знайти: а) енергію випроміненого  $\gamma$ -кванта та енергію віддачі  $E_{\text{від}}$  ядра, якщо енергія збудження складає  $E_{12}$ . Отримати числове значення для ядра  $^{191}\text{Ir}$ , якщо  $E_{12} = 129 \text{ кеВ}$ ; б) різницю енергій випроміненого та поглинутого  $\gamma$ -квантів у випадку вільних ядер. Порівняти цю різницю з природною ( $\Gamma$ ) та доплерівською шириною ліній (доплерівська ширина дорівнює  $E_d = E_{12} \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}}$ ) при  $T = 300 \text{ К}$ ; в) температуру  $T_0$ , при якій доплерівська ширина дорівнюватиме різниці енергій для випромінювання та поглинання.

**Розв'язання:** а) позначимо:  $M'$  – маса ядра після випускання  $\gamma$ -кванта. Тоді енергія збудження  $E_{12} = (M - M')c^2$ ,  $\omega_0 = \frac{E_{12}}{\hbar}$  – частота резонансної лінії Месбауера, що відповідає випромінюванню квантів без ефекту віддачі ядер.

Для урахування ефекту віддачі  $\gamma$ -квант, що випроменився, будемо спостерігати в системі координат, де ядро до взаємодії знаходилося у спокої. Запишемо закони збереження енергії та імпульсу:

$$E_{12} = \hbar\omega_{\text{випр}} + \frac{p^2}{2M'}, \quad (5.3.1)$$

$$p = \frac{\hbar\omega_{\text{випр}}}{c}, \quad (5.3.2)$$

де  $p$  – імпульс віддачі ядра,  $\frac{\hbar\omega_{\text{випр}}}{c}$  – імпульс  $\gamma$ -кванта.

Підставивши в (5.3.1) вираз для імпульсу (5.3.2), отримаємо:

$$E_{12} = \hbar\omega_{\text{випр}} + \frac{(\hbar\omega_{\text{випр}})^2}{2M'c^2}. \quad (5.3.3)$$

Це рівняння легко розв'язати відносно  $\hbar\omega$ :

$$\hbar\omega_{\text{випр}} = E_{\gamma} = -M'c^2 + M'c^2 \sqrt{1 + \frac{2E_{12}}{M'c^2}} = M'c^2 \left( \sqrt{1 + \frac{2E_{12}}{M'c^2}} - 1 \right). \quad (5.3.4)$$

Очевидно, що  $2E_{12} \ll M'c^2$ , в такому разі можна розкласти підкореневий вираз у (5.3.4) в ряд Тейлора за малим параметром  $\frac{2E_{12}}{M'c^2}$  й отримати наближений вираз для енергії  $\gamma$ -кванта:

$$\hbar\omega_{\text{випр}} \approx M'c^2 \left( \frac{E_{12}}{M'c^2} - \frac{E_{12}^2}{2M'^2c^4} \right) = E_{12} - \frac{E_{12}^2}{2M'c^2}, \quad (5.3.5)$$

Рівняння (5.3.5) можна переписати так:

$$E_{12} = \hbar\omega_{\text{випр}} + \frac{E_{12}^2}{2Mc^2}, \quad (5.3.6)$$

де враховано також, що  $M' \approx M$ . Таким чином, кінетична енергія ядра віддачі  $E_{\text{від}} = \frac{E_{12}^2}{2Mc^2}$ , а енергія випроміненого  $\gamma$ -кванта

$$\hbar\omega_{\text{випр}} = \hbar\omega_0 - \frac{E_{12}^2}{2Mc^2}. \quad \text{Підставивши параметри для ядра } {}^{191}\text{Ir},$$

$$\text{знайдемо } E_{\text{від}}({}^{191}\text{Ir}) = \frac{129^2 \cdot 10^6}{2 \cdot 191 \cdot 931,5 \cdot 10^6} \approx 0,05 \text{ eB}, \quad \hbar\omega \approx E_{12} = 129 \text{ кеВ}.$$

Відносна зміна енергії  $\gamma$ -кванта під час випромінювання дорівнюватиме:

$$\frac{\hbar\Delta\omega}{\hbar\omega_0} = \frac{E_{\text{від}}}{E_{12}} = \frac{E_{12}}{2Mc^2} = \frac{129 \cdot 10^3}{2 \cdot 191 \cdot 931,5 \cdot 10^6} \approx 3,6 \cdot 10^{-7}. \quad (5.3.7)$$

б) Подивимось тепер, як змінюватиметься енергія  $\gamma$ -кванта за рахунок віддачі під час поглинання його таким самим вільним ядром з масою  $M$ . Очевидно, що в цьому випадку енергії  $\gamma$ -кванта, який поглинається, повинно вистачити для збудження ядра та компенсації енергії віддачі, що виникає під час поглинання:

$$\hbar\omega_{\text{погл}} = E_{12} + \frac{p^2}{2M'}, \quad (5.3.8)$$

де  $E_{12}$  — енергія збудження ядра, що поглинає  $\gamma$ -квант,  $\frac{p^2}{2M'}$  — енергія віддачі ядра,  $M' = M + \frac{\hbar\omega_{\text{погл}}}{c^2}$  — маса ядра після поглинання кванта. Як і раніше, будемо вважати, що маса ядра практично не змінюється (маса фотона  $\frac{\hbar\omega_{\text{погл}}}{c^2} \ll M$ ), тому в (5.3.8) можемо покласти  $M' \approx M$ . Оскільки імпульси  $\gamma$ -кванта та ядра віддачі рівні:  $\frac{\hbar\omega_{\text{погл}}}{c} = p$ , вираз (5.3.8) перепишемо так:

$$\hbar\omega_{\text{погл}} = E_{12} + \frac{(\hbar\omega_{\text{погл}})^2}{2Mc^2}. \quad (5.3.9)$$

Розв'язуючи рівняння (5.3.9) відносно  $\hbar\omega_{\text{погл}}$ , знаходимо:

$$\hbar\omega_{\text{погл}} = Mc^2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2E_{12}}{Mc^2}} \right). \quad (5.3.10)$$

Аналогічно до вищевикладеного, знаходимо наближений вираз для енергії кванта, що поглинається, за умови  $2E_{12} \ll Mc^2$ :

$$\hbar\omega_{\text{погл}} \approx Mc^2 \left( \frac{E_{12}}{Mc^2} + \frac{E_{12}^2}{2M^2c^4} \right) = \hbar\omega_0 + \frac{E_{12}^2}{2Mc^2}, \quad (5.3.11)$$

де використано рівність  $E_{12} = \hbar\omega_0$ . Таким чином, лінія поглинання зсунута відносно мессбауерівської частоти  $\omega_0$  на величину  $\frac{E_{12}^2}{2Mc^2}$ , яка дорівнює кінетичній енергії віддачі.

Остаточно, різниця енергій випроміненого та поглинутого  $\gamma$ -квантів дорівнює:

$$\Delta\omega = \omega_{\text{погл}} - \omega_{\text{випр}} = \frac{E_{12}^2}{Mc^2} = \frac{(\hbar\omega_0)^2}{Mc^2}. \quad (5.3.12)$$

Резонансне поглинання на вільних ядрах було б можливим, якби ширина збудженого рівня  $\Gamma$  ядра була більшою за зміну енергій квантів при поглинанні та випромінюванні:  $\Gamma \geq \frac{E_{12}^2}{Mc^2}$ .

Відносна природна ширина збудженого рівня з  $E_{12} = 129 \text{ кеВ}$  у ядрі  $^{191}\text{Ir}$ :  $\frac{\Gamma}{E_{12}} = 4 \cdot 10^{-11}$ . Бачимо, що ця величина є набагато меншою за

відносну зміну енергії  $\gamma$ -кванта:  $\frac{E_{12}}{Mc^2} = 7,2 \cdot 10^{-7}$ . Таким чином, резонансне поглинання  $\gamma$ -кванта на вільних ядрах неможливе.

Врахуємо тепер доплерівське уширення ліній випромінювання та поглинання, яке виникає під час теплового руху вільних атомів:

$$\frac{E_d}{E_{12}} = \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}}, \quad \text{де } T - \text{термодинамічна температура джерела.}$$

Доплерівське уширення відіграє основну роль у випадку джерел, що містять багато вільних атомів або молекул. Підставляючи значення  $T = 300 \text{ К}$ , знайдемо відносну доплерівську ширину:

$$\frac{E_d}{E_{12}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \cdot 300 \text{ К}}{191 \cdot 931,5 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}}} \approx 0,04 \cdot 10^{-5} = 4 \cdot 10^{-7}.$$

в) Температура  $T_0$ , при якій доплерівська ширина дорівнює різниці енергій випроміненого та поглинутого  $\gamma$  – кванта:

$$\sqrt{\frac{2kT_0}{Mc^2}} = \frac{E_{12}}{Mc^2} \Rightarrow T_0 = \frac{E_{12}^2}{2kMc^2}. \quad (5.3.13)$$

Для ядер  $^{191}\text{Ir}$  ця температура дорівнюватиме  $T_0 = \frac{129^2 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 191 \cdot 931,5 \cdot 10^6} = 542 \text{ К}$ . При такій температурі стає можливим резонансне поглинання частини потоку квантів ядрами, що входять до складу вільних атомів або молекул (плазма, газ).

**Приклад 4.** Ефект Месбауера полягає в тому, що в кристалах можуть реалізуватись процеси випромінювання та поглинання  $\gamma$  – квантів без передачі енергії віддачі, або «без віддачі ядер». В цьому випадку закон збереження імпульсу виконується за рахунок передачі імпульсу всьому кристалу (колективний процес). Лінії випромінювання та поглинання без віддачі мають природну ширину.

Кристал  $^{191}\text{Ir}$  випромінює  $\gamma$  – кванти з енергією  $\hbar\omega_0 = 129 \text{ кеВ}$ . Лінія Месбауера має ширину  $\Gamma = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ еВ}$ . Припустимо, що кристал, який випромінює  $\gamma$  – кванти, рухається зі швидкістю  $\vec{v}$ , а кристал, що поглинає, знаходиться у спокої. Знайти найменшу швидкість  $\vec{v}$  джерела, яку можна зареєструвати за зміною величини поглинання  $\gamma$  – квантів. Вважати, що з упевненістю можна зареєструвати доплерівську зміну частоти  $\gamma$  – квантів, яка дорівнює  $\frac{1}{6}$  ширини месбауерівської лінії.

**Розв’язання:** Зміна частоти кванта за рахунок ефекту Доплера (нерелятивістська формула):  $\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)$ , де  $v$  – швидкість джерела,  $\vartheta$  – кут між вектором швидкості джерела та напрямком спостереження. При повздовжньому ефекті  $\cos \vartheta = 1$ , тому відносна зміна частоти  $\gamma$  – кванта за рахунок руху джерела становитиме:

$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\hbar\Delta\omega}{\hbar\omega_0} = \frac{v}{c}$ . Покладаючи, що  $\hbar\Delta\omega = \frac{1}{6}\Gamma$ , знаходимо мінімальну швидкість джерела, яку можна зафіксувати:

$$\frac{v}{c}\hbar\omega_0 = \frac{\Gamma}{6} \Rightarrow v = c \frac{\Gamma}{6\hbar\omega_0} = 3 \cdot 10^8 \frac{4,6 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 129 \cdot 10^3} = 1,7 \text{ мм/с}.$$

**Приклад 5.** Джерело  $\gamma$ -квантів розташоване над поглиначем на висоті 20 м. З якою швидкістю треба рухати вгору джерело, щоб у місці розташування поглинача повністю компенсувати гравітаційну зміну енергії  $\gamma$ -кванта, обумовлену гравітаційним полем Землі?

**Розв'язання:** Використаємо принцип еквівалентності, згідно якого рух фотона з масою  $m = \frac{h\nu_0}{c^2}$  в гравітаційному полі еквівалентний до знаходження фотона в системі координат, що рухається з прискоренням  $\vec{g}$ . Відстань по вертикалі  $l$  фотон проходить за час  $\Delta t = \frac{l}{c}$ . При наявності прискорення це буде еквівалентне тому, що система відліку змінить свою швидкість на  $\Delta v = g\Delta t$ . За рахунок ефекту Доплера це призведе до зміни частоти фотона:

$$\Delta\nu = \nu \frac{\Delta\nu}{\nu} = \nu \frac{gl}{c^2}. \quad (5.5.1)$$

Такий ефект називається фіолетовим зміщенням частоти фотона. Під час руху фотона вгору частота його зменшується на таку саму величину (червоне зміщення).

Основним методом вимірювання гравітаційного зміщення частоти є резонансне месбауерівське поглинання. Для компенсації гравітаційного зміщення необхідно забезпечити доплерівське зміщення частоти за рахунок руху джерела  $\gamma$ -квантів або поглинача.

Нерелятивістська формула для доплерівської зміни частоти

$$\nu = \nu_0 \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right), \quad (5.5.2)$$

де  $\vartheta$  – кут між напрямком руху джерела та напрямком спостереження; при повздовжньому ефекті  $\cos \vartheta = -1$ , тоді



$$v = v_0(1 - \frac{v}{c}), \Delta v = v_0 - v = v_0 \frac{v}{c} \Rightarrow \Delta E_d = h v_0 \frac{v}{c}. \quad (5.5.3)$$

У даному випадку джерело необхідно рухати вгору для компенсації гравітаційного збільшення частоти фотона.

Прирівнюючи (5.5.1) та (5.5.3), одержуємо швидкість руху джерела:

$$\frac{h v_0}{c^2} g l = h v_0 \frac{v}{c} \Rightarrow v = \frac{g l}{c}. \quad (5.5.4)$$

Підставивши числові значення в (5.5.4), для швидкості руху джерела отримаємо

$$v = \frac{9,8 \cdot 20}{3 \cdot 10^8} = 6,5 \cdot 10^{-7} \text{ м/с} = 0,65 \text{ мкм/с}. \quad (5.5.5)$$

**Приклад 6.** Під час випромінювання  $\gamma$ -квантів, які відповідають месбауерівській лінії, середній імпульс атома, що випромінює, не змінюється. Середня ж кінетична енергія такого атома, яка відповідає коливальному стану атома в матриці, зростає внаслідок зменшення його маси на величину  $\frac{\hbar \omega_0}{c^2}$ , де  $\hbar \omega_0$  — енергія  $\gamma$ -кванта.

Це призводить до того, що частота месбауерівської лінії виявляється дещо меншою за частоту переходу  $\omega_0$ , а саме:  $\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{\langle v \rangle^2}{2c^2} \right)$ , де

$\langle v \rangle^2$  — квадрат середньої квадратичної швидкості атома.

а) Отримати цей вираз з енергетичних міркувань та пояснити, в якому випадку такий ефект можна спостерігати за допомогою звичайної техніки спостереження ефекту Месбауера.

б) На скільки градусів температура джерела повинна бути більшою за температуру поглинача, щоб температурне зміщення месбауерівської  $\gamma$ -лінії  $^{57}\text{Fe}$  повністю компенсувало гравітаційне зміщення, якщо джерело знаходиться над поглиначем на відстані  $l = 20 \text{ м}$ ? Вважати, що середня кінетична енергія атомів у кристалі дорівнює  $\frac{3}{2}kT$ .

**Розв'язання:** а) Середня кінетична енергія атома  $\langle E_k \rangle = \frac{\langle p \rangle^2}{2M}$ , де

$\langle p \rangle^2$  — квадрат середнього квадратичного імпульсу атома,  $M$  — його

маса. Під час випромінювання  $\gamma$ -кванта, маса атома зменшується на величину  $\hbar\omega_0/c^2$ , а кінетична енергія зростає на

$\delta\langle E_k \rangle = \frac{\langle p \rangle^2}{2M^2} \delta M = \frac{\langle p \rangle^2}{2M^2} \frac{\hbar\omega_0}{c^2}$ . Таким чином, енергія випроміненого фотона зменшується і становитиме:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 - \delta\langle E_k \rangle = \hbar\omega_0 \left( 1 - \frac{\langle p \rangle^2}{2M} \frac{1}{Mc^2} \right). \quad (5.6.1)$$

Формулу (5.6.1) можна записати через середню квадратичну швидкість атома:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 \left( 1 - \frac{M\langle v \rangle^2}{2} \frac{1}{Mc^2} \right) = \hbar\omega_0 \left( 1 - \frac{\langle v \rangle^2}{2c^2} \right). \quad (5.6.2)$$

Величину зміщення частоти фотона можемо оцінити, врахувавши, що квадрат середньої квадратичної швидкості атома  $\langle v \rangle^2 \approx 1,73^2 \frac{kT}{M}$  [15], при  $T = 300 \text{ K}$  для ядра  $^{57}\text{Fe}$  її величина становитиме

$$\langle v \rangle^2 \approx 1,73^2 \frac{0,025 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ erg/eV}}{57 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g}} \approx 1,3 \cdot 10^9 \text{ cm}^2/\text{s}^2,$$

з (5.6.2) отримаємо відносну зміну енергії  $\gamma$ -кванта:

$$\frac{\hbar\Delta\omega}{\hbar\omega_0} = \frac{\langle v \rangle^2}{2c^2} = \frac{1,3 \cdot 10^9}{2 \cdot 9 \cdot 10^{20}} = 7 \cdot 10^{-13}. \text{ Як бачимо, величина такого зміщення}$$

має порядок ширини  $\gamma$ -лінії Месбауера (для  $^{57}\text{Fe}$   $\frac{\Gamma}{\hbar\omega_0} = 3,0 \cdot 10^{-13}$ ).

Під час поглинання енергія  $\gamma$ -кванта також зменшується, оскільки зменшується кінетична енергія атома. Оскільки цей ефект діє однаково під час поглинання та випромінювання  $\gamma$ -квантів, спостерігати його можна лише в тому випадку, коли різними будуть температури випромінювача та поглинач. Відносне зміщення ліній випромінювання та поглинання становить:

$$\frac{\Delta\omega_1 - \Delta\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{2c^2} \left( \langle v_1 \rangle^2 - \langle v_2 \rangle^2 \right). \quad (5.6.3)$$

б) Вважаючи, що  $\langle E_k \rangle = \frac{M \langle v \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT$ , у формулі (5.6.2) виразимо зміну частоти  $\gamma$  – кванта через температуру джерела:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 \left( 1 - \frac{3kT}{2Mc^2} \right). \quad (5.6.4)$$

З урахуванням (5.6.4), відносна зміна частоти  $\gamma$  – кванта, яка виникає внаслідок зміни температури  $\delta T$ :

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = -\frac{3k}{2Mc^2} \delta T. \quad (5.6.5)$$

Відносне гравітаційне зміщення частоти фотона, що рухається в полі сили тяжіння, з (5.5.1):  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{gl}{c^2}$ , де  $l$  – відстань, яку пройшов фотон. Прирівнюючи цей вираз та (5.6.5), знаходимо різницю температур між джерелом та поглиначем:

$$\frac{3k}{2Mc^2} \delta T = \frac{gl}{c^2} \Rightarrow \delta T = \frac{2Mgl}{3k}. \quad (5.6.6)$$

підставивши у (5.6.6) параметри задачі, знайдемо:

$$\delta T = \frac{2 \cdot 57 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 20 \text{ м}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}} = 0,9 \text{ К}.$$

### 5.3. Запитання та відповіді

1. Наведіть приклади механізмів отримання збуджених, тобто  $\gamma$  – активних, ядер.

Такими процесами, в яких отримуються збуджені ядра, є  $\beta^\pm$  – розпади на збуджені стани (у випадку, коли заборонений розпад на основний рівень дочірнього ядра), кулонівське збудження під час зіткнення з зарядженими частинками в ядерних реакціях, реакція  $(n, p)$ ,  $\alpha$  – розпад материнських ядер тощо. Наприклад, реакція  $^{56}\text{Co} + n \rightarrow ^{57}\text{Co}^* + \beta^- \rightarrow ^{57}\text{Fe} + \nu$ . ( перетворення  $^{57}\text{Co}^*$  в кінцевий мессбауерівський ізотоп заліза відбувається шляхом електронного захоплення).

2. Чи є випускання  $\gamma$  – кванта в ефекті Мессбауера пружним?

Так, оскільки воно не супроводжується зміною внутрішньої енергії тіла, тобто випромінюванням чи поглинанням фотонів.

3. Чи відрізняються поняття „квант” і „фотон”?

Квант — більш загальне поняття. Квант — це порція. Може бути квант енергії, квант світла. А фотон — це квант електромагнітної енергії. Найчастіше фотонам називають квант в оптичному діапазоні.

4. В чому полягає явище ядерної ізомерії? Що таке «острови ізомерії»?

В середньому періоди піврозпаду ядер по відношенню до  $\gamma$ -випромінювання складають  $10^{-7} \div 10^{-11}$  с, оскільки інтенсивність електромагнітних взаємодій лише на три порядки менша за інтенсивність ядерних взаємодій. Проте в окремих випадках якщо енергія переходу мала, а сам перехід має високій ступінь заборони, час життя збуджених ядер може складати кілька годин. Такі збуджені ядра з великим часом життя називаються ізомерами. Явище ядерної ізомерії було відкрите у 1921 р. Отто Ганом. Ізомерний рівень повинен мати значення спіну, яке дуже відрізняється від спінів нижніх рівнів, та малу енергію збудження. Наприклад, в ізотопі  $^{115}_{49}\text{In}^m$  не вистачає одного протона до заповнення оболонки  $Z=50$ , тобто є одна протонна «дірка». Основний стан цієї «дірки» —  $2P_{1/2}$ , а найближчий збуджений —  $1G_{9/2}$ . В тих

областях, де ядра мають оболонкові рівні, близькі за енергією та з суттєво різними значеннями спінів, спостерігаються «острови ізомерії». Вони розташовані безпосередньо перед магічними числами 50, 82 та 126 з боку менших  $Z$  та  $N$ . Приклади ізомерних ядер:  $^{86}_{37}\text{Rb}^m$  ( $N=49$ ),  $^{131}_{52}\text{Te}^m$  ( $N=79$ , близько до 82),  $^{199}_{80}\text{Hg}^m$  ( $Z=80$ , близько до 82) тощо. На даний момент відомі близько 100 ядер з досить великим часом життя. Найчастіше ізомери зустрічаються в непарно-непарних ядрах і дуже рідко – в парно-парних.

5. Що характеризує коефіцієнт внутрішньої конверсії?

Коефіцієнт внутрішньої конверсії характеризує інтенсивність внутрішньої конверсії і визначається як відношення середнього числа електронів внутрішньої конверсії до середнього числа  $\gamma$ -квантів, які випроменилися, для конкретного переходу між енергетичними рівнями. Також коефіцієнт внутрішньої конверсії можна визначити

як відношення відповідних імовірностей випускання конверсійного електрона та  $\gamma$  – кванта.

Коефіцієнт внутрішньої конверсії зростає зі зменшенням енергії переходу, зі зростанням його мультипольності та заряду ядра (в першому наближенні  $\sim Z^3$ ). В залежності від цих параметрів значення коефіцієнту внутрішньої конверсії змінюється в широких межах: від  $10^{-2} \div 10^{-3}$  до величин  $\gg 1$ . Залежність від структури ядра є слабкою, оскільки довжини хвиль конверсійних електронів та  $\gamma$  – квантів набагато більші за розміри ядер.

Вимірюючи коефіцієнт внутрішньої конверсії, експериментально визначають мультипольність та спін збудженого ядра.

6. Поясніть фізичний механізм явища внутрішньої конверсії.

Процес конверсії в основному відбувається за рахунок віртуальних квантів. Віртуальним називається квант, для якого порушується співвідношення між енергією та імпульсом, тобто  $E \neq pc$ . Існування таких віртуальних квантів стає можливим за рахунок співвідношення невизначеностей. Такі кванти можуть існувати протягом невеликого часу:  $\Delta t \sim \hbar / \Delta E$  і на невеликих відстанях від ядра:  $\Delta l \sim c\hbar / 2\Delta E$ .

Оскільки енергія та імпульс віртуального фотона не вимірюються, довести, що внутрішня конверсія відбувається саме за рахунок віртуальних, а не реальних квантів, можна лише за допомогою ядер, позбавлених електронної оболонки. Якщо справді маємо справу з віртуальними квантами, процес випромінювання ядерних  $\gamma$  – квантів не залежатиме від наявності або відсутності електронної оболонки. Іншими словами,  $\gamma$  – випромінювання та внутрішня конверсія – не конкуруючі процеси, а такі, що існують паралельно.

Технічно спостереження  $\gamma$  – випромінювання ядер, позбавлених електронів, ніким не проводилось. На користь описаного механізму служить повне узгодження теоретичних розрахунків з експериментальними даними.

7. Що таке парна конверсія?

Коли енергія збудження перевищує подвоєну енергію спокою електрона ( $E_{\text{збудж}} > 2m_e c^2 = 1,02 \text{ MeV}$ ), то ядро втрачає своє

збудження, випромінюючи пару – електрон та позитрон. Механізм цього процесу аналогічний до механізму звичайної конверсії: випромінений ядром віртуальний  $\gamma$  – квант перетворюється в електрон-позитронну пару:  $(\gamma)_e \rightarrow e^- + e^+$ . Парна конверсія не пов'язана з наявністю електронної оболонки, тому може відбуватись на «голих» ядрах. За аналогією до коефіцієнту внутрішньої конверсії вводиться коефіцієнт парної конверсії  $\alpha_\pi = \frac{\omega_\pi}{\omega_\gamma}$ . Відносна роль парної

конверсії зростає зі збільшенням енергії переходу.

8. В яких експериментальних методах використовується ефект Мессбауера?

Ефект Мессбауера використовується в мессбауерівській спектроскопії – сукупності методів дослідження фізичних та хімічних властивостей конденсованого середовища (головним чином твердих тіл) та дослідження мікроскопічних об'єктів в твердих тілах (ядер, іонів, хімічних та біологічних комплексів).

Найбільш важливе застосування мессбауерівської спектроскопії – можливість фіксувати надтонке розщеплення та зсуви мессбауерівських ліній, пов'язані з взаємодією електричних та магнітних моментів ядер з внутрішньоядерними електричними та магнітними полями, які викликають розщеплення ядерних рівнів. Для таких досліджень використовується ефект Доплера: джерело або поглинач  $\gamma$  – квантів рухаються зі швидкістю  $v$ , при цьому енергія  $\gamma$  – кванта змінюється на величину  $\Delta E = \hbar\omega_0 \frac{v}{c}$ .

Мессбауерівські спектрометри вимірюють залежність резонансного поглинання від швидкості  $v$ .

За допомогою описаного методу можна також вимірювати надтонке розщеплення, викликане хімічним зсувом резонансної лінії (ізомерний зсув), квадрупольне та магнітне надтонке розщеплення ядерних рівнів, а також надтонку структуру мессбауерівської лінії в парамагнетиках.

Інший експериментальний метод – конверсійна мессбауерівська спектроскопія, в якій резонансне поглинання  $\gamma$  – квантів досліджується за зміною інтенсивності конверсійних електронів, які вилітають зі зразка. В такому методі вивчається лише невеликий приповерхневий шар зразка, товщина якого співрозмірна з глибиною

виходу конверсійного електрона з речовини. Конверсійні електрони та їх енергетичний спектр фіксуються за допомогою пропорційних лічильників, магнітних та інших бета-спектрометрів. Виділяючи електрони заданої енергії, можна досліджувати зразок на різній глибині. Крім того, вимірювання інтенсивності характеристичного рентгенівського випромінювання, яке виникає після акту внутрішньої конверсії, дозволяє досліджувати хімічний склад поверхневих шарів на глибині кілька десятків нм.

В емісійній мессбауерівській спектроскопії досліджують речовини, до яких уведено радіоактивні ядра, які в результаті ядерних переходів стають збудженими ядрами, що випромінюють резонансні  $\gamma$ -кванти (наприклад, ізотоп  $^{57}\text{Co}$  в кристалі  $\text{Pd}$ ). Аналіз енергетичного спектра  $\gamma$ -квантів проводиться з допомогою мессбауерівського спектрометра або детектора конверсійних електронів. Чутливість метода надзвичайно велика, досліджують зразки з концентрацією радіоактивних домішок  $10^{-6}\%$ . Емісійна спектроскопія — унікальний інструмент дослідження радіаційних ушкоджень.

9. Як за допомогою техніки Мессбауера дослідити вплив електронної оболонки на енергетичні ядерні рівні?

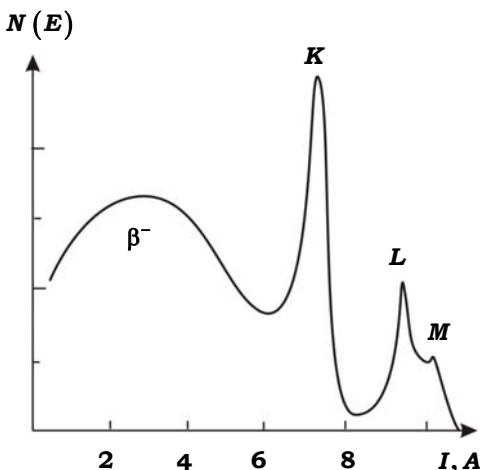
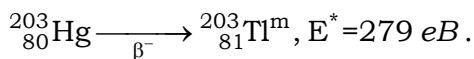
Оскільки існує ненульова імовірність перебування електронів всередині ядра, електронна оболонка повинна впливати на внутрішньоядерні процеси. За допомогою ефекту Мессбауера можна дослідити зміну спектрів під час переходу від однієї хімічної сполуки до іншої. Лінії мессбауерівських спектрів зазнають зсуву та змінюють свою ширину при зміні структури кристалічної ґратки, механічних напругах, зміні температури тощо. Зараз ефект Мессбауера широко використовується в дослідженнях з фізики твердого тіла.

10. Як експериментально відрізнити конверсійні електрони від  $\beta$ -електронів?

Конверсійні електрони з'являються у випадку, коли збудження ядра знімається шляхом передачі надлишкової енергії електронам атомної оболонки.

На відміну від  $\beta$ -електронів, конверсійні електрони є моноенергетичними. Енергія таких електронів дорівнює різниці енергії збудження ядра та енергії зв'язку електрона на певній оболонці:  $E_e = E^* - E_{\text{зв}}$ . На Рис. 5.3 зображено спектр електронів, що

вилітають зі зразка, який містить  $\beta^-$  – активний ізотоп  $^{203}_{80}\text{Hg}$ .  
Схема розпаду цього ізотопу записується наступним чином:



**Рис. 5.3.**  $\beta^-$  – спектр радіоактивного ядра  $^{203}_{80}\text{Hg}$ . По горизонтальній осі відкладено струм в  $\beta^-$  – спектрометрі, пропорційний до енергії електронів.

Вузькі піки в спектрі відповідають енергії збудженого рівня ядра талія  $^{203}_{81}\text{Tl}$ . Отже, такі піки є конверсійними, кілька близьких піків виникають внаслідок вибивання електронів з різних електронних оболонок – K, L та M, відповідно.

Аналізуючи відстань між конверсійними піками в подібному спектрі, можна визначити, на якому хімічному елементі відбувається внутрішня конверсія.

Процес внутрішньої конверсії супроводжується характеристичним рентгенівським випромінюванням, яке виникає під час переходів електронів електронних оболонок на вакансію, утворену при випромінюванні конверсійного електрона. В результаті внутрішньої конверсії можуть з'явитись також електрони Оже.



## 6. ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ З ЗАРЯДЖЕНИМИ ЧАСТИНКАМИ

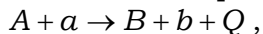
### 6.1. Теоретичні відомості

Ядерні реакції за участю заряджених частинок є одним з найбільш важливих класів реакцій. Це пов'язано, перш за все, з великою різноманітністю реакцій, що відображає розмаїття заряджених ядер та заряджених елементарних частинок.

Другою причиною є можливість прискорення заряджених частинок до необхідної енергії при заданій дисперсії пучків. Для нейтральних частинок (зокрема, нейтронів) використання подібних обставин неможливе. В лабораторних умовах ядерні реакції здійснюються, як правило, при бомбардуванні більш важких ядер, які входять до складу мішені (такі ядра називаються *материнськими*), пучками більш легких частинок. Ядра, які утворюються в результаті реакцій, називаються *дочірніми*.

Існує два основних методи запису реакцій:

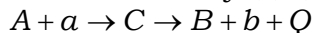
3) у вигляді формули послідовних перетворень:



де  $Q$  — енергія реакції;

4) у символічному вигляді:  $A(a,b)B$ .

Ядерні реакції діляться на *прямі реакції* та *реакції з утворенням проміжного ядра* (складеного або компаунд-ядра):



Прямі реакції завжди нерезонансні, а реакції з утворенням складеного ядра можуть бути як резонансними, так і нерезонансними.

Реакції бувають як *одноканальними*, так і *багатоканальними* (в цьому разі кінцевими продуктами можуть бути різні альтернативні набори частинок та різні значення енергії реакції  $Q$ ).

Основними процесами в ядерних реакціях є пружне та непружне розсіяння, радіаційне захоплення, реакції  $(p,n)$ ,  $(n,\alpha)$ , ядерний фотоефект та ін. Відмінність від ядерних реакцій, що викликані дією нейтронів, пов'язана з наявністю у частинок заряду. Імовірність ядерної реакції, яка пропорційна до її перерізу, помітно відрізняється від нуля починаючи з енергії, за якої проникність кулонівського бар'єру ядра стає достатньо великою.

Ядерні реакції зазвичай класифікують у відповідності до природи бомбардуючих ядер (частинок): під дією нейтронів (див. розділ 7); протонів, дейтронів,  $\alpha$ -частинок, важких іонів,  $\gamma$ -квантів та електронів. Деякі типи ядерних реакцій прийнято класифікувати у відповідності з природою перетворення: кулонівське збудження ядра, поділ ядер, синтез ядер і т.д.

Ядерні реакції характеризуються *енергією реакції* — різницею енергій спокою ядер, які вступають до реакції та тих, що утворюються в результаті реакції

$$Q = \left( \sum_{i=1}^j m_i - \sum_{f=1}^n m_f \right) c^2,$$

де  $m_i$  — маси спокою частинок, які вступили в реакцію;  $m_f$  — маси спокою частинок, які утворилися внаслідок реакції. Якщо  $Q > 0$ , то реакція є *екзоенергетичною*, якщо ж  $Q < 0$  — *ендоенергетичною*. Для протікання ендоенергетичних реакцій енергія відносного руху ядер, що вступають до реакції, повинна бути не меншою за тепловий ефект реакції (енергію реакції  $Q$ ).

Поріг реакції (*порогова енергія*) — це мінімальна кінетична енергія частинки, яка налітає на материнське ядро і викликає його перетворення за рахунок цієї реакції (нерелятивістський випадок):

$$E_{\kappa}^{nor} = \frac{m + M}{M} |Q|,$$

де  $M$  — маса ядра-мішені, а  $m$  — маса частинки, яка налітає на мішень.

*Товстою* називають мішень, товщина шару якої в напрямку руху налітаючої частинки більша за середній пробіг частинки з даною кінетичною енергією в матеріалі мішені; якщо ж товщина мішені значно менша, то кажуть про *тонку* мішень.

Про поріг реакції є сенс говорити тільки для ендоенергетичних реакцій. Порогова енергія реакції завжди вимірюється в лабораторній системі координат, в якій ядро-мішень знаходиться в стані спокою.

З точки зору квантової механіки конкретна ядерна реакція може бути описана за допомогою ймовірності конкретного перетворення.

В ядерній фізиці існує своя термінологія імовірнісних процесів, згідно якої ядерні реакції можна описати *диференціальним ефективним перерізом* розсіювання  $d\sigma/d\Omega$  всередині тілесного кута

$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi$ , де  $\theta$  та  $\phi$  — полярний та азимутальний кути вильоту однієї з частинок (зазвичай легкої), причому кут  $\theta$  відраховується від напрямку руху налітаючої частинки.

Інтегральним, або повним перерізом, яким характеризується інтенсивність реакції, називається диференціальний ефективний переріз, який проінтегрований по всіх значеннях полярного та азимутального кутів:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega.$$

Переріз ядерної реакції прийнято вимірювати в барнах:  $1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2$ .

Повний переріз пов'язує ймовірність  $W_{if}$  конкретного перетворення, яке відбуваються за одиницю часу в конкретному ядрі, з інтенсивністю  $J = n_a v_a$  однорідного потоку частинок, що бомбардують це ядро:

$$\sigma_{if} = W_{if} / J.$$

Повний переріз також пов'язує число перетворень, які відбуваються в одиницю часу в одиниці об'єму мішені в різних ядрах, з потоком бомбардуючих частинок та густиною материнських ядер  $n_A$  в мішені.

Повний переріз реакції за участю заряджених частинок включає в якості складової ймовірність тунельного ефекту  $D_1$  під час проникнення зарядженої частинки до ядра. Якщо продуктом реакції є заряджена частинка, то повний переріз також включає ймовірність тунельного ефекту  $D_2$  при її вилітанні з ядра:

$$\sigma = D_1 \sigma_0 D_2.$$

Величина

$$\sigma_0 = S(E) / E$$

називається внутрішнім перерізом і описує ймовірність перетворень ядра-мішені при умові, що налітаюче ядро вже знаходиться всередині ядра-мішені. У випадку резонансного тунелювання  $D_1 = 1$ , що дозволяє дуже істотно збільшити переріз реакції. Недоліком такого тунелювання є необхідність граничної монохроматизації потоку падаючих на мішень частинок.

В цьому виразі величина  $S(E)$  є так званим  $S$ -фактором, тобто функцією енергії, яка істотно залежить від типу реакції, дуже швидко

зростаючи зі збільшенням масових чисел ядер, що взаємодіють і повільно змінюється зі зміною енергії (для нерезонансних ядерних реакцій вона є сталою величиною в широкому інтервалі значень енергії).

Під час розгляду ядерних реакцій використовуються наступні точні закони збереження:

11. закон збереження енергії;
12. закон збереження імпульсу;
13. закон збереження моменту імпульсу;
14. закон збереження електричного заряду;
15. закон збереження баріонного заряду;
16. закон збереження лептонного заряду;
17. закон збереження парності хвильової функції (цей закон інколи не виконується);
18. закон збереження ізотопічного спіну.

Закони збереження дають змогу передбачити, які з реакцій можуть дійсно відбуватися, а які — неможливі, тобто заборонені невиконанням одного чи декількох законів збереження.

Мета дослідження ядерних реакцій — отримання інформації про властивості та квантові числа станів ядер (ядерних рівнів), перевірка ядерних моделей та вивчення механізмів різноманітних перетворень.

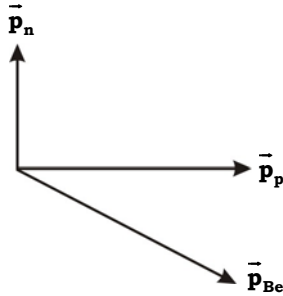
## 6.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.** Літієву мішень опромінюють пучком протонів з кінетичною енергією, яка в  $\eta = 1,5$  рази перевищує порогове значення. Знайти енергію нейтронів, які вилітають в результаті реакції  ${}^7\text{Li}(p,n){}^7\text{Be} - 1,65 \text{ MeV}$  під кутом  $90^\circ$  до пучка протонів.

**Розв'язання:** В умові прикладу використано еквівалентний запис ядерної реакції типу  $A(a,b)B$ , де  $A$  — ядро мішені (материнське);  $a$  — частинка, яка викликає ядерну реакцію;  $b$  — легка частинка, яка утворюється в результаті реакції;  $B$  — дочірнє ядро. Причому ядро  $A$  та частинка  $a$  складають вхідний канал реакції, вихідним каналом реакції є ядро  $B$  та частинка  $b$ . Цей запис ядерної реакції бомбардування протонами літію можна також представити у звичайному вигляді:

$${}^7\text{Li} + p = {}^7\text{Be} + n - Q. \quad (6.1.1)$$

Для розв'язування задач такого типу записують закони збереження енергії та імпульсу.



**Рис. 6.1. Векторна діаграма імпульсів**

Закон збереження імпульсу представимо у векторному вигляді з урахуванням того, що материнське ядро знаходилося в стані спокою:

$$\vec{p}_p = \vec{p}_n + \vec{p}_{Be}. \quad (6.1.2)$$

Оскільки напрямок руху протонів та нейтронів утворюють кут, який дорівнює  $90^\circ$  (Рис. 6.1.), то за теоремою Піфагора закон (6.1.2) можна переписати в скалярному вигляді:

$$p_{Be}^2 = p_n^2 + p_p^2, \quad (6.1.3 \text{ а})$$

або в нерелятивістському наближенні, яке є справедливим для всіх частинок в даному випадку:

$$E_{\kappa Be} = \frac{m_n E_{\kappa n} + m_p E_{\kappa p}}{M_{Be}}, \quad (6.1.3 \text{ б})$$

де  $M_{Be}$  — маса ядра берилію,  $E_{\kappa n}$ ,  $E_{\kappa p}$  та  $E_{\kappa Be}$  — кінетичні енергії нейтрона, протона та ядра берилію відповідно.

Кінетичну енергію протона можна представити через значення його порогової енергії  $E_p^{nop}$  :

$$E_{\kappa p} = \eta E_p^{nop} = \eta \frac{M_{Li} + m_p}{M_{Li}} |Q|, \quad (6.1.4)$$

де  $M_{Li}$  — маса ядра літію,  $|Q|$  — енергія реакції (6.1.1).

Енергетичний вихід реакції (6.1.1) дорівнюватиме різниці сумарної кінетичної енергії  $\sum E_{\kappa f}$  частинок, які утворилися в результаті реакції, та сумарної кінетичної енергії  $\sum E_{\kappa i}$  частинок, які вступили

до реакції, тобто закон збереження енергії виглядатиме наступним чином:

$$Q = \sum E_{\kappa f} - \sum E_{\kappa i} = E_{\kappa n} + E_{\kappa Be} - E_{\kappa p}. \quad (6.1.5)$$

Оскільки дана реакція є ендоенергетичною, це означає, що енергія реакції від'ємна, тому закон (6.1.5) слід переписати наступним чином:

$$\begin{aligned} -|Q| &= E_{\kappa n} + E_{\kappa Be} - E_{\kappa p} \Rightarrow \\ E_{\kappa p} &= |Q| + E_{\kappa Be} + E_{\kappa n}. \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

З формули (6.1.6) виразимо кінетичну енергію дочірнього ядра берилію  $E_{\kappa Be}$  та прирівняємо отриманий вираз до (6.1.3 б):

$$\begin{aligned} \frac{m_n E_{\kappa n} + m_p E_{\kappa p}}{M_{Be}} &= E_{\kappa p} - |Q| - E_{\kappa n} \Rightarrow \\ E_{\kappa n} &= \frac{E_{\kappa p} (M_{Be} - m_p) - |Q| M_{Be}}{M_{Be} + m_n}. \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Також треба взяти до уваги вираз (6.1.4) для кінетичної енергії протона. Тоді співвідношення (6.1.7) перетвориться на наступне:

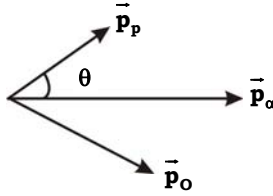
$$E_{\kappa n} = \frac{|Q| \left[ \eta (M_{Be} - m_p) (M_{Li} + m_p) - M_{Be} M_{Li} \right]}{(M_{Be} + m_n) M_{Li}}. \quad (6.1.8)$$

З довідкових таблиць [8] візьмемо значення мас ядер даних ізотопів берилію та літію:  $M_{Be} = 7,016931 \text{ а.о.м.}$  та  $M_{Li} = 7,016005 \text{ а.о.м.}$  Підставляючи числові значення до виразу (6.1.7), знайдемо кінетичну енергію нейтронів:

$$E_{\kappa n} = 0,68 \text{ MeV.}$$

**Приклад 2.** Обчислити енергію реакції  $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$ , якщо енергія  $\alpha$  – частинок, які налітають на мішень, складає  $E_{\kappa\alpha} = 4 \text{ MeV}$ , а протон, який вилетів під кутом  $\theta = 60^\circ$  до напрямку руху  $\alpha$  – частинок, має кінетичну енергію  $E_{\kappa p} = 2,08 \text{ MeV}$ .

**Розв'язання:** Закон збереження імпульсу у векторному вигляді для реакції  $^{14}\text{N} + ^4\text{He} \rightarrow p + ^{17}\text{O}$  записується так:



**Рис. 6.2. Векторна діаграма імпульсів**

$$\vec{p}_\alpha = \vec{p}_O + \vec{p}_p. \quad (6.2.1)$$

Використовуючи векторну діаграму імпульсів (Рис. 6.2.), рівняння (6.2.1) за допомогою теореми косинусів розпишемо в скалярному вигляді:

$$p_O^2 = p_\alpha^2 + p_p^2 - 2p_\alpha p_p \cos \theta. \quad (6.2.2)$$

Енергетичний вихід даної реакції можна записати через кінетичні енергії частинок та ядер, що приймають в ній участь (враховуємо, що ядро азоту знаходилося в стані спокою):

$$Q = E_{\kappa p} + E_{\kappa O} - E_{\kappa \alpha}. \quad (6.2.3)$$

Рух всіх частинок та ядер в даному випадку можна розглядати в нерелятивістському наближенні, співвідношення (6.2.3) перепишемо, врахувавши (6.2.2):

$$\begin{aligned} Q = E_{\kappa p} - E_{\kappa \alpha} + \frac{p_\alpha^2 + p_p^2 - 2p_\alpha p_p \cos \theta}{2M_O} = E_{\kappa p} - E_{\kappa \alpha} + \\ + E_{\kappa \alpha} \frac{M_\alpha}{M_O} + E_{\kappa p} \frac{m_p}{M_O} - 2 \sqrt{\frac{m_p M_\alpha}{M_O^2}} \cdot E_{\kappa p} \cdot E_{\kappa \alpha} \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Спростимо вираз (6.2.4) та врахуємо, що  $\cos 60^\circ = 1/2$ :

$$Q = E_{\kappa p} \left( 1 + \frac{m_p}{M_O} \right) - E_{\kappa \alpha} \left( 1 - \frac{M_\alpha}{M_O} \right) - \frac{\sqrt{m_p M_\alpha}}{M_O} \sqrt{E_{\kappa p} \cdot E_{\kappa \alpha}}. \quad (6.2.5)$$

Підставляючи числові значення у (6.2.5), знайдемо енергію даної реакції:  $Q = -1,2 \text{ MeV}$ . Таким чином, реакція  $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$  є ендоенергетичною. Порогова енергія налітаючих частинок дорівнює:

$$E_{\text{пор}} = |Q| \left( 1 + \frac{m_\alpha}{M_N} \right) \approx 1,54 \text{ MeV}.$$

**Приклад 3.** Знайти енергію нейтронів, які вилітають при фоторозщепленні берилію за реакцією  ${}^9\text{Be}(\gamma, n){}^8\text{Be}$   $\gamma$ -квантами з енергією  $\hbar\omega = 1,78 \text{ MeV}$ . Енергетичний вихід реакції складає  $Q = -1,65 \text{ MeV}$ .

**Розв'язання:** Реакції даного типу прийнято називати такими, що проходять через компаунд-ядро, або складене (проміжне) ядро. Компаунд-ядро утворюється внаслідок формування стану статистичної рівноваги системи. В результаті поглинання гамма-кванту ізотопом берилію  ${}^9\text{Be}$  утворюється збуджене компаунд-ядро  ${}^9\text{Be}^*$ , тобто відбувається реакція:



Запишемо для реакції (6.3.1) закони збереження імпульсу та енергії:

$$\frac{\hbar\omega}{c} = M_{{}^9\text{Be}} v_{{}^9\text{Be}} \text{ та } \hbar\omega = E_{{}^9\text{Be}} + E^*, \quad (6.3.2)$$

де  $M_{{}^9\text{Be}}$  — маса ядра берилію, а  $v_{{}^9\text{Be}}$  та  $E_{{}^9\text{Be}}$  — його швидкість та кінетична енергія,  $E^*$  — енергія збудження ядра  ${}^9\text{Be}$ .

З системи рівнянь (6.3.2) можна визначити енергію переходу ядра  ${}^9\text{Be}$  з основного до збудженого стану:

$$E^* = \hbar\omega \left( 1 - \frac{\hbar\omega}{2M_{{}^9\text{Be}}c^2} \right). \quad (6.3.3)$$

Збуджене ядро берилію-9 перетворюється на ядро берилію-8, випускаючи нейтрон:



Будемо вважати, що момент розпаду проміжного ядра  ${}^9\text{Be}^*$  відбувається після його зупинки, це буде цілком справедливим припущенням, якщо час життя ядра  ${}^9\text{Be}^*$  є досить великим, щоб воно встигло досягти теплової рівноваги з середовищем, в якому знаходиться. В протилежному випадку кінетична енергія ядра  ${}^9\text{Be}^*$

є достатньо малою величиною ( $E_{{}^9\text{Be}} = \frac{(\hbar\omega)^2}{2M_{{}^9\text{Be}}c^2} \approx 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ MeV}$ ), щоб



нею можна було знехтувати в законі збереження енергії для реакції (6.3.4).

Таким чином, нейтрон та ядро  ${}^8\text{Be}$ , що народжуються в результаті розпаду збудженого ядра берилію  ${}^9\text{Be}^*$ , рухатимуться в протилежних напрямках, тому закон збереження імпульсу в скалярному вигляді виглядатиме наступним чином:

$$p_{{}^8\text{Be}} = p_n, \quad (6.3.5)$$

де  $p_{{}^8\text{Be}}$  та  $p_n$  — відповідні імпульси ядра  ${}^8\text{Be}$  та нейтрона.

Вихід ядерної реакції дорівнює різниці сумарної кінетичної енергії нейтрона і ядра  ${}^8\text{Be}$  та енергії збудження нукліда  ${}^9\text{Be}^*$ , тобто закон збереження енергії матиме вигляд:

$$E^* = E_{\kappa n} + E_{{}^8\text{Be}} + |Q|. \quad (6.3.6)$$

тут  $E_{{}^8\text{Be}}$  та  $E_{\kappa n}$  — кінетичні енергії продуктів реакції.

Використовуючи вираз (6.3.5), знайдемо кінетичну енергію ядра  ${}^8\text{Be}$ , яке утворилося в результаті реакції (6.3.4):

$$E_{{}^8\text{Be}} = \frac{(p_{{}^8\text{Be}})^2}{2M_{{}^8\text{Be}}} = \frac{(p_n)^2}{2M_{{}^8\text{Be}}} = \frac{m_n E_{\kappa n}}{M_{{}^8\text{Be}}}, \quad (6.3.7)$$

де  $M_{{}^8\text{Be}}$  та  $m_n$  — маси ядра  ${}^8\text{Be}$  та нейтрона відповідно.

Перепишемо рівняння (6.3.6) з урахуванням виразів (6.3.3) та (6.3.7):

$$\hbar\omega \left( 1 - \frac{\hbar\omega}{2M_{{}^9\text{Be}}c^2} \right) = E_{\kappa n} \left( 1 + \frac{m_n}{M_{{}^8\text{Be}}} \right) + |Q|, \quad (6.3.8)$$

звідки знайдемо шукану кінетичну енергію нейтрона:

$$E_{\kappa n} = \left( 1 + \frac{m_n}{M_{{}^8\text{Be}}} \right)^{-1} \left[ \hbar\omega \left( 1 - \frac{\hbar\omega}{2M_{{}^9\text{Be}}c^2} \right) - |Q| \right]. \quad (6.3.9)$$

Підстановка числових значень до виразу (6.3.9) дає кінетичну енергію нейтрона  $E_{\kappa n} = 0,115 \text{ MeV}$ .

**Приклад 4.** Під час опромінювання товстої алюмінієвої мішені пучком  $\alpha$ -частинок з кінетичною енергією  $E_{\kappa\alpha} = 7 \text{ MeV}$  в результаті

реакції ( $\alpha, n$ ) випромінюється потік нейтронів  $J_n = 1,6 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ . Знайти вихід та середній переріз даної реакції, якщо струм  $\alpha$ -частинок складає  $I_\alpha = 50 \text{ мкА}$ .

**Розв'язання:** Реакцію, яку ми розглядатимемо в прикладі, можна записати як



Середній переріз  $\langle \sigma \rangle$  ядерної реакції, яка відбувається в товстій мішені, можна оцінити наступним чином:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{w}{n_0 R_\alpha^{Al}}, \quad (6.4.2)$$

де  $n_0 = N_A \cdot \frac{\rho}{\mu}$  — концентрація ядер в мішені

( $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  — число Авогадро),  $R_\alpha^{Al}$  — середній пробіг  $\alpha$ -частинки в алюмінію,  $w$  — вихід ядерної реакції.

У реальних фізичних дослідах далеко не завжди вдається безпосередньо виміряти диференціальний  $d\sigma$  або інтегральний  $\sigma$  ефективний перерізи реакції. Безпосередньо вимірюваною величиною є вихід реакції  $w$  — кількість частинок пучка  $\Delta N$ , які зазнали ядерної взаємодії з частинками мішені за секунду в середньому, по відношенню до загальної кількості частинок  $N_0$ :

$$w = \frac{\Delta N}{N_0} = n_0 \sigma d, \quad (6.4.3)$$

де  $d$  — товщина шару речовини мішені. Ця формула справедлива, якщо  $w \ll 1$ . Тобто, виходом ядерної реакції фактично є відносне число зареєстрованих вторинних частинок.

В даному випадку виходом реакції можна вважати відношення потоків нейтронів та  $\alpha$ -частинок. Потік  $\alpha$ -частинок виражається таким співвідношенням:  $J_\alpha = \frac{N_\alpha}{\Delta t}$ , струм дорівнює  $I_\alpha = \frac{q_\alpha N_\alpha}{\Delta t}$ , де  $q_\alpha = 2e$  — заряд  $\alpha$ -частинки, таким чином вираз для потоку  $\alpha$ -частинок через струм є таким:

$$J_\alpha = \frac{N_\alpha}{\Delta t} = \frac{I_\alpha}{q_\alpha} = \frac{I_\alpha}{2e}. \quad (6.4.4)$$

З урахуванням виразу (6.4.4), вихід (6.4.3) ядерної реакції перепишемо наступним чином:

$$\omega = \frac{J_n}{J_\alpha} = \frac{2eJ_n}{I_\alpha} = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1,6 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}}{50 \cdot 10^{-6} \text{ А}} = 1,024 \cdot 10^{-5}. \quad (6.4.5)$$

Емпірична формула для середнього пробігу  $\alpha$ -частинки  $R_\alpha^{pec}$  (см) в речовині з масовим числом  $A$  та густиною  $\rho_{pec}$  є такою [8]:

$$R_\alpha^{pec} = \frac{0,56 \cdot A^{1/3} R_\alpha^{nos} \cdot 10^{-3}}{\rho_{pec}}, \quad (6.4.6)$$

де  $R_\alpha^{nos} = 0,31 \cdot (E_{\kappa\alpha})^{3/2}$  (см) — середній пробіг  $\alpha$ -частинки з кінетичною енергією  $E_{\kappa\alpha}$  в повітрі.

В даному випадку в повітрі  $\alpha$ -частинка пролітає без зіткнень в середньому  $R_\alpha^{nos} = 0,31 \cdot 7^{3/2} = 5,7$  (см).

Для  $\alpha$ -частинки в алюмінію (масове число одноізотопного алюмінію рівне  $A_{Al} = 27$ ) можна обрахувати середній пробіг таким чином:

$$R_\alpha^{Al} = \frac{0,56 \cdot A_{Al}^{1/3} \cdot R_\alpha^{nos} \cdot 10^{-3}}{\rho_{Al}} = \frac{0,56 \cdot 27^{1/3} \cdot 5,7 \text{ см} \cdot 10^{-3}}{2,7 \text{ г/см}^3} = 3,55 \cdot 10^{-3} \text{ см}. \quad (6.4.7)$$

Концентрація ядер алюмінію (густина  $\rho_{Al} = 2,7 \text{ г/см}^3$ , молярна маса  $\mu_{Al} = 27 \text{ г/моль}$ ) в мішені складатиме:

$$n_0 = N_A \cdot \frac{\rho_{Al}}{\mu_{Al}} = 6,023 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}. \quad (6.4.8)$$

Отже, величина середнього перерізу ядерної реакції (6.4.1) в барнах складатиме:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \frac{1,024 \cdot 10^{-5}}{6,023 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3} \cdot 3,55 \cdot 10^{-3} \text{ см}} \approx \\ &\approx 0,048 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 = 48 \text{ мбарн}. \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

**Приклад 5.** Залізну мішень опромінюють пучком протонів з енергією  $E_{\kappa p} = 22 \text{ MeV}$ . В результаті ядерної реакції  $(p, n)$ , вихід якої

складає  $w = 1,2 \cdot 10^{-3}$ , утворюється радіонуклід  $^{56}\text{Co}$  з періодом піврозпаду  $T = 77,2$  доби. Визначити активність мішені через час  $\tau = 2,5$  годин після початку опромінювання при струмі протонів  $I_p = 21 \text{ мкА}$ .

**Розв'язання:** Зміну кількості ядер кобальту  $N_{\text{Co}}$  з часом можна описати наступним неоднорідним диференціальним рівнянням:

$$\frac{dN_{\text{Co}}}{dt} = \frac{I_p w}{e} - \lambda N_{\text{Co}}, \quad (6.5.1)$$

де  $e$  — заряд електрона,  $\lambda$  — стала розпаду ізотопу  $^{56}\text{Co}$ . Перший доданок (6.5.1) враховує збільшення кількості ядер  $^{56}\text{Co}$  за рахунок ядерної реакції, другий доданок — зменшення їх кількості за рахунок розпаду.

Розв'язання однорідного диференціального рівняння  $\frac{dN_{\text{Co одн}}}{N_{\text{Co одн}}} = -\lambda dt$

є таким:

$$N_{\text{Co одн}} = C(t) \cdot \exp(-\lambda t), \quad (6.5.2)$$

де  $C(t)$  — величина поки що невідома.

Підстановка виразу (6.5.2) до вихідного неоднорідного рівняння (6.5.1) приводить до співвідношення:

$$\frac{dC}{dt} \exp(-\lambda t) = \frac{I_p w}{e}, \quad (6.5.3)$$

з якого можна знайти  $C(t)$ , проінтегрувавши (6.5.3):

$$C(t) = \frac{I_p w}{e} \int \exp(\lambda t) dt + B = \frac{I_p w}{e\lambda} \exp(\lambda t) + B, \quad (6.5.4)$$

де  $B$  — константа, яка виникає при інтегруванні.

Таким чином, співвідношення (6.5.2) перетвориться на наступне:

$$N_{\text{Co}}(t) = \left[ \frac{I_p w}{e\lambda} \exp(\lambda t) + B \right] \cdot \exp(-\lambda t). \quad (6.5.5)$$

Для знаходження константи  $B$  скористаємося початковою умовою. В нульовий момент часу ядра кобальту ще не встигли утворитися, це значить, що

$$N_{\text{Co}}(0) = \left[ \frac{I_p w}{e\lambda} + B \right] = 0, \Rightarrow B = -\frac{I_p w}{e\lambda}. \quad (6.5.6)$$

Остаточно маємо закон зміни кількості ядер кобальту в залежності від часу:

$$N_{Co}(t) = \frac{I_p w}{e\lambda} [\exp(\lambda t) - 1] \cdot \exp(-\lambda t) = \frac{I_p w}{e\lambda} [1 - \exp(-\lambda t)]. \quad (6.5.7)$$

Стала розпаду ізотопу  $^{56}\text{Co}$ :  $\lambda = \ln 2 / T$ , період піврозпаду цього ізотопу  $T = 77,2$  діб. З (6.5.7) знайдемо вираз для активності мішені:

$$A_{Co}(\tau) = \lambda N_{Co}(\tau) = \frac{I_p w}{e} [1 - \exp(-\lambda \tau)] = \frac{I_p w}{e} \left[ 1 - 2^{-\tau/T} \right]. \quad (6.5.8)$$

Підставляючи числові значення в (6.5.8), знайдемо активність препарату через час  $\tau = 2,5$  год після початку опромінювання:

$$A_{Co} = \frac{21 \cdot 10^{-6} \text{ А} \cdot 1,2 \cdot 10^{-3}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}} \cdot \left( 1 - 2^{-2,5/(77,2 \cdot 24)} \right) = 1,47 \cdot 10^8 \text{ Бк} = 4 \text{ мКі.}$$

**Приклад 6.** У камеру, яка заповнена повітрям за нормальних умов, впускають пучок  $\alpha$ -частинок з кінетичною енергією  $E_\kappa = 7,8 \text{ MeV}$ . Довжина камери вздовж пучка більша за довжину пробігу  $\alpha$ -частинок з даною енергією. Знайти середній переріз реакції  $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O} - 1,2 \text{ MeV}$ , якщо вихід цієї реакції складає  $w = 2 \cdot 10^{-6}$ . Вміст азоту в повітрі складає  $\eta = 78 \%$  за об'ємом.

**Розв'язання:** Середній переріз даної ядерної реакції  $\langle \sigma \rangle$  можна визначити як

$$\langle \sigma \rangle = \frac{w}{n_0 d}, \quad (6.6.1)$$

де  $d$  — товщина мішені, в межах якої можлива ця ядерна реакція.

Пролітаючи шар повітря в камері,  $\alpha$ -частинки поступово зменшують свою первісну кінетичну енергію. Оскільки довжина камери вздовж пучка більша за довжину пробігу  $\alpha$ -частинок даної енергії, то деяка кількість частинок наприкінці проходження камери матиме кінетичну енергію, меншу за порогове значення. Для таких частинок реакція  $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$  не відбуватиметься. Тому довжину  $d$ , на якій відбувається ендоенергетична ядерна реакція, можна визначити через різницю довжин пробігу частинок з заданою

кінетичною енергією  $R(E_\kappa)$  та пороговою кінетичною енергією  $R(E_\alpha^{nop})$ :

$$d = R(E_\kappa) - R(E_\alpha^{nop}). \quad (6.6.2)$$

Тут порогове значення кінетичної енергії  $\alpha$ -частинки  $E_\alpha^{nop} = \frac{m_\alpha + M_N}{M_N} |Q| = 1,54 \text{ MeV}$  ( $m_\alpha$  — маса  $\alpha$ -частинки,  $M_N$  — маса нукліда  $^{14}\text{N}$ ,  $Q = -1,2 \text{ MeV}$  — енергетичний вихід ядерної реакції).

За напівемпіричною формулою  $R_\alpha^{nop} = 0,31 \cdot (E_\kappa)^{3/2} (\text{см})$ , де кінетична енергія  $E_\kappa$  підставляється в  $\text{MeV}$ , порахуємо довжини пробігу  $\alpha$ -частинок з заданою кінетичною енергією:

$$R(E_\kappa) = 0,31 \cdot 7,8^{3/2} = 6,75 (\text{см}) \quad (6.6.3 \text{ а})$$

та пороговою кінетичною енергією:

$$R(E_\alpha^{nop}) = 0,31 \cdot 1,54^{3/2} = 0,59 (\text{см}). \quad (6.6.3 \text{ б})$$

Отже, якщо вважати, що  $\alpha$ -частинки втрачають свою енергію поступово, ендоенергетична ядерна реакція відбувається лише на перших 6,16 см шляху в камері.

Концентрація ядер азоту (густина повітря  $\rho_{нов} = 1,293 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$ , молярна маса  $\mu_{нов} = 29 \text{ г/моль}$ ) в камері з урахуванням 78-відсоткового його вмісту в повітрі складатиме:

$$\begin{aligned} n_0 &= \eta N_A \cdot \frac{\rho_{нов}}{\mu_{нов}} = 0,78 \cdot 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \cdot \frac{1,293 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3}{29 \text{ г/моль}} = \\ &= 2,09 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}. \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

Остаточно середній переріз реакції складатиме:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \frac{\omega}{n_0 [R(E_\kappa) - R(E_\alpha^{nop})]} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2,09 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3} \cdot 6,16 \text{ см}} = \\ &= 1,55 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2 \approx 15,5 \text{ мбарн}. \end{aligned}$$

**Приклад 7.** Визначити порогову енергію  $E_{\text{пор}}$ , яка потрібна для народження пари нуклон-антинуклон у випадку зіткнення двох протонів, та порівняти її з енергією реакції.

**Розв'язання:** Розглянемо реакцію народження пари (нуклон  $N$ ) — (антинуклон  $\bar{N}$ ) при зіткненні двох протонів:

$$p + p \rightarrow p + p + N + \bar{N}. \quad (6.7.1)$$

Вважатимемо, що реакція (6.7.1) відбувається за рахунок бомбардування пучком протонів протонної мішені (тобто розглядатимемо лабораторну систему координат).

Енергетичний вихід реакції (6.7.1) складатиме  $|Q| = 2m_N c^2$ , де  $m_N$  — маса нуклона.

Енергія, необхідна для народження пари нейтрон-антинейтрон, дорівнює:

$$|Q| = 2m_n c^2 = 2 \cdot 939,57 \text{ MeV} = 1879,14 \text{ MeV} \approx 1,879 \text{ GeV}. \quad (6.7.2)$$

Для протонів енергія реакції (6.7.1) складатиме:

$$|Q| = 2m_p c^2 = 2 \cdot 938,28 \text{ MeV} = 1876,56 \text{ MeV} \approx 1,877 \text{ GeV}. \quad (6.7.3)$$

Тобто для обох типів нуклонів енергія реакції (6.7.1) є практично однаковою.

Для знаходження порогової енергії скористаємось тим, що в будь-якій системі частинок з повною енергією  $E$  та імпульсом  $p$  величина  $E^2 - p^2 c^2$  є інваріантною відносно вибору системи координат. В нашому випадку до взаємодії зручно взяти цей інваріант в лабораторній системі координат, а після взаємодії — в системі центра мас. Для реакції (6.7.1) інваріант матиме вигляд:

$$(E + m_p c^2)^2 - p^2 c^2 = (4m_p c^2)^2, \quad (6.7.4)$$

де  $E, p$  — повна енергія та імпульс налітаючого протона,  $m_p$  — маса спокою протона. В правій частині (6.7.4) враховано, що сумарний імпульс частинок, які утворюються в результаті реакції, в системі центра мас дорівнює нулю. Для протона, що налітає на мішень, також можемо записати відповідний інваріант:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_p^2 c^4. \quad (6.7.5)$$

Порогова кінетична енергія протона дорівнює  $E_{\text{пор}} = E - m_p c^2$ . Виразимо з (6.7.5) імпульс, підставимо його до (6.7.4) й отримаємо повну енергію протона:

$$E = 7m_p c^2. \quad (6.7.6)$$

Остаточно, порогова кінетична енергія протона складатиме  $E_{\text{пор}}^k = 6m_p c^2 = 5,63 \text{ Гев}$ .

Якщо використати зустрічні пучки протонів, порогову енергію реакції (6.7.1) можна значно зменшити.

### 6.3. Запитання та відповіді

19. Отримайте формулу для порогу ядерної реакції в релятивістському випадку.

Скористаємось методом, наведеним у прикладі 7. Будемо вважати, що легкі частинки з масою  $m_1$  та імпульсом  $\vec{p}_1 \neq 0$  налітають на мішень, що складається з частинок  $m_2$  ( $\vec{p}_2 = 0$ ). В лабораторній системі координат закони збереження енергії та імпульсу записуються таким чином:

$$\vec{P}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \dots + \vec{p}'_k;$$

$$E_1 + m_2 c^2 = E'_1 + E'_2 + \dots + E'_k,$$

де  $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2, \dots, \vec{p}'_k$  – імпульси частинок, що виникли в результаті ядерної реакції,  $E_1$  – повна (релятивістська) енергія налітаючої частинки,  $E'_1, E'_2, \dots, E'_k$  – релятивістські енергії частинок – продуктів реакції.

Скористаємось інваріантністю величини  $E^2 - p^2 c^2$  відносно вибору системи координат і запишемо цей інваріант до взаємодії в лабораторній системі координат, а після взаємодії – в системі центра мас. Оскільки в системі центра мас імпульс дорівнює нулю, отримаємо наступний вираз:

$$(E_1 + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2 = (E'_1 + E'_2 + \dots + E'_k)^2.$$

В останньому виразі  $E'_1, E'_2, \dots, E'_k$  – релятивістські енергії частинок – продуктів реакції в системі центра мас. В загальному випадку вони рухаються одна відносно іншій. Коли взаємного руху



немає, енергія  $E_1$  буде мінімальною ( $E_{1\min}$ ) релятивістською енергією частинки  $m_1$  і порогова кінетична енергія дорівнюватиме  $E_{\text{пор}} = E_{1\min} - m_1 c^2$ . Таким чином для мінімальної енергії отримаємо рівняння:

$$(E_{1\min} + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2 = (m'_1 + m'_2 + \dots + m'_k)^2 c^4,$$

де  $m'_1, m'_2, \dots, m'_k$  – маси спокою частинок, що утворились після взаємодії (кінетичні енергії цих частинок в мінімумі дорівнюють нулю). Використовуючи інваріант для налітаючої частинки:

$$E_{1\min}^2 - p_1^2 c^2 = m_1^2 c^4,$$

отримаємо наступний вираз:

$$(m_1^2 + m_2^2) c^2 + 2m_2 E_{1\min} = (m'_1 + m'_2 + \dots + m'_k)^2 c^2.$$

Виразимо з останнього рівняння порогову кінетичну енергію:

$$E_{\text{пор}} = c^2 \frac{(m'_1 + m'_2 + \dots + m'_k)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2}.$$

Енергетичний вихід ендоенергетичної реакції дорівнює:

$$Q_{\text{енд}} = (m'_1 + m'_2 + \dots + m'_k - m_1 - m_2) c^2,$$

тому попередній вираз переписеться таким чином:

$$\begin{aligned} E_{\text{пор}} &= c^2 \frac{(m'_1 + m'_2 + \dots + m'_k - m_1 - m_2)(m'_1 + m'_2 + \dots + m'_k + m_1 + m_2)}{2m_2} = \\ &= \frac{Q_{\text{енд}} \left( \frac{Q_{\text{енд}}}{c^2} + 2m_1 + 2m_2 \right)}{2m_2} = Q_{\text{енд}} \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{Q_{\text{енд}}}{2m_2 c^2} \right). \end{aligned}$$

Це і є вираз для порогової енергії ендоенергетичної реакції у випадку релятивістських швидкостей частинок, що взаємодіють.

20. Згідно визначення, ендоенергетична реакція є безпороговою. Чи означає це, що така реакція може відбуватись навіть при нульовій або дуже малій енергії налітаючої зарядженої частинки?

Відомо, що переріз ядерної реакції, яка відбувається під час взаємодії зарядженої частинки з ядром, є добутком трьох множників:  $\sigma = D_1 \sigma_0 D_2$  (див. терію до цього розділу), де  $D_1$  – коефіцієнт прозорості кулонівського бар'єру для налітаючої зарядженої частинки. Звісно,

чим менша енергія цієї частинки, тим меншою буде величина  $D_1$ , тому при малих енергіях переріз ядерної реакції наближується до нуля.

Так, переріз ядерних реакцій, обумовлених взаємодією з ядром  $\alpha$ -частинок малої (1 кеВ) та середньої (1 кеВ ÷ 1 МеВ) енергій практично нульовий навіть при взаємодії з легкими ядрами й швидко зростає при збільшенні енергії.

До аналогічних наслідків приводить існування кулонівського бар'єру для зарядженої частинки, що вилітає в результаті реакції. При малій енергії налітаючої частинки ядерні реакції з випромінюванням заряджених частинок спостерігаються дуже рідко.

21. Які фізичні причини тривалого часу життя (за ядерними масштабами) складного проміжного ядра?

По-перше: в ядерному масштабі часу система проміжного ядра часто поводить себе так, якби вона існувала нескінченно тривалий час, оскільки виникає така система нуклонів, поведінка якої зовсім не залежить від історії її утворення. Це пов'язано з дуже малим часом релаксації додаткової енергії, яка вноситься в складне проміжне ядро в процесі його створення, між усіма внутрішніми ступенями свободи цього ядра. Такий розподіл приводить до того, що на кожен нуклон приходить (в середньому) мала додаткова енергія, якої не вистачає для вильоту нуклона з ядра. Такий виліт може мати місце лише тоді, коли чисто випадково значна частина цієї енергії буде зосередженою на конкретному нуклоні. Цей процес повністю аналогічний випаровуванню молекул з рідини при відносно низькій температурі — середня енергія кожної з молекул рідини при кімнатній температурі  $3kT/2 \approx 0,025 \text{ eV}$  набагато менша, ніж енергія, яка необхідна для відриву молекули (типове значення такої енергії  $\Delta W \approx 0,3 - 0,5 \text{ eV}$ ).

По-друге: наявність кулонівського бар'єру перешкоджає вильоту протонів з середніх та важких ядер.

По-третє: вилітання частинки з ядра може бути ускладнене наявністю різноманітних правил відбору. У випадку, коли ядро випромінює  $\gamma$ -квант, процес відбувається за рахунок електромагнітної взаємодії, що теж спричиняє збільшення часу життя проміжного ядра.

22. Що являють собою реакції зриву та підхоплення?

Типовими прикладами реакції зриву є  $(d,p)$  та  $(d,n)$ , а прикладами реакції підхоплення є  $(p,d)$  та  $(n,d)$ .

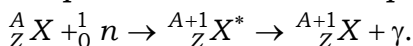
Наприклад, при реакції зриву  $(d,p)$  налітаючий дейтрон, взаємодіючи з одним чи декількома периферійними нуклонами ядра, позбавляється свого нейтрона, який залишається в ядрі, а протон продовжує летіти далі. Дейтрон має форму гантелі, утвореної з протону та нейтрону. Відстань між цими нуклонами в ядрі дейтерію аномальна велика у порівнянні з іншими ядрами і рівна  $L_d \approx 4 \cdot 10^{-13}$  см. Реакція зриву зумовлена кулонівським відштовхуванням, яке веде до такої орієнтації дейтрона при його прольоті біля ядра, коли вісь дейтрона (лінія, яка сполучує протон і нейтрон) буде синхронно з рухом повертатись у просторі таким чином, щоб бути направленою від центру ядра. При цьому протон завжди буде знаходитись на дальньому кінці цієї осі, а нейтрон — на ближньому. Якщо дейтрон пролітає біля поверхні ядра на відстані  $r \leq L_d/2$ , то нейтрон захоплюється ядром, а протон не потрапляє всередину ядра. Така орієнтаційна реакція має назву реакції Опенгеймера-Вільямса.

Важлива особливість реакції зриву полягає в тому, що в її результаті утворюються ізотопи ядер мішеней з малою енергією збудження, яка в ряді випадків менша за енергію зв'язку по відношенню до відриву нейтрона. Цим відкривається практична можливість отримувати ядра в слабкозбуджених станах.

У реакції підхоплення  $(p,d)$  налітаючий протон забирає один з периферійних нейтронів, таким чином, що з ядра вилітає вже дейтрон.

23. Що таке "радіаційне захоплення" нейтрона?

Цей процес є конкуруючим по відношенню до процесу утворення та розпаду складеного ядра. Загальний вигляд реакції є таким:



В цьому процесі ядро переходить до збудженого стану також в результаті захоплення нейтрону. Але до основного стану новоутвореного ізотопу воно повертається шляхом випускання  $\gamma$ -кванту. Останній процес відбувається вже під дією електромагнітних сил, тобто в ядерному масштабі доволі повільно. Тому при радіаційному захопленні може утворитися складене ядро.

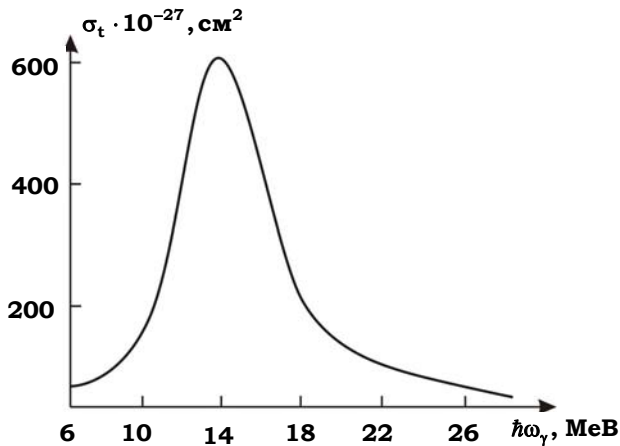
24. Наведіть приклади ядерного фотоефекту.

Під час взаємодії  $\gamma$ -кванту з ядром відбуваються так звані фотоядерні реакції, які обумовлені електромагнітною взаємодією. До таких реакцій відносяться наступні:  $(\gamma, n)$ ,  $(\gamma, p)$ ,  $(\gamma, pn)$ ,  $(\gamma, \alpha)$  тощо. Ці реакції аналогічні до тих, що відбуваються при поглинанні  $\gamma$ -кванту атомом, тому їх називають ядерним фотоефектом. Для того, щоб такі реакції могли відбуватись, енергія  $\gamma$ -кванту має бути більшою за енергію зв'язку відповідної дочірньої частинки або групи частинок. Енергія квантів, які випромінюються природними радіоактивними речовинами, є недостатньою, тому для дослідження фотоядерних реакцій застосовують  $\gamma$ -кванти, що виникають в прискорювачах під час гальмівного випромінювання електронів, або в реакції  $(p, \gamma)$ . Слід зазначити, що при цьому виникають проблеми, пов'язані з немонохроматичністю таких квантів.

25. В чому полягає явище "гігантського резонансу"?

Гігантськими резонансами називаються високоезбуджені стани атомних ядер, які інтерпретують як колективні когерентні коливання за участю великої кількості нуклонів. Відомі резонанси, що відповідають коливанням об'єму ядра, ядерної поверхні, протонів відносно нейтронів, коливання, пов'язані з обмінним зарядом тощо.

Найкраще вивченими експериментально є реакції, що відбуваються при поглинанні  $\gamma$ -кванту ядром (фотоядерні реакції). Повний переріз поглинання  $\sigma_t$  має невелике значення при малих та великих енергіях, а приблизно посередині є високий та широкий максимум, який називається «гігантським резонансом» (Рис. 6.3.). Ширина гігантського резонансу 3-4 МеВ, а положення плавно змінюється зі зміною масового числа  $A$  від 20-25 МеВ в легких ядрах до 13-15 МеВ у важких. Встановлено, що в гігантському резонансі поглинаються в основному електричні дипольні кванти [2].



**Рис. 6.3. Залежність повного перерізу поглинання  $\gamma$  – квантів ядром  $^{208}_{82}\text{Pb}$  від енергії квантів.**

Основний вклад в повний переріз  $\sigma_t$  в області гігантських резонансів дають реакції  $(\gamma, n)$  та  $(\gamma, p)$ , під час яких з ядра виривається один нуклон. Вперше такий резонанс було описано в 1944 р. А.Б.Міздалом та експериментально досліджено в 1947 р. в реакціях фотоподілу.

Під час дипольного поглинання  $\gamma$  – кванту ядром на всі протони діє імпульс однорідного електричного поля, направленого перпендикулярно до напрямку руху пучка квантів. Під дією цього імпульсу може зміститись центр тяжіння протонів по відношенню до центру тяжіння нейтронів. В результаті або всі нуклони зміщуються приблизно однаково (колективна модель), або один протон чи нейтрон (оболонкова модель в наближенні незалежних нуклонів).

Наостанок зауважимо, що навіть в області гігантського резонансу переріз поглинання складає 0,05-0,1 барн, тобто є на один-два порядки меншим за переріз електромагнітної взаємодії  $\gamma$  – квантів з атомними електронами. Тому фотоядерні реакції майже не впливають на коефіцієнт поглинання  $\gamma$  – квантів речовиною.

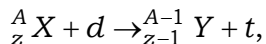
Основним методом дослідження гігантських резонансів є непружне розсіювання частинок на ядрах.

## 7. ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ ЗА УЧАСТЮ НЕЙТРОНІВ

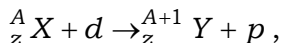
### 7.1. Теоретичні відомості

Реакції за участю нейтронів бувають двох типів — *реакції прямої дії* та *реакції*, в яких утворюється *проміжне ядро*.

Серед реакцій прямої дії найбільше значення мають реакції *підхоплення* типу



(при цьому пролітаюче ядро захоплює один з нейтронів нерухомого ядра і далі рухається, як більш складне ядро), та реакції *зриву*:



під час яких нейтрон зі складу пролітаючого ядра захоплюється нерухомим ядром. Ефективність таких реакцій зростає при малій енергії відносного руху внаслідок того, що пролітаюче ядро (наприклад, ядро дейтерію  ${}_1^2d$ , яке має форму видовженої гантелі досить великого поздовжнього розміру  $L_d \approx 4,3 \cdot 10^{-13}$  см, що втричі перевищує типову відстань між нуклонами у важких ядрах) при близькому прольоті поляризується полем нерухомого ядра і повертається таким чином, що протон за рахунок кулонівського відштовхування знаходитиметься якнайдалі від ядра. Це призводить до того, що нейтрон у складі дейтрона може пролітати безпосередньо по поверхні, або навіть під поверхнею нерухомого ядра, а протон буде знаходитись за його межами. Це так звана *орієнтаційна модель ядерної взаємодії Опенгеймера-Філіпса*, для якої значно послаблюється дія кулонівського відштовхування.

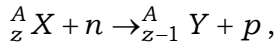
Більшість реакцій за участю нейтронів, які мають практичне застосування, наприклад, реакція ділення атомних ядер, проходять через стадію утворення *проміжного ядра (компаунд-ядра)*. Проміжне ядро утворюється в збудженому стані і далі перетворюється в напрямку зменшення надлишкової енергії з виконанням усіх законів збереження. Основні механізми зняття енергії збудження у випадку, коли проміжне ядро виникає внаслідок захоплення повільного нейтрона, є такими: *пружне розсіювання* нейтрона (реакція  $(n, n)$ ) та *радіаційне захоплення* (реакція  $(n, \gamma)$ , в результаті якої збудження знімається шляхом випромінювання  $\gamma$ -кванту). Ці реакції описуються такими рівняннями:

$$\begin{aligned} {}^A_Z X + n &\rightarrow {}^A_Z X + n, \\ {}^A_Z X + n &\rightarrow {}^{A+1}_Z Y + \gamma. \end{aligned}$$

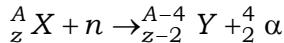
До повністю пружних реакцій відносяться всі процеси нейтронної оптики (включно з заломленням нейтронної хвилі під час переходу з одного середовища в інше та дифракцією нейтронів на кристалічній ґратці). Ці процеси описуються законами звичайної оптики, в якій довжина хвилі рівна довжині хвилі де Бройля нейтрона, а показник заломлення визначається усередненою потенціальною енергією нейтрона в даному місці середовища  $\langle V \rangle$  та його кінетичною енергією  $E_n$ :

$$n = \sqrt{\frac{2m_n}{\hbar^2} (E_n - \langle V \rangle)}.$$

Можливі також процеси випускання проміжним ядром протонів:



$\alpha$  – частинок:



та навіть збільшеної кількості нейтронів. Остання реакція має місце при дуже великій енергії падаючого нейтрона (відома тільки одна реакція:  ${}^9_4 Be + n \rightarrow {}^{12}_6 C + 2n$ , що проходить при відносно низькій енергії нейтрона  $\sim 2 \text{ MeV}$ ).

Важкі ядра під час захоплення нейтронів зазнають поділу.

Ядерна реакція, що відбувається через утворення проміжного ядра  $C^*$ , записується так:

$$a + A \rightarrow C^* \rightarrow \begin{cases} b_1 + B_1 \\ b_2 + B_2, \\ \dots\dots\dots \\ b_i + B_i \end{cases}$$

де  $b_i, B_i$  — продукти розпаду проміжного ядра по всім можливим вихідним каналам. Ефективний переріз  $\sigma_{ab_i}$ , який описує конкретний канал реакції, знаходиться як добуток перерізу утворення проміжного ядра  $\sigma_{C^*}$  та імовірності розпаду  $W_{b_i}$  цього ядра за каналом  $b_i$ :

$$\sigma_{ab_i} = \sigma_{C^*} W_{b_i}.$$

Якщо імовірність розпаду проміжного ядра достатньо мала, енергетичний спектр його являє собою набір квазістаціонарних станів. Кожен такий стан характеризується певним часом життя  $\tau$ , протягом якого ядро може перебувати в цьому стані, при цьому кожен квазістаціонарний рівень має скінченну ширину, що визначається зі співвідношення невизначеностей  $\Gamma \approx \hbar/\tau$ . Повна ширина квазістаціонарного стану проміжного ядра є сумою парціальних ширин по всім можливим каналам його розпаду:

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i = \hbar \sum_i \frac{1}{\tau_i}.$$

Імовірність розпаду проміжного ядра за певним каналом дорівнює:

$$W_{b_i} = \frac{\Gamma_i}{\Gamma},$$

де  $\Gamma_i = \frac{\hbar}{\tau_i}$  — парціальна ширина рівня по відношенню до розпаду

за каналом  $(a, b_i)$ .

Нехай енергія налітаючого нейтрона мала, так що енергія проміжного ядра, яке виникає після захоплення нейтрона, значно менша за енергію його першого збудженого рівня та перенормована довжина хвилі де Бройля нейтрона  $\lambda$  значно більша за розміри ядра. В такому випадку ефективний переріз утворення проміжного ядра обернено пропорційний до швидкості нейтрона (закон  $1/v$ ):  $\sigma_{C^*} \sim \frac{1}{v}$ .

Якщо сумарна енергія нейтрона та материнського ядра відповідає області, де розташовані енергетичні смуги проміжного ядра, переріз утворення різко зростає — має місце *резонансна ядерна реакція*. Для перерізу утворення проміжного ядра в цьому випадку користуються формулою Брейта-Вігнера:

$$\sigma_C = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma \Gamma_n}{(E_n - E_{n0})^2 + (\Gamma/2)^2},$$

$$g = \frac{2J+1}{2(2I+1)},$$

тут  $\lambda = \lambda/2\pi$  та  $E_n$  — перенормована довжина хвилі та кінетична енергія налітаючого нейтрона,  $E_{n0}$  — резонансна кінетична енергія



нейтрона, яка відповідає енергетичному рівню проміжного ядра,  $g$  — статистичний фактор,  $I$  — спин ядра-мішені,  $J$  — спин відповідного рівня проміжного ядра,  $\Gamma$  та  $\Gamma_n$  — повна та нейтронна ширина рівня проміжного ядра, відповідно. Нейтронна ширина  $\Gamma_n$  визначає імовірність перетворення проміжного ядра за каналом пружного розсіювання нейтрона і залежить від його довжини хвилі де Бройля:

$$\lambda \Gamma_n = \lambda_0 \Gamma_{n0},$$

де  $\lambda_0$  та  $\Gamma_{n0}$  — довжина хвилі де Бройля нейтрона та нейтронна ширина рівня при резонансній енергії нейтрона  $E_n = E_{n0}$ . Зауважимо, що формула Брейта-Вігнера справедлива для повільних нейтронів з нульовим орбітальним моментом  $l = 0$ .

В залежності від значення кінетичної енергії нейтронів можна ввести наступну класифікацію, яка наведена в таблиці 7.1. [1]:

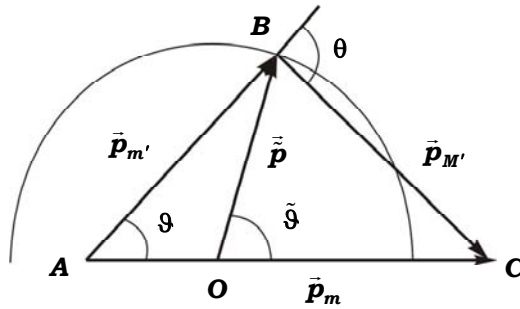
**Таблиця 7.1.**

<b>Нейтрони</b>	<b>Енергія, еВ</b>
<i>Ультрахолодні</i>	$< 5 \cdot 10^{-7}$
<i>Дуже холодні</i>	$5 \cdot 10^{-7} \div 2 \cdot 10^{-4}$
<i>Холодні</i>	$2 \cdot 10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-3}$
<i>Теплові</i>	$5 \cdot 10^{-3} \div 10^{-1}$
<i>Резонансні</i>	$10^{-1} \div 10^4$
<i>Проміжні</i>	$10^4 \div 10^5$
<i>Швидкі</i>	$10^5 \div 10^8$
<i>Високоенергетичні</i>	$10^8 \div 10^9$
<i>Релятивістські</i>	$> 10^9$

## **7.2. Приклади розв'язування задач**

**Приклад 1.** Для одержання потужних потоків швидких нейтронів в ядерному реакторі розташовують дейтерид літію  $LiD$ , в якому повільні нейтрони реактора збуджують реакцію  ${}^6Li(n, \alpha){}^3H + 4,8 \text{ MeV}$ . Ядра тритію, в свою чергу, збуджують реакції

а)  $D(t, n){}^4He + 17,6 \text{ MeV}$  та б)  ${}^7Li(t, n){}^9Be + 10,4 \text{ MeV}$ , які й є джерелом швидких нейтронів. Знайти максимальну та мінімальну енергію цих нейтронів.



**Рис.7.1.** Векторна діаграма імпульсів для частинок, що приймають участь у реакції  $M(m, m')M'$ .  $\vec{p}_m$ ,  $\vec{p}_{m'}$  та  $\vec{p}_{M'}$  — імпульси налітаючої частинки та продуктів реакції в  $\Lambda$ -системі,  $O$  — центр кола з радіусом  $\tilde{p}$ , що дорівнює сумарному імпульсу частинок, що утворились, в  $\Pi$ -системі,  $\theta$  — кут розльоту продуктів реакції в  $\Lambda$ -системі.

**Розв'язання:** Запишемо першу реакцію, в результаті якої виникають ядра тритію ( $t$ ):

$${}^6\text{Li} + n = t + \alpha + Q_1. \quad (7.1.1)$$

Нехтуючи кінетичною енергією повільних нейтронів у реакції (7.1.1), знайдемо кінетичну енергію ядер тритію в лабораторній системі координат ( $\Lambda$ -системі):

$$E_t = \frac{m_\alpha}{m_t + m_\alpha} Q_1, \quad (7.1.2)$$

де  $Q_1$  — енергетичний вихід реакції (7.1.1). Підставивши маси ядер у формулу (7.1.2), знайдемо

$$E_t \approx \frac{4}{7} Q_1 = 2,74 \text{ MeV}. \quad (7.1.3)$$

Друга реакція, в результаті якої отримуються швидкі нейтрони:

$$D + t = n + \alpha + 17,6 \text{ MeV}. \quad (7.1.4)$$

Скористаємось векторною діаграмою імпульсів (Рис.7.1.). В системі центра мас ( $\Pi$ -системі) сумарний імпульс  $\tilde{p}$  частинок, що виникають в результаті реакції (7.1.4) знаходиться наступним чином [8]:

$$\tilde{p} = \sqrt{2\mu'(\tilde{E}_k + Q)}, \quad (7.1.5)$$

де  $\mu'$  — зведена маса частинок, що виникають (нейтрона  $m'$  та  $\alpha$ -частинки  $M'$ ),  $Q$  — енергетичний вихід реакції,  $\tilde{E}_k$  — сумарна кінетична енергія частинок до реакції (в Ц-системі), в нашому випадку — це кінетична енергія тритонів в системі центра мас. На Рис. 7.1 точка  $O$  ділить відрізок  $AC$  на дві частини  $AO : OC = m' : M'$ ;  $\tilde{\vartheta}$  — кут, під яким вилітає частинка  $m'$  (в нашому випадку — нейтрон) в Ц-системі;  $\theta$  — кут розльоту продуктів реакції в  $\Lambda$ -системі.

Кінетична енергія частинок, що викликає ядерну реакцію (ядер тритію), в системі центра мас (Ц-системі) [2] записується наступним чином:

$$\tilde{E}_k = \tilde{E}_t = \frac{M}{m + M} E_k = \frac{m_d}{m_t + m_d} E_t = 0,4 E_t. \quad (7.1.6)$$

Врахувавши, що зведена маса частинок, утворених в результаті реакції (7.1.4),  $\mu' = \frac{m'M'}{m' + M'} = \frac{m_n m_\alpha}{m_n + m_\alpha}$ , виразимо імпульс  $\tilde{p}$  через імпульс ядер тритію  $p_t = \sqrt{2m_t E_t}$  в  $\Lambda$ -системі:

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \sqrt{2\mu'(\tilde{E}_k + Q)} = \sqrt{2 \frac{m_n m_\alpha}{m_n + m_\alpha} (0,4 E_t + Q_2)} = \sqrt{2m_t E_t} \sqrt{\frac{m_n m_\alpha}{m_t (m_n + m_\alpha)} \left(0,4 + \frac{Q_2}{E_t}\right)}, \\ \tilde{p} &= p_t \sqrt{\frac{m_n m_\alpha}{m_t (m_n + m_\alpha)} \left(0,4 + \frac{Q_2}{E_t}\right)}. \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

Підставляючи в (7.1.7) маси ядер, енергію реакції (7.1.4)  $Q_2 = 17,6$  МеВ та кінетичну енергію тритонів в  $\Lambda$ -системі  $E_t = 2,74$  МеВ, знайдемо сумарний імпульс продуктів реакції (7.1.4) в Ц-системі:

$$\tilde{p} = p_t \sqrt{\frac{4}{15} \left(0,4 + \frac{17,6}{2,74}\right)} \approx 1,35 p_t. \quad (7.1.8)$$

З векторної діаграми імпульсів (Рис. 7.1.), з використанням теореми косинусів для трикутника  $ABO$ , можемо знайти імпульс нейтронів в  $\Lambda$ -системі:

$$\tilde{p}^2 = AO^2 + p_{m'}^2 - 2p_{m'} \cdot AO \cdot \cos \vartheta = AO^2 + p_n^2 - 2p_n \cdot AO \cdot \cos \vartheta. \quad (7.1.9)$$

Довжина відрізка  $AO = \frac{m'}{m' + M} p_m = \frac{m_n}{m_n + m_\alpha} p_t$ . Очевидно, що максимальне та мінімальне значення імпульсу нейтронів ми одержимо, якщо покладемо в (7.1.9)  $\vartheta = 0^\circ$  та  $\vartheta = 180^\circ$ , відповідно. Таким чином, імпульс нейтронів дорівнюватиме

$$p_n = \tilde{p} \pm \frac{m_n}{m_n + m_\alpha} p_t = 1,35 p_t \pm 0,2 p_t. \quad (7.1.10)$$

Отже, максимальна кінетична енергія швидких нейтронів в  $\Lambda$ -системі

$$E_{n \max} = \frac{p_{n \max}^2}{2m_n} = \frac{(1,55 p_t)^2}{2m_n} = 1,55^2 \frac{m_t}{m_n} E_t = 19,7 \text{ MeV}, \quad (7.1.11)$$

а їх мінімальна кінетична енергія

$$E_{n \min} = \frac{p_{n \min}^2}{2m_n} = \frac{(1,15 p_t)^2}{2m_n} = 1,15^2 \frac{m_t}{m_n} E_t = 10,8 \text{ MeV}. \quad (7.1.12)$$

Другу реакцію

$${}^7\text{Li} + t = n + {}^9\text{Be} + 10,4 \text{ MeV}. \quad (7.1.13)$$

розрахуємо аналогічно. Згідно (7.1.6), Кінетична енергія ядер тритію в Ц-системі для реакції (7.1.13)

$$\tilde{E}_t = \frac{m_{\text{Li}}}{m_t + m_{\text{Li}}} E_t = 0,7 E_t \quad (7.1.14)$$

З (7.1.5) імпульс  $\tilde{p}$  частинок, що виникають в результаті реакції (7.1.13),

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= p_t \sqrt{\frac{m_n m_{\text{Be}}}{m_t (m_n + m_{\text{Be}})} \left( 0,7 + \frac{Q_3}{E_t} \right)} = \\ &= p_t \sqrt{\frac{9}{30} \left( 0,7 + \frac{10,4}{2,75} \right)} = 1,16 p_t. \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

Максимальне та мінімальне значення імпульсу нейтрона в реакції (7.1.13):

$$p_n = \tilde{p} \pm \frac{m_n}{m_n + m_{\text{Be}}} p_t = 1,16 p_t \pm 0,1 p_t. \quad (7.1.16)$$

З урахуванням (7.1.16), максимальна кінетична енергія нейтронів становитиме:

$$E_{n \max} = \frac{(1,26 p_t)^2}{2m_n} = 1,26^2 \frac{m_t}{m_n} E_t = 13,1 \text{ MeV},$$

а мінімальна —

$$E_{n \min} = 1,06^2 \frac{m_t}{m_n} E_t = 9,27 \text{ MeV}.$$

**Приклад 2.** Тонку платівку з фосфору з масовою товщиною  $1,0 \text{ г/см}^2$  опромінювали протягом часу  $\tau = 4,0 \text{ год}$  потоком нейтронів  $j_n = 2,0 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  з кінетичною енергією  $2 \text{ MeV}$ . Через час  $t = 1,0 \text{ год}$  після закінчення опромінення активність пластинки становила  $3,9 \cdot 10^6 \text{ Бк}$ . Відомо, що активність обумовлена нуклідом  $^{31}\text{Si}$ , який виникає в результаті реакції  $(n, p)$ . Визначити переріз даної реакції.

**Розв'язання:** Запишемо реакцію, в результаті якої виникає  $\beta$ -активний ізотоп  $^{31}\text{Si}$  з періодом піврозпаду  $T = 2,65 \text{ год}$ :



У випадку тонкої мішені, зв'язок між виходом ядерної реакції  $w$  та перерізом  $\sigma$  є таким:

$$w = \sigma n_0 d, \quad (7.2.2)$$

де  $n_0 d$  — концентрація ядер мішені на одиниці площі, її можна також виразити через масову товщину мішені  $\rho d$ :  $n_0 d = \frac{m}{m_{\text{я}}} \frac{d}{V} = \frac{\rho d}{m_{\text{я}}}$ , де  $m_{\text{я}}$  — маса ядер, з яких складається мішень,  $m$  — маса мішені. Таким чином, переріз реакції дорівнює:

$$\sigma = w \frac{m_{\text{я}}}{\rho d}. \quad (7.2.3)$$

Згідно визначенню, вихід реакції — це відношення кількості утворених ядер нукліда  $^{31}\text{Si}$  до кількості падаючих на мішень нейтронів:  $w = \frac{\Delta N_{\text{Si}}}{\Delta N_n}$ . Оскільки нуклід  $^{31}\text{Si}$  є радіоактивним, закон накопичення його кількості протягом часу опромінення фосфорної мішені нейтронами (див. приклад 2, розділ 2)

$$N(t) = \frac{q}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}), \quad (7.2.4)$$

де  $q$  — швидкість утворення ядер  $^{31}\text{Si}$ . Швидкість утворення пов'язана з виходом реакції наступним чином:

$$q = \frac{\Delta N_{\text{Si}}}{\Delta t} = w \frac{\Delta N_n}{\Delta t} = w j_n. \quad (7.2.5)$$

Таким чином, протягом часу  $\tau$  в мішені накопичиться  $N(\tau) = w \frac{j_n}{\lambda} (1 - e^{-\lambda\tau})$  ядер ізотопу  $^{31}\text{Si}$ .

Після закінчення опромінювання кількість ядер  $^{31}\text{Si}$  лише зменшуватиметься за рахунок розпаду і через час  $t$  становитиме:

$$N(t) = w \frac{j_n}{\lambda} (1 - e^{-\lambda\tau}) \cdot e^{-\lambda t}. \quad (7.2.6)$$

Отже, активність пластинки  $A = N(t) \cdot \lambda = w j_n (1 - e^{-\lambda\tau}) \cdot e^{-\lambda t}$ . Звідси знаходимо вихід реакції:

$$w = \frac{A e^{\lambda t}}{j_n (1 - e^{-\lambda\tau})}. \quad (7.2.7)$$

Остаточно, з (7.2.3) з урахуванням (7.2.7) отримаємо переріз реакції (7.2.1):

$$\sigma = \frac{A e^{\lambda t}}{j_n (1 - e^{-\lambda\tau})} \frac{m_{\text{я}}}{\rho d} = \frac{A \cdot 2^{\frac{t}{T_{1/2}}}}{j_n \left( 1 - 2^{-\frac{\tau}{T_{1/2}}} \right)} \frac{m_{\text{я}}}{\rho d}. \quad (7.2.8)$$

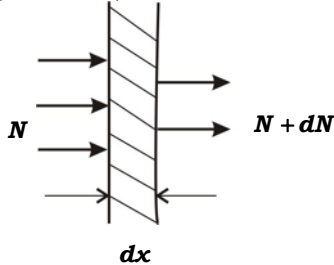
Підставляючи в (7.2.8) параметри задачі, знаходимо переріз реакції (7.2.1) при енергії нейтронів  $E_n = 2 \text{ MeV}$ :

$$\sigma = \frac{3,9 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{2,65}}}{2 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1} \left( 1 - 2^{-\frac{4}{2,65}} \right)} \frac{31 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}}{1 \text{ г/см}^2} = 0,02 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 = 20 \text{ мбарн}.$$

**Приклад 3.** Берилієву платівку опромінюють потоком нейтронів з кінетичною енергією  $14 \text{ MeV}$ , який падає нормально до її поверхні. Оцінити товщину платівки, необхідну для 10% – го відтворення

нейтронів за реакцією  $(n, 2n)$ , переріз якої при такій енергії нейтронів  $\sigma = 0,50$  барн. Вважати, що інших процесів немає і що вторинні нейтрони у платівці не поглинаються.

**Розв'язання:** Запишемо диференціальне рівняння для зміни кількості нейтронів після проходження шару речовини товщиною  $dx$  з концентрацією ядер  $n$  (Рис. 7.2):



**Рис. 7.2. Зміна кількості материнських нейтронів після проходження шару речовини товщиною  $dx$ .**

$$dN = -Nn_0\sigma dx. \quad (7.3.1)$$

Інтегруючи (7.3.1), отримаємо закон зміни кількості материнських нейтронів з відстанню:

$$N = N_0 e^{-n_0\sigma x}. \quad (7.3.2)$$

Кожен материнський нейтрон, що вибув з пучка, в результаті реакції  $(n, 2n)$  утворює 2 дочірніх нейтрони, тобто кількість дочірніх нейтронів, що виникають на довжині  $d$  (за умови, що вторинні нейтрони не поглинаються в речовині мішені), дорівнюватиме:

$$\Delta N_\theta = 2(N_0 - N) = 2N_0(1 - e^{-n_0\sigma d}). \quad (7.3.3)$$

Остаточно кількість нейтронів  $N_\Sigma$ , з урахуванням дочірніх нейтронів, на виході з платівки запишеться таким чином:

$$N_\Sigma = N_0 e^{-n_0\sigma d} + \Delta N_\theta = N_0(2 - e^{-n_0\sigma d}). \quad (7.3.4)$$

З (7.3.4) виразимо товщину платівки, необхідну для відтворення нейтронів у певній пропорції:

$$\frac{N}{N_0} = \eta = 2 - e^{-n_0\sigma d} \Rightarrow d = -\frac{\ln(2 - \eta)}{n_0\sigma}. \quad (7.3.5)$$

В нашому випадку  $\frac{N}{N_0} = \eta = 1,1$ , і з (7.3.5) знайдемо товщину берилієвої платівки, необхідну для 10%-го відтворення нейтронів:

$$d = -\frac{\ln 0,9}{n_0 \sigma}. \quad (7.3.6)$$

Концентрацію атомів мішені виразимо наступним чином:  $n_0 = \frac{\rho}{A}$ , де  $\rho$  — густина речовини,  $A$  — атомна вага. Враховуючи, що для берилію  $\rho_{Be} = 1,85 \frac{г}{см^3}$ ,  $A = 9 \text{ а.о.м.} \approx 15 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ , з (7.3.6) отримаємо числове значення товщини платівки:

$$d = -\frac{\ln 0,9 \cdot 15 \cdot 10^{-24} \text{ г}}{1,85 \frac{г}{см^3} \cdot 0,5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2} \approx 1,7 \text{ см.}$$

**Приклад 4.** Було досліджено, що під час взаємодії теплових нейтронів з енергією  $0,025 \text{ eV}$  з ядрами  $^{113}\text{Cd}$  переріз розсіювання складає  $0,22\%$  від перерізу радіаційного захоплення. Визначити відношення ймовірності розпаду складного ядра з випромінюванням нейтронів до ймовірності випромінювання  $\gamma$ -квантів при резонансній енергії нейтронів  $E_{n0} = 0,178 \text{ eV}$ .

**Розв'язання:** У випадку, коли ядерні реакції за участю нейтронів є резонансними і відбуваються через утворення проміжного ядра, користуються формулою Брейта-Вігнера для перерізу утворення такого ядра:

$$\sigma_C = \pi \tilde{\lambda}^2 g \frac{\Gamma \Gamma_n}{(E_n - E_{n0})^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (7.4.1)$$

причому

$$\Gamma_n \tilde{\lambda}_n = \Gamma_{n0} \tilde{\lambda}_0. \quad (7.4.2)$$

Переріз ядерної реакції розсіювання нейтронів  $(n, n)$ :

$$\sigma_{nn} = \sigma_C \frac{\Gamma_n}{\Gamma} = \pi \tilde{\lambda}^2 g \frac{\Gamma_n^2}{(E_n - E_{n0})^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (7.4.3)$$



де  $\frac{\Gamma_n}{\Gamma}$  — ймовірність розпаду проміжного ядра за каналом пружного розсіювання.

Переріз реакції радіаційного захоплення нейтрона:

$$\sigma_{n\gamma} = \sigma_C \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E_n - E_{n0})^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (7.4.4)$$

де  $\frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma}$  — ймовірність перетворення проміжного ядра з випромінюванням  $\gamma$  – кванту. У випадку, коли інших процесів немає, повна ширина енергетичного рівня проміжного ядра  $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma$  (в загальному випадку, повна ширина рівня проміжного ядра дорівнює сумі парціальних ширин за всіма можливими каналами:  $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$ ).

Знайдемо відношення перерізу розсіювання до перерізу радіаційного захоплення при енергії теплових нейтронів 0,025 eВ:

$$\frac{\sigma_{nn}}{\sigma_{n\gamma}} = \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} = \eta = 0,0022. \quad (7.4.5)$$

При резонансній енергії нейтронів це відношення становитиме:

$$\frac{\sigma_{nn0}}{\sigma_{n\gamma}} = \frac{\Gamma_{n0}}{\Gamma_\gamma}. \quad (7.4.6)$$

Тут враховано той факт, що величина  $\Gamma_\gamma$  практично не залежить від енергії нейтронів. Використаємо співвідношення (7.4.2) і знайдемо резонансну нейтронну ширину рівня:  $\Gamma_{n0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \Gamma_n$ . Довжина

хвилі де Бройля нейтронів визначається формулою:  $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_n E_n}}$ ,

оскільки нейтрони з малими енергіями ( $E_n \ll m_n c^2$ , де  $m_n c^2$  — енергія спокою нейтрона) є нерелятивістськими. Таким чином, (7.4.6) набуде вигляду:

$$\frac{\sigma_{nn0}}{\sigma_{n\gamma}} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} = \sqrt{\frac{E_{n0}}{E_n}} \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} = \eta \sqrt{\frac{E_{n0}}{E_n}}. \quad (7.4.7)$$

Підставимо в (7.4.7) параметри задачі й знайдемо відношення ймовірності розсіювання нейтронів до ймовірності їх захоплення з

подальшим випромінюванням  $\gamma$ -квантів при резонансній енергії нейтронів:

$$\frac{\sigma_{nn0}}{\sigma_{n\gamma}} = 0,0022 \sqrt{\frac{0,178}{0,025}} \approx 0,006 \text{ або } 0,6\%.$$

**Приклад 5.** За допомогою формули Брейта-Вігнера визначити:

а) ширину  $\Gamma$  рівня проміжного ядра, яке виникає під час захоплення нейтрона ядром  $^{113}\text{Cd}$ , якщо переріз радіаційного захоплення при енергії нейтрона  $E_n = 2E_{n0}$  у 50 разів менший за переріз цього процесу в резонансі (при  $E_n = E_{n0}$ ), де  $E_{n0} = 0,178 \text{ eV}$ . Вважати, що  $\Gamma$  не залежить від енергії нейтронів ( $\Gamma_\gamma \gg \Gamma_n$ );

б) показати, що у випадку, коли ширина  $\Delta E$  резонансного максимуму кривої  $\sigma_{n\gamma}(E_n)$  на половині його висоти мала ( $\Delta E \ll E_{n0}$ ), то  $\Delta E \approx \Gamma$ .

**Розв'язання:** а) Реакція радіаційного захоплення нейтрона ядром  $^{113}\text{Cd}$  записується наступним чином:



Переріз такої реакції:

$$\sigma_{n\gamma} = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E_n - E_{n0})^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad (7.5.2)$$

Переріз радіаційного захоплення в резонансі знайдемо з (7.5.2), покладаючи  $E_n = E_{n0}$ :

$$\sigma_{n\gamma 0} = \pi \lambda_0^2 g \frac{4\Gamma_{n0}\Gamma_\gamma}{\Gamma^2}. \quad (7.5.3)$$

Розділимо (7.5.3) на (7.5.2):

$$\frac{\sigma_{n\gamma 0}}{\sigma_{n\gamma}} = \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \frac{4\Gamma_{n0}}{\Gamma_n} \frac{(E_n - E_{n0})^2 + (\Gamma/2)^2}{\Gamma^2}. \quad (7.5.4)$$

Скориставшись співвідношенням (7.4.2), знайдемо, що  $\Gamma_{n0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \Gamma_n$  та підставимо цей вираз у (7.5.4):

$$\frac{\sigma_{n\gamma 0}}{\sigma_{n\gamma}} = \eta = 4 \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{(E_n - E_{n0})^2 + (\Gamma/2)^2}{\Gamma^2}. \quad (7.5.5)$$

З (7.5.5) виразимо ширину рівня  $\Gamma$  проміжного ядра, використавши також співвідношення між енергіями нейтронів:  $E_n = 2E_{n0}$ :

$$\eta = 4 \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{E_{n0}^2 + (\Gamma/2)^2}{\Gamma^2} = 4\sqrt{2} \frac{E_{n0}^2 + (\Gamma/2)^2}{\Gamma^2} \Rightarrow \Gamma = 2E_{n0} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\eta - \sqrt{2}}}. \quad (7.5.6)$$

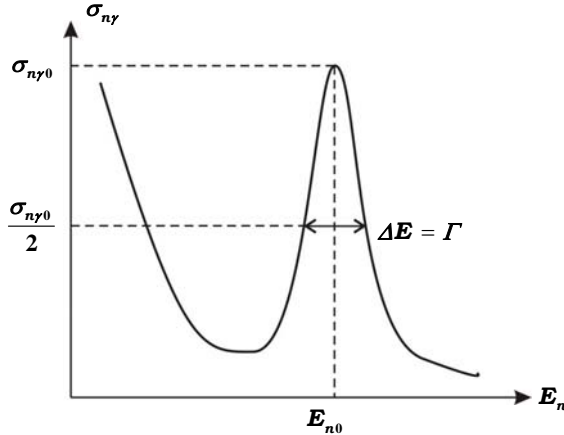
Користуючись формулою (7.5.6), знайдемо числове значення  $\Gamma$ :

$$\Gamma = 2 \cdot 0,178 \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{50 - \sqrt{2}}} \approx 0,06 \text{ eV}.$$

б) Для відповіді на друге запитання дослідимо функцію (7.5.2) за умови, що  $\Delta E \ll E_{n0}$ . Будемо шукати ширину резонансного піку на половині висоти  $\Delta E$  (Рис. 7.3).

Переріз радіаційного захоплення набуватиме максимального значення при  $E_n = E_{n0}$ , яке задається формулою (7.5.3).

Значення енергії нейтронів, при якому  $\sigma_{n\gamma} = \frac{\sigma_{n\gamma 0}}{2}$  знайдемо з (7.5.2), покладаючи, що енергія нейтронів при цьому  $E_n = E_{n1/2}$ :



**Рис. 7.3. Залежність перерізу радіаційного захоплення  $\sigma_{n\gamma}$  від енергії нейтронів.**

$$\sigma_{n\gamma} = \frac{\sigma_{n\gamma 0}}{2} \Rightarrow \pi \tilde{\lambda}^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\left(E_{n1/2} - E_{n0}\right)^2 + \left(\Gamma/2\right)^2} = \pi \tilde{\lambda}_0^2 g \frac{2\Gamma_{n0} \Gamma_\gamma}{\Gamma^2} \Rightarrow$$

$$2\tilde{\lambda}_0 \left( \left(E_{n1/2} - E_{n0}\right)^2 + \left(\Gamma/2\right)^2 \right) = \tilde{\lambda} \Gamma^2,$$

де використано співвідношення  $\Gamma_{n0} = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}_0} \Gamma_n$ . З (7.5.7) виразимо різницю енергій  $E_{n1/2} - E_{n0}$ :

$$\left(E_{n1/2} - E_{n0}\right)^2 + \left(\Gamma/2\right)^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_{n0}}{E_{n1/2}}} \Gamma^2,$$

$$\Rightarrow E_{n1/2} - E_{n0} = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_{n0}}{E_{n1/2}}} - \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \Gamma. \quad (7.5.8)$$

Врахувавши, що  $\Delta E \ll E_{n0}$ , наближено можемо записати, що  $\sqrt{\frac{E_{n0}}{E_{n1/2}}} \approx 1$ , в такому випадку (7.5.8) спроститься:  $E_{n1/2} - E_{n0} \approx \frac{1}{2} \Gamma$ .

Таким чином, півширина резонансного піку (ширина на половині висоти)  $\Delta E = 2 \left(E_{n1/2} - E_{n0}\right)$  наближено дорівнюватиме ширині рівня проміжного ядра:  $\Delta E \approx \Gamma$ .

**Приклад 6.** Знайти відношення резонансного перерізу пружного розсіювання нейтронів ядрами  $^{55}\text{Mn}$  до геометричного перерізу даних ядер, якщо  $E_{n0} = 337 \text{ eV}$ ,  $\Gamma_{n0} \approx \Gamma \ll E_{n0}$  та спін рівня проміжного ядра, через яке відбувається процес,  $J = 2$ .

**Розв'язання:** Резонансний переріз пружного розсіювання нейтронів:

$$\sigma_{nn0} = \pi \tilde{\lambda}_0^2 g \frac{4\Gamma_{n0}^2}{\Gamma^2}, \quad (7.6.1)$$

де  $\lambda_0^2 = \frac{\hbar^2}{2m_n E_{n0}}$  — квадрат довжини хвилі де Бройля резонансних

нейтронів,  $g = \frac{2J+1}{2(2I+1)}$  — статистичний множник. Спін ядра  $^{55}\text{Mn}$

$I = 5/2$ , спін проміжного ядра ( $^{56}\text{Mn}$ )  $J = 2$ , тому статистичний множник  $g = \frac{5}{12}$ . Врахувавши, що згідно умови,  $\Gamma_{n0} \approx \Gamma$ , з формули (7.6.1) отримаємо вираз для резонансного перерізу пружного розсіювання нейтронів:

$$\sigma_{nn0} \approx 4\pi\lambda_0^2 g. \quad (7.6.2)$$

Геометричний переріз ядра  $^{55}\text{Mn}$ :

$$\sigma_g = \pi R^2 = \pi R_0^2 A^{2/3}, \quad (7.6.3)$$

де  $R_0 = 1,22 \text{ фм} = 1,22 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ ,  $A = 55$ . Розділимо (7.6.2) на (7.6.3):

$$\frac{\sigma_{nn0}}{\sigma_g} = \frac{4\lambda_0^2 g}{R_0^2 A^{2/3}} = \frac{2\hbar^2 g}{m_n E_{n0} R_0^2 A^{2/3}}. \quad (7.6.4)$$

Підставивши в (7.6.4) дані, знайдемо відношення резонансного перерізу пружного розсіювання нейтронів ядрами  $^{55}\text{Mn}$  до геометричного перерізу цих ядер:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{nn0}}{\sigma_g} &= \frac{2 \cdot 1,05^2 \cdot 10^{-54} \text{ ерг}^2 \text{ с}^2 \cdot 5}{12,1,0087 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \cdot 2,337 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг} \cdot 1,22^2 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2 \cdot 55^{2/3}} \approx \\ &\approx 5 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

**Приклад 7.** Оцінити, у скільки разів послабиться вузький пучок швидких нейтронів з кінетичною енергією  $10 \text{ MeV}$  під час проходження через свинцеву платівку товщиною  $4 \text{ см}$ . Вважати, що ефективний переріз ядра  $\sigma = 2\pi(R + \lambda)^2$ , де  $R$  — радіус ядра,  $\lambda$  — перенормована довжина хвилі де Бройля нейтрона.

**Розв'язання:** Під час взаємодії швидких нейтронів з ядрами ефективний переріз взаємодії розглядають як геометричний переріз ядра:  $\sigma = 2\pi(R + \lambda)^2$ . Закон зміни кількості нейтронів після

проходження ними шару середовища товщиною  $d$  записується так (див. приклад 7.3):

$$N = N_0 e^{-n_0 \sigma d}, \quad (7.7.1)$$

де  $\sigma$  — переріз взаємодії нейтронів з ядрами середовища,  $\sigma = 2\pi(R + \lambda)^2$ ,  $n_0 = N_A \frac{\rho}{\mu}$  — концентрація ядер в одиниці об'єму,  $N_A$  — число Авогадро,  $\mu = 208 \text{ з/моль}$  — молярна маса ядер свинцю природного ізотопного складу. З (7.7.1) знаходимо відношення початкової кількості нейтронів  $N_0$  до їх кількості  $N$  після проходження платівки:

$$\frac{N_0}{N} = \exp(n_0 \sigma d) = \exp\left(2\pi N_A \frac{\rho d}{\mu} (R + \lambda)^2\right). \quad (7.7.2)$$

Підставляючи в (7.7.2) вирази для радіуса ядра  $R = R_0 A^{1/3}$  та довжини хвилі нейтрона  $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_n E_n}}$ , знаходимо остаточну формулу:

$$\eta = \frac{N_0}{N} = \exp\left(2\pi N_A \frac{\rho d}{\mu} \left(R_0 A^{1/3} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_n E_n}}\right)^2\right). \quad (7.7.3)$$

Густина свинцю  $\rho = 11,3 \text{ з/см}^3$ ,  $R_0 = 1,22 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ , радіус ядра  $^{208}\text{Pb}$  дорівнює  $R = 1,22 \cdot 208^{1/3} \cdot 10^{-13} = 7,23 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ , перенормована довжина хвилі де Бройля нейтрона

$$\lambda = \frac{1,05 \cdot 10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с}}{\sqrt{2 \cdot 1,674 \cdot 10^{-24} \text{ з} \cdot 10^7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг}}} \approx 1,44 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Підставивши ці дані в (7.7.3), знайдемо коефіцієнт послаблення нейтронного пучка:

$$\eta = \frac{N_0}{N} = 1,86.$$

**Приклад 8.** Інтенсивність вузького пучка повільних моноенергетичних нейтронів зменшується у 20 разів під час проходження через платівку з бору природного ізотопного складу.

Масова товщина платівки  $1,0 \text{ з/см}^2$ . Визначити енергію нейтронів, маючи на увазі, що в даному випадку є справедливим закон  $\sigma \sim 1/v$ , де  $v$  — швидкість нейтронів.

**Розв'язання:** Для знаходження перерізу захоплення нейтрона ядром бору скористаємось розв'язком (7.7.2) попереднього прикладу:

$$\frac{N_0}{N} = e^{n_0 \sigma d} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{n_0 d} \ln \left( \frac{N_0}{N} \right) = \frac{M}{\rho d} \ln \left( \frac{N_0}{N} \right), \quad (7.8.3)$$

де  $\rho d$  — масова товщина платівки,  $M = 11 \text{ а.о.м.}$  — вага атома бору.

Оскільки виконується закон  $1/v$ , можемо записати наступне співвідношення:

$$\sigma v = \sigma_0 v_0, \quad (7.8.4)$$

де  $\sigma_0, v_0$  — табличні значення перерізу взаємодії та швидкості нейтронів для певної речовини [8]. В нашому випадку для бору ці значення є такими:  $v_0 = 2,2 \cdot 10^5 \text{ см/с}$ ,  $\sigma_0 = 755 \text{ барн}$ . З (7.8.4), приймаючи до уваги (7.8.3), знайдемо швидкість нейтронів:

$$v = \frac{\sigma_0 v_0}{\sigma} = \sigma_0 v_0 \frac{\rho d}{A \ln \left( \frac{N_0}{N} \right)}, \quad (7.8.5)$$

та відповідну енергію:

$$E_n = \frac{m_n v^2}{2} = \frac{m_n}{2} \left( \sigma_0 v_0 \frac{\rho d}{A \ln \left( \frac{N_0}{N} \right)} \right)^2. \quad (7.8.6)$$

Підставимо у (7.8.6) параметри задачі й отримаємо значення енергії нейтронів:

$$E_n = \frac{1,67 \cdot 10^{-24} \text{ з}}{2} \left( 755 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 \cdot 2,2 \cdot 10^5 \text{ см/с} \frac{1 \text{ з/см}^2}{11 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ з} \cdot \ln(20)} \right)^2 =$$

$$= 7,7 \cdot 10^{-12} \text{ ерг} \approx 4,7 \text{ еВ}.$$

### 7.3. Запитання та відповіді

26. Опишіть основні методи отримання нейтронних пучків для експериментальних досліджень.

Найпростіші джерела нейтронів — радіоізотопні, які містять нейтронно-радіоактивні ядра (наприклад,  $^{252}\text{Cf}$ ). Такі джерела мають невелику потужність ( $\sim 10^8$  нейтронів/с), широкий енергетичний спектр отримуваних нейтронів та високий рівень  $\gamma$  – випромінювання.

В іншому методі, який має більшу потужність ( $10^7 \div 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ) за допомогою електростатичного прискорювача ядра дейтерію, прискорюються до енергії  $\sim 200 \text{ кеВ}$  і бомбардують мішень, яка містить тритій. В результаті реакції  $d + t \rightarrow {}^4\text{He} + n$  утворюються моноенергетичні нейтрони з енергією  $\sim 14 \text{ МеВ}$

Ще більшу потужність мають дослідницькі ядерні реактори ( $5 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$  на МВт потужності реактора). Спектр нейтронів, отримуваних таким способом, збагачений тепловими нейтронами (за рахунок сповільнення нейтронів ділення, що мають енергію  $\sim 2 \text{ МеВ}$ , в сповільнювачі та конструкційних елементах реактора).

Найбільш потужні потоки нейтронів отримують з допомогою нейтронних генераторів. Така установка складається з високострумowego прискорювача заряджених частинок (протонів, дейтронів, електронів) та мішені-конвертора. Інтенсивні імпульсні потоки нейтронів отримують за допомогою протонних прискорювачів — мезонних фабрик, в яких нейтрони безпосередньо вибиваються протонами з ядер. При енергії протонів  $1 \text{ ГеВ}$  кожен протон вибиває з уранової мішені  $30 \div 50$  нейтронів.

В електронних прискорювачах нейтрони отримують в результаті фотонейтронної реакції  $(\gamma, n)$  від гальмівного випромінювання електронів, які падають на уранову або вольфрамову мішень.

27. Що таке альbedo нейтронів?

Нейтрон, потрапляючи в середовище, невпорядковано зіштовхується з ядрами й після серії зіткнень може вилетіти назад, або, іншими словами, відбитись від речовини. Імовірність такого відбивання і називається альbedo нейтрона для даного середовища. Альbedo тим більше, чим більший переріз розсіювання нейтронів і чим менший переріз поглинання. Гарні відбивачі мають альbedo до



0,9, тобто відбивають до 90% нейтронів. Такі матеріали застосовуються в ядерних реакторах та інших нейтронних установках. Ультрахолодні нейтрони зазнають 100% відбивання від речовини (див. питання №8).

28. Процес поширення нейтронних (де-бройлівських) хвиль в середовищі багато в чому аналогічний до процесу поширення квантів електромагнітного поля: нейтронні хвилі зазнають дифракції, заломлюються, відбиваються, поляризуються тощо. В чому полягає відмінність у фізичних властивостях нейтронів порівняно з квантами?

По-перше, електромагнітне випромінювання взаємодіє з електронами атомних оболонок, а нейтрони в основному взаємодіють з ядрами. Виключенням є взаємодія нейтронів, що мають магнітний момент, з магнітними моментами атомів речовини.

По-друге, квант електромагнітного поля має нульову масу спокою, а нейтрон — дуже велику. Це призводить до того, що у нейтрона зв'язок частоти з довжиною хвилі та швидкість поширення відрізняється від аналогічних характеристик кванта. Енергія нейтрона пов'язана з частотою наступною формулою:

$$E_n = \hbar \omega_n = \frac{p_n^2}{2m_n} = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{2m_n \lambda_n^2} \Rightarrow \omega_n = \frac{4\pi^2 \hbar}{2m_n \lambda_n^2},$$

а для фотона цей зв'язок є таким:  $E_\gamma = \hbar \omega_\gamma = p_\gamma c = \frac{2\pi \hbar c}{\lambda} \Rightarrow \omega_\gamma = \frac{2\pi c}{\lambda}.$

Отже, при однаковій довжині хвилі енергії кванта та нейтрона суттєво відрізняються.

Крім того, на нейтрони дуже сильно діє гравітація. Саме завдяки дії гравітації ультрахолодні нейтрони можна тримати у відкритій зверху склянці.

29. Який характер має енергетичний спектр проміжного ядра?

Проміжне ядро утворюється під час об'єднання частинки з іншим ядром, яке в початковому стані нескінченно віддалене від неї і не взаємодіє з нею. Рух обох складових є інфінітним, енергія їх не квантується, тому енергетичний спектр складного проміжного ядра теж буде неперервним. Проте якщо час життя проміжного ядра досить великий, можна вводити поняття про квазістаціонарні енергетичні рівні, маючи на увазі, що протягом деякого часу рух ядра стає фінітним. Час  $\tau$ , протягом якого такий рух здійснюється,

називається часом життя проміжного ядра. Імовірність розпаду ядра за одиницю часу дорівнюватиме  $W = 1/\tau$ .

Кожен квазістаціонарний рівень характеризується певною енергетичною шириною, яка згідно співвідношення невизначеностей записується як  $\Gamma \approx \hbar/\tau$ . Повна ширина квазістаціонарного рівня складається з парціальних ширин, які характеризують розпад складного ядра за всіма можливими каналами:  $\Gamma = \sum_i \Gamma_i = \Gamma_a + \Gamma_{b1} + \Gamma_{b2} + \dots$ , де  $b1, b2, \dots$  — різні канали реакції, за якими може перетворитись проміжне ядро, а — вхідний канал. Величина  $\Gamma_{b1}/\Gamma$  характеризує ймовірність розпаду проміжного ядра за каналом  $b1$ .

Отже, енергетичний спектр проміжного ядра являє собою набір дискретних полос зі скінченною шириною.

30. В якому випадку ядерна реакція, що проходить через утворення компаунд-ядра, буде резонансною?

Якщо сумарна енергія нейтрона та материнського ядра знаходиться в тій самій області, що й енергія квазістаціонарного стану проміжного ядра, імовірність утворення такого ядра різко зростає і реакція буде резонансною.

31. Вказати основні особливості протікання резонансної ядерної реакції  $(n, \gamma)$  та  $(n, n)$ , які проходять на середніх та важких ядрах.

Згідно формули Брейта-Вігнера переріз радіаційного захоплення нейтронів визначається наступним чином:

$$\sigma_{n\gamma} = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E_n - E_{n0})^2 + (\Gamma/2)^2},$$

а переріз пружного розсіювання нейтронів

$$\sigma_{nn} = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n^2}{(E_n - E_{n0})^2 + (\Gamma/2)^2}.$$

За відсутності інших каналів повний переріз взаємодії нейтронів з ядром має вигляд:

$$\sigma = \sigma_{n\gamma} + \sigma_{nn} = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma}{(E_n - E_{n0})^2 + (\Gamma/2)^2}.$$

Нас цікавитиме питання про співвідношення ширин  $\Gamma_n$  та  $\Gamma_\gamma$  при різних енергіях. Радіаційні ширини приблизно однакові для всіх ядер і майже не змінюються зі зміною енергії налітаючого нейтрона. Приблизне значення  $\Gamma_\gamma \approx 0,1 \text{ eV}$ . Нейтронні ширини пропорційні до швидкості нейтронів:  $\Gamma_n \sim v_n$ . Тому в усіх ядер існує діапазон енергій, при яких  $\Gamma_n \ll \Gamma_\gamma$  і радіаційне захоплення нейтрона більш імовірне, ніж пружне розсіювання. При  $A > 100$  ця умова виконується навіть для енергій в сотні eV. Саме мализна нейтронних ширин забезпечує роботу ядерних реакторів на повільних нейтронах.

Загалом, під час взаємодії нейтронів з ядрами при малих енергіях домінуючим є радіаційне захоплення, зі зростанням енергії суттєвішим стає пружне розсіювання нейтронів, яке при великих енергіях домінує над радіаційним захопленням.

32. Користуючись формулою Брейта-Вігнера, виведіть «закон  $\frac{1}{v}$ » для повільних нейтронів.

Для дуже повільних нейтронів, коли  $E_n \ll E_{n0}$ , формула Брейта-Вігнера для перерізу утворення проміжного ядра спрощується:

$$\sigma_C = \pi \tilde{\lambda}_n^2 \Gamma_n g \frac{\Gamma}{(E_n - E_{n0})^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \approx \pi \tilde{\lambda}_n^2 \Gamma_n g \frac{4}{4 E_{n0}^2 / \Gamma + \Gamma},$$

В останній формулі знаменник практично не залежить від швидкості нейтронів. Залежність перерізу утворення проміжного ядра від швидкості  $v$  визначається лише множником  $\tilde{\lambda}_n^2 \Gamma_n$ .

Нейтронна ширина рівня проміжного ядра  $\Gamma_n \sim \frac{\hbar}{\tau} = \frac{\hbar v}{R}$ , де  $R$  — радіус ядра. Довжина хвилі де Бройля нейтрона, в свою чергу,  $\tilde{\lambda}_n = \frac{\hbar}{m_n v}$ , таким чином,  $\sigma_C \sim \tilde{\lambda}_n^2 \Gamma_n = \frac{\hbar^3}{m_n^2 R} \frac{1}{v}$ .

Це і є так званий «закон  $\frac{1}{v}$ », тобто у випадку взаємодії нейтронів з енергією  $\sim (1 \div 10) \text{ eV}$  значення добутку  $\sigma v$  зберігається:  $\sigma v = \text{const}$ . Для бору цей закон виконується в діапазоні енергій  $(0,01 \div 1000) \text{ eV}$ , оскільки в цій області у нього відсутні резонансні максимуми.

33. Для характеристики взаємодії теплових нейтронів з середовищем вводиться поняття перерізу пружного когерентного

розсіювання:  $\sigma = 4\pi|b|^2$ , де величина  $b$  називається когерентною амплітудою розсіювання, вона має розмірність довжини і може приймати додатні та від'ємні значення. Під час проходження нейтрона через середовище його рух можна описати хвильовим рівнянням, а середовище охарактеризувати показником заломлення  $n^2 = 1 - \lambda^2 \frac{Nb}{\pi}$ , де  $N$  — кількість ядер в  $1 \text{ см}^3$  речовини,  $\lambda$  — довжина хвилі де Бройля нейтрона у вакуумі. Для ультрахолодних (УХ) нейтронів виконується співвідношення  $\frac{Nb\lambda^2}{\pi} > 1$ , тому для них показник заломлення стає уявним. Отже, УХ нейтрони, які падають на середовище з вакууму, повністю відбиваються від поверхні. Якою буде гранична довжина хвилі нейтрона? Як можна отримати УХ нейтрони?

Умову  $\frac{Nb\lambda^2}{\pi} > 1$  можна записати через граничну довжину хвилі:

$\lambda_{\text{гр}} = \sqrt{\frac{\pi}{Nb}}$ . При виконанні умови  $\lambda > \lambda_{\text{гр}}$  нейтрони будуть відбиватись від середовища. Гранична енергія таких нейтронів дорівнюватиме  $E_{\text{гр}} = \frac{m\nu_{\text{гр}}^2}{2} = \frac{h^2Nb}{2m_{\text{n}}\pi}$ , а гранична швидкість —  $\nu_{\text{гр}} = \frac{h}{m\lambda_{\text{гр}}}$ . Для деяких матеріалів ці значення наведені в таблиці:

**Таблиця 7.2.**

<b>Матеріал</b>	<b><math>E_{\text{гр}}, 10^{-7} \text{ eV}</math></b>	<b><math>\nu_{\text{гр}}, \text{ м/с}</math></b>	<b><math>\lambda_{\text{гр}}, \text{ нм}</math></b>
Алюміній	0,55	3,21	123,2
Свинець	0,93	4,17	94,8
D <sub>2</sub> O	1,69	5,63	70,3
Графіт	2,00	6,12	64,6
Берилій	2,55	6,91	57,3

Для отримання УХ нейтронів використовуються ядерні реактори. Під час ділення важких ядер в реакторах з'являються швидкі нейтрони ділення, які потім сповільнюються до теплових енергій в речовині, що оточує тепловиділяючі елементи. При цьому

виникають і УХ нейтрони, кількість яких становить приблизно  $10^{-13}$  від загальної кількості нейтронів. УХ нейтрони виводяться з реактора через нейтроновід – сильно вигнуту трубу. Всі нейтрони, крім УХ, не здатні подолати різкі перегини труби, а УХ нейтрони зазнають повного внутрішнього відбивання на стінках нейтроноводу. Зазвичай поблизу активної зони реактора в нейтроноводі розташовують додатковий поглинач — конвертор. Матеріал, з якого виготовляють конвертор, повинен мати низький переріз захоплення нейтронів та високу радіаційну стійкість. Цим вимогам задовольняють гідрид цирконію, важка крига та рідкі водень або дейтерій.

Інший метод одержання УХ нейтронів — відбивання нейтронів від рухомого магнітного дзеркала. Внаслідок існування у нейтронів магнітного моменту УХ нейтрони зазнають повного відбивання від областей сильного магнітного поля (магнітних дзеркал).

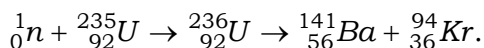
На явищі повного внутрішнього відбивання влаштовані пастки для УХ нейтронів. Пастка являє собою пустотілу посудину, в якій створено вакуум. У випадку ідеальних стінок нейтрони відбиваються від них при будь-яких кутах падіння. Реальні стінки є шорсткими, забрудненими і взаємодія нейтронів з ними призводить до часткового поглинання нейтронів та нагрівання нейтронного газу. Ці ефекти зменшують час утримання в посудині. На даний момент в посудині об'ємом 50 л вдалося накопичити  $10^5$  нейтронів і утримати їх протягом часу близько 1000 с, що практично співпадає з часом життя вільного нейтрона по відношенню до  $\beta$  – розпаду.

## 8. РЕАКЦІЇ ДІЛЕННЯ ВАЖКИХ ЯДЕР. ЯДЕРНІ РЕАКТОРИ.

### 8.1. Теоретичні відомості

Оскільки середня енергія зв'язку нуклона у важких ядер менша, ніж у ядер середини періодичної системи елементів, важким ядрам енергетично вигідно розділитись з утворенням більш легких уламків. Такий процес характеризується *активаційним порогом* – так називається мінімальна енергія, яку необхідно надати ядру, щоб воно зазнало поділу (в цьому випадку кінетична енергія уламків дорівнює нулеві).

Реакція поділу важких ядер може відбуватись за рахунок поглинання нейтронів (теплових для ізоотопу  $^{235}_{92}\text{U}$  або швидких для  $^{238}_{92}\text{U}$ ), які забезпечують подолання активаційного порогу. Наприклад, реакція поділу ізоотопу  $^{235}_{92}\text{U}$  йде через утворення проміжного ядра  $^{236}_{92}\text{U}$ , яке з найбільшою вірогідністю ділиться на два уламки зі співвідношенням мас 3:2. Приклад одного з варіантів ділення наступний:



Крім того, ядро може розділитись шляхом тунелювання через потенціальний бар'єр, як під час  $\alpha$ -розпаду. В такому випадку говорять про *спонтанний розпад* ядра, який відбувається за відсутності зовнішнього збудження. Імовірність такого процесу тим менша, чим більша висота та ширина потенціального бар'єру.

Найбільш універсальною та поширеною моделлю атомного ядра є модель рідкої краплі, або *краплинна модель* [4, 13]. Розрахунок, який враховує баланс поверхневої та електростатичної енергії деформованого ядра, показує, що нестійкість ядра по відношенню до ділення визначається *параметром поділу* (див. приклад №1), який пропорційний до величини  $Z^2/A$ , де  $Z$  — заряд ядра,  $A$  — масове число. Зі зростанням цього параметру зростає нестійкість атомного ядра по відношенню до ділення. Коли  $Z^2/A < 50$ , ядру для поділу слід надати енергію ззовні, якщо ж  $Z^2/A \geq 50$ , ядро є абсолютно нестійким по відношенню до реакції ділення.

Під час ділення важких ядер виділяється ядерна енергія, яка складає в середньому  $200 \text{ MeV}$  на кожне ядро (для урану), що зазнає поділу і повністю визначається зміною енергії зв'язку. Її одержання в промислових масштабах відбувається в ядерних реакторах. Основну роль в ядерній енергетиці відіграють ядра ізотопів з непарною кількістю нейтронів  $^{233}_{92}\text{U}$ ,  $^{235}_{92}\text{U}$ ,  $^{239}_{94}\text{Pu}$ , оскільки вони діляться за допомогою нейтронів будь-яких енергій, в тому числі теплових (теповими називають нейтрони, які мають енергію порядку  $kT$ , що при кімнатній температурі  $T = 300 \text{ K}$  відповідає енергії  $0,025 \text{ eV}$ ).

Ядра  $^{238}_{92}\text{U}$ ,  $^{232}_{90}\text{Th}$  діляться тільки швидкими нейтронами.

Для аналізу процесу ланцюгового ділення вводиться декілька основних параметрів, які утворюють так звану "формулу 4 коефіцієнтів" для коефіцієнта розмноження нейтронів  $k_{\infty}$  в активній зоні нескінченного об'єму:

$$k_{\infty} = \nu \varepsilon p f ,$$

де  $\nu$  — середня кількість швидких вторинних нейтронів, які вилітають під час поділу ядра,

$\varepsilon$  — коефіцієнт приросту швидких нейтронів за рахунок ділення ядер швидкими нейтронами,

$p$  — ймовірність уникнути захоплення нейтрона загальмовувачем під час процесу гальмування (термалізації) цього нейтрона,

$$f = \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_{n\gamma}} \text{ — коефіцієнт використання загальмованого нейтрона}$$

(ймовірність того, що захоплення ядром повільного нейтрона призведе до розпаду ядра, а не, наприклад, випромінювання гама-кванта новоутвореним ізотопом).

В останній формулі  $\sigma_f$  — переріз ділення ядра,  $\sigma_{n\gamma}$  — переріз радіаційного захоплення нейтрона ядром.

*Коефіцієнтом розмноження* нейтронів в активній зоні ядерного реактора називається відношення загальної кількості нейтронів в одному поколінні до кількості нейтронів у попередньому поколінні.

Якщо реакція йде тільки на швидких нейтронах, то  $p = \varepsilon = 1$  і  $k_{\infty} = \nu f$ .

Ще один механізм втрат нейтронів пов'язаний з їх виходом за межі активної зони. Ці втрати пропорційні до площі поверхні активної зони  $S$  і в найпростішому випадку можуть характеризуватися

узагальненим коефіцієнтом поверхневих втрат  $L_s < 1$ ,  $L_s \sim S$ . Остаточний вигляд коефіцієнту розмноження нейтронів в скінченній активній зоні наступний:

$$k = L_s k_\infty = v \epsilon p f L_s.$$

Якщо кількість нейтронів у першому поколінні  $N_1$ , то в  $n$ -му поколінні це число дорівнюватиме  $N_1 k^n$ . При  $k = 1$  реакція ділення буде *стаціонарною*, а режим реактора називається *критичним*. Відповідно при  $k < 1$  кількість нейтронів у кожному наступному поколінні зменшується, ядерна реакція згасатиме — *підкритичний* режим реактора, а при  $k > 1$  — *надкритичний* режим.

Ланцюгова реакція поділу здійснюється в *активній зоні* реактора на *збагаченому урані* (вміст ізотопу  ${}^{235}_{92}\text{U}$  складає  $(2 \div 5)\%$ ). Збагачений уран можна отримати методом *розділення ізотопів*, в основі якого лежать процеси газової дифузії через поруваті перегородки, термодифузії, центрифугування, електромагнітний метод розділення ізотопів та метод лазерного розділення.

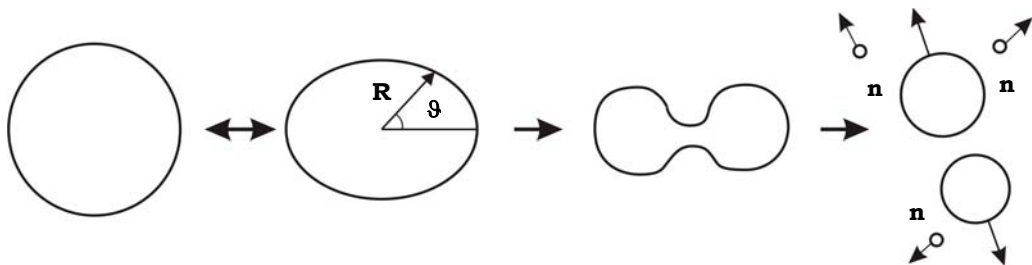
За призначенням та потужністю ядерні реактори поділяються на чотири основні види: 1) експериментальні реактори; 2) дослідницькі реактори; 3) реактори для отримання нових трансуранових елементів та радіоактивних ізотопів; 4) енергетичні реактори.

## 8.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.** Кулонівське відштовхування протонів сприяє діленню атомного ядра, а сили поверхневого натягу протидіють цьому. Виразити умову енергетичної вигідності поділу ядра на два приблизно однакові уламки через параметр  $Z^2/A$ , користуючись формулою Вайцзеккера для кулонівської  $E_c$  та поверхневої  $E_\sigma$  енергій.

**Розв'язання:** Процес ділення ядра розглядають за допомогою моделі рідкої краплі. Різні стадії, які проходить форма ядра під час ділення на дві приблизно однакові частини, зображено на Рис. 8.1. При збільшенні поверхні ядра (в результаті внутрішніх коливань навколо рівноважної сферичної форми) зростає енергія поверхневого натягу, а кулонівська енергія відштовхування, навпаки, зменшується. Зрозуміло, що в цьому випадку зміною об'ємної енергії, енергії симетрії та енергії парності можна знехтувати.





**Рис. 8.1. Схема ділення ядра в моделі рідкої краплі.**

Таким чином, сили поверхневого натягу прагнуть повернути деформоване ядро до попереднього стану, а сили кулонівської взаємодії сприяють його поділу. Подальша еволюція ядра залежатиме від співвідношення між цими силами. Для дослідження умов стійкості ядра при малих деформаціях необхідно встановити характер зміни потенціальної енергії  $E = E_\sigma + E_c$ , де  $E_\sigma$  — поверхнева енергія,  $E_c$  — кулонівська енергія ядра.

При малих деформаціях відносно сферичної форми рівняння поверхні ядра (Рис. 8.1) можна представити у вигляді:

$$R(\vartheta) = R_0 (1 + \alpha_0 + \alpha_2 P_2(\cos \vartheta) + \alpha_3 P_3(\cos \vartheta) + \alpha_4 P_4(\cos \vartheta) + \dots), \quad (8.1.1)$$

де  $R(\vartheta)$  — радіус-вектор, який проведено з початку координат (центру ядра) в точку на поверхні ядра,  $\alpha_i$  — малий параметр деформації. В розкладі (8.1.1)  $P_n(\cos \vartheta)$  — поліноми Лежандра, що утворюють повну і взаємно-ортogonalну систему функцій. Згідно узагальненої формули Родріга, вони мають вигляд:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (8.1.2)$$

Кожен доданок у (8.1.1) враховує збурення певного типу. Поліному  $P_n(\cos \vartheta)$  відповідає деформація, яка може призвести до поділу ядра на  $n$  рівних частин. Будемо розглядати симетричні деформації, які відбуваються у переважній більшості реакцій поділу ядер, при цьому в (8.1.1) залишаться тільки парні поліноми Лежандра, причому обмежимося доданком з  $n=2$  (таке наближення буде вірним при невеликих деформаціях):

$$R(\vartheta) \approx R_0 (1 + \alpha_0 + \alpha_2 P_2(\cos \vartheta) + \dots). \quad (8.1.3)$$

Остаточно (8.1.3) з урахуванням (8.1.2) можна переписати наступним чином:

$$R(\vartheta) \approx R_0 \left( 1 + \alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{2} \{ 3 \cos^2 \vartheta - 1 \} \right). \quad (8.1.4)$$

Об'єм ядра в сферичних координатах:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{R(\vartheta)} r^2 dr = \\ &= \frac{2}{3} \pi R_0^3 \int_0^{\pi} \left( 1 + \alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{2} \{ 3 \cos^2 \vartheta - 1 \} \right)^3 \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

Спростимо інтеграл (8.1.5). Для цього розглянемо вираз, який стоїть під інтегралом:

$$\begin{aligned} \left( 1 + \alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{2} \{ 3 \cos^2 \vartheta - 1 \} \right)^3 &= \left( 1 + \alpha_0 - \frac{\alpha_2}{2} \right)^3 + 3 \left( 1 + \alpha_0 - \frac{\alpha_2}{2} \right)^2 \frac{3}{2} \alpha_2 \cos^2 \vartheta + \\ &+ 3 \left( 1 + \alpha_0 - \frac{\alpha_2}{2} \right) \frac{9}{4} \alpha_2^2 \cos^4 \vartheta + \frac{27}{8} \alpha_2^3 \cos^6 \vartheta. \end{aligned} \quad (8.1.6)$$

Розкриваючи дужки в (8.1.6) та нехтуючи малими доданками  $3\alpha_0^2, \alpha_0^3, \alpha_2^3, \alpha_2\alpha_0^2, \alpha_2^2\alpha_0$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} \left( 1 + \alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{2} \{ 3 \cos^2 \vartheta - 1 \} \right)^3 &\approx 1 + 3\alpha_0 + \frac{3}{2} \alpha_2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \\ &+ 3\alpha_2\alpha_0 (3 \cos^2 \vartheta - 1) - \frac{3}{2} \alpha_2^2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \frac{3}{4} \alpha_2^2 (9 \cos^4 \vartheta - 1) = (8.1.7) \\ &= 1 + 3\alpha_0 + 3(3 \cos^2 \vartheta - 1) \left( \frac{1}{2} \alpha_2 + \alpha_2\alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 \right) + \frac{3}{4} \alpha_2^2 (9 \cos^4 \vartheta - 1); \end{aligned}$$

Підставляючи (8.1.7) у (8.1.5), знаходимо

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \pi R_0^3 \int_{-1}^1 \left\{ 1 + 3\alpha_0 + 3(3 \cos^2 \vartheta - 1) \left( \frac{1}{2} \alpha_2 + \alpha_2\alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 \right) + \right. \\ &\left. + \frac{3}{4} \alpha_2^2 (9 \cos^4 \vartheta - 1) \right\} d(\cos \vartheta) = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \left\{ 1 + 3\alpha_0 + \frac{3}{5} \alpha_2^2 \right\}. \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

Оскільки ми вважаємо, що ядерна матерія практично не стискувана, об'єм ядра дорівнює об'єму сфери:  $V = \frac{4}{3} \pi R_0^3$ . З цієї умови можемо знайти співвідношення між коефіцієнтами  $\alpha_0$  та  $\alpha_2$ :

$$V = \frac{4}{3} \pi R_0^3 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \left\{ 1 + 3\alpha_0 + \frac{3}{5} \alpha_2^2 \right\} \Rightarrow \alpha_0 = -\frac{1}{5} \alpha_2^2. \quad (8.1.9)$$

Знайдемо тепер площу поверхні ядра, яка є еліпсоїдом обертання. В нашому випадку площа дорівнює:

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta R^2 \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left( \frac{dR}{d\vartheta} \right)^2} d\vartheta. \quad (8.1.10)$$

Врахувавши, що  $\frac{dR}{d\vartheta} = -3R_0\alpha_2 \cos \vartheta \sin \vartheta$ , та знехтувавши в (8.1.10) доданками  $\alpha_0^2, \alpha_2^3$  та  $\alpha_2^2\alpha_0$ , аналогічно до вищевикладеного отримаємо:

$$S = 4\pi R^2 \left( 1 + 2\alpha_0 + \frac{4}{5}\alpha_2^2 \right). \quad (8.1.11)$$

Приймаючи до уваги співвідношення між параметрами деформації (8.1.9), рівність (8.1.11) перепишемо наступним чином:

$$S = 4\pi R^2 \left( 1 + \frac{2}{5}\alpha_2^2 \right). \quad (8.1.12)$$

Для сферичного ядра енергія, обумовлена поверхневим натягом, має вигляд  $E_\sigma^0 = 4\pi R^2 \sigma = 4\pi R_0^2 \sigma A^{2/3}$ , де  $\sigma$  — коефіцієнт поверхневого натягу,  $R_0 = 1,22$  фм,  $A$  — масове число ядра. З іншого боку, згідно формули Вайцзеккера, поверхнева енергія ядра  $E_\sigma = \varepsilon_2 A^{2/3}$ , де  $\varepsilon_2 = 17,8$  МеВ. Поверхнева енергія деформованого ядра, з урахуванням (8.1.12):

$$E_\sigma^\partial = 4\pi R^2 \sigma \left( 1 + \frac{2}{5}\alpha_2^2 \right). \quad (8.1.13)$$

Під час зростання площі поверхні за рахунок деформації зміна поверхневої енергії становитиме:

$$\Delta E_\sigma = E_\sigma^\partial - E_\sigma^0 = \frac{2}{5}\alpha_2^2 \cdot 17,8 \cdot A^{2/3} \text{ МеВ}. \quad (8.1.14)$$

Знайдемо тепер зміну кулонівської енергії ядер під час малих деформацій. Відомо [1;4], що кулонівська енергія сферичного ядра (за умови рівномірного розподілу заряду по об'єму)

$$E_c^0 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R_0} Z^2 \cdot A^{-1/3}, \quad (8.1.15)$$

де  $Z$  — заряд ядра. Формулу (8.1.15) можна переписати в іншому вигляді:

$$E_c^0 = \frac{2}{5} e^2 Z^2 \cdot \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_o, \quad (8.1.16)$$

тут  $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_o$  — усереднене по об'єму значення, яке для сферичного ядра дорівнює  $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_o = \frac{3}{2R}$ . Беручи до уваги (8.1.4) та (8.1.9), для деформованого ядра значення  $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_\partial$  можемо знайти наступним чином:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_\partial &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{R(\vartheta)} \frac{1}{r} r^2 dr = \\ &= \frac{3}{4\pi R^3} \pi R^2 \int_{-1}^1 \left( 1 + \alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{2} \{ 3 \cos^2 \vartheta - 1 \} \right)^2 d(\cos \vartheta) \approx \frac{3}{2R} \left\{ 1 - \frac{\alpha_2^2}{5} \right\}. \end{aligned} \quad (8.1.17)$$

Тоді за аналогією з (8.1.16), кулонівська енергія такого ядра дорівнюватиме:

$$E_c^\partial = \frac{2}{5} e^2 Z^2 \cdot \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_\partial = \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{R} \left\{ 1 - \frac{\alpha_2^2}{5} \right\}. \quad (8.1.18)$$

Зміна кулонівської енергії ядра під час малих деформацій становитиме:

$$\Delta E_c = E_c^\partial - E_c^o = -\frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{R_0 A^{1/3}} \frac{\alpha_2^2}{5}. \quad (8.1.19)$$

Згідно формули Вайцзеккера,  $E_c = \epsilon_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ ,  $\epsilon_3 = 0,712 \text{ MeV}$ , тому (8.1.19) можна переписати наступним чином:

$$\Delta E_c = E_c^\partial - E_c^o = -\frac{\alpha_2^2}{5} \epsilon_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}. \quad (8.1.20)$$

Підсумовуючи, з (8.1.14) та (8.1.20) знаходимо сумарну зміну енергії ядра під час еліптичних деформацій:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \Delta E_{\sigma} + \Delta E_c = \frac{2}{5} \alpha_2^2 \cdot \varepsilon_2 A^{2/3} - \frac{\alpha_2^2}{5} \varepsilon_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} = \\ &= \alpha_2^2 \frac{2}{5} A^{2/3} \varepsilon_2 \left( 1 - \frac{\varepsilon_3}{2\varepsilon_2} \frac{Z^2}{A} \right).\end{aligned}\quad (8.1.21)$$

Очевидно, що при  $\Delta E > 0$  деформація не призведе до поділу ядра (зміна поверхневої енергії перевищуватиме зміну кулонівської енергії відштовхування), а при  $\Delta E < 0$  ядро зазнаватиме ділення. Таким чином, з (8.1.21) знаходимо критерій енергетичної вигідності реакції поділу ядер:

$$1 - \frac{\varepsilon_3}{2\varepsilon_2} \frac{Z^2}{A} < 0 \Rightarrow \frac{Z^2}{A} > \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_3}, \quad (8.1.22)$$

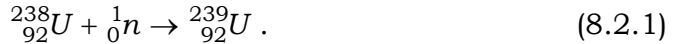
підставивши                      числові                      значення                      констант  
 $\varepsilon_2 = 17,8 \text{ MeV}$ ,  $\varepsilon_3 = 0,712 \text{ MeV}$ , отримаємо  $\frac{Z^2}{A} > 50$ . У тому випадку, коли  $\frac{Z^2}{A} < 50$ , для реакції ділення існує так званий активаційний поріг – енергія, яку необхідно надати ядру, щоб воно зазнало поділу, відповідно, коли  $\frac{Z^2}{A} \approx 50$  активаційний поріг відсутній, ядра, для яких виконується нерівність  $\frac{Z^2}{A} \geq 50$ , є абсолютно нестійкими по відношенню до реакції ділення.

Слід відзначити, що оскільки критерій порогу ділення  $\frac{Z^2}{A} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_3}$  залежить від вибору феноменологічних параметрів, то при іншому наборі величин  $\varepsilon_2$  та  $\varepsilon_3$  результат може бути децю іншим в межах  $\frac{Z^2}{A} > (48 \div 50)$ . Це не дуже істотно впливає на аналіз процесу ділення.

**Приклад 2.** Ядро, яке виникає під час захоплення нейтрона ядром  $^{238}\text{U}$ , зазнає ділення, якщо кінетична енергія нейтрона є більшою за  $1,4 \text{ MeV}$ , а ядро  $^{235}\text{U}$  зазнає ділення під час захоплювання теплових

нейтронів. Знайти енергію активації ядер  $^{238}\text{U}$  та  $^{235}\text{U}$  по відношенню до реакції ділення.

**Розв'язання:** 1 с н о с і б . Ділення ядра  $^{238}\text{U}$  після захоплення швидкого нейтрона відбувається через утворення проміжного непарно-парного ядра  $^{239}\text{U}$  :



Запишемо закон збереження енергії для реакції (8.2.1):

$$m_{^{238}_{92}\text{U}}c^2 + m_n c^2 + E_{kn} = m_{^{239}_{92}\text{U}}c^2 , \quad (8.2.2)$$

де під  $m_{^{238}_{92}\text{U}}, m_{^{239}_{92}\text{U}}$  слід розуміти маси спокою ядер відповідних ізотопів урану. Записуючи (8.2.2), ми знехтували кінетичною енергією віддачі ядра  $^{239}\text{U}$  . Рівняння (8.2.2) можемо переписати через енергії зв'язку материнського та дочірнього ядер урану:

$$\begin{aligned} & \{92m_p + 146m_n + m_n\}c^2 - E_{38}(92,238) + E_{kn} = \\ & = \{92m_p + 147m_n\}c^2 - E_{38}(92,239). \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

Реакція ділення ядра  $^{238}\text{U}$  відбувається за рахунок енергії налітаючого нейтрона, з (8.2.3) знаходимо енергію активації  $^{238}\text{U}$  по відношенню до реакції ділення, яка дорівнює сумі кінетичної енергії нейтрона та його енергії зв'язку в ядрі  $^{239}\text{U}$  :

$$Q_a = E_{kn} + E_{38}(92,239) - E_{38}(92,238). \quad (8.2.4)$$

Скориставшись формулою Бете-Вайцзеккера, знайдемо різницю енергій зв'язку  $E_{38}(92,239) - E_{38}(92,238)$  :

$$\begin{aligned} E_{38}(92,239) &= \varepsilon_1 \cdot 239 - \varepsilon_2 239^{2/3} - \varepsilon_3 \cdot \frac{92^2}{239^{1/3}} - \varepsilon_4 \frac{(239-184)^2}{4 \cdot 239}; \\ E_{38}(92,238) &= \varepsilon_1 \cdot 238 - \varepsilon_2 \cdot 238^{2/3} - \varepsilon_3 \cdot \frac{92^2}{238^{1/3}} - \\ & - \varepsilon_4 \frac{(238-184)^2}{4 \cdot 238} + \varepsilon_5 \frac{1}{238^{3/4}}, \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

де  $\varepsilon_1 = 15,75 \text{ MeV}$ ;  $\varepsilon_2 = 17,8 \text{ MeV}$ ;  $\varepsilon_3 = 0,712 \text{ MeV}$ ;  $\varepsilon_4 = 94,8 \text{ MeV}$ ;  
 $\varepsilon_5 = 34 \text{ MeV}$ .

Підставивши числові значення в (8.2.4), отримаємо:

$$E_{\text{зв}}(92,239) = 1807,7 \text{ MeV}; E_{\text{зв}}(92,238) = 1802,6 \text{ MeV}.$$

Таким чином, енергія зв'язку нейтрона в ядрі  ${}^{239}_{92}\text{U}$  :

$$\Delta E_n({}^{239}\text{U}) = E_{\text{зв}}(92,239) - E_{\text{зв}}(92,238) = 5,1 \text{ MeV}. \quad (8.2.6)$$

Остаточно, енергія активації, або поріг реакції ділення ядра  ${}^{238}\text{U}$  становитиме:

$$Q_a = E_{\text{кн}} + E_{\text{зв}}(92,239) - E_{\text{зв}}(92,238) = 1,4 + 5,1 = 6,5 \text{ MeV}. \quad (8.2.7)$$

Розрахуємо тепер енергію зв'язку нейтрона в ядрі  ${}^{236}_{92}\text{U}$ , яке утворюється після захоплення нейтрона ядром  ${}^{235}_{92}\text{U}$  згідно реакції



Аналогічно до вищевикладеного отримаємо енергії зв'язку відповідних ядер:

$$\begin{aligned} E_{\text{зв}}(92,236) &= \varepsilon_1 \cdot 236 - \varepsilon_2 236^{2/3} - \varepsilon_3 \cdot \frac{92^2}{236^{1/3}} - \\ &\quad - \varepsilon_4 \frac{(236-184)^2}{4 \cdot 236} + \varepsilon_5 \frac{1}{236^{3/4}}; \\ E_{\text{зв}}(92,235) &= \varepsilon_1 \cdot 235 - \varepsilon_2 \cdot 235^{2/3} - \varepsilon_3 \cdot \frac{92^2}{235^{1/3}} - \\ &\quad - \varepsilon_4 \frac{(235-184)^2}{4 \cdot 235}. \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

Підставляючи чисельні значення констант з формули Вайцеккера, отримаємо:

$$E_{\text{зв}}(92,236) = 1791,1 \text{ MeV}; E_{\text{зв}}(92,235) = 1784,5 \text{ MeV}.$$

Отже, енергія зв'язку нейтрона в ядрі  ${}^{236}_{92}\text{U}$  дорівнює

$$\Delta E_n({}^{236}\text{U}) = E_{\text{зв}}(92,236) - E_{\text{зв}}(92,235) = 6,6 \text{ MeV}. \quad (8.2.10)$$

Як бачимо, ізотоп  ${}^{235}_{92}\text{U}$  може зазнавати поділу навіть після захоплення теплових нейтронів.

2 с н о с і б. Енергію реакції (8.2.1) запишемо через дефекти мас материнського  $^{238}\text{U}$  та дочірнього  $^{239}\text{U}$  ядер:

$$Q = m_{^{238}\text{U}}c^2 + m_n c^2 - m_{^{239}\text{U}}c^2 = (\Delta_{^{238}\text{U}} + \Delta_n - \Delta_{^{239}\text{U}})c^2. \quad (8.2.11)$$

Скористаємось табличними значеннями для дефектів мас нуклідів:

$\Delta_{^{238}\text{U}} = 0,05076$  а.о.м.;  $\Delta_{^{239}\text{U}} = 0,05432$  а.о.м.;  $\Delta_n = 0,008665$  а.о.м. й обчислимо енергію (8.2.11):

$$Q = (0,05076 + 0,008665 - 0,05432)931,5 \text{ MeV} = 4,75 \text{ MeV}. \quad (8.2.12)$$

Енергія активації ядра  $^{238}\text{U}$  по відношенню до реакції ділення дорівнюватиме сумі енергій (8.2.9) та кінетичної енергії нейтрона:

$$Q_a = E_{\text{кн}} + Q = 4,75 + 1,4 = 6,15 \text{ MeV}. \quad (8.2.13)$$

Як бачимо, цей результат не співпадає зі встановленим експериментально порогом активації ядра  $^{238}\text{U}$ , оскільки таким методом ми ніяк не можемо врахувати енергію спаровування нуклонів в ядрах. Проте саме останній доданок у формулі Вайцзеккера визначає різницю активаційних порогів ділення ізотопів урану  $^{238}\text{U}$  та  $^{235}\text{U}$ .

**Приклад 3.** Під час захоплювання теплових нейтронів атомними ядрами конкурують два процеси:

- а) радіаційне захоплення з перерізом  $\sigma_{n\gamma}$ ;
- б) ділення ядра з перерізом  $\sigma_f$ .

Під час одного акту поділу в середньому виділяється  $\nu$  нейтронів. Знайти коефіцієнт  $\eta$ , який дорівнює кількості нейтронів на один акт ділення, які в подальшій ланцюговій реакції призвели б до поділу в чистих ізотопах  $^{233}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$  та  $^{239}\text{Pu}$ , якби вони були нескінченими. Скористатись даними таблиці 1 для перерізів взаємодії нейтрона з енергією 0,025 еВ.

Порівняти значення коефіцієнта  $\eta_m$  на теплових нейтронах для природного та збагаченого (1,5%  $^{235}\text{U}$ ) урану.

**Таблиця 8.1.**

Ізотопи	$\sigma_f, 10^{-24} \text{ см}^2$	$\sigma_{n\gamma}, 10^{-24} \text{ см}^2$	$\nu$
$^{233}\text{U}$	527	54	2,52



$^{235}\text{U}$	582	112	2,41
$^{239}\text{Pu}$	746	280	2,92

**Розв'язання:** Під час зіткнення нейтрона з важким ядром з процесом ділення завжди буде конкурувати процес радіаційного захоплення ( $n, \gamma$ ). Якщо перерізи ділення та радіаційного захоплення позначити як  $\sigma_f$  та  $\sigma_{n\gamma}$  відповідно, то ймовірність поділу ядра під

час захоплення теплового нейтрону буде дорівнювати:  $\frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_{n\gamma}}$  (за

умови, що інші процеси взаємодії відсутні).

Для одночасного врахування як кількості миттєвих нейтронів на один акт поділу, так і ймовірності радіаційного захоплювання, вводять коефіцієнт  $\eta$ , який дорівнює середній кількості моноенергетичних нейтронів ділення на один акт захоплення нейтрона ядром, що зазнає поділу:

$$\eta = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_{n\gamma}}, \quad (8.3.1)$$

де  $\nu$  — середня кількість нейтронів ділення,  $\eta$  — середня кількість нейтронів, здатних викликати реакцію ділення ядер наступного покоління. Очевидно, що ланцюгова реакція ділення можлива лише у випадку, коли  $\eta > 1$ .

Скориставшись даними таблиці 1, знайдемо з (8.3.1) коефіцієнт  $\eta$  для ізотопів  $^{233}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$  та  $^{239}\text{Pu}$ . Результат представимо у вигляді таблиці 8.2.

Таблиця 8.2.		
Ядро	$\nu$	$\eta$
$^{233}\text{U}$	2,52	2,29
$^{235}\text{U}$	2,41	2,02
$^{239}\text{Pu}$	2,92	2,12

Щоб дати відповідь на друге запитання задачі, слід врахувати, що в природному урані міститься 99,28%  $^{238}\text{U}$ , який здатний поглинати теплові нейтрони (переріз взаємодії  $\sigma_a$ ) та 0,72%  $^{235}\text{U}$ .

При такому співвідношенні ядер в суміші на одне ядро  $^{235}\text{U}$  припадає 140 ядер  $^{238}\text{U}$ . Зручно ввести поняття про середній переріз  $\bar{\sigma}$  поглинання нейтрона в природній суміші, віднесений до одного ядра ізоотопу  $^{235}\text{U}$ :

$$\bar{\sigma} = \sigma_f + \sigma_{n\gamma} + 140 \cdot \sigma_a. \quad (8.3.2)$$

Імовірність того, що тепловий нейтрон, який поглинувся природною сумішшю, викличе реакцію ділення:

$$\frac{\sigma_f}{\bar{\sigma}} = \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_{n\gamma} + 140 \cdot \sigma_a}. \quad (8.3.3)$$

Тоді для природного урану значення середньої кількості нейтронів ділення на один поглинутий тепловий нейтрон становитиме:

$$\eta_{m1} = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_{n\gamma} + 140 \cdot \sigma_a}. \quad (8.3.4)$$

Табличне значення перерізу поглинання теплових нейтронів для  $^{238}\text{U}$  є таким:  $\sigma_a = 2,75$  барн. Підставивши ці дані, а також дані таблиці 1 для  $^{235}\text{U}$  у (8.3.4), знайдемо:

$$\eta_{m1} = 2,47 \frac{582}{694 + 140 \cdot 2,75} = 1,33. \quad (8.3.5)$$

В збагаченому урані (1,5%  $^{235}\text{U}$ ) на одне ядро  $^{235}\text{U}$  припадає 66 ядер ізоотопу  $^{238}\text{U}$  і середнє значення кількості нейтронів ділення на один тепловий нейтрон становитиме:

$$\eta_{m2} = 2,47 \frac{582}{694 + 66 \cdot 2,75} = 1,64. \quad (8.3.6)$$

**Приклад 4.** Показати, що в природній суміші урану неможлива ланцюгова реакція ділення на швидких нейтронах. На кожен акт ділення ядер  $^{235}\text{U}$  та  $^{238}\text{U}$  під час взаємодії зі швидкими нейтронами виникає в середньому 2,5 нейтрони ділення. Переріз поділу ядра  $^{238}\text{U}$  складає близько  $\sigma_f^8 = 0,5$  барн, ядра  $^{235}\text{U}$  —  $\sigma_f^5 = 2$  барн, переріз непружного розсіювання нейтронів ядрами  $^{238}\text{U}$   $\sigma_c^8 \approx 2$  барн, перерізи радіаційного захоплення швидких нейтронів ядрами  $^{235}\text{U}$  та  $^{238}\text{U}$  дорівнюють приблизно  $\sigma_{n\gamma}^5 \approx \sigma_{n\gamma}^8 \approx 0,2$  барн. Врахувати також,

що у спектрі ділення лише 60% нейтронів мають енергію вищу за ефективний поріг  $E_{\text{пор}} \approx 1,4 \text{ MeV}$  для  $^{238}\text{U}$ .

**Розв'язання:** Позначимо  $x = 0,0072$  — вміст  $^{235}\text{U}$  в природній суміші ізотопів. Як відомо, під час взаємодії зі швидкими нейтронами поділу зазнають обидва ізотопи  $^{238}\text{U}$  та  $^{235}\text{U}$ , тому коефіцієнт  $\eta_{\text{шв}}$ , який характеризує ланцюгову реакцію на швидких нейтронах, буде складатись з двох доданків:  $\eta_{\text{шв}} = \eta_{\text{шв1}}(^{235}\text{U}) + \eta_{\text{шв2}}(^{238}\text{U})$ . Загальний вираз для нього буде таким:

$$\eta_{\text{шв}} = v \frac{x\sigma_f^5 + (1-x)\sigma_f^8 \cdot k}{x(\sigma_f^5 + \sigma_{n\gamma}^5) + (1-x)(\sigma_f^8 + \sigma_{n\gamma}^8 + \sigma_c^8)}, \quad (8.4.1)$$

де  $k = 0,6$  — коефіцієнт, який враховує, що реакція на  $^{238}\text{U}$  є пороговою. Підставляючи числові значення у (8.4.1), знайдемо для природної суміші коефіцієнт  $\eta_{\text{шв}}$ :

$$\eta_{\text{шв}} = 2,5 \cdot \frac{0,0072 \cdot 2 + 0,9928 \cdot 0,6 \cdot 0,5}{0,0072 \cdot 2,2 + 0,9928 \cdot 2,7} \approx 0,3. \quad (8.4.2)$$

Таким чином, в природній суміші ізотопів урану ланцюгова реакція на швидких нейтронах неможлива.

З (8.4.1) виразимо  $x$ :

$$x = \frac{vk\sigma_f^8 - \eta_{\text{шв}}\sigma_{\Sigma}^8}{\eta_{\text{шв}}(\sigma_{\Sigma}^5 - \sigma_{\Sigma}^8) - v(\sigma_f^5 - k\sigma_f^8)}, \quad (8.4.3)$$

де введено позначення  $\sigma_{\Sigma}^5 = \sigma_f^5 + \sigma_{n\gamma}^5$ ,  $\sigma_{\Sigma}^8 = \sigma_f^8 + \sigma_{n\gamma}^8 + \sigma_c^8$ . Для того, щоб здійснити ланцюгову реакцію поділу на швидких нейтронах в урановій суміші, слід збагатити її. При значенні  $\eta_{\text{шв}} = 1,1$  вміст  $^{235}\text{U}$  має складати  $x = 0,46 = 46\%$ .

**Приклад 5.** Оцінити проміжок часу, необхідний для поділу 1 кг речовини середовищі  $^{235}\text{U}$  (без урахування виходу нейтронів за межі активної зони), якщо середня енергія нейтронів ділення 1,6 MeV, переріз ділення урану  $^{235}\text{U}$  для цієї енергії становить близько 2 барн та коефіцієнт розмноження  $k_{\infty} = 1,001$ . Вважати, що в початковий момент розділилось одне ядро. Як зміниться результат, якщо

$k_{\infty} = 1,01$ ? Прийняти, що середній час життя одного покоління нейтронів в  $^{235}\text{U}$   $\tau_n = 10^{-7}$  с.

**Розв'язання:** Даний приклад є ідеалізованим і його буде розв'язано в припущенні, що середовище є однорідним та необмеженим, поглинання та сповільнення нейтронів в середовищі не відбувається. Це означає, що кожен нейтрон, який з'явився в результаті реакції ділення, рано чи пізно буде захоплений ядром  $^{235}\text{U}$  й викличе реакцію поділу. Таким чином, загальна кількість ядер, що зазнають поділу в кінці  $n$ -го кроку ланцюгової реакції, становитиме:

$$1 + k_{\infty} + k_{\infty}^2 + \dots + k_{\infty}^n = \frac{k_{\infty}^{n+1} - 1}{k_{\infty} - 1} \approx \frac{k_{\infty}^{n+1}}{k_{\infty} - 1}. \quad (8.5.1)$$

З іншого боку, це число дорівнюватиме загальній кількості ядер в 1 кг речовини:

$$\frac{k_{\infty}^{n+1}}{k_{\infty} - 1} = \frac{M}{m_U}, \quad (8.5.2)$$

де  $M$  — загальна маса речовини,  $m_U$  — маса атома  $^{235}\text{U}$ . З (8.5.2) виражаємо  $n$ :

$$k_{\infty}^{n+1} = \frac{M}{m_U} (k_{\infty} - 1) \Rightarrow n = \frac{\ln \left( \frac{M}{m_U} \left( 1 - \frac{1}{k_{\infty}} \right) \right)}{\ln k_{\infty}}. \quad (8.5.3)$$

Проміжок часу, необхідний для поділу всієї маси  $^{235}\text{U}$  знайдемо, помноживши кількість кроків ланцюгової реакції  $n$  на середній час життя одного покоління нейтронів:

$$t = n\tau_n = \frac{\ln \left( \frac{M}{m_U} \left( 1 - \frac{1}{k_{\infty}} \right) \right)}{\ln k_{\infty}} \tau_n. \quad (8.5.4)$$

Підставляючи у (8.5.4) дані для коефіцієнту розмноження  $k_{\infty}$ , отримаємо для  $k_{\infty} = 1,001$ :

$$t_1 = \frac{\ln \left( \frac{10^3 \text{ з}}{235 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ з}} \left( 1 - \frac{1}{1,001} \right) \right)}{\ln 1,001} \cdot 10^{-7} = 4,93 \cdot 10^{-3} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}, \quad (8.5.5)$$

та для  $k_{\infty} = 1,01$ :

$$t_2 = \frac{\ln\left(\frac{10^3 z}{235 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} z} (1,01 - 1)\right)}{\ln 1,01} \cdot 10^{-7} = 5,18 \cdot 10^{-4} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ с.} \quad (8.5.6)$$

**Приклад 6.** Реактивністю реактора називається величина  $\rho = \frac{k-1}{k}$ , де  $k$  — коефіцієнт розмноження нейтронів. Якщо  $|k-1| \ll 1$ , то  $\rho \approx k-1$ . Знайти в цьому наближенні закон зміни потужності реактора  $P(t)$  в надкритичному режимі, коли  $k > 1$ . Визначити період  $T$  реактора, тобто час, за який потужність зростає в  $e$  разів. Середній час життя одного покоління нейтронів дорівнює  $\bar{\tau}$ . Вважати, що під час однієї реакції поділу виділяється енергія  $Q_0$ , кількість ядер в активній зоні, що зазнали поділу в початковий момент часу —  $N_0$ .

**Розв'язання:** Сумарна кількість ядер, що зазнали поділу протягом часу  $t$  становитиме

$$N_1 = N_0 (1 + k + k^2 + \dots + k^n) = N_0 \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} \approx N_0 \frac{k}{k - 1} k^{t/\bar{\tau}}, \quad (8.6.1)$$

де  $n$  — кількість кроків ланцюгової реакції ділення, причому  $n = \frac{t}{\bar{\tau}}$  (див. приклад 8.5), де  $\bar{\tau}$  — середній час життя одного покоління нейтронів. У формулі (8.6.1) враховано, що  $k^{n+1} \gg 1$ . Згідно визначення, потужність ядерного реактора дорівнює енергії, виділеній в реакторі за одиницю часу:  $P = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ . Врахуємо, що сумарна енергія дорівнює  $Q = N_1 \cdot Q_0$ , де  $N_1$  — кількість ядер, що зазнали поділу протягом часу  $t$ ,  $Q_0$  — енергія, яка виділяється в одній реакції поділу.

Тоді формулу для потужності реактора можемо переписати наступним чином:

$$P = \frac{dQ}{dt} = Q_0 N_0 \frac{k}{k-1} \frac{d}{dt} \left( e^{t/\bar{\tau} \ln k} \right) = P(0) \frac{\ln k}{\rho} e^{t/\bar{\tau} \ln k}, \quad (8.6.2)$$

де введено позначення  $P(0) = \frac{Q_0 N_0}{\bar{\tau}}$  та враховано явний вигляд величини реактивності ядерного реактора  $\rho = \frac{k-1}{k}$ .

Використаємо розклад логарифма в (8.6.2) за малою величиною  $k-1 \ll 1$ :

$$\ln k = \ln(1 + k - 1) = k - 1 - \frac{(k-1)^2}{2} + \dots \approx k - 1. \quad (8.6.3)$$

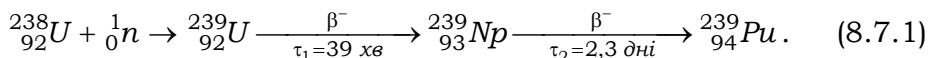
З урахуванням (8.6.3), з (8.6.2) отримуємо закон зміни потужності реактора  $P(t)$  в слабо надкритичному режимі, коли  $k-1 \ll 1$ :

$$P = P(0) \frac{k-1}{\rho} e^{\frac{t}{\bar{\tau}}(k-1)} \approx P(0) e^{\frac{t\rho}{\bar{\tau}}} = P(0) e^{\frac{t}{T}}, \quad (8.6.4)$$

тут використано наближену рівність  $\rho \approx k-1$  та введено позначення  $T = \frac{\bar{\tau}}{\rho}$  — період реактора, тобто час, протягом якого потужність зростає в  $e$  разів.

**Приклад 7.** Під час радіаційного захоплювання нейтрона ядро  $^{238}\text{U}$  в результаті ряду реакцій перетворюється в ядро  $^{239}\text{Pu}$ . (Як і  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  ділиться тепловими нейтронами). В результаті такого процесу «неядерне паливо»  $^{238}\text{U}$  перетворюється на «ядерне паливо»  $^{239}\text{Pu}$ . Коефіцієнтом відтворення «ядерного палива»  $k_g$  називається відношення кількості атомів створеного «палива» до кількості атомів витраченого. Нехай в початковий момент часу у ТВЕЛах (ТВЕЛ — тепловиділяючий елемент) містилось 10%  $^{239}\text{Pu}$  та 90%  $^{238}\text{U}$ . При якому значенні  $P_m(k_g - 1)$ , де  $P_m$  — тепла потужність реактора, віднесена до одиниці ваги «палива», частина плутонію збільшиться удвічі за 10 років неперервної роботи реактора?

**Розв'язання:** Схема перетворення ізотопу  $^{238}\text{U}$  в реакції відновлення ядерного пального виглядає наступним чином:



Знайдемо кількість атомів  $^{239}\text{Pu}$  в одному грамі ядерного пального на початку роботи реактора:

$$\frac{N_0}{m} = N_{m0} = \eta \frac{1}{M_{Pu}}, \quad (8.7.2)$$

де  $m_{Pu}$  — маса атома  $^{239}Pu$ , яка приблизно рівна (без урахування дефекту мас ядра та маси електронної оболонки)  $M_{Pu} = 239 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ ,  $\eta = 0,1$  — початковий вміст ядер ізотопу  $^{239}Pu$  в ядерному пальному. Таким чином, початкова кількість ядер  $^{239}Pu$  в 1 кг пального становить  $N_{m0} = 2,52 \cdot 10^{23} \text{ кг}^{-1}$ . Будемо вважати, що під час реакції поділу одного ядра виділяється енергія  $Q_0 \approx 200 \text{ MeV} = 3,2 \cdot 10^{-11} \text{ Дж}$ . Для забезпечення заданої потужності реактора витрачається  $N_1 = \frac{Pt}{Q_0}$  атомів плутонію. Кількість таких

атомів на одиницю маси речовини:  $N_{m1} = \frac{P_m t}{Q_0}$ . Якщо потужність реактора виражено у  $\text{МВт}/\text{кг}$ , остання формула перепишеться як:

$$N_{m1} = \frac{P_m t}{Q_0} \cdot 10^6, \quad (8.7.3)$$

де коефіцієнт  $10^6$  враховує переведення  $\text{МВт}$  у  $\text{Вт}$ , а  $P_m = P/t$ .

При заданій потужності реактора, вираженій у  $\text{МВт}/\text{кг}$ , за 10 років неперервної роботи ( $t = 3,15 \cdot 10^8 \text{ с}$ ) утвориться

$$N_{m2} = k_{\epsilon} \frac{P_m t}{Q_0} \cdot 10^6 \quad (8.7.4)$$

атомів плутонію на кілограм ядерного палива. При виконанні умови, що за цей час кількість атомів плутонію на одиницю маси подвоїться, отримаємо наступне співвідношення:

$$N_{m0} + N_{m2} - N_{m1} = 2N_{m0}. \quad (8.7.5)$$

Враховуючи (8.7.2), (8.7.3) та (8.7.4), з (8.7.5) визначимо параметр  $P_m(k_{\epsilon} - 1)$ :

$$\begin{aligned} N_{m0} + (k_{\epsilon} - 1) \frac{P_m t}{Q_0} \cdot 10^6 &= 2N_{m0} \Rightarrow \\ P_m (k_{\epsilon} - 1) &= N_{m0} \frac{Q_0}{t} \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (8.7.6)$$

Підставляючи у (8.7.6) дані задачі, знайдемо числове значення параметра  $P_m(k_{\text{с}} - 1)$  :

$$\begin{aligned} P_m(k_{\text{с}} - 1) &= 2,52 \cdot 10^{23} \text{ кг}^{-1} \frac{3,2 \cdot 10^{-11}}{3,15 \cdot 10^8} \cdot 10^{-6} = \\ &= 25,6 \cdot 10^{-3} \text{ MBт/кг} = 25,6 \text{ MBт/т}. \end{aligned}$$

**Приклад 8.** Нехай  $N(t)$  — кількість нейтронів в активній зоні ядерного реактора,  $C(t)$  — кількість уламків ділення, які здатні випускати нейтрони із запізненням. Час життя покоління миттєвих нейтронів дорівнює  $\tau = 10^{-3}$  с. Середній час запізнення нейтронів  $\tau_3 = 13$  с. Рівняння динаміки реактора записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{k(1-\beta)-1}{\tau} N + \frac{1}{\tau_3} C, \\ \frac{dC}{dt} &= \frac{\beta k}{\tau} N - \frac{1}{\tau_3} C, \end{aligned} \quad (8.8.1)$$

де  $\beta$  — відносна частина нейтронів, що запізнюються,  $k$  — коефіцієнт розмноження нейтронів.

а) Розглянути критичний режим реактора, при якому  $k = 1$ . Знайти стаціонарний розв'язання та час встановлення стаціонарного режиму.

б) Знайти період реактора  $T$  в слабо надкритичному режимі, коли  $k - 1 \ll 1$ .

**Розв'язання:** а) При  $k = 1$  (критичний режим, при якому протікає стаціонарна ядерна реакція) рівняння (8.8.1) переписуться так:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\beta}{\tau} N + \frac{1}{\tau_3} C, \quad \frac{dC}{dt} = \frac{\beta}{\tau} N - \frac{1}{\tau_3} C. \quad (8.8.2)$$

Система (8.8.2) має стаціонарний розв'язання:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dC}{dt} = 0. \quad (8.8.3)$$

При цьому

$$\frac{\beta}{\tau} N_{\text{кр}} = \frac{1}{\tau_3} C_{\text{кр}} \Rightarrow N_{\text{кр}} = \frac{\tau}{\beta \tau_3} C_{\text{кр}}. \quad (8.8.4)$$

Покладаючи  $\beta = 0,0064$  [1] (доля нейтронів, що запізнюються, змінюється в межах  $(0,2 \div 0,7)\%$  для різних видів ядерного палива) та



підставляючи дані з умови задачі, знайдемо співвідношення між критичними параметрами:

$$C_{кр} = \frac{0,0064 \cdot 13}{10^{-3}} N_{кр} = 83,2 \cdot N_{кр}. \quad (8.8.5)$$

В реальних системах виконується нерівність  $\beta\tau_3 \gg \tau$ , так що  $C_{кр} \gg N_{кр}$ . Це пояснюється тим, що хоча нейтроноактивні ядра народжуються у сотні разів рідше, ніж нейтрони, живуть вони в десятки тисяч разів довше. Таким чином, роль нейтронів, що запізнюються, в кінетиці ланцюгової реакції є дуже значною.

Для знаходження часу встановлення стаціонарного режиму, необхідно знайти розв'язання системи рівнянь (8.8.2). Для цього виразимо з першого рівняння (8.8.2) кількість уламків ділення  $C$  та підставимо у друге рівняння (8.8.2), отримаємо диференціальне рівняння другого порядку відносно  $N$ :

$$\begin{aligned} C = \tau_3 \left( \frac{dN}{dt} + \frac{\beta}{\tau} N \right), \quad \frac{dC}{dt} = \tau_3 \left( \frac{d^2 N}{dt^2} + \frac{\beta}{\tau} \frac{dN}{dt} \right) \Rightarrow \\ \tau_3 \left( \frac{d^2 N}{dt^2} + \frac{\beta}{\tau} \frac{dN}{dt} \right) = \frac{\beta}{\tau} N - \frac{dN}{dt} - \frac{\beta}{\tau} N = -\frac{dN}{dt} \Rightarrow \\ \frac{d^2 N}{dt^2} + \left( \frac{\beta}{\tau} + \frac{1}{\tau_3} \right) \frac{dN}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (8.8.6)$$

Позначимо  $T = \frac{\tau\tau_3}{\beta\tau_3 + \tau}$  — деякий характерний час (далі побачимо, що це і є час встановлення стаціонарного режиму в реакторі). Розв'язання рівняння (8.8.6) будемо шукати у вигляді:

$$N = A_1 + A_2 e^{-t/T}. \quad (8.8.7)$$

Коефіцієнти у (8.8.7) знайдемо з граничних умов: при  $t = 0$  кількість нейтронів  $N(0) = N_0$ , при  $t \rightarrow \infty$  кількість складе  $N = N_{кр}$ :

$$\begin{aligned} N(\infty) = A_1 = N_{кр}, \\ N(0) = N_{кр} + A_2 = N_0 \Rightarrow A_2 = N_0 - N_{кр}. \end{aligned} \quad (8.8.8)$$

З урахуванням (8.8.8), закон зміни кількості нейтронів запишеться так:

$$N(t) = N_{кр} + (N_0 - N_{кр}) e^{-t/T}, \quad T = \frac{\tau\tau_3}{\beta\tau_3 + \tau}. \quad (8.8.9)$$

Дійсно, час  $T = \frac{\tau\tau_3}{\beta\tau_3 + \tau}$  можна вважати часом встановлення стаціонарного режиму реактора. В нашому випадку він дорівнює

$$T = \frac{13 \cdot 10^{-3}}{13 \cdot 0,0064 + 10^{-3}} = 0,15 \text{ с.}$$

б) Якщо режим реактора відрізняється від критичного, розв'язання рівнянь (8.8.1) можна шукати у вигляді:

$$N = N_0 e^{t/T}, C = C_0 e^{t/T}. \quad (8.8.10)$$

Підставимо (8.8.10) у (8.8.1):

$$\frac{N_0}{T} e^{t/T} = \frac{k(1-\beta)-1}{\tau} N_0 e^{t/T} + \frac{1}{\tau_3} C_0 e^{t/T}, \quad (8.8.11 \text{ а})$$

$$\frac{C_0}{T} e^{t/T} = \frac{\beta k}{\tau} N_0 e^{t/T} - \frac{1}{\tau_3} C_0 e^{t/T}. \quad (8.8.11 \text{ б})$$

Виразивши з рівняння (8.8.11 б)  $C_0$ ,

$$C_0 \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{\tau_3} \right) = \frac{\beta k}{\tau} N_0 \Rightarrow C_0 = \frac{\beta k \tau_3 T}{\tau(T + \tau_3)} N_0, \quad (8.8.12)$$

та підставивши його в рівняння (8.8.11 а), знаходимо рівняння відносно  $T$ :

$$\frac{1}{T} = \frac{k(1-\beta)-1}{\tau} + \frac{\beta k}{\tau \left( 1 + \frac{\tau_3}{T} \right)} \Rightarrow \quad (8.8.13)$$

$$T^2 (k-1) + T (\tau_3 (k(1-\beta)-1) - \tau) - \tau\tau_3 = 0.$$

Розв'язання цього рівняння має вигляд:

$$T = \frac{\tau - \tau_3 (k(1-\beta)-1) \pm \sqrt{(\tau_3 (k(1-\beta)-1) - \tau)^2 + 4\tau\tau_3 (k-1)}}{2(k-1)}. \quad (8.8.14)$$

Можна показати, що у випадку, коли  $k < 1$ , обидва корені рівняння (8.8.14) від'ємні, що відповідає згасанню реакції. В надкритичному режимі один корінь додатний, він і забезпечуватиме наростання ядерної реакції. Знайдемо наближений розв'язання (8.8.14) для випадку  $k-1 \ll 1$  (слабо надкритичний режим):

$$T_1 = \frac{\tau - \tau_3(k-1-k\beta) + \sqrt{(\tau_3(k-1-k\beta) - \tau)^2 + 4\tau\tau_3(k-1)}}{2(k-1)} \approx$$

$$\approx \frac{\tau + \tau_3\beta k + \sqrt{(\tau_3 k\beta + \tau)^2 + 4\tau\tau_3(k-1)}}{2(k-1)} \approx \frac{\tau + \tau_3\beta k}{k-1}. \quad (8.8.15)$$

З урахуванням нерівності  $\beta\tau_3 \gg \tau$ , (8.8.15) остаточно набуде вигляду:

$$T_1 \approx \frac{\tau_3\beta k}{k-1}, \quad (8.8.14)$$

тобто ми отримали, що в слабо надкритичному режимі швидкість наростання ядерної реакції визначається лише нейтронами, що запізнюються. Числове значення періоду реактора для випадку  $k-1 = 10^{-3}$ ,  $\tau_3\beta = 13 \cdot 0,0064 \approx 8 \cdot 10^{-2}$  становить  $T_1 = 80$  с.

### 8.3. Запитання та відповіді

34. Чому уламки ділення зазвичай є  $\beta^-$  – радіоактивними?

З формули Вайцзеккера впливає добре відома формула для "доріжки стабільності" максимально стійких ядер

$$Z_{\text{стаб}} = \frac{A}{2 + 2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4} A^{2/3}} = \frac{A}{2 + 0,015 A^{2/3}}.$$

З цієї формули випливає, що зі збільшенням масового числа повинна зростати відносна кількість нейтронів в ядрах. Коли важке материнське ядро ділиться на декілька більш легких дочірніх ядер, частина нейтронів виявляється зайвою. Після випаровування декількох миттєвих нейтронів (це будуть вторинні нейтрони, які використовуються в ланцюгових реакціях) як легкі, так і важкі уламки все одно залишаються перевантажені нейтронами. Залишкової енергії не вистачає, щоб відірвати їх від ядра, але її досить, щоб стимулювати процес переходу на "доріжку стабільності" за рахунок зменшення кількості нейтронів шляхом перетворення їх в протони в процесах  $\beta^-$  – розпаду, які можуть супроводжуватись випромінюванням нейтронів запізнєння та  $\gamma$  – квантів.

35. Яким є розподіл уламків ділення за масою?

Найчастіше спостерігається ділення важкого ядра на два уламки. Характерна особливість при невеликій енергії збудження — асиметричність розподілу уламків за масою. Так, під час поділу ізотопу  $^{235}\text{U}$  відношення середніх мас важкого та легкого уламків дорівнює приблизно 3:2. Вважають, що асиметрія уламків поділу пояснюється впливом ядерних нейтронних оболонок. Так, ядру енергетично вигідно розділитись так, щоб кількість нейтронів в уламках була близькою до магічних чисел 50 та 82.

Зі збільшенням енергії збудження зростає імовірність симетричного ділення, а імовірність асиметричного змінюється мало. Для дуже великої енергії збудження найбільш імовірним процесом є утворення двох однакових уламків.

Дуже рідко (один випадок на 400 випадків поділу на два уламки) відбувається утворення третьої легкої частинки. Найчастіше вилітають  $\alpha$ -частинки, іноді —  $p, d, t, \text{Li}$  тощо. Поділ ядра на три частини спостерігається тільки при великих енергіях збудження.

36. Пояснити, чому процес поділу ядер  $^{235}\text{U}$  відбувається на нейтронах з практично нульовою кінетичною енергією, тоді як для поділу ядер  $^{238}\text{U}$  необхідні швидкі нейтрони з енергією щонайменше 1 MeV?

Ядро  $^{235}\text{U}$  зазнає ділення за схемою утворення проміжного парно-парного ядра  $^{236}\text{U}$ :  $^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0n \rightarrow ^{236}_{92}\text{U}$ , яке потім розпадається на 2 уламки. Відповідна реакція розпаду ядра  $^{238}\text{U}$  проходить через проміжну стадію утворення парно-непарного ядра  $^{239}\text{U}$ :  $^{238}_{92}\text{U} + {}^1_0n \rightarrow ^{239}_{92}\text{U}$ .

Процес ділення двох утворених ядер ( $^{236}\text{U}$  та  $^{239}\text{U}$ ) характеризується активаційним порогом (бар'єром ділення)  $V_{\text{act}}$ . Оскільки у ядра  $^{236}\text{U}$  відношення  $Z^2/A_{236} = 35,9$  більше, ніж  $Z^2/A_{239} = 35,4$  для ядра  $^{239}\text{U}$ , то ядро  $^{236}\text{U}$  має менший поріг активації, ніж ядро  $^{239}\text{U}$ . Дані експериментів підтверджують це:  $V_{\text{act}(236)} \approx 6,1 \text{ MeV}$ .  $V_{\text{act}(239)} \approx 7,1 \text{ MeV}$ .

З іншого боку, під час утворення парно-парного ядра  $^{236}\text{U}$  виділяється додаткова (у порівнянні з парно-непарним ядром  $^{239}\text{U}$ )

енергія  $\delta E \approx 0,6 \text{ MeV}$ , оскільки захоплений нейтрон знаходить собі пару, що призводить до збільшення сумарної енергії збудження. Таким чином, необхідна енергія активації в ядрі  $^{236}\text{U}$  складає приблизно  $V_{\text{act}(236)} - \delta E \approx 5,4 \text{ MeV}$ , а в ядрі  $^{239}\text{U}$  вона рівна  $V_{\text{act}(239)} \approx 7,1 \text{ MeV}$ . Якщо врахувати, що при захопленні нейтрона ядром урану виділяється енергія  $E_n \approx 6 \text{ MeV}$ , то очевидно, що цієї енергії досить для розпаду ядра  $^{236}\text{U}$ . Для розпаду ж ядра  $^{239}\text{U}$  необхідна додаткова енергія  $V_{\text{act}(239)} - E_n \approx 1,1 \text{ MeV}$ . Звідси випливає, що реакція ділення ядра  $^{235}\text{U}$  відбуватиметься на нейтронах з будь-якою енергією, в тому числі й теплових, тоді як для поділу ядер  $^{238}\text{U}$  необхідні швидкі нейтрони. Слід однак відмітити, що переріз взаємодії теплових нейтронів з ядрами  $^{235}\text{U}$  на три порядки більший, ніж швидких нейтронів. Тому в ланцюгових реакціях ділення використовуються в основному повільні (теплові) нейтрони.

37. Що таке критичний розмір та критична маса активної зони, в якій здійснюється ланцюгова ядерна реакція ділення?

Якщо середовище, в якому проходить ланцюгова реакція, має скінчені розміри, слід враховувати імовірність виходу нейтронів за межі активної зони. Цей фактор враховується введенням до формули «4 коефіцієнтів» узагальненого коефіцієнту поверхневих втрат  $L_s < 1$ , який пропорційний до площі поверхні активної зони:  $L_s \sim S$ . Кількість реакцій поділу пропорційна до об'єму активної зони, тому ланцюгова реакція поділу можлива лише в середовищі достатньо великих розмірів. Наприклад, для кулі радіуса  $R$  відношення об'єму до площі поверхні дорівнює  $R/3$ , тому втрати нейтронів тим менші, чим більший радіус активної зони. Зрозуміло, що при даному об'ємі активна зона повинна мати найменшу можливу площу поверхні.

Критичним розміром називається розмір активної зони, при якому коефіцієнт розмноження нейтронів  $k=1$  (стаціонарна ланцюгова реакція), а маса середовища критичного розміру називається критичною масою. Якщо маса менша за критичну, ланцюгова реакція не йтиме, навіть якщо  $k_\infty > 1$ . Зазвичай для зменшення критичної маси навколо активної зони створюють відбиваючу оболонку, виготовлену з матеріалу з високим альбедо нейтронів.

Наприклад, для середовища з чистого  $^{235}\text{U}$  критична маса дорівнює 47 кг, а для середовища урана з тонкими поліетиленовими прокладками та відбиваючою оболонкою з берилію критична маса складає лише 242 г.

38. Яким є механізм ядерного вибуху?

Ядерний вибух — це неконтрольована ланцюгова ядерна реакція ділення, яка здійснюється на швидких нейтронах. Для того, щоб відбувся ядерний вибух необхідно, щоб маса речовини, яка зазнає поділу, була більша за критичну  $M_{\text{кр}}$  (див. попереднє запитання).

Критичний розмір  $R_{\text{кр}}$  системи має порядок довжини вільного пробігу нейтрона  $\Delta \bar{l}$ ,  $\Delta \bar{l} = 1/\sigma n$ , де  $\sigma$  — переріз взаємодії нейтрона з ядрами,  $n$  — концентрація атомів активного середовища. При  $\Delta \bar{l} = 4$  см час життя одного покоління нейтронів становить приблизно  $\bar{\tau} = \Delta \bar{l}/\bar{v} = 2,5$  нс. Таким чином, час виходу на початкову стадію неконтрольованого вибуху приблизно дорівнює  $2 \cdot 10^{-9}$  с. Повний цикл ядерного вибуху складає 60 ÷ 70 поколінь, що відповідає часу  $10^{-7} \div 10^{-6}$  с.

До вибуху система має перебувати в підкритичному режимі. Перехід до надкритичного стану здійснюється швидким зближенням кількох шматків матеріалу, що зазнає поділу, наприклад,  $^{235}\text{U}$  або  $^{239}\text{Pu}$ . Зазвичай для зближення використовують хімічний вибух, при якому розвивається великий тиск ( $10^6$  атм), це викликає стиснення (імплузю) активного середовища.

39. З якою метою в ядерних реакторах використовують сповільнювачі нейтронів? Який матеріал краще застосовувати?

Під час поділу ізотопу  $^{235}\text{U}$  утворюються переважно швидкі нейтрони ділення. Такі нейтрони можуть викликати реакцію поділу ізотопу  $^{238}\text{U}$ , який ділиться нейтронами з енергією  $E_n \approx 1$  МеВ. Проте ефективний переріз такого процесу дуже малий: він становить  $\sigma \approx 3$  барн. Основними процесами є непружне розсіювання нейтронів, яке суттєво знижує їх енергію нижче порога ділення, а також радіаційне захоплення нейтронів ядрами  $^{238}\text{U}$ , таким чином, в природному та слабо збагаченому урані ланцюгова реакція поділу

стає неможливою. Для того, щоб ланцюгова реакція відбувалась, необхідно або збагатити уранову руду до  $(2 \div 3)\%$  та більше ізотопу  $^{235}\text{U}$ , або змінити енергетичний спектр нейтронів. З цією метою й застосовують сповільнювачі нейтронів.

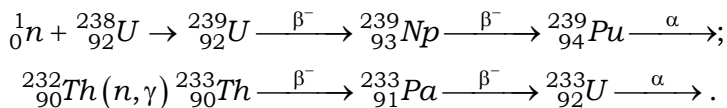
Матеріал, з якого зроблено сповільнювач (термалізатор), повинен мати малу атомну вагу, ефективно зменшувати швидкість нейтронів за рахунок процесів пружного зіткнення, не поглинаючи їх при цьому. Якість сповільнювача можна характеризувати середньою кількістю зіткнень, необхідних для того, щоб нейтрон ділення став тепловим. Найкращим цей показник є для важкої води. В якості сповільнювача нейтронів використовують також берилій або графіт.

40. Яким чином з активної зони реактора відводиться енергія?

З цією метою використовують теплоносії, який повинен з найменшими втратами відвести тепло з активної зони в установку, яка переробляє теплову енергію на електричну. В реакторах на теплових нейтронах при не дуже великих теплових потоках в якості теплоносія використовується вода, водяна пара, повітря, азот, вуглекислий газ тощо. В потужних реакторах, де активна зона прогрівається до температури  $300^\circ\text{C}$ , використання води ускладнюється. Для уникнення закипання води використовують збільшення тиску в системі тепловідводу. В реакторах на швидких нейтронах виділення енергії дуже велике ( $0,5 \text{ кВт на } 1 \text{ см}^3$ ), тому в якості теплоносія використовують рідкий натрій.

41. Відомо, що запаси природного урану обмежені. Чи можна використати ядерні реактори для відтворення ядерного палива?

Розширене відтворення ядерного палива відбувається в реакторах-розмножувачах, або брідерах. Цикли відтворення ґрунтуються на таких реакціях:



В першій реакції ядро  $^{238}_{92}\text{U}$  перетворюється на ізотоп  $^{239}_{94}\text{Pu}$ , який зазнає поділу під час взаємодії з тепловими нейтронами. В другій реакції ядро  $^{232}_{90}\text{Th}$ , яке ділиться під дією швидких нейтронів, перетворюється на ізотоп  $^{233}_{92}\text{U}$ . По відношенню до реакції ділення

ізотопи  ${}^{239}_{94}\text{Pu}$  та  ${}^{233}_{92}\text{U}$  є навіть кращими за  ${}^{235}_{92}\text{U}$ . Крім того, виділення утворених елементів відбувається хімічним шляхом, що робиться набагато простіше, ніж у процесах розділення ізотопів.

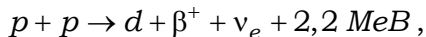
В реакторах-розмножувачах навколо активної зони розташовано шар відтворюваного матеріалу, який називається зоною відтворення. В якості теплоносія через реактор прокачують рідкий натрій, який практично не поглинає нейтрони та добре відводить тепло.



## 9. РЕАКЦІЇ ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗУ.

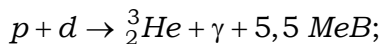
### 9.1. Теоретичні відомості

Ядерні реакції, під час яких відбувається об'єднання легких ядер (або важкого ядра з дуже легким) з виділенням енергії, називаються реакціями *синтезу*. У Всесвіті основною є реакція синтезу дейтерію за участю водню



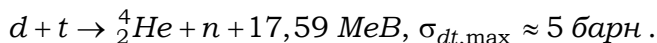
яка є основою "сонячного циклу". Ця реакція включає перетворення, які проходять за допомогою слабкої взаємодії і, внаслідок цього, вона характеризується надзвичайно малим перерізом —  $\sigma_{p+p} \approx 10^{-23}$  барн при відносній енергії частинок біля 1 MeV і швидко спадає при зменшенні енергії. Ця реакція може проявляти себе лише в дуже великих по об'єму замкнених системах типу внутрішньої частини зірок.

Значно більший переріз  $\sigma_{p+d(p+t)} \approx 10^{-6}$  барн при тій же відносній енергії мають реакції за участю протонів та дейтронів:



Переріз цієї реакції хоча і набагато більший, ніж у реакції водневого циклу, але недостатньо великий для практичного використання.

Наступні реакції синтезу є найбільш перспективними з точки зору рівня техніки сьогодення:



Вони мають дуже великий переріз реакції і характеризуються відносно малою висотою і шириною потенціального бар'єру. Синтез ядер можливий також і під час взаємодії важкого та легкого ядра (прикладом такого синтезу є реакція захоплення нейтрону з наступним випромінюванням енергії у вигляді каскаду гама-квантів). Подібний синтез можливий і під час взаємодії важкого ядра з, наприклад, протоном, але ефективність його дуже мала внаслідок дуже сильного кулонівського відштовхування.

Основним фізичним механізмом синтезу ядер є *тунелювання* через кулонівський бар'єр. Для того, щоб цей процес був достатньо ймовірним, ядрам, що взаємодіють, необхідно надати кінетичну енергію, достатню для зближення їх на відстань порядку  $10^{-11}$  см.

Існує декілька методів здійснення такого зближення ядер.

5) *Прискорювальний синтез*, який реалізується при здійсненні відносно невеликого прискорення однієї з легких частинок. Для реалізації резонансної  $(d,t)$  реакції оптимальною є енергія дейтрона близько  $130$  кеВ, що набагато менше, ніж енергія  $17,59$  МеВ, яка при цьому виділяється. Однак такі реакції в атомарних (неіонізованих) мішенях є енергетично не вигідними, тому що основна частина прискорених частинок гальмується за рахунок збудження та іонізації атомів (переріз таких процесів  $\langle \sigma_{de} \rangle \approx 10^7$  барн на багато порядків перевищує ядерний переріз  $\sigma_{dt,max}$ ). Такі системи використовуються в якості джерела нейтронів в спеціальних нейтронних генераторах, причому типова ефективність генерації нейтронів мала

$$N_n / N_d \approx 10^{-5} \div 10^{-6}.$$

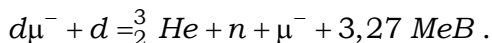
6) *Пікноядерний синтез*, при якому зростання ефективності тунелювання забезпечується дуже сильним стисканням системи, що містить ядра обох типів і в початковому стані (до стискання) складається, наприклад, з атомів дейтерію та тритію. В гранично стиснутій (до стану електронного виродження) системі різко зменшується ширина потенціального бар'єру і зростає його прозорість. Опис таких систем проводиться в термінах гармонічного осцилятора — кожне з ядер перебуває в майже параболічній ямі, утвореній сусідніми ядрами разом з екрануючими електронами. В такій системі частота нульових коливань ядра близька до плазмової частоти системи ядер  $\omega = \sqrt{4\pi Z^2 e^2 n / M}$  і зростає зі збільшенням концентрації ядер  $n$ . При великих значеннях  $n \geq 10^{30}$  см<sup>-3</sup> енергія нульових коливань значно перевищує температуру системи. В такому разі можна вважати, що система знаходиться при нульовій температурі. При цьому всі ядра знаходяться в основному стані, а ймовірність тунельного проникнення визначається хвильовою функцією, близькою до основного стану гармонічного осцилятора. Середньоквадратична амплітуда нульових коливань відповідає величині  $u \approx \sqrt{\hbar / V \omega}$ .

Прозорість кулонівського бар'єру визначається виразом

$$P \sim \exp\left(-\frac{1}{n^{2/3}u^2}\right)$$

і швидко зростає зі збільшенням концентрації ядер  $n$ . Такий механізм має дуже велике значення під час проходження ядерних реакцій в таких астрофізичних об'єктах, як нейтронні зірки та масивні зірки на стадії гравітаційного колапсу.

7) *Мюонний каталіз* є специфічним видом стимуляції синтезу, він пов'язаний з використанням від'ємного  $\mu^-$  – мезона (мюона) в ролі атомного електрона для утворення так званих *мезоатомів*  $d\mu^-$  (атомів, утворених на ядрах, наприклад, дейтерію). Оскільки маса  $\mu^-$  – мезона в 207 разів перевищує масу електрона, то й радіус першої борівської орбіти  $a_{\mu^-} = \hbar^2 / Zm_{\mu^-}e^2$  буде в стільки ж разів менший від радіусу першої електронної орбіти. Таке "притискання" від'ємно зарядженої частинки до власного ядра призводить до майже повного екранування електричного поля ядра на малій відстані, а це безпосередньо впливає на ймовірність тунельного ефекту і на ядерний синтез:



Після дуже швидкого стимулювання однієї реакції  $\mu^-$  – мезон може бути захопленим іншим ядром і стимулювати повторну реакцію. Далі цей процес може повторюватися. Нажаль, цей метод має малу перспективу внаслідок малого часу життя  $\tau \approx 2 \cdot 10^{-6}\text{ c}$  від'ємного  $\mu^-$  – мезона у вільному стані (поза межами дії ядерних сил). Такі частинки можна породжувати з імовірністю  $N_{\mu^-} / N_p \approx 10^{-3} - 10^{-4}$  шляхом пропускання дуже швидких протонів через мішень (це так звані мезонні фабрики), але "вартість" частинок буде занадто високою. Такий метод буде вигідним, якщо один  $\mu^-$  – мезон стимулюватиме близько 100 ядерних реакцій. Розрахунки, однак, показали, що насправді він до моменту розпаду встигає стимулювати не більше двох реакцій синтезу.

8) Основним (для потенційного промислового використання) типом реакцій синтезу на сьогодні вважається *термоядерний синтез*

в середовищі, що перебуває в стані повністю іонізованої плазми, в якій температура сягає значень  $10^8 - 10^9 \text{ K}$ . Саме тому проблема отримання енергії в промислових масштабах в керованих реакціях синтезу називається *термоядерною проблемою*.

Для нагрівання плазми до температур порядку  $10^8 \text{ K}$  використовують такі методи:

- 9) виділення джоулевого тепла під час проходження через плазму електричного струму;
- 10) інжекція в плазму пучків нейтральних частинок з великою енергією;
- 11) стискання плазми під час проходження через неї електричного струму внаслідок притягання паралельних ниток струму – пінч-ефекту;
- 12) нагрівання високочастотним електромагнітним полем;
- 13) нагрівання лазерним випромінюванням з великою потужністю;
- 14) нагрівання інтенсивними електронними пучками;
- 15) нагрівання пучками прискорених важких іонів.

Основною проблемою керованого термоядерного синтезу (КТС) є необхідність утримання високотемпературної плазми з заданою температурою та щільністю в робочому об'ємі реактора на протязі інтервалу часу, не меншого за ту величину, яка визначається конкретним методом нагріву та утримання і визначається **критерієм Лоусена**.

Нехай до реактора введено *квазінейтральну плазму* (таку, в якій середні концентрації позитивних іонів та електронів в кожному макроскопічному об'ємі майже однакові) з чистого дейтерію або суміші дейтерію з тритієм, нагріту до потрібної температури за допомогою одного з вище перелічених способів.

Густина потужності ядерної енергії, що виділяється в одиниці об'єму активної зони термоядерного реактора становить:

$$P_{яд} = \frac{N}{V\Delta t} Q = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle Q,$$

де  $N$  — кількість реакцій синтезу, що відбуваються в об'ємі  $V$  активної зони протягом часу  $\Delta t$ ,  $n_1, n_2$  — концентрації ядер першого та другого сорту, які беруть участь в реакції синтезу,  $\sigma$  — переріз реакції, який залежить від відносної швидкості взаємодіючих ядер,  $v$  — відносна швидкість руху частинок, що реагують, усереднена за

максвелівським розподілом швидкостей,  $Q$  — енергія, яка виділяється в одному акті синтезу.

Середні значення добутку  $\langle \sigma v \rangle$  для дейтерієвої та дейтерій-третієвої плазми визначаються енергетичною температурою плазми  $\theta = kT$  [ 8 ]:

$$\begin{aligned}\langle \sigma v \rangle_{dd} &= 3 \cdot 10^{-14} \frac{1}{\theta^{2/3}} \exp\left(-\frac{19}{\theta^{1/3}}\right) \left[ \text{см}^3 / \text{с} \right], \\ \langle \sigma v \rangle_{dt} &= 3 \cdot 10^{-12} \frac{1}{\theta^{2/3}} \exp\left(-\frac{20}{\theta^{1/3}}\right) \left[ \text{см}^3 / \text{с} \right].\end{aligned}$$

Втрати енергії з активної зони реактора відбуваються за рахунок двох основних механізмів: електромагнітного випромінювання плазми під час гальмування вільних електронів в кулонівському полі ядер та теплове випромінювання з поверхні активної зони. В загальному випадку густину потужності енергетичних втрат за рахунок випромінювання можна записати таким чином:

$$P_{\text{випр}} = f_{\text{випр}}(T) n_1 n_2,$$

причому конкретний вид функції  $f_{\text{випр}}(T)$  може бути знайдений теоретично. У випадку, коли втрати енергії обумовлені тільки тепловим випромінюванням плазми з поверхні активної зони, відповідно до закону Стефана-Больцмана, повна енергія, яку випромінює нагріте до температури  $T$  тіло за одиницю часу, дорівнює

$$P_{\text{тепл}} = \sigma T^4 S = \frac{S}{k^4} \sigma \theta^4,$$

тут  $S$  — площа поверхні термоядерного реактора,  $\theta$  — енергетична температура плазми,  $\sigma$  — стала Стефана-Больцмана,  $k$  — константа Больцмана.

Крім того, енергія виноситься потоком частинок, що залишають активну зону реактора. Середнім часом  $\tau$  утримання плазми в активній зоні термоядерного реактора називається проміжок часу, протягом якого з одиниці об'єму плазми виходить  $n$  частинок кожного знаку, де  $n = n_1 + n_2$  — концентрація електронів у плазмі.

Кінетична енергія частинок в одиниці об'єму плазми дорівнює

$$2 \cdot \frac{3}{2} (n_1 + n_2) kT = 3 (n_1 + n_2) \theta,$$

тут двійка враховує той факт, що половина енергії припадає на електрони, друга половина — на ядра. Енергетична потужність  $P_u$  потоку частинок, що покидають активну зону, становить:

$$P_u = \frac{3(n_1 + n_2)\theta}{\tau}.$$

Таким чином, енергетична потужність частинок та випромінювання, що покидають одиницю об'єму плазми, дорівнює  $f_{\text{вunp}}(T)n_1n_2 + \frac{3(n_1 + n_2)\theta}{\tau}$ . Частину цієї енергії можна використати шляхом перетворення в роботу з ККД  $\eta$ . Потужність втраченої енергії складатиме

$$P_{\text{вunp}} = (1 - \eta) \left\{ f_{\text{вunp}}(T)n_1n_2 + \frac{3(n_1 + n_2)\theta}{\tau} \right\}.$$

Остаточно, для того, щоб в реакторі протікала самопідтримувана термоядерна реакція, необхідно, щоб термоядерна енергія, яка виділяється, не була меншою за енергію втрат:

$$n_1n_2 \langle \sigma v \rangle Q \geq (1 - \eta) \left\{ f_{\text{вunp}}(T)n_1n_2 + \frac{3(n_1 + n_2)\theta}{\tau} \right\}.$$

Для рівнокомпонентної дейтерій-тритієвої суміші  $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$ , умова енергетичної вигідності запишеться так:

$$\frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle_{dt} Q_{dt} \geq (1 - \eta) \left\{ f_{\text{вunp}}(T) \frac{n^2}{4} + \frac{3n\theta}{\tau} \right\} \Rightarrow n\tau \geq L(\theta),$$

де введено позначення  $L(\theta) = \frac{3(1 - \eta)\theta}{\frac{1}{4} \langle \sigma v \rangle_{dt} Q_{dt} - \frac{1}{4}(1 - \eta)f_{\text{вunp}}(T)}$  —

функція Лоусена.

Для дейтерієвої плазми функція Лоусена матиме вигляд:

$$L(\theta) = \frac{3(1 - \eta)\theta}{\langle \sigma v \rangle_{dd} Q_{dd} - (1 - \eta)f_{\text{вunp}}(T)}.$$

Формула  $n\tau \geq L(\theta)$  називається критерієм Лоусена і виражає умову виникнення самопідтримуваної термоядерної реакції, або умову запалювання термоядерної реакції.

При  $\eta = \frac{1}{3}$  критерій Лоусена зводиться до виконання таких умов:

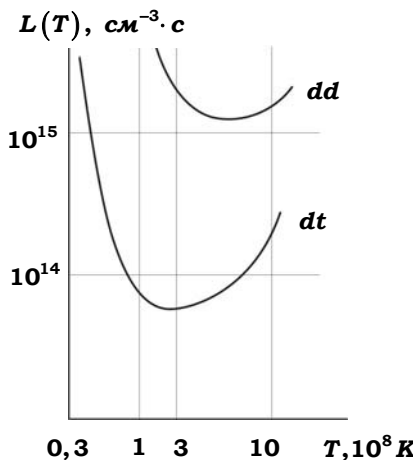
$$n\tau \geq 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \text{ — для реакції } dt;$$

$$n\tau \geq 10^{15} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с} \text{ — для реакції } dd.$$

Графіки функцій Лоусена для цих реакцій при  $\eta = \frac{1}{3}$  зображено на рис. 8.1.

Виходячи з критерію Лоусена, можна розглянути два крайніх випадки для створення систем реалізації керованого термоядерного синтезу. Розділення цих методів проходить за принципом організації процесу утримання високотемпературної плазми.

16) а) Системи з довготривалим утриманням гарячої плазми низької концентрації.



**Рис. 9.1. Графіки функцій Лоусена  $L(T)$  для реакцій  $dd$  та  $dt$  при значенні ККД  $\eta = \frac{1}{3}$ .**

Це системи, в яких використовується плазма з температурою біля  $kT \approx 10 \text{ кеВ}$  з низькою концентрацією ядер (на рівні  $n \approx 10^{16} \div 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ). Для того, щоб реакція була енергетично вигідною, необхідно утримувати плазму протягом часу, не меншого ніж  $\tau \approx 0,1 \div 1 \text{ с}$ , що є дуже складною проблемою, враховуючи, що тиск такої плазми  $p = nkT \approx 10^{12} - 10^{13} \text{ атм}$ , а її температура є дуже

високою. Утримати та ізолювати таку плазму в земних умовах можна лише за допомогою магнітного поля. В космосі таке утримання дуже ефективно здійснює гравітація.

Проблеми довготривалого утримання інтенсивно розглядають на основі системи типу *ТОКАМАК* (аббревіатура комбінації слів *тороїдальна камера з магнітними котушками*), в якій магнітне поле виконує функції як системи нагрівання плазми, так і її утримування).

17) б) Системи з короткотривалим (інерційним) утриманням плазми.

Плазма вважається фіксованою в просторі до тих пір, поки її розмір не збільшився в  $1,5 \div 2$  рази. Виходячи з реальних розмірів активного середовища  $R \approx 0,3$  мм (мікросфери, виготовлені, наприклад, у вигляді тонкостінного мікроконтейнера, заповненого газоподібним дейтерієм та тритієм при тискові близько  $100$  атм) і температури  $kT \approx 10$  кеВ, можна вважати, що плазма утримується на протязі  $\tau \leq 0,1$  нс. У відповідності до критерію Лоусена, концентрація частинок в такій плазмі повинна становити  $n > 10^{25}$  см<sup>-3</sup>, що більш ніж в 100 разів перевищує концентрацію ядер в твердому тілі і в  $10^4$  разів перевищує їх концентрацію в мікроконтейнері.

Таким чином, для реалізації інерційного утримання необхідно не тільки розігрівати активне середовище, але й дуже істотно його стискати. Ці процеси протидіють один одному. При цьому треба врахувати, що тиск такої щільної плазми надзвичайно великий:  $p = nkT \approx 10^{21}$  атм. Стискання та розігрів плазми роблять за допомогою лазерних, іонних або електронних імпульсних пучків, сфокусованих на мішень. Швидкий розігрів та розліт атомів (іонів) поверхневого шару мішеней призводить до появи *абляції* (світлореактивного тиску), який утворює ударну хвилю, що здійснює стискання центральної частини мішені. Як правило, поверхневу частину самої мішені роблять багатошаровою, а підпалюючий зовнішній імпульс (наприклад, лазерний) профільованим. Це сприяє утворенню цілої системи ударних хвиль, які мають різну радіальну швидкість і повинні взаємно підсилитись у центрі, реалізувавши *кумулятивний ефект*.

Обидва методи досягнення умов термоядерного синтезу зараз дуже активно досліджуються, вони є дуже затратними, а позитивний вихід



термоядерної енергії планують отримати не раніше середини ХХІ століття.

## 9.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.** Основна реакція у водневому середовищі в центрах зірок

$$p + p \rightarrow d + \beta^+ + \nu_e \quad (9.1.1)$$

відбувається за рахунок слабкої взаємодії з дуже малим перерізом. Наприклад, при енергії протонів  $1 \text{ MeV}$  переріз реакції (9.1.1)  $\sigma = 10^{-47} \text{ см}^2$ , а при енергії  $1 \text{ keV}$   $\sigma = 10^{-51} \text{ см}^2$ . Одна з можливостей здійснити цю реакцію в лабораторних умовах — бомбардування пучком протонів товстої мішені, що складається з води. Розрахувати, яким має бути струм протонів з енергією  $1 \text{ MeV}$ , які падають на таку мішень, щоб за 1 годину відбулась одна реакція синтезу. Масова довжина пробігу протона у воді  $\rho l = 8 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}^2$ .

**Розв'язання:** Skorистаємось формулою для виходу реакції, що відбувається в товстій мішені:

$$w = \langle \sigma \rangle n_0 l, \quad (9.1.2)$$

де  $\langle \sigma \rangle$  — середній переріз ядерної реакції,  $n_0$  — концентрація ядер мішені (в нашому випадку це ємність з водою),  $l$  — довжина пробігу частинок, що викликають ядерну реакцію. За визначенням, вихід реакції дорівнює відношенню кількості реакцій, що відбулись за одиницю часу, до кількості падаючих частинок, в нашому випадку це відношення дорівнює  $w = N_d / N_p$ , де  $N_d$  — кількість утворених дейтронів,  $N_p$  — кількість протонів, що потрапили на мішень.

Струм протонів виразимо через їх кількість:

$$I_p = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e N_p}{\Delta t}, \quad (9.1.3)$$

тут  $e$  — заряд протона. Враховуючи (9.1.3) та вираз для виходу реакції  $w$ , з (9.1.2) знаходимо формулу для струму протонів:

$$I_p = \frac{e N_d}{\langle \sigma \rangle n_0 l \Delta t}. \quad (9.1.4)$$

Концентрацію протонів у мішені можемо виразити так:  
 $n_0 = 2N_A \left( \frac{\rho}{M} \right)_{H_2O}$ , де  $\rho_{H_2O}$ ,  $M_{H_2O}$  – густина та молярна маса води. Тоді

(9.1.4) можна переписати таким чином:

$$I_p = \frac{eN_d M_{H_2O}}{2 \langle \sigma \rangle N_A \rho_{H_2O} l \Delta t}. \quad (9.1.5)$$

Згідно умови, протягом часу  $\Delta t = 1 \text{ год} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ с}$  повинна відбутись одна реакція, тобто  $N_d = 1$ . Використавши ці дані, знайдемо з (9.1.5) необхідну величину струму протонів з енергією  $1 \text{ MeV}$ :

$$I_p = \frac{4,8 \cdot 10^{-10} \text{ од. CGSE} \cdot 1 \text{ г/моль}}{2 \cdot 10^{-47} \text{ см}^2 \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \cdot 8 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}^2 \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ с}} \approx \\ \approx 1,4 \cdot 10^{13} \text{ од. CGSE/с} \approx 4,7 \text{ кА}.$$

Зрозуміло, що таким методом реалізувати термоядерні реакції абсолютно невигідно. На даний момент найбільш перспективними вважаються термоядерні установки «Токамаки», в яких плазма, нагріта до надвисоких температур ( $\geq 10^7 - 10^8$ ), утримується магнітними полями та інерційні термоядерні реактори (лазерний термоядерний синтез).

**Приклад 2.** Відомо, що важка вода ( $D_2O$ ) міститься в морській воді в кількості 1 молекули приблизно на кожні 6000 молекул звичайної води. Яка енергія виділиться в термоядерному реакторі під час спалювання всього дейтерію, який міститься в 1 л води? Реакції дейтерієвого синтезу при відносній енергії частинок  $E \ll 1 \text{ MeV}$  відбуваються приблизно з рівною ймовірністю і проходять наступним чином:

$$\text{а) } d + d = t + p + Q_1; \quad (9.2.1)$$

$$\text{б) } d + d = {}^3\text{He} + n + Q_2; \quad (9.2.2)$$

**Розв'язання:** Слід зауважити, що існує третій канал реакції синтезу дейтерію:

$$d + d = {}^4_2\text{He} + \gamma + 23 \text{ MeV},$$

проте ймовірність такої реакції складає лише  $10^{-3} \%$ , тому в подальшому її не буде враховано.

Знайдемо енергії реакцій (9.2.1) та (9.2.2). Їх величину можна виразити, наприклад, через дефекти мас. Для першої реакції

$$Q_1 = 2\Delta\left({}^2_1D\right) - \Delta\left({}^3_1T\right) - \Delta\left({}^1_1p\right), \quad (9.2.3)$$

а для другої

$$Q_2 = 2\Delta\left({}^2_1D\right) - \Delta\left({}^3_2He\right) - \Delta\left({}^1_0n\right). \quad (9.2.4)$$

Табличні значення дефектів мас ядер дейтерію та продуктів реакції синтезу є такими (в а.о.м.) [8,9]:

$$\Delta\left({}^2_1D\right) = 0,014102; \quad \Delta\left({}^3_1T\right) = 0,0160049; \quad \Delta\left({}^3_2He\right) = 0,01603;$$

$$\Delta\left({}^1_1p\right) = 0,007825; \quad \Delta\left({}^1_0n\right) = 0,008665.$$

Підставивши числові значення та врахувавши, що  $1 \text{ а.о.м.} = 931,5 \text{ MeV}$ , отримаємо

$$Q_1 = (2 \cdot 0,014102 - 0,0160049 - 0,007825) \cdot 931,5 \approx 4,07 \text{ MeV},$$

$$Q_2 = (2 \cdot 0,014102 - 0,01603 - 0,008665) \cdot 931,5 \approx 3,27 \text{ MeV}.$$

Оскільки обидві реакції проходять з однаковою ймовірністю, можна вважати, що під час одного акту синтезу в середньому виділяється енергія  $Q = 3,67 \text{ MeV}$ .

Обрахуємо енергію, яку виносять продукти реакцій (9.2.1) та (9.2.2) з зони термоядерної реакції. Для спрощення розрахунків знехтуємо кінетичною енергією частинок до реакції. В такому випадку в реакції (9.2.1) на долю тритію припадає

$$Q_T = Q_1 \frac{m_p}{m_T + m_p} \approx 1,02 \text{ MeV}, \quad \text{а протон виносить енергію}$$

$$Q_p = Q_1 \frac{m_T}{m_T + m_p} \approx 3,05 \text{ MeV}.$$

Аналогічним чином знайдемо енергію продуктів реакції (9.2.2):

$$Q_T = Q_2 \frac{m_n}{m_T + m_n} \approx 0,82 \text{ MeV}, \quad Q_n \approx 2,45 \text{ MeV}.$$

В реакції (9.2.2) на долю тритію припадає лише  $0,82 \text{ MeV}$ , решту енергії забирають нейтрони. Відомо, що енергія заряджених частинок може бути перетворена в електричну зі значно більшим ККД, ніж енергія нейтронів [1].

Розрахуємо тепер, яка кількість атомів дейтерію міститься в 1 л ( $10^3 \text{ см}^3$ ) води. Кількість молекул в 1 л води дорівнює

$$N_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{m}{M_{\text{H}_2\text{O}}} N_A = \frac{10^3 \text{ г}}{18 \text{ г/моль}} 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \approx 3,35 \cdot 10^{25}.$$

Отже, кількість атомів водню в 1 л води дорівнює  $6,7 \cdot 10^{25}$ . Вміст молекул важкої води в одиниці об'єму морської води  $\eta \approx 1,7 \cdot 10^{-4}$ . Таким чином, в 1 л води міститься  $N_D \approx 10^{22}$  атомів дейтерію. Це значення є наближенням, оскільки ми не враховували наявності інших елементів у морській воді, проте від нас не вимагається висока точність такої оцінки. Якщо припустити, що можна стовідсотково використати весь дейтерій, що міститься в 1 л води, то енергія, яка виділиться в термоядерному реакторі під час згорання дейтерію, дорівнюватиме:

$$Q \cdot \frac{N_D}{2} = 3,67 \cdot 0,55 \cdot 10^{22} \approx 2 \cdot 10^{22} \text{ MeV} = 3,2 \cdot 10^9 \text{ Дж}.$$

Цю величину можна порівняти з енергією, яка виділяється, наприклад, при спалюванні 1 л бензину  $Q_1 \approx 3 \cdot 10^7 \text{ Дж/л}$ . Видно, що в 1 л води міститься енергія, яка еквівалентна спалюванню 100 л бензину.

**Приклад 3.** Оцінити мінімальну температуру дейтерієвої плазми, при якій дейтрони з найбільш імовірною швидкістю відносного руху зможуть подолати висоту кулонівського бар'єра. Радіус дейтрона  $R \approx 2,0 \text{ фм}$ .

**Розв'язання:** Зазвичай термоядерний синтез є глибоко підбар'єрним процесом (див. наступний приклад). Проте при достатньо високій температурі відносна кінетична енергія частинок, що взаємодіють, досягне значення, яке дорівнює висоті кулонівського бар'єру. Оцінимо температуру дейтерієвої плазми, при якій цю умову буде виконано.

Кулонівський потенціал у випадку ядер дейтерію дорівнює (в системі CGSE):

$$U_{\text{cul}} = \frac{e^2}{R}, \quad (9.3.1)$$

де  $R$  — радіус дейтрона. Очевидно, що температура плазми має бути такою, щоб дейтрони з найбільш імовірною швидкістю відносного руху могли подолати такий бар'єр:

$$\theta = kT = \frac{e^2}{R}, \quad (9.3.2)$$

тут  $\theta$  — температура плазми, виражена в енергетичних одиницях.

Підставивши в (9.3.2) радіус ядра дейтерію, знайдемо

$$\theta = \frac{4,8^2 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 10^{-13}} = 11,5 \cdot 10^{-7} \text{ ерг} \approx 0,72 \text{ MeB},$$

що відповідає температурі  $T = 8,3 \cdot 10^9 \text{ K}$ .

**Приклад 4.** Для однойменно заряджених частинок з кінетичною енергією відносного руху  $\tilde{T}$ , значно меншою за висоту кулонівського бар'єра, коефіцієнт прозорості бар'єра за відсутності екранування має вид:

$$D \approx \exp\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\tilde{T}}}\right), \quad \alpha = \pi q_1 q_2 \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}, \quad (9.4.1)$$

де  $q_1, q_2$  — заряди частинок,  $\mu$  — їх зведена маса.

а) Отримати цю формулу за допомогою загального виразу для коефіцієнта прозорості тунельного бар'єра:

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U - T)} dx\right), \quad (9.4.2)$$

тут  $m, T$  — маса та кінетична енергія частинки, яка тунелює через бар'єр,  $x_1, x_2$  — координати точок, між якими  $U > T$ ;

б) Розрахувати значення  $D$  для дейтронів з найбільш імовірною швидкістю відносного руху в плазмі з температурою 1,0 кеВ та 10,0 кеВ.

**Розв'язання:** а) В реакціях синтезу приймають участь позитивно заряджені ядра, які повинні подолати кулонівський потенціал відштовхування. У випадку, коли кінетична енергія відносного руху частинок значно менша за висоту кулонівського бар'єру, має місце так званий «глибоко підбар'єрний» тунельний ефект.

Для розрахунку імовірності такого процесу скористаємось відомою формулою для коефіцієнту прозорості квантового бар'єра (9.4.2), де замість  $T$  слід взяти кінетичну енергію  $\tilde{T}$  відносного руху частинок, що взаємодіють, а замість  $m$  — зведену масу  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ .

Кулонівський потенціал має вигляд:

$$U_{cul} = \frac{q_1 q_2}{r}, \quad (9.4.3)$$

де  $q_1, q_2$  — заряди частинок (див. Розділ 3, Приклад 1). Координати класичних точок повороту  $x_1, x_2$  є такими:  $x_1 = R$ , де  $R = R_1 + R_2$  — сума радіусів частинок, що взаємодіють,  $x_2$  знайдемо з умови рівності кінетичної енергії відносного руху та кулонівського потенціалу:

$$\frac{q_1 q_2}{x_2} = \tilde{T} \Rightarrow x_2 = \frac{q_1 q_2}{\tilde{T}}. \quad (9.4.4)$$

Запишемо вираз для коефіцієнту прозорості тунельного бар'єра:

$$D \approx \exp \left( -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2\mu \left( \frac{q_1 q_2}{x} - \tilde{T} \right)} dx \right). \quad (9.4.5)$$

Перетворимо інтеграл в (9.4.5):

$$I = \sqrt{2\mu} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{q_1 q_2}{x} - \tilde{T}} dx = \sqrt{2\mu q_1 q_2} \int_R^{x_2} \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1 - \frac{x}{x_2}} dx. \quad (9.4.6)$$

В (9.4.6) зробимо заміну змінних:  $\frac{x}{x_2} = \cos^2 \varphi$ ,  $dx = -2x_2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi$  і

отримаємо

$$I = \sqrt{2\mu q_1 q_2} 2\sqrt{x_2} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{1}{\cos \varphi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = 2\sqrt{2\mu} \frac{q_1 q_2}{\sqrt{\tilde{T}}} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \sin^2 \varphi d\varphi,$$

тут  $\varphi_1 = \arccos \left( \sqrt{\frac{R\tilde{T}}{q_1 q_2}} \right)$ ,  $\varphi_2 = 0$ . Останній інтеграл дорівнює

$$I = 2\sqrt{2\mu} \frac{q_1 q_2}{\sqrt{\tilde{T}}} \int_0^{\varphi_1} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \sqrt{2\mu} \frac{q_1 q_2}{\sqrt{\tilde{T}}} \left( \varphi_1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_1 \right). \quad (9.4.7)$$

Щоб спростити вираз (9.4.7), скористаємось співвідношенням між кінетичною енергією  $\tilde{T}$  та висотою кулонівського бар'єру:  $\tilde{T} \ll \frac{q_1 q_2}{R}$ .

В цьому випадку можна вважати, що  $\phi_1 \approx \frac{\pi}{2}$ . Тоді (9.4.7) набуде вигляду:

$$I = \sqrt{2\mu} \frac{q_1 q_2}{\sqrt{\tilde{T}}} \frac{\pi}{2}. \quad (9.4.8)$$

Остаточно, коефіцієнт прозорості тунельного бар'єру:

$$D \approx \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{2\mu}}{\hbar} \frac{q_1 q_2}{\sqrt{\tilde{T}}}\right) = \exp\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\tilde{T}}}\right), \alpha = \frac{\pi q_1 q_2 \sqrt{2\mu}}{\hbar}. \quad (9.4.9)$$

Це є гранична форма гамівської експоненти [6]

$$D \approx \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{2\mu}}{\hbar v}\right) \ll 1, v = \sqrt{\frac{2\tilde{T}}{\mu}} - \text{відносна швидкість руху частинок.}$$

Загальний переріз реакції термоядерного синтезу визначається двома множниками, перший з яких ми отримали. Цей коефіцієнт характеризує імовірність тунелювання частинок через кулонівський бар'єр і є однаковим для всіх реакцій синтезу. Другий множник, який визначає імовірність самої ядерної реакції, є специфічним для кожної конкретної реакції.

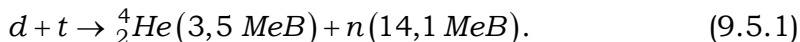
б) Кінетична енергія дейтронів з найбільш імовірною швидкістю відносного руху в плазмі дорівнює  $\tilde{T} = \theta$ , де  $\theta$  — енергетична температура плазми (див. Розділ 9, Приклад 3). Таким чином, коефіцієнт прозорості бар'єру дорівнюватиме:

$$D \approx \exp\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\theta}}\right), \alpha = \frac{\pi q_1 q_2 \sqrt{2\mu}}{\hbar}. \text{ Обрахуємо величину константи } \alpha \text{ для дейтронів:}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi e^2 \sqrt{m_D}}{\hbar} = \frac{3,14 \cdot 4,8^2 \cdot 10^{-20} \sqrt{2,0141 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24}}}{1,05 \cdot 10^{-27}} = \\ &= 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ ерг}^{\frac{1}{2}} = 31,5 \text{ кеВ}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Підставляючи параметри прикладу, отримаємо при температурі плазми  $\theta = 1 \text{ кеВ}$   $D = \exp(-31,5) = 2,1 \cdot 10^{-14}$ , а при  $\theta = 10 \text{ кеВ}$  —  $D = \exp\left(-\frac{31,5}{\sqrt{10}}\right) = 4,7 \cdot 10^{-5}$ .

**Приклад 5.** У першому поколінні термоядерних реакторів планують використати реакцію дейтерію з тритієм:



Величина  $\langle \sigma v \rangle$ , де  $\sigma$  — переріз реакції, а  $v$  — відносна швидкість руху частинок, що реагують, усереднена за максвелівським розподілом швидкостей, дорівнює:

$$\langle \sigma v \rangle = 5,5 \cdot 10^{-21} \text{ см}^3/\text{с} \text{ при } \theta = 1 \text{ кеВ},$$

$$\langle \sigma v \rangle = 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3/\text{с} \text{ при } \theta = 10 \text{ кеВ}.$$

Припускаючи, що плазма містить рівну кількість атомів дейтерію та тритію, розрахувати густину теплової потужності та повну потужність  $W$  термоядерної установки, якщо об'єм плазми  $500 \text{ м}^3$ , а густина електронів  $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .

**Розв'язання:** Кількість реакцій, що відбуваються в одиниці об'єму за одиницю часу визначається концентрацією ядер, що взаємодіють, перерізом реакції та середньою швидкістю відносного руху частинок:

$$\frac{N}{V \Delta t} = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle, \quad (9.5.2)$$

де  $n_1, n_2$  — концентрації ядер першого та другого сорту. Нехай  $n$  — кількість позитивних іонів (та рівну кількість електронів) в кубічному сантиметрі плазми. В нашому випадку кількість дейтерію та тритію однакові, тобто  $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$ .

Енергія, що виділяється під час одного акту синтезу, дорівнює  $17,6 \text{ МеВ}$ . Проте більша частина цієї енергії виноситься нейтронами. Раніше вже було відмічено, що теплову енергію заряджених частинок (в даному випадку — альфа-частинок) можна повністю перетворити на електричну. Це можна зробити, наприклад, за допомогою мігнітногідродинамічного генератора. Перетворити ж кінетичну енергію нейтронів можна лише



використовуючи тепловий цикл, ККД якого обмежений теоремою Карно. Зазвичай припускають, що значення ККД рівне  $1/3$ . Слід також врахувати, що під час поглинання нейтронів речовиною, з якої зроблено захист реактора, виділяється енергія нейтронного споріднення у вигляді тепла. Для одного акту поглинання ця енергія становить приблизно  $8 \text{ MeV}$ . Це тепло також може бути перетворене за допомогою теплового циклу.

Таким чином, тепловий ефект реакції (9.5.1) становить

$$Q = 3,5 + \frac{1}{3}(14,1 + 8) \approx 10,4 \text{ MeV}. \quad (9.5.3)$$

Остаточно, густина теплової потужності термоядерної установки

$$P = \frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle Q, \quad (9.5.4)$$

а повна потужність

$$W = \frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle QV. \quad (9.5.54)$$

Підставляючи параметри прикладу в (9.5.4) та (9.5.54), знайдемо для температури  $\theta = 1 \text{ keV}$  густину потужності:

$$P = \frac{10^{28} \text{ см}^{-6}}{4} 5,5 \cdot 10^{-21} \text{ см}^3 / \text{с} \cdot 10,4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ Вт} / \text{см}^3,$$

та повну потужність:

$$W = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^8 = 11,5 \text{ кВт}.$$

При температурі  $\theta = 10 \text{ keV}$  відповідні значення будуть такими:

$$P = \frac{10^{28} \text{ см}^{-6}}{4} 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3 / \text{с} \cdot 10,4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 0,46 \text{ Вт} / \text{см}^3,$$

$$W = 0,46 \cdot 5 \cdot 10^8 = 2,3 \cdot 10^5 \text{ кВт}.$$

**Приклад 6.** Яким був би радіус сферичного термоядерного реактора, заповненого дейтерієвою плазмою з концентрацією дейтронів  $n$  при температурі  $\theta$ , якби тепло з активної зони відводилось лише у вигляді теплового випромінювання у відповідності до закону Стефана-Больцмана? Знайти температуру  $\theta_m$ , при якій радіус реактора буде мінімальним та обрахувати його значення, якщо  $n = 1,0 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ .

**Розв'язання:** Відповідно до закону Стефана-Больцмана, повна енергія, яку випромінює нагріте до температури  $T$  тіло, що має форму сфери, за одиницю часу дорівнює

$$W_{\text{випр}} = 4\pi r^2 \sigma T^4, \quad (9.6.1)$$

де  $4\pi r^2$  — площа поверхні тіла.

З іншого боку, потужність реактора дорівнює (див. Розділ 9, Приклад 5):

$$W = \frac{4}{3} \pi r^3 n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle_{dd} Q_{dd}, \quad (9.6.2)$$

тут  $\frac{4}{3} \pi r^3$  — об'єм ректора,  $Q_{dd}$  — енергія реакції ( $dd$ ), середнє значення якої  $Q_{dd} = 3,67 \text{ MeV}$  (див. Розділ 9, Приклад 2),  $\langle \sigma v \rangle_{dd}$  — середнє значення добутку перерізу реакції ( $dd$ ) на відносну швидкість руху частинок, що реагують, усереднену за максвелівським розподілом [8],

$$\langle \sigma v \rangle_{dd} = 3 \cdot 10^{-14} \frac{1}{\theta^{2/3}} \exp\left(-\frac{19}{\theta^{1/3}}\right) \left[ \frac{\text{см}^3}{\text{с}} \right], \quad (9.6.3)$$

тут  $\theta$  — енергетична температура плазми, виражена в  $\text{keV}$ .

Оскільки в реакторі є лише йони дейтерію та електрони, замість добутку  $n_1 n_2$  в (9.6.2) слід взяти величину  $\frac{1}{2} n^2$ , тому що в кожному акті синтезу приймають участь два дейтрони.

Прирівнюючи (9.6.1) та (9.6.2), знаходимо радіус реактора у випадку, коли тепло відводиться тільки за рахунок випромінювання:

$$r = \frac{6\sigma T^4}{n^2 \langle \sigma v \rangle_{dd} Q_{dd}}. \quad (9.6.4)$$

З урахуванням (9.6.3), формулу (9.6.4) запишемо через енергетичну температуру плазми:

$$r = \frac{2 \cdot 10^{14} \sigma \theta^{14/3}}{k^4 n^2 Q_{dd}} \exp\left(\frac{19}{\theta^{1/3}}\right). \quad (9.6.5)$$

Для знаходження мінімального розміру реактора дослідимо функцію  $r(\theta)$  на екстремум:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{2 \cdot 10^{14} \sigma}{k^4 n^2 Q_{dd}} \left\{ \frac{14}{3} \theta^{1/3} - \frac{19}{3} \theta^{10/3} \right\} \exp\left(\frac{19}{\theta^{1/3}}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\theta_m^{1/3} = \frac{19}{14} \Rightarrow \theta_m = 2,5 \text{ кеВ.}$$
(9.6.6)

Підставляючи значення  $\theta_m$  в (9.6.5), отримаємо оптимальний радіус термоядерного реактора  $r_{\min} = 3 \cdot 10^6$  км. Такий результат показує, що основним механізмом втрат є не поверхнєве, а об'ємне випромінювання.

**Приклад 7.** Згідно критерію Лоусена, термоядерна реакція в суміші дейтерію та тритію буде самопідтримуваною при  $\theta = 10$  кеВ, якщо  $n\tau > 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$ , де  $n$  — концентрація електронів у плазмі,  $\tau$  — енергетичний час життя плазми, який визначається її випромінюванням, теплопровідністю та дифузією. (Енергетичним часом життя плазми називають відношення енергії плазми до потужності втрат енергії з плазми  $P$ ). Втрати енергії компенсуються зарядженими продуктами реакції, у даному випадку – ядрами гелію. Розрахувати при  $n = 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$  та  $n\tau = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$  густину потужності  $P$  теплових втрат плазми (без урахування електромагнітного випромінювання).

**Розв'язання:** Реакція термоядерного синтезу буде самопідтримуваною, коли термоядерна енергія, що виділяється в реакторі, компенсує втрати енергії за рахунок електромагнітного випромінювання та виходу з зони реактора потоку заряджених частинок. Якщо ж термоядерна енергія перевищує втрати, реактор починає працювати як генератор.

Можна дати інше визначення енергетичного часу життя плазми: це проміжок часу, протягом якого за одиницю часу з одиниці об'єму плазми втрачається  $\frac{n}{\tau}$  частинок кожного знаку. Кінетична енергія частинок, що містяться в одиниці об'єму плазми, дорівнює  $2 \cdot \frac{3}{2} nkT = 3n\theta$ , де двійка враховує наявність однакової кількості електронів та ядер-продуктів термоядерної реакції.

Таким чином, енергетична потужність частинок, що втрачаються одиницею об'єму плазми, становитиме:

$$P = \frac{3n\theta}{\tau} = \frac{3n^2\theta}{n\tau}. \quad (9.7.1)$$

Підставимо в (9.7.1) параметри прикладу й отримаємо числове значення:

$$P = \frac{3 \cdot 10^{28} \text{ см}^{-6} \cdot 10^4 \text{ eB}}{3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}} = 10^{18} \frac{\text{eB}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}} = 0,16 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}.$$

**Приклад 8.** В умовах попереднього прикладу перевірити, що критерій Лоусена для енергетично вигідної, але не самопідтримуваної термоядерної реакції при  $\theta = 10 \text{ кеВ}$  та  $n = 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$  має вигляд:

$$n\tau > 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}.$$

Енергетично вигідною вважається реакція, при якій втрати енергії з плазми втричі менші, ніж повна термоядерна енергія, яка виділяється в реакторі.

**Розв'язання:** Згідно розв'язку Прикладу 5 (Розділ 9), густина потужності термоядерної установки, що працює на реакції ( $dt$ ), становить

$$P = \frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle Q. \quad (9.8.1)$$

У (9.8.1) в якості енергії  $Q$  слід взяти повну енергію реакції ( $dt$ ), яка становить  $17,6 \text{ МеВ}$ . Значення  $\langle \sigma v \rangle$  при температурі  $\theta = 10 \text{ кеВ}$  становить  $\langle \sigma v \rangle = 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3/\text{с}$  (див. Розділ 9, Приклад 5). Таким чином, числове значення потужності при температурі  $\theta = 10 \text{ кеВ}$

$$P = \frac{10^{28}}{4} \cdot 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3/\text{с} \cdot 17,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} \approx 0,77 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}.$$

З формули (9.7.1) оцінимо потужність теплових втрат плазми при  $n\tau = 2,0 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$ :

$$P_{\text{втр}} = \frac{3n^2\theta}{n\tau} = \frac{3 \cdot 10^{28} \text{ см}^{-6} \cdot 10^4 \text{ eB}}{2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}} = 1,5 \cdot 10^{18} \frac{\text{eB}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}} = 0,24 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}.$$

Отже дійсно,  $P/P_{\text{втр}} \approx 3$ .

### 9.3. Запитання та відповіді

42. Чому метод бомбардування зарядженими частинками ядер мішені, про який йшла мова в прикладі 1 (Розділ 9), не підходить для отримання ядерної енергії в промислових масштабах?

*Навіть якщо енергія частинок, які зіштовхуються, є дуже великою, ефективний переріз ядерної взаємодії набагато менший за переріз атомних зіткнень. Тому кінетична енергія прискорених ядер швидко витрачається на збудження атомів мішені та їх іонізацію. Енергії, що залишається, недостатньо для того, щоб відбулась реакція синтезу. Тому переважна більшість актів зіткнення ядер не призводять до ядерної реакції.*

*Неважко переконатись, що середні втрати енергії за рахунок збудження та іонізації атомів перевищують середню енергію, яка виділяється в результаті ядерної реакції. Приймемо, що середній переріз іонізації або збудження атома відповідає величині  $\langle \sigma_i \rangle \approx 10^{-17} \text{ см}^2$ , а середній переріз реакції —  $\langle \sigma_f \rangle \approx 10^{-24} \text{ см}^2$ . З одного боку, малий переріз ядерної взаємодії призводить до того, що переважна більшість актів зіткнення ядер не закінчуються ядерними реакціями. Але цього не досить для висновків, тому що під час кожного атомного зіткнення поглинається відносно невелика енергія. З іншого боку, рідкі ядерні реакції приводять до генерації (виділення) великої енергії реакції. Врахуємо, що приріст енергії за рахунок синтезу відповідає величині  $E_f \approx 10 \text{ МеВ}$ . Приймемо, що середня втрата енергії на збудження або іонізацію атома дорівнює  $E_i \approx 10 \text{ еВ}$ . Звідси знаходимо, що відношення середнього приросту енергії до середніх втрат на кожному атомі дорівнює величині  $K = \langle \sigma_f \rangle E_f / \langle \sigma_i \rangle E_i \approx 0,1$ . Видно, що цей процес енергетично невигідний, хоча величина  $K$  не є дуже малою. Врахування інших каналів втрат приводить до типової оцінки  $K_{\text{max}} \approx 0,03$ .*

*Крім того, втрати енергії частинки призводять до її гальмування і, внаслідок цього, до зменшення перерізу реакції та величини  $K$ .*

*Процеси іонізації та збудження ядер відсутні в повністю іонізованій плазмі, що має високу температуру ( $T \sim 10^8 \text{ К}$ ).*

43. Чи можуть реакції термоядерного синтезу відбуватись при невеликих енергіях частинок, що зіштовхуються?

Термоядерні реакції умовно поділяються на два класи: такі, що відбуваються за рахунок великих енергій частинок (у випадку недеформованого кулонівського потенціалу), а також реакції так званого «холодного синтезу», які стають можливими за умови деформації кулонівського бар'єру, а саме, зрізання найбільш широкої його частини. Стискання кулонівського бар'єру можливе за рахунок величезного тиску в надрах зірок, густина речовини в яких складає  $\rho \geq 10 \text{ г/см}^3$  — це так звані пікноядерні реакції, другий механізм — пряме кулонівське екранування поля дейтрона або протона захопленням на борівську орбіту від'ємним мюоном, це є так званий мюонний каталіз.

Існують також реакції холодного синтезу, це стосується, зокрема, експериментів Флейшмана-Понса (США, 1989), в яких реакції ядерного синтезу спостерігались під час електролітичного насичення кристалічної ґратки паладію або титану. Зараз подібні ефекти досліджуються в різних системах. Існує декілька десятків теоретичних моделей, які різною мірою описують такі процеси при низькій (кімнатній) температурі [18], хоча загальновизнаної моделі досі немає.

44. Як відомо, тритій є нестабільним ізотопом водню (період піврозпаду 12,3 років). Природний тритій утворюється під час бомбардування азоту космічними променями за реакцією  ${}^{14}_7\text{N} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^3_1\text{T} + 3 {}^4_2\text{He}$ . При об'єднанні тритію з киснем утворюється надважка вода  $\text{T}_2\text{O}$ . Яким чином в термоядерних реакторах, що працюють на суміші ізотопів дейтерію та тритію (така реакція є найбільш перспективною з енергетичної точки зору) забезпечується відтворення тритію?

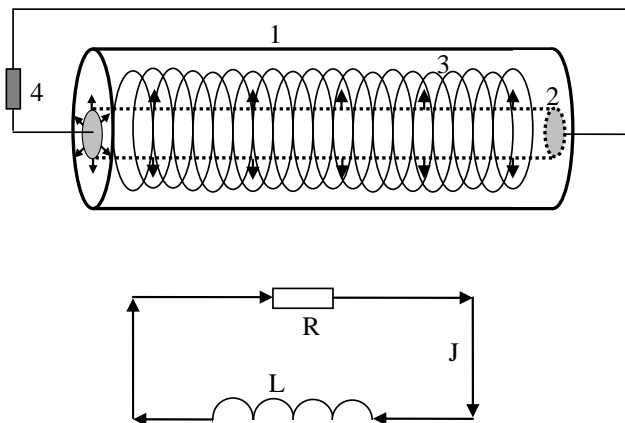
Для відтворення тритію використовують реакцію взаємодії нейтронів з ядрами літію:  ${}^7_3\text{Li} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^3_1\text{T} + {}^4_2\text{He} + 4,8 \text{ Мев}$ . Для цього активну зону реактора оточують бланкетом, що містить атоми літію. Таким чином окрім відтворення термоядерного пального забезпечується додаткова енергія термоядерної реакції, тобто сумарна енергія становитиме  $17,6 + 4,8 = 22,4 \text{ Мев}$  на один акт синтезу.

45. Яким є принцип роботи магнітогідродинамічного (МГД) генератора, за допомогою якого перетворюють теплову енергію заряджених частинок на електричну?

МГД-генератор – це пристрій, в якому відбувається перетворення теплової та кінетичної енергії потоку електропровідного середовища в електричну енергію за рахунок явища електромагнітної індукції. Якщо вектор швидкості потоку заряджених частинок перпендикулярний до силових ліній магнітного поля, в середовищі збуджується електричний (фарадеївський) струм. В якості провідного середовища можна використовувати високотемпературну плазму або рідину (наприклад, рідкі кристали та електроліти). Магнітні системи в МГД-генераторі виготовляються або на основі сталевих магнітоприводів (для невеликих установок), або з надпровідними обмотками.

Електрична провідність плазми пропорційна до  $T^{3/2}$  й не залежить від концентрації частинок. При  $T = 1,6 \cdot 10^7$  К провідність водневої плазми приблизно дорівнює провідності міді при кімнатній температурі.

Принцип дії МГД генератора базується на двох базових положеннях електродинаміки: на законі індукції Фарадея та на тому факті, що магнітне поле не може проникати в середовище з високою провідністю. Спрощена схема МГД генератора представлена на Рис. 9.2.



**Рис. 9.2. Спрощена конструкція (зверху) та принципова схема (знизу) МГД генератора: 1 - провідна труба, 2 - плазмовий шнур, 3 - силові лінії азимутального магнітного поля, 4 - зовнішній опір.**

Уявімо, що реалізований термоядерний синтез у плазмовому шнурі 2 в системі з аксіальною симетрією, де початкове стискання та розігрів середовища 2 відбувається за рахунок пінч-ефекту під час пропускання струму  $J$ . Опір включає всі зовнішні елементи ланцюга зі струмом. Навколо плазми, по якій протікає струм, існує циркулярне магнітне поле 3. На великій відстані від плазмового шнура розташований провідний циліндр 1. Магнітне поле локалізоване в об'ємі між поверхнями плазмового шнура та циліндру. Розширення плазми приводить до стискання області існування азимутального магнітного поля при незмінній величині магнітного потоку. Вимога незмінності потоку веде до необхідності зростання напруженості магнітного поля, що автоматично веде до появи додаткового індукційного струму.

Динаміку цього процесу легко розрахувати, коли написати рівняння Кірхгофа для повного кола, схема якого приведена на рис.9.2.

$$\frac{d}{dt}(LJ) + RJ = 0.$$

Індуктивність плазмового шнура  $L$  визначається його геометричними параметрами і в немагнітному середовищі має простий вигляд:  $L = \frac{l}{2\pi} \ln(r_2/r_1)$ , де  $l$  - довжина шнура,  $r_2$  та  $r_1$  - зовнішній та внутрішній радіус області існування магнітного поля, створеного струмом, що протікає по плазмовому шнурі (в даному випадку це внутрішній радіус провідної труби та зовнішній радіус шнура).

З рівняння Кірхгофа знаходимо

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{J}{L} \left( R + \frac{dL}{dt} \right).$$

Видно, що у випадку  $\frac{dL}{dt} < 0$  (що відповідає розширенню плазмового шнура і збільшенню  $r_1$ ) наявність змінної індуктивності еквівалентна від'ємному опору. Якщо при цьому  $\left| \frac{dL}{dt} \right| > R$ , то



розширення плазмового шнура приводить до  $\frac{dJ}{dt} > 0$ , тобто до зростання індукційного струму в електричному контурі за рахунок перетворення механічної енергії рухомої плазми в електричну енергію в контурі.

46. Чому найбільш перспективною для промислового використання є саме реакція  $dt$ ?

По-перше, мінімальна температура, при якій починає виконуватись критерій Лоусена, менша для реакції  $dt$ . Ця температура знаходиться з умови  $\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0$ , де вигляд функції Лоусена задається виразами, наведеними в теоретичній частині до розділу. З рис. 9.1 видно, що оптимальна температура для реакції  $dt$  дорівнює приблизно  $T_{opt} \approx 2 \cdot 10^8 \text{ K}$ , тоді як для реакції  $dd$  її значення  $T_{opt} \approx 8 \cdot 10^8 \text{ K}$ .

По-друге, критерій  $n\tau \geq L(\theta)$  легше виконати для реакції  $dt$  (див. рис. 9.1). Генерація енергії в системі відбувається, якщо значення  $n\tau$  знаходиться вище кривої  $L(\theta)$ .

Ці факти пов'язані з тим, що переріз реакції  $dt$  в області температур  $10^8 \div 10^9 \text{ K}$  приблизно на два порядки більший за переріз реакції  $dd$ , оскільки в цьому інтервалі температур реакція  $dt$  є резонансною.

47. Можливість реалізації мюонного каталізу значно ускладнюється «прилипанням» мюону до гелію, як, наприклад, в реакції  $d + d\mu^- \rightarrow {}^3\text{He}\mu^- + n$  (в цій реакції 12% мюонів «прилипають» до ізотопу  ${}^3\text{He}$ ), при цьому мюон «випадає» з циклу каталізу. Такий процес називається отруєнням каталізатора. Значно менший відсоток мюонів в результаті реакцій синтезу випадають з процесу каталізу в реакції  $dt\mu^- \rightarrow {}^4\text{He} + n$ . Обґрунтуйте можливість використання такої реакції з точки зору реалізації термоядерного синтезу за рахунок мюонного каталізу.

Мезомолекула  $dt\mu^-$  має слабкозв'язаний обертально-коливальний рівень  $J = v = 1$  з енергією  $E_{11} = -0,657 \text{ eV}$ , тому такі мезомолекули утворюються резонансним чином з високою швидкістю (протягом

часу  $\sim 10^{-8}$  с в конденсованому середовищі). Крім того, імовірність «прилипання» мюона до гелію для такої реакції дорівнює лише 0,58%.

У 1983 р. група С.Джонса (S.Johnes, Los-Alamos) експериментально дослідила утворення мезомолекул  $dt\mu^-$  з резонансною швидкістю  $\lambda \geq 5 \cdot 10^8$  с $^{-1}$ . В рідкій суміші дейтерію та тритію спостерігалось  $160 \pm 20$  циклів мюонного каталізу (нагадаємо, що середній час життя мюона становить  $\approx 2 \cdot 10^{-6}$  с). Швидкість ядерного синтезу в мезомолекулі складала  $\lambda_f \approx 10^{12}$  с $^{-1}$ . Таким чином, в конденсованій суміші дейтерію та тритію ( $n \approx 4,25 \cdot 10^{22}$  см $^{-3}$ ) один мюон може здійснити до 170 циклів каталізу та звільнити близько 3 ГеВ енергії.

Нажаль, у плазмовому середовищі внаслідок високої температури і малої концентрації дейтерію та тритію ефективність використання мюонів різко спадає і при типових для термоядерного синтезу параметрах ( $n_d \approx n_t \approx 10^{16}$  см $^{-3}$ ,  $T_{opt} \approx 2 \cdot 10^8$  К) один мюон може здійснити не більше 1-2 циклів каталізу.

48. На концентрацію електронів у плазмі накладаються певні обмеження, обумовлені вимогами до тиску плазми на стінки реактора. Оцініть, яким має бути об'єм термоядерного реактора, який працює на дейтерій-тритієвій суміші, щоб потужність складала  $10^3$  МВт (таку потужність має стандартна крупна електростанція).

Нехай  $P_0$  — тиск плазми до реакції. тиск цей пропорційний до концентрації електронів  $n$ :  $P_0 \sim nkT$ . Щоб стінки реактора не було зруйновано, тиск не повинен бути дуже великим, наприклад, нехай  $P_0 = 2$  атм  $\approx 2 \cdot 10^6$  дин/см $^2$ . При температурі  $T \approx 2 \cdot 10^8$  К концентрація дорівнює  $n \sim \frac{P_0}{kT} \approx 10^{14}$  см $^{-3}$ . В результаті виділення термоядерної енергії температура плазми зростає в кілька сотень разів, що спричиняє значне зростання тиску на стінки. Технологічно в реакторах передбачено утримуючі пристрої. При підвищенні температури щонайменше у 100 разів тиск плазми дорівнюватиме  $P \sim 100 \cdot P_0 \approx 14 \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3}$ . Згідно критерію Лоусена, дейтерій-тритієва плазма з концентрацією  $n \sim 10^{14}$  см $^{-3}$  повинна утримуватись в

реакторі протягом часу  $\tau \geq 1 \text{ с}$ . При цьому густина потужності дорівнюватиме:  $W = \frac{P}{\tau V} = 14 \text{ Вт/см}^3$ . Для отримання потужності  $10^3 \text{ МВт}$  об'єм реактора повинен складати приблизно  $10^8 \text{ см}^3 = 100 \text{ м}^3$ .

## 10. ПРИСКОРЮВАЧІ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК

### 10.1. Теоретичні відомості

*Прискорювачі* — це установки, в яких заряджені частинки набувають великих енергій. В найбільшому прискорювачі протонів — теватроні — досягнуто енергію  $940 \text{ GeV}$  (Лабораторія ім. Фермі, США). Найпотужніший прискорювач електронів LEP (ЦЕРН, Швейцарія) прискорює зустрічні пучки електронів та позитронів до енергій  $45 \text{ GeV}$  (після введення додаткових прискорюючих пристроїв енергію можна збільшити вдвічі). У 2008 році в ЦЕРНі було запущено LHC (великий адронний колайдер). Він розташований в тунелі довжиною  $27 \text{ км}$ . В цьому колайдері енергія зіткнення протонів досягатиме  $7 \text{ TeV}$ .

В усіх діючих прискорювачах збільшення енергії заряджених частинок відбувається під дією зовнішніх повздовжніх (направлених вздовж швидкості руху частинок) електричних полів.

До складу прискорювачів входять такі елементи: джерело прискорюваних частинок (електронів, протонів, іонів, античастинок); генератори електричних або електромагнітних прискорюючих полів; вакуумна камера, в якій рухаються прискорювані частинки; пристрої впуску (інжекції) та випуску (ежекції) пучка з прискорювача; фокусуючі пристрої; магніти, які викривляють траєкторії прискорюваних частинок; пристрої для дослідження та корекції положення та конфігурації прискорюваних пучків.

За принципом будови існують *прискорювачі прямої дії*, або високовольтні, в яких прискорення відбувається в постійному електричному полі (електростатичні, каскадні генератори, тандемні прискорювачі), *індукційні прискорювачі*, в яких прискорення відбувається у вихрових електричних полях, що виникають під час зміни магнітної індукції (бетатрони, лінійні індукційні прискорювачі) та *резонансні прискорювачі*, в яких під час прискорення використовують ВЧ електромагнітні поля (лінійні прискорювачі на біжучій хвилі, циклотрони, фазотрони, синхротрони, мікротрони). Всі діючі прискорювачі, які розраховані на надвисокі енергії, відносяться до останнього типу.

Сучасні прискорювачі поділяються на два великих класи: *лінійні* та *циклічні прискорювачі*. В лінійних прискорювачах траєкторії частинок є практично прямими лініями. По всій довжині таких

прискорювачів розташовано прискорюючі секції. В лінійних прискорювачах є можливість отримати потужні і неперервні потоки частинок, проте при великих енергіях вони є надто дорогими і мають дуже великі розміри, які можуть сягати багатьох кілометрів.

В циклічних прискорювачах магнітне поле вигинає траєкторію частинок, згортаючи її в коло (*синхротрони*) або спіраль (*циклотрони*, *фазотрони*, *бетатрони* та *мікротрони*). В таких прискорювачах частинка в процесі прискорення багаторазово проходить через один або кілька прискорюючих пристроїв.

В однорідному постійному магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$  частинка з зарядом  $q$ , швидкість якої перпендикулярна до напрямку силових ліній, рухається по колу з циклічною частотою:

$$\Omega = \frac{qB}{m} = \frac{qBc^2}{W} \quad \text{— в системі CI,}$$

$$\Omega = \frac{qB}{mc} = \frac{qBc}{W} \quad \text{— в системі Гауса,}$$

де  $W=mc^2$  — повна енергія прискорюваної частинки. В даному розділі для розрахунків зручніше користуватись системою Гауса, тому подальші формули будуть наведені саме в цій системі. Кінетична енергія, яку частинка отримує на виході з циклічного прискорювача, не залежить від прискорюючого поля, а визначається лише індукцією магнітного поля  $B$  та радіусом циклічної області  $R$ , в якій створене магнітне поле:

$$E_k = \frac{1}{2} m \Omega^2 R^2 = \frac{1}{2} \frac{(qBR)^2}{mc^2}.$$

При будь-якій швидкості імпульс частинки визначається співвідношенням:

$$p = \frac{qBr}{c},$$

де  $r$  — радіус траєкторії частинки в однорідному магнітному полі в певний момент часу.

В бетатроні прискорення електронів відбувається за рахунок вихрового електричного поля, яке виникає під час зміни аксіально-симетричного магнітного поля з часом згідно закону електромагнітної індукції:

$$\oint_L \vec{E}_{вихр} d\vec{l} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow$$

$$2\pi r E_{\text{вихр}} = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt},$$

тут  $\Phi = \pi r^2 \bar{B}$  — магнітний потік, який пронизує площу, обмежену стаціонарною орбітою з радіусом  $r$ ,  $\bar{B}$  — середня індукція магнітного поля на цій площі. Середня індукція пов'язана з індукцією на орбіті наступним співвідношенням:

$$B_{\text{орб}} = \bar{B}/2.$$

Під час руху частинки в циклічному прискорювачі по криволінійній траєкторії (наприклад по колу з радіусом  $R$ ) вона втрачає енергію на синхротронне випромінювання за рахунок процесу кутового прискорення:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2 c}{3R^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4.$$

Ці втрати особливо великі для легких частинок (електронів та позитронів). Такий процес може бути як шкідливим (він обмежує максимальну енергію частинок і вимагає додаткової компенсації втрат на випромінювання) так і корисним (на його основі будують спеціальні джерела жорсткого синхротронного електромагнітного випромінювання з максимальною енергією аж до одиниць MeV, для чого на певній ділянці прискорювача додатково періодично вигинають траєкторію до малого радіусу кривизни за допомогою системи періодично розташованих постійних магнітів або спіральних електромагнітів — *ондуляторів* та *віглерів*).

Додаткове підвищення енергії частинок може бути здійснене під час зустрічного зіткнення прискорених частинок. Якщо розглянути зіткнення двох релятивістських частинок, кожна з яких в лабораторній системі має енергію  $E = \gamma m_0 c^2$ , то в супутній системі (системі, яка рухається з однією з частинок) енергія буде складати  $E = 4\gamma^2 m_0 c^2$ . Величина  $\gamma = E/m_0 c^2$  є Лоренц-фактором і для кращих прискорювачів легких частинок сягає значень  $\gamma \approx 10^4 - 10^5$ .

Останнім часом розроблені нові методи прискорення частинок, які не вимагають створення дуже великих за розмірами та дуже коштовних прискорювачів. Одним з найбільш перспективних є метод прискорення за допомогою *пондеромоторних сил*. Його ідея полягає у використанні процесу нелінійної взаємодії заряджених частинок з

дуже сильними електромагнітними полями. Обмежимося випадком нерелятивістських частинок.

З квантової механіки відомо, що енергія взаємодії частинки з зарядом  $q$  з електромагнітним полем, представленим векторним потенціалом  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , має вигляд суми лінійного та квадратичного доданків

$$W = V_1(\vec{r}, t) + V_2(\vec{r}, t), \quad V_1(\vec{r}, t) = \frac{q}{mc} \vec{A}(\vec{r}, t) \vec{p}, \quad V_2(\vec{r}, t) = \frac{q^2 A^2(\vec{r}, t)}{2mc^2},$$

де  $\vec{p}$  — імпульс частинки.

Розглянемо особливості взаємодії заряду з періодичним полем

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{e}_k A_0(\vec{r}) \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

Таке поле відповідає, наприклад, модульованому лазерному імпульсу. В цьому виразі  $A_0(\vec{r})$  — модульована амплітуда,  $\vec{e}_k$  — вектор поляризації хвилі.

У відносно слабких полях знакопостійним квадратичним доданком  $V_2(\vec{r}, t)$  можна знехтувати в порівнянні з лінійним знакозмінним  $V_1(\vec{r}, t)$ . При цьому вплив періодичного поля  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  зводиться до періодичного прискорення та гальмування заряду без систематичного прискорення.

В дуже сильних полях істотним стає квадратичний доданок, який не залежить від знаку поля та знаку заряду. Якщо усереднити величину  $\langle \vec{A}^2(\vec{r}, t) \rangle = (1/2)(A_0(\vec{r}))^2$  по періоду лазерної хвилі, то очевидно, що за рахунок усередненої енергії взаємодії

$$\langle V_2(\vec{r}, t) \rangle = \frac{q^2 \langle A_0^2(\vec{r}) \rangle}{4mc^2}$$

частинка з зарядом може бути прискореною. Причина прискорення полягає в тому, що в такому полі енергія заряду стає більшою на величину  $\langle V_2(\vec{r}, t) \rangle$ , ніж за межами поля. Таким чином, заряд будь якого знаку буде виштовхуватися з області існування поля, отримуючи при цьому прискорення. Така дія поля визначається комбінованою дією електричної і магнітної компонент і має назву *пондеромоторної*.

Врахувавши зв'язок векторного потенціалу з інтенсивністю електромагнітної хвилі  $A_0 = \sqrt{8\pi c J_0 / \omega}$ , отримаємо вираз для енергії прискорення частинки:

$$\langle V_2(\vec{r}) \rangle = \frac{2\pi q^2 \langle J_0(\vec{r}) \rangle}{m c \omega}.$$

Якщо заряд до дії поля був нерухомим або рухався повільно, то попадання на нього такого лазерного імпульсу призводить до його прискорення (лазерний імпульс діє як релятивістський поршень). Аналогічні теоретичні результати можуть бути отримані і в релятивістському випадку.

При використанні кращих сучасних фемтосекундних лазерів оптичного діапазону з інтенсивністю лазерної хвилі  $\langle J_0(\vec{r}) \rangle \approx 10^{20} - 10^{24} \text{ Вт/см}^2$  можливе прискорення електронів до енергії  $\langle V_2(\vec{r}) \rangle \geq 1 \text{ Гев}$ . Це прискорення відбувається на інтервалі, який не перевищує 1 мм. Для порівняння нагадаємо, що лінійні прискорювачі з такою ж енергією сягають довжини в декілька кілометрів.

Експерименти підтвердили ці результати. Це дає початок нової галузі ядерної фізики — *лазерна ядерна фізика*.

## 10.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.** Визначити для електрона та протона, які рухаються по коловим орбітам в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 10 \text{ кГс}$ , періоди обертання та радіуси орбіт, якщо кінетична енергія частинок становить  $E_k = 10 \text{ МеВ}$ .

**Розв'язання:** На частинку з зарядом  $q$ , що рухається в однорідному магнітному полі з індукцією  $B$ , діє сила Лоренца:

$$\vec{F}_\Lambda = \frac{q}{c} [\vec{v} \vec{B}], \quad (10.1.1)$$

де  $\vec{v}$  — вектор швидкості частинки. Якщо напрямок швидкості перпендикулярний до напрямку силових ліній магнітного поля, формула (10.1.1) запишеться таким чином:

$$F_\Lambda = \frac{q v B}{c}. \quad (10.1.2)$$

В той же час, сила Лоренца є доцентровою під час руху по колу з радіусом  $r$ , тому можна записати наступну рівність:



$$\frac{qvB}{c} = \frac{mv^2}{r}, \quad (10.1.3)$$

де  $m$  — маса частинки. Якщо відома швидкість руху частинки, а отже, її кінетична енергія, з (10.1.3) можна виразити радіус колової орбіти:

$$r = \frac{m v c}{q B} = \frac{p c}{q B}, \quad (10.1.4)$$

де  $p$  — імпульс частинки. Використаємо зв'язок між імпульсом та кінетичною енергією в загальному випадку. Повна енергія частинки:

$$E = E_k + m_0 c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}, \quad (10.1.5)$$

тут під  $m_0$  розуміють масу спокою частинки. Піднесемо (10.1.5) до квадрата та виразимо імпульс  $p$ :

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2} = \sqrt{2m_0 E_k} \sqrt{1 + \frac{E_k}{2m_0 c^2}}. \quad (10.1.6)$$

Формула (10.1.6) пов'язує між собою імпульс та кінетичну енергію релятивістської частинки. Для частинок нерелятивістських, тобто таких, для яких виконується співвідношення  $E_k \ll m_0 c^2$ , в (10.1.6) квадратний корінь можна розкласти в біноміальний ряд за малим параметром  $\varepsilon = \frac{E_k}{2m_0 c^2} \ll 1$  й отримати наближену формулу:

$$p \approx \sqrt{2m_0 E_k} \left( 1 + \frac{E_k}{4m_0 c^2} \right). \quad (10.1.7)$$

У випадку нерелятивістських частинок другим доданком в (10.1.7) нехтують, користуючись відомим виразом для імпульсу:  $p = \sqrt{2m_0 E_k}$ .

Період обертання  $T$  можна виразити через кутову частоту  $\Omega$ :  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ . Оскільки  $\Omega = \frac{v}{r}$ , з (10.1.3) виразимо швидкість руху частинки на орбіті й підставимо у вираз для періоду обертання:

$$\Omega = \frac{v}{r} = \frac{q B c}{m c^2} \Rightarrow \quad (10.1.8 \text{ а})$$

$$T = 2\pi \frac{m c^2}{q B c}, \quad (10.1.8 \text{ б})$$

де  $mc^2$  — повна енергія частинки. Очевидно, що при малих швидкостях період орбіти можна вважати величиною сталою, тоді як при великих швидкостях слід враховувати релятивістський ефект зростання маси частинки, а отже, й періоду обертання. Ця обставина є суттєвою і пояснює той факт, що в циклічних прискорювачах важкі частинки (протони, альфа-частинки, дейтрони тощо) неможливо розганяти до великих енергій. Про це йтиме мова далі під час розгляду принципу роботи циклотрону.

Одразу зауважимо, що циклотрони не застосовують для прискорення легких частинок, таких як електрон та позитрон, тому що для них вже при невеликих енергіях необхідно враховувати релятивістські поправки. Для прискорення електронів та позитронів використовують циклічні прискорювачі типу бетатрону або синхрофазотрону.

У нашому випадку для знаходження радіуса орбіти електрона з енергією  $E_k = 10,0 \text{ MeV}$  слід скористатись формулами (10.1.4) та (10.1.6):

$$r_e = \frac{pc}{eB} = \frac{\sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2}}{eB}. \quad (10.1.9)$$

Підставляючи в (10.1.9) параметри електрона, знайдемо радіус орбіти:

$$r_e = \frac{\sqrt{(10^7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12})^2 \text{ epr}^2 + 2 \cdot 10^7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \cdot 0,511 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ epr}^2}}{4,8 \cdot 10^{-10} \text{ од. CGSE} \cdot 10^4 \text{ Гс}} = 3,5 \text{ см.}$$

Період обертання електрона знайдемо з (10.1.8 б):

$$T_e = 2\pi \frac{E_k + m_0 c^2}{eBc} = 7,34 \cdot 10^{-10} \text{ с.}$$

Для знаходження радіуса орбіти протона з енергією  $E_k = 10,0 \text{ MeV}$  можемо скористатись нерелятивістським виразом, оскільки  $E_k \ll m_p c^2 = 938,28 \text{ MeV}$ :

$$r_p = \frac{\sqrt{2E_k m_p c^2}}{eB}. \quad (10.1.10)$$

З (10.1.10) знайдемо для протона радіус траєкторії в однорідному магнітному полі:

$$r_p = \frac{\sqrt{2 \cdot 10^7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \cdot 938 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}}}{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^4} \approx 45,7 \text{ см.}$$

та період обертання:

$$T_p = 2\pi \frac{(1,6 \cdot 10^{-5} + 938 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}) \text{ ерг}}{4,8 \cdot 10^{-10} \text{ од. CGSE} \cdot 10^4 \text{ Гс} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см} / \text{с}} = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ с.}$$

**Приклад 2.** В циклотроні іони рухаються в однорідному магнітному полі й отримують прискорення в проміжку між двома прискорюючими електродами (дуантами). Для резонансного прискорення повинна виконуватись умова синфазності — частота обертання іона та частота електричного поля повинні співпадати. Проте частота обертання іона не лишається постійною, оскільки маса його зростає згідно співвідношенню  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ . В циклотроні

відбувається порушення синфазності, тому іони не можуть досягти дуже великих енергій. Очевидно, що найбільшу енергію іонам можна надати, якщо розбалансування, тобто різниця між частотою прискорюючого поля та частотою обертання, буде найменшою. Яку треба вибрати частоту прискорюючого поля, необхідну для прискорення протнів в циклотроні з магнітом, який створює постійне поле з напруженістю 15 кГс та має радіус 65 см, щоб порушення синфазності циклотрону було найменшим?

**Розв'язання:** Для того, щоб порушення синфазності було мінімальним, частота обертання іона повинна співпадати з частотою прискорюючого поля, коли іон отримує половину кінцевої енергії. В такому випадку в центрі магніту частота обертання буде більшою за частоту електричного поля, а наприкінці прискорення — меншою за частоту електричного поля на таку саму величину.

Знайдемо енергію, що її отримує іон в циклотроні з параметрами, заданими в умові задачі. Для цього скористаємось формулою (10.1.4):

$$R = \frac{p_{\max} c}{qB}, \quad (10.2.1)$$

де  $R$  — радіус траєкторії іона наприкінці прискорення, що дорівнює радіусу магніту,  $p_{\max}$  — його кінцевий імпульс,  $B$  — напруженість постійного магнітного поля в циклотроні.

Імпульс в (10.2.1) виразимо через повну енергію частинки:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4, \quad (10.2.2)$$

де  $E$  — повна енергія,  $E = E_k + m_0 c^2$ ,  $p, m_0$  — імпульс та маса спокою іона. Піднесемо (10.2.1) до квадрата та приймаючи до уваги (10.2.2), виразимо кінетичну енергію:

$$R^2 q^2 B^2 = p_{\max}^2 c^2 = (E_k^{\max} + m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^4 \Rightarrow$$

$$E_k^{\max} = m_0 c^2 \left( \sqrt{1 + \left( \frac{qBR}{m_0 c^2} \right)^2} - 1 \right) \quad (10.2.3)$$

Формула (10.2.3) пов'язує кінетичну енергію іона, який рухається в однорідному магнітному полі з напруженістю  $B$  по орбіті з радіусом  $R$ . Так, з (10.2.3), кінетична енергія протона дорівнюватиме:

$$E_k^{\max} = 938,28 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 1,5 \cdot 10^4 \cdot 65}{938,28 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}} \right)^2} - 1 \right) =$$

$$= 7,13 \cdot 10^{-5} \text{ ерг} = 44,5 \text{ МеВ}.$$

Таким чином, на половині циклу прискорення кінетична енергія протона дорівнюватиме  $W = E_k^{\max} / 2 = 22,27 \text{ МеВ}$ . Циклотронну частоту для цієї енергії знайдемо з формули (10.1.8 а):

$$\Omega = \frac{eBc}{mc^2} = \frac{eBc}{W + m_0 c^2}. \quad (10.2.4)$$

Підставивши в (10.2.4) числові дані, отримаємо частоту, при якій порушення умови синфазності циклотрону буде найменшим:

$$\Omega = \frac{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 1,5 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{(22,27 + 938,28) \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}} = 1,4 \cdot 10^8 \text{ рад/с}.$$

**Приклад 3.** Для того, щоб у циклотроні не виникало порушення синфазності (див. Розділ 10, Приклад 2), можна повільно змінювати з часом магнітне поле. В такому випадку частота обертання частинки залишатиметься постійною. Такий прискорювач називається синхротроном. Винахідником синхротрону, як і фазотрону (прискорювача, в якому повільно змінюється частота електричного поля), є В.І.Векслер. Знайти зміну радіуса орбіти в синхротроні в

однорідному магнітному полі, що змінюється за законом  $B(t) = B_0 \sin \omega_0 t$ . Частота прискорюючого електричного поля дорівнює  $\Omega$ , а енергія спокою частинки, що прискорюється,  $E_0$ . В яких межах змінюється радіус орбіти електрона, який прискорюється від 2 до 100 МеВ, якщо частота електричного поля  $\Omega = 7 \cdot 10^8 \text{ рад/с}$ , частота зміни магнітного поля  $\omega_0 = 314 \text{ рад/с}$ ?

**Розв'язання:** З урахуванням закону зміни напруженості магнітного поля частота обертання частинки на коловій орбіті запишеться так:

$$\Omega = \frac{qBc}{mc^2} = \frac{qB_0}{mc^2} \sin \omega_0 t. \quad (10.3.1)$$

За умови, що частота (10.3.1) є незмінною, закон зміни повної енергії частинки запишеться наступним чином:

$$mc^2 = E_k + E_0 = \frac{qB_0}{\Omega} \sin \omega_0 t. \quad (10.3.2)$$

Радіус орбіти частинки в однорідному магнітному полі змінюватиметься за законом:

$$r(t) = \frac{pc}{qB_0 \sin \omega_0 t}. \quad (10.3.3)$$

Зв'язок між повною енергією та імпульсом релятивістської частинки має вигляд (10.2.2):

$$m^2 c^4 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \Rightarrow pc = \sqrt{m^2 c^4 - E_0^2}. \quad (10.3.4)$$

Підставивши (10.3.4) в (10.3.3) та врахувавши (10.3.2), знайдемо закон зміни радіуса орбіти:

$$r = \frac{\sqrt{m^2 c^4 - E_0^2}}{qB_0 \sin \omega_0 t} = \frac{1}{qB_0 \sin \omega_0 t} \sqrt{\left( \frac{qB_0}{\Omega} \sin \omega_0 t \right)^2 - E_0^2} \Rightarrow$$

$$r = \frac{c}{\Omega} \sqrt{1 - \left( \frac{E_0 \Omega}{qB_0} \right)^2} \frac{1}{\sin^2 \omega_0 t}. \quad (10.3.5)$$

Розрахуємо тепер межі зміни радіуса орбіти електрона при заданих числових значеннях кінетичної енергії. Для цього слід скористатись формулою, яка пов'язує радіус орбіти з енергією в даний момент часу:

$$r = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{qB_0 \sin \omega_0 t} = \frac{\sqrt{(E_0 + E_k)^2 - E_0^2}}{qB_0 \sin \omega_0 t} = \frac{E_k \sqrt{1 + \frac{2E_0}{E_k}}}{qB_0 \sin \omega_0 t}. \quad (10.3.6)$$

Оскільки в умові задачі не задано індукцію магнітного поля, виразимо її з (10.3.2) через повну енергію електрона та підставимо у (10.3.6). Отримаємо остаточну формулу, за допомогою якої розрахуємо потрібні радіуси орбіти:

$$B_0 = \frac{mc^2 \Omega}{qc \sin \omega_0 t} \Rightarrow r = \frac{c E_k \sqrt{1 + \frac{2E_0}{E_k}}}{mc^2 \Omega} = \frac{c}{\Omega} \cdot \frac{E_k \sqrt{1 + \frac{2E_0}{E_k}}}{(E_k + E_0)}. \quad (10.3.7)$$

Як бачимо, радіус орбіти в такому вигляді не залежить від частоти зміни магнітного поля, проте цей параметр враховується в законі зміни кінетичної енергії частинки (10.3.2), що прискорюється в синхротроні. З формули (10.3.7), підставивши числові дані та врахувавши, що енергія спокою електрона  $E_0 = 0,511 \text{ MeV}$ , знаходимо початковий та кінцевий радіуси орбіти електрона:

$$r_1 = \frac{3 \cdot 10^{10}}{7 \cdot 10^8} \cdot \frac{2 \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,511}{2}}}{2,511} = 41,96 \text{ см};$$

$$r_2 = \frac{3 \cdot 10^{10}}{7 \cdot 10^8} \cdot \frac{100 \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,511}{100}}}{100,511} = 42,86 \text{ см}.$$

**Приклад 4.** Бетатроном називається установка для прискорення заряджених частинок до великих енергій. Між полюсами електромагніту, струм збудження якого можна змінювати з часом згідно заданого закону, розташовують вакуумну камеру, в якій частинка може вільно рухатись по колу. Прискорення здійснюється за рахунок вихрового електричного поля, яке виникає під час зміни магнітного поля. Довести, що у випадку, коли потік магнітної індукції  $\Phi(r)$  через площу, обмежену контуром з радіусом  $r$ , в кожен момент часу вдвічі більший за  $\pi r^2 B_{orb}$ , де  $B_{orb}$  — індукція магнітного поля на орбіті, то радіус орбіти електрона залишатиметься постійним (стаціонарна орбіта).

**Розв'язання:** Прискорення електронів в бетатроні досягається за рахунок вихрового електричного поля, що виникає під час зміни магнітного потоку через контур, обмежений траєкторією частинки. В такому прискорювачі електрон рухається по стаціонарній орбіті, що дозволяє уникнути проблем, пов'язаних з наявністю високочастотного поля та виконанням умов синхронізму.

Знайдемо умови, необхідні для існування такої орбіти. При наявності вихрового електричного поля імпульс електрона буде зростати згідно другого закону Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = eE_{\text{вихр}}, \quad (10.4.1)$$

де  $e$  — заряд електрона,  $E_{\text{вихр}}$  — напруженість вихрового електричного поля на стаціонарній орбіті. Вона визначається згідно закону електромагнітної індукції Фарадея:

$$2\pi r E_{\text{вихр}} = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (10.4.2)$$

магнітний потік через площу, обмежену контуром з радіусом  $r$  стаціонарної орбіти  $\Phi = \pi r^2 \bar{B}$ , де  $\bar{B}$  — середня напруженість магнітного поля на цій площі. Об'єднавши (10.4.1) та (10.4.2), отримаємо наступний вираз:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{e}{2\pi r c} \frac{d\Phi}{dt} = r \frac{e}{2c} \frac{d\bar{B}}{dt}. \quad (10.4.3)$$

З іншого боку, при будь-якій швидкості імпульс частинки визначається наступним співвідношенням:

$$p = \frac{e r B_{\text{орб}}}{c}. \quad (10.4.4)$$

Візьмемо похідну по часу від (10.4.4) та прирівняємо її до (10.4.3):

$$\frac{e r}{2c} \frac{d\bar{B}}{dt} = \frac{e r}{c} \frac{dB_{\text{орб}}}{dt} \Rightarrow B_{\text{орб}} = \bar{B}/2. \quad (10.4.5)$$

Таким чином, для забезпечення руху електрона по стаціонарній орбіті необхідно, щоб середня напруженість магнітного поля на площі, обмеженій орбітою, була вдвічі більшою за напруженість поля на орбіті, причому магнітне поле повинне зростати з часом. Зауважимо, що в бетатроні електрони можуть прискорюватись до ультра релятивістських швидкостей.

**Приклад 5.** Нехай в бетатроні магнітний потік всередині рівноважної орбіти з радіусом  $r = 25$  см зростає від нуля з постійною швидкістю  $d\Phi/dt = 5 \cdot 10^9 \text{ Мккс/с}$ . Визначити: а) напруженість вихрового електричного поля на орбіті та енергію, що її отримує електрон за  $5 \cdot 10^5$  обертів; б) пройдений електроном шлях протягом часу  $\tau = 3$  мс та отриману ним за цей час енергію.

**Розв'язання:** а) напруженість вихрового електричного поля на орбіті знайдемо з формули (10.4.2):

$$E_{\text{вихр}} = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{5 \cdot 10^9 \text{ Мккс/с}}{2\pi \cdot 25 \text{ см} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}} =$$

$$= 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ од. CGSE/см} = 0,33 \text{ В/см}.$$

Енергія, яку отримує електрон за один оберт:

$$\Delta E_k = \frac{dp}{dt} 2\pi r = 2\pi r e E_{\text{вихр}}. \quad (10.5.1)$$

Загальна кінетична енергія після повного циклу прискорення, що складається з  $N$  обертів, дорівнюватиме:

$$E_k = 2\pi r N e E_{\text{вихр}} = 4,15 \cdot 10^{-5} \text{ ерг} = 25,9 \text{ МеВ}. \quad (10.5.2)$$

б) Запишемо рівняння руху електрона, який отримує прискорення за рахунок вихрового електричного поля:

$$\frac{dp}{dt} = e E_{\text{вихр}}. \quad (10.5.3)$$

Оскільки вихрове електричне поле в бетатроні є постійним, можемо проінтегрувати рівняння (10.5.3) й отримати вираз для імпульсу електрона в будь-який момент часу при умові, що в початковий момент його величина дорівнювала нулеві:

$$\int_0^p dp = e E_{\text{вихр}} \int_0^t dt \Rightarrow p = e E_{\text{вихр}} t. \quad (10.5.4)$$

Зв'язок між імпульсом та швидкістю задається релятивістською формулою:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (10.5.5)$$



де  $m_0$  — маса спокою електрона,  $v$  — його лінійна швидкість. Підставимо (10.5.5) у (10.5.4) та виразимо швидкість електрона:

$$\left(\frac{m_0}{eE_{\text{вихр}}}\right)^2 v^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t^2 \Rightarrow v = ct \left\{ \left(\frac{m_0 c}{eE_{\text{вихр}}}\right)^2 + t^2 \right\}^{-1/2}. \quad (10.5.6)$$

Для спрощення виразу (10.5.6) введемо позначення:  $\frac{m_0 c}{eE_{\text{вихр}}} = \alpha$ . Тоді (10.5.6) перепишеться так:

$$v = \frac{ct}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}}. \quad (10.5.7)$$

Щоб знайти шлях, пройдений електроном протягом визначеного часу, врахуємо, що  $v = dl/dt$ . Тоді з (10.5.7) отримаємо таке диференціальне рівняння:

$$dl = \frac{ct}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}} dt. \quad (10.5.8)$$

В початковий момент часу  $l=0$ , тому (10.5.8) можемо проінтегрувати у визначених межах:

$$l = \int_0^{\tau} \frac{ct}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}} dt = c \left( \sqrt{\alpha^2 + \tau^2} - \alpha \right) = c\alpha \left( \sqrt{1 + \tau^2/\alpha^2} - 1 \right). \quad (10.5.9)$$

Підставимо в (10.5.9) вираз для константи  $\alpha$  та отримаємо остаточну формулу для шляху, пройденого електроном протягом загального часу прискорення  $\tau$ :

$$l = \frac{m_0 c^2}{eE_{\text{вихр}}} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{eE_{\text{вихр}}}{m_0 c} \right)^2 \tau^2} - 1 \right). \quad (10.5.10)$$

Числове значення для відстані знайдемо з (10.5.10):

$$l = \frac{0,511 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}}{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 1,1 \cdot 10^{-3}} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 1,1 \cdot 10^{-3}}{0,511 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}} \cdot 3 \cdot 10^{10} \right)^2 \cdot 9 \cdot 10^{-6}} - 1 \right) = 8,85 \cdot 10^7 \text{ см.}$$

Кінетична енергія, яку отримає електрон, пройшовши шлях  $l$ , порівнюватиме:

$$E_k = eE_{\text{вихр}}l = m_e c^2 \left( \sqrt{1 + \left( \frac{eE_{\text{вихр}}}{m_e c} \right)^2 \tau^2} - 1 \right). \quad (10.5.11)$$

Числове значення кінетичної енергії електрона становить  $E_k \approx 29 \text{ MeV}$ .

**Приклад 6.** Під час руху по колу електрон випромінює електромагнітні хвилі і втрачає за один повний оберт енергію

$$\frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{r} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^4, \text{ де } r \text{ — радіус орбіти, } m_0 \text{ — маса спокою електрона,}$$

$E$  — його повна енергія. Ця формула є справедливою, якщо втрати енергії протягом одного оберту значно менші за повну енергію електрона. Розрахувати, яку енергію втрачатиме електрон за один оберт в бетатроні на  $100 \text{ MeV}$  наприкінці процесу прискорення, якщо радіус орбіти становить  $80 \text{ см}$ . Визначити, при якій енергії втрати на випромінювання за один оберт дорівнюватимуть енергії, що електрон отримує від вихрового електричного поля, якщо  $\frac{dB_{\text{орб}}}{dt} = 2 \cdot 10^6 \text{ Гс/с}$  ( $B_{\text{орб}}(t)$  — індукція магнітного поля на орбіті електрона).

**Розв'язання:** Для розрахунку втрат енергії електрона внаслідок випромінювання слід скористатись формулою з умови задачі:

$$\Delta E_{\text{випр}} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{r} \left( \frac{m_0 c^2 + E_k}{m_0 c^2} \right)^4 = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{r} \left( 1 + \frac{E_k}{m_0 c^2} \right)^4. \quad (10.6.1)$$

Згідно умови, наприкінці процесу прискорення кінетична енергія електрона дорівнюватиме  $100 \text{ MeV}$ , тому з (10.6.1) знайдемо:

$$\Delta E_{\text{випр}} = \frac{4\pi}{3} \frac{4,8^2 \cdot 10^{-20} (\text{од. CGSE})^2}{80 \text{ см}} \left( 1 + \frac{100}{0,511} \right)^4 = 1,81 \cdot 10^{-11} \text{ ерг} = 11,3 \text{ eV}.$$

Енергія, яку отримує електрон протягом одного оберту за рахунок прискорення:

$$\Delta E_k = 2\pi r \frac{dp}{dt}. \quad (10.6.2)$$

Імпульс електрона на орбіті виразимо через поле на орбіті з формули (10.1.4), продиференціюємо та підставимо у (10.6.2):

$$\Delta E_k = \frac{2\pi e r^2}{c} \frac{dB_{орб}}{dt}. \quad (10.6.3)$$

Орбіта електрона буде стаціонарною, коли втрати на випромінювання дорівнюватимуть енергії, що її отримує електрон за рахунок прискорення. З цієї умови знайдемо кінетичну енергію електрона:

$$\Delta E_k = \Delta E_{\text{випр}} \Rightarrow \frac{2\pi e r^2}{c} \frac{dB_{орб}}{dt} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{r} \left(1 + \frac{E_k}{m_0 c^2}\right)^4. \quad (10.6.4)$$

З рівняння (10.6.4) легко виразити кінетичну енергію:

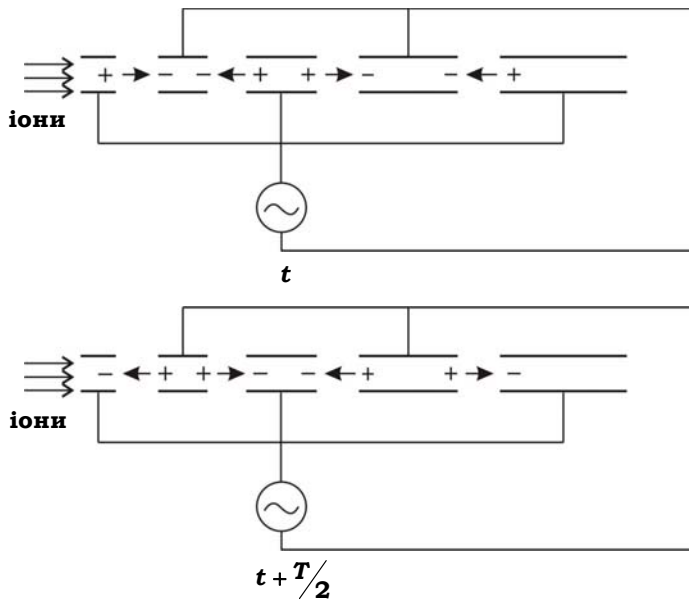
$$E_k = m_0 c^2 \left\{ \left( \frac{3r^3}{2ec} \frac{dB_{орб}}{dt} \right)^{1/4} - 1 \right\}. \quad (10.6.5)$$

Підставивши в (10.6.5) числові значення, отримаємо:

$$E_k = 0,511 \cdot \left\{ \left( \frac{3 \cdot 80^3}{2 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 4,8 \cdot 10^{-10}} \cdot 2 \cdot 10^6 \right)^{1/4} - 1 \right\} = 291,5 \text{ MeV}.$$

**Приклад 7.** Лінійний прискорювач частинок побудовано наступним чином: пучок іонів проходить всередині трубок різної довжини, розташованих на одній лінії. Прискорення відбувається в проміжку між трубками (Рис.10.1). Трубки приєднано до протилежних клем генератора почергово, так що в кожен заданий момент часу різниця потенціалів в парних проміжках дорівнює  $V_0 \cos \omega t$ , а в непарних —  $-V_0 \cos \omega t$ . Припускаючи, що іони впускаються до прискорювача з початковою енергією  $W_{\text{поч}}$  та що проміжки між трубками складають 25% від довжини трубок, знайти необхідну довжину трубок в лінійному прискорювачі. Розглянути прискорювач для протонів на 40 MeV:  $W_{\text{поч}} = 4 \text{ MeV}$ ,  $\Omega = 12,56 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$ . Протон за один прохід через прискорюючий проміжок отримує енергію 1 MeV.

**Розв'язання:** На Рис. 10.1 відображено принцип дії найпростішого лінійного резонансного прискорювача — прискорювача Відерое. Для прискорення заряджених частинок застосовується високочастотне поле, частота якого має бути узгоджена зі швидкістю руху частинок.



**Рис.10.1. Принцип дії лінійного прискорювача Відерое.**

На верхній частині рисунка показано знаки зарядів на дрейфових трубках та напрямок електричного поля в зазорах між ними в деякий момент часу  $t$ . На нижній частині ті ж величини вказані через проміжок часу, що дорівнює половині періоду змінної напруги генератора  $t + \frac{T}{2}$ .

Для того, щоб частинка потрапляла в прискорююче поле при одному й тому ж значенні різниці потенціалів, необхідно, щоб відстань між центрами сусідніх зазорів вона проходила протягом часу  $\tau = \frac{T}{2}$ . Оскільки в кожному проміжку енергія частинки збільшується, довжина прольотних трубок має збільшуватись пропорційно до швидкості частинки.

Відстань між центрами зазорів дорівнює

$$l_n = v_n \frac{T}{2}. \quad (10.7.1)$$

Швидкість частинки виразимо з формули:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow v^2 = c^2 \left\{ 1 - \left( \frac{m_0 c^2}{E} \right)^2 \right\}, \quad (10.7.2)$$

в якій  $m_0 c^2$  — енергія спокою частинки,  $E$  — її повна енергія.

Враховуючи, що початкова кінетична енергія частинки дорівнює  $W_{\text{поч}}$ , в  $n$ -му зазорі її величина становитиме  $E_{\text{кп}} = W_{\text{поч}} + n\Delta E$ , де  $\Delta E$  — кінетична енергія, що її отримує частинка під час проходження через прискорюючий проміжок. Отже, швидкість частинки після  $n$ -го зазору дорівнюватиме:

$$v_n = c \left\{ 1 - \left( \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + n\Delta E} \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (10.7.3)$$

З урахуванням тієї умови, що проміжки між трубками складають 25% від довжини трубок, знаходимо довжину  $n$ -ї прольотної трубки:

$$L_n = \frac{3}{4} \frac{cT}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + n\Delta E} \right)^2} = \frac{6}{8} \frac{\pi c}{\Omega} \sqrt{1 - \left( 1 + \frac{W_{\text{поч}} + n\Delta E}{m_0 c^2} \right)^{-2}}. \quad (10.7.4)$$

Слід відмітити, що ми розраховували задачу в припущенні, що фази прискорюючих напруг між сусідніми трубками змінюються синхронно. Це припущення є несправедливим у випадку, коли швидкість частинки наближується до швидкості світла, коли умови синхронізму виконуватись вже не будуть. Тому прискорювачі Відерое застосовують тільки для важких заряджених частинок (наприклад, протонів, як у нашому випадку), причому енергії становлять кілька десятків  $\text{MeV}$ . В такому випадку формулу (10.7.4) можна спростити до нерелятивістської форми. Враховуючи, що  $\frac{W_{\text{поч}} + n\Delta E}{m_0 c^2} \ll 1$ , у формулі (10.7.4) виконаємо біноміальний розклад за

малим параметром й отримаємо наближений результат:

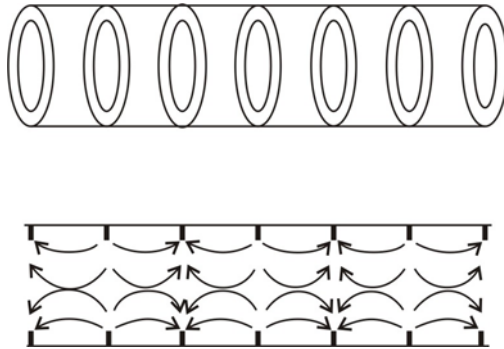
$$L_n \approx \frac{6}{8} \frac{\pi c}{\Omega} \left\{ 2 \frac{W_{\text{поч}} + n\Delta E}{m_0 c^2} \right\}^{1/2} = \frac{6}{8} \frac{\pi c}{\Omega} \sqrt{\frac{2W_{\text{поч}}}{m_0 c^2}} \sqrt{1 + \frac{n\Delta E}{W_{\text{поч}}}}. \quad (10.7.5)$$

Підставляючи в (10.7.5) дані для протона, знайдемо довжину  $n$ -ї дрейфової трубки:

$$L_n = \frac{6\pi}{8} \frac{3 \cdot 10^{10}}{12,56 \cdot 10^8} \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{938,3}} \sqrt{1 + \frac{n}{4}} = 5,2 \sqrt{1 + 0,25n} \text{ (см)} \quad (10.7.6)$$

Загальна кількість зазорів, які має пройти протон, щоб мати кінетичну енергію після прискорювача 40 MeV,  $n=36$ . Довжина першої трубки  $L_1=5,8$  см, а останньої —  $L_{36}=16,4$  см.

**Приклад 8.** Лінійний прискорювач з біжучою хвилею являє собою циліндричний діафрагмований хвилевід, вздовж осі якого поширюється електромагнітна хвиля з осьовою складовою  $E_z$ . За допомогою кільцевих діафрагм з отворами досягається збільшення фазової швидкості хвилі вздовж хвилеводу, причому частинка, яка прискорюється, знаходиться весь час приблизно в одній і тій самій фазі хвилі (Рис. 10.2). Для прискорення електронів іноді фазову швидкість поширення хвилі обирають постійною і рівною швидкості світла.



**Рис.10.2. Схема будови лінійного прискорювача на біжучій хвилі.**

Припустимо, що електрони потрапляють до прискорювача з енергією  $W_{\text{поч}} = 4 \text{ MeV}$  і починають рухатись на горбі хвилі з амплітудою  $E_0$  напруженості  $20 \text{ кВ/см}$ . Довжина хвилі дорівнює 1 м. Наскільки електрони запізняються по відношенню до хвилі за умови, що прискорення відбувається до енергії  $W_k = 100 \text{ MeV}$ ? Для спрощення розрахунку припустити, що з часом напруженість поля у хвилі змінюється за «прямокутним» законом, тобто набуває лише двох значень:  $E = \pm E_0$ .

**Розв'язання:** Позначимо відстань від вхідного отвору хвилеводу  $z$ . Кінетична енергія, яку отримає електрон в електричному полі з напруженістю  $E_0$ , дорівнює:

$$E_k = eE_0 z, \quad (10.8.1)$$

де  $e$  — заряд електрона. Повна енергія електрона на відстані  $z$ :

$$E = m_e c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0 z, \quad (10.8.2)$$

тут  $W_{\text{поч}}$  — початкова кінетична енергія електрона,  $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$  — його енергія спокою. З іншого боку, зв'язок повної енергії зі швидкістю  $v$  електрона задається формулою (10.7.2). З формули (10.7.2) з урахуванням (10.8.2) можемо виразити швидкість:

$$v = c \frac{\sqrt{(m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0 z)^2 - m_0^2 c^4}}{m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0 z}. \quad (10.8.4)$$

Проаналізуємо формулу (10.8.4), децю змінивши форму її запису:

$$\frac{v}{c} = \left\{ 1 - \left( \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0 z} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (10.8.5)$$

Якщо кінетична енергія електрона дорівнює  $4 \text{ MeV}$ , відношення швидкості електрона до швидкості світла  $v/c = 0,9936$ , а вже при енергії  $50 \text{ MeV}$   $v/c = 0,9999$ , тобто практично дорівнює швидкості  $c$ . Таким чином, електрони, які рухаються в такому прискорювачі, є ультрарелятивістськими. Проте незначна відміна їх швидкості на початковому етапі прискорення від швидкості світла призведе до відставання електрона від хвилі, що рухається в прискорювачі зі швидкістю  $c$ .

Шлях, пройдений електроном протягом всього процесу прискорення, знайдемо так:

$$W_k = W_{\text{поч}} + eE_0 L \Rightarrow L = \frac{W_k - W_{\text{поч}}}{eE_0}, \quad (10.8.6)$$

де  $W_k$  — енергія електрона наприкінці прискорення. В нашому випадку  $L = \frac{96 \cdot 10^6 \text{ eV}}{2 \cdot 10^4 \text{ В/см} \cdot e} = 48 \text{ м}$ . Для того, щоб знайти, наскільки електрон запізниться по відношенню до хвилі, спочатку необхідно

визначити, який час витрачається ним на проходження шляху  $L$ . Якщо рух відбувається вздовж осі хвилеводу зі швидкістю  $v$ , можемо записати наступне:

$$v = \frac{dz}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dz}{v}. \quad (10.8.7)$$

Підставимо у (10.8.7) вираз для швидкості руху електрона (10.8.4) та проінтегруємо:

$$\int_0^{\tau} dt = \tau = \frac{1}{c} \int_0^L \frac{m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0 z}{\sqrt{(m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0 z)^2 - m_0^2 c^4}} dz. \quad (10.8.8)$$

Введемо заміну  $x = m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0 z$  й отримаємо:

$$c\tau = \frac{1}{eE_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - m_0^2 c^4}}, \quad (10.8.9)$$

де  $x_1 = m_0 c^2 + W_{\text{поч}}$ ,  $x_2 = m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0 L$ ,  $c\tau$  — шлях, що пройшла біжуча хвиля за той самий час, що прискорювався електрон. Інтеграл (10.8.9) дорівнює

$$c\tau = \frac{1}{eE_0} \left( \sqrt{x_2^2 - m_0^2 c^4} - \sqrt{x_1^2 - m_0^2 c^4} \right). \quad (10.8.10)$$

Підставимо у (10.8.10) межі інтегрування:

$$\begin{aligned} c\tau &= \frac{1}{eE_0} \left( \sqrt{(W_{\text{поч}} + eE_0 L)^2 + 2m_0 c^2 (W_{\text{поч}} + eE_0 L)} - \sqrt{W_{\text{поч}}^2 + 2m_0 c^2 W_{\text{поч}}} \right) = \\ &= \frac{1}{eE_0} \left( \sqrt{W_{\text{к}}^2 + 2m_0 c^2 W_{\text{к}}} - \sqrt{W_{\text{поч}}^2 + 2m_0 c^2 W_{\text{поч}}} \right). \end{aligned} \quad (10.8.11)$$

Таким чином, різниця пройдених шляхів хвилі та електрона дорівнює:

$$\begin{aligned} \Delta z &= c\tau - L = \\ &= \frac{1}{eE_0} \left( \sqrt{W_{\text{к}}^2 + 2m_0 c^2 W_{\text{к}}} - \sqrt{W_{\text{поч}}^2 + 2m_0 c^2 W_{\text{поч}}} - (W_{\text{к}} - W_{\text{поч}}) \right). \end{aligned} \quad (10.8.12)$$

Формулу (10.8.12) можна також записати через швидкості руху електрона на початку  $v_1$  та наприкінці  $v_2$  процесу прискорення:

$$\begin{aligned} \Delta z &= c\tau - L = \\ &= \frac{1}{eE_0} \left( (W_{\text{к}} + m_0 c^2) \frac{v_2}{c} - (W_{\text{поч}} + m_0 c^2) \frac{v_1}{c} - (W_{\text{к}} - W_{\text{поч}}) \right). \end{aligned} \quad (10.8.13)$$



Підставляючи у (10.8.12) параметри задачі, знайдемо числове значення для  $\Delta z$  :

$$\Delta z = c\tau - L = \frac{10^6 \text{ eV}}{2 \cdot e \cdot 10^4 \text{ В/см}} \left( \sqrt{10^4 + 2 \cdot 0,511 \cdot 100} - \sqrt{16 + 2 \cdot 0,511 \cdot 4 \cdot 96} \right) \approx 1,39 \text{ см.}$$

Як бачимо, оскільки довжина біжучої хвилі в хвилеводі 1 м, таке мале «відставання» електрона від положення горба хвилі практично не впливає на процес його прискорення, тобто можна вважати, що електрон скрізь рухається зі швидкістю світла. Якщо виникне необхідність збільшити енергію електрона, слід просто збільшити довжину хвилеводу.

### 10.3. Запитання та відповіді

49. В чому полягають особливості прискорення електронів та позитронів порівняно з прискоренням важких заряджених частинок?

Вже при енергіях в кілька MeV швидкість електрона наближається до швидкості світла і може вважатись постійною, що спрощує створення прискорювачів. Проте слід враховувати, що в магнітному полі електрони та позитрони втрачають енергію за рахунок синхротронного випромінювання. Тому у випадку циклічних прискорювачів є дві можливості зменшити ці втрати.

По-перше, можна робити прискорювачі великого розміру, тому що при великих радіусах кривини траєкторії втрати на випромінювання зменшуються. По-друге, ці втрати можна компенсувати, використовуючи потужні прискорюючі станції, що значно підвищує вартість таких прискорювачів. Частіше ж для прискорення електронів та позитронів використовують лінійні прискорювачі.

Важкі заряджені частинки, такі як протони, іони тощо, прискорюються в циклічних прискорювачах, оскільки втрати на синхротронне випромінювання при досягнутих на даний момент енергіях практично відсутні. Проте це має свої вади, оскільки за відсутності випромінювання поперечні коливання частинок під час прискорення можуть призвести до порушення стійкості руху. Щоб уникнути цього, використовують спеціальні засоби, наприклад, певна форма силових ліній магнітного поля.

50. Як можна використати синхротронне випромінювання?

а) Синхротронне випромінювання широко використовується як джерело рентгенівського випромінювання з надзвичайно великою густиною потужності. Його використовують для досліджень у фізиці твердого тіла, вивченні біологічних об'єктів, для рентгенолітографії з розмірами елементів у мікросхемах до 1,5-2 мкм, а також для збудження мессбауерівських рівнів в ядрах.

Миттєва потужність синхротронного випромінювання в розрахунку на один електрон:  $W = \frac{2}{3} \frac{e^2 c \gamma^4}{R^2}$ , де  $e$  — заряд частинки,  $\gamma$  — її Лоренц-фактор – відношення повної енергії частинки до її енергії спокою,  $R$  — радіус кривини траєкторії.

Таке випромінювання має високий ступінь направленості по відношенню до вектора швидкості електрона, тобто

$\frac{1}{\gamma^2} \sim \left( \frac{m_0 c^2}{E} \right)^2 \ll 1$ , де  $E$  - повна енергія електрона. Випромінювання є

найбільш інтенсивним на довжині хвилі  $\lambda = \frac{2\pi R}{K}$ , де  $K = \frac{3}{2} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^3$ ,  $R$  — радіус траєкторії електрона.

б) В циклічних прискорювачах синхротронне випромінювання може відігравати й позитивну роль: воно призводить до зменшення розмірів пучка, який прискорюється. Це дає можливість створення накопичувачів.

При певній енергії електрона чи позитрона втрати на синхротронне випромінювання зрівнюються з енергією, що її отримує частинка в прискорювачі. Таким чином, в накопичувальних та зустрічних кільцях пучки заряджених частинок можуть циркулювати протягом довгого часу без зміни своєї енергії. Такі кільця застосовують для здійснення ядерних реакцій між частинками, що рухаються назустріч одна одній, для накопичення іонів та частинок, які безпосередньо в природі не зустрічаються (антипротони, позитрони).

Під час взаємодії частинок, які рухаються назустріч, реалізується вся енергія, яку вони отримали під час прискорення, тоді як під час взаємодії прискорених частинок з нерухомими ядрами мішені більша частина енергії пов'язана з рухом центру мас частинок і в реакції участі не приймає.

51. Для прискорення електронів до максимальних енергій, як відомо, застосовується прискорювач з біжучою хвилею. Чому початкова енергія електронів, які потрапляють до хвилеводу, повинна перевищувати енергію спокою в кілька разів?

*Принцип роботи таких прискорювачів полягає в тому, що частинка рухається «на горбі» біжучої хвилі. При невеликих енергіях швидкість частинки суттєво відрізняється від швидкості хвилі, поступово зростаючи до швидкості світла в ультра релятивістському випадку. Таким чином, швидкість хвилі теж повинна поступово збільшуватись. Реально це викликає необхідність сповільнення хвилі в хвилеводі, яка у вакуумі рухається зі швидкістю світла. Для цього використовуються «навантажені» хвилеводи, заповнені, наприклад, діафрагмами з отворами в центрі (див. Рис. 10.2)*

*Проте такі хвилеводи, в яких фазова швидкість хвилі поступово зростає, можна використовувати лише для прискорення достатньо швидких частинок, оскільки неможливо в такий спосіб отримати велике значення сповільнення швидкості хвилі порівняно з вакуумом.*

52. В прискорювачі з біжучою хвилею, розглянутому в попередньому прикладі, діафрагми поділяють хвилевід на окремі комірки. Останні можна розглядати як лінійні порожнисті резонатори, в яких біжуча хвиля збуджує електромагнітне поле. Через втрати енергії на стінках амплітуда хвилі повинна спадати вздовж хвилеводу. Як оминати цю проблему?

*Для підтримування амплітуди на постійному рівні використовують спеціальні генератори, розташовані вздовж хвилеводу. На нинішній момент один з найбільших існуючих лінійних прискорювачів з біжучою хвилею побудовано в Стенфорді. Він прискорює електрони до енергії 22,3 GeV і має довжину 3,05 км. Цей прискорювач має більше ніж 80 тисяч додаткових генераторів.*

53. Дві однакові частинки рухаються в лабораторній системі відліку назустріч одна одній з однаковою швидкістю  $v$ . Знайти відносну швидкість  $V$  кожної частинки відносно іншої. Яку енергію в  $\Lambda$ -системі повинна мати одна з частинок, щоб отримати ту саму відносну швидкість у випадку, якщо друга частинка (мішень) нерухома?

*Згідно теореми про додавання швидкостей в релятивістському випадку, відносна швидкість частинок в системі центра мас*

складатиме:  $V = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}$ . Повна енергія, що відповідає такій

швидкості в  $\Lambda$ -системі, дорівнює:  $E_{\text{лаб}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ , де  $E_0$  – енергія

спокою частинки. В системі ж центра мас кінетична енергія частинки становить:  $E_{\text{цм}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ . Скориставшись виразом для

швидкості  $V$ , виразимо кінетичну енергію в  $\Lambda$ -системі через швидкість частинок  $v$ :  $E_{\text{лаб}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{E_0}{\left(1 - v^2/c^2\right)} \left(1 + v^2/c^2\right)$ .

Остаточно, з останнього виразу знайдемо:  $E_{\text{лаб}} = 2 \frac{E_{\text{цм}}^2}{E_0} - E_0$ .

Відповідна кінетична енергія в  $\Lambda$ -системі дорівнює:

$E_{\text{лаб}}^k = 2 \left( \frac{E_{\text{цм}}^2}{E_0} - E_0 \right)$ . В ультрарелятивістському випадку в останній

формулі можна знехтувати енергією спокою й отримати приблизний вираз:  $E_{\text{лаб}}^k \approx 2 \left( E_{\text{цм}}^k \right)^2 / E_0$ .

#### 54. Що таке коллайдер?

Коллайдери — це електрон-позитронні або протон-антипротонні кільцеві прискорювачі на зустрічних пучках. В коллайдерах ультрарелятивістські частинки можуть рухатись в одному пучку назустріч одна одній або в двох кільцях, що перетинаються. Наприклад, для протона прискорювач на зустрічних пучках при енергії 5 ГеВ дає такий самий ефект, що й прискорювач з нерухомою мішенню на енергію 53 ГеВ. Для електронів цей ефект ще суттєвіший: енергія 0,511 МеВ рівнозначна енергії 100000 ГеВ в лабораторній системі координат. Таку енергію неможливо досягти в жодному реальному прискорювачі з нерухомою мішенню.

Під час акту взаємодії частинок виділяється величезна енергія, що перевищує сотні МеВ, а іноді й десятки ГеВ. При таких великих енергіях втрачає значення зв'язок нуклонів в ядрах, так що взаємодія

відбувається з одиночними нуклонами або навіть з кварками, з яких складається нуклон.

Основним недоліком коллайдерів є мала кількість ядерних реакцій, що відбуваються в одиницю часу, порівняно з реакціями на нерухомих мішенях, внаслідок розрідженості пучка. Ефективність коллайдерів характеризують їх світністю, тобто числом, на яке треба помножити ефективний переріз ядерної реакції, щоб отримати кількість таких реакцій за одиницю часу. Світність пропорційна добутку інтенсивностей пучків, що зіштовхуються й обернено пропорційна площі перерізу пучків.

Таким чином, пучки, які зіштовхуються, повинні містити багато частинок й займати малий об'єм у фазовому просторі. Для збільшення інтенсивності пучків відбувається їх попереднє накопичення в накопичувальних кільцях до досягнення значення струму не менше, ніж десятки ампер. Для зменшення фазового об'єму електронних та позитронних пучків застосовується електронне або стохастичне охолодження.

55. Чи можна застосовувати циклотрон для прискорення релятивістських частинок?

Загалом, внаслідок релятивістського ефекту зростання маси період обертання зарядженої частинки в однорідному магнітному полі не є постійним, тому циклотрони не можна застосовувати для прискорення релятивістських частинок (див. Приклад 2).

Проте циклотрон можна модернізувати для роботи з релятивістськими частинками. Для цього використовується постійне магнітне поле  $B(r)$ , яке певним чином залежить від радіуса  $r$ . Подивимось, за яким законом слід змінювати магнітне поле, щоб період обертання частинки залишався сталим. Частота обертання частинки повинна співпадати з частотою прискорюючого поля  $\Omega$ :

$$\Omega = \frac{eVc}{mc^2} = \frac{eVc}{m_0c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \text{ де } v \text{ — лінійна швидкість частинки. Для}$$

того, щоб ця частота залишалась незмінною, необхідно, щоб магнітне поле змінювалось з радіусом за таким законом:

$$B(r) = \frac{B_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{B_0}{\sqrt{1 - (\Omega r/c)^2}} \text{ при постійному значенні } \Omega.$$

Прискорювач, в якому реалізовано цей принцип, називається ізохронним циклотроном. Оскільки магнітне поле зростає з радіусом,

виникає вертикальна нестійкість, її компенсують азимутальною неоднорідністю магнітного поля складної форми.

Більшість ізохронних циклотронів будують для прискорення протонів до енергій 50-100 MeV і застосовують для дослідження процесів в ядерних реакціях з протонами, які мають енергією 50-1000 MeV.

## 11. ГАЛЬМУВАННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК ТА ГАММА-КВАНТІВ У СЕРЕДОВИЩІ. ВЗАЄМОДІЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ З РЕЧОВИНОЮ.

### 11.1. Теоретичні відомості

За характером механізму проходження через речовину всі частинки поділяються на: 1) легкі заряджені частинки (електрони та позитрони); 2) важкі заряджені частинки (протон і більш важкі частинки); 3) частинки з нульовим зарядом (як правило, нейтрони) та 4) гамма-кванти.

По типу втрат енергії частинкою розрізняють 1) іонізаційні втрати (на збудження та іонізацію атомів середовища); 2) радіаційні втрати (втрати на випромінювання).

Основний практичний інтерес представляють втрати енергії частинкою на одиницю шляху  $\partial E / \partial x$ , а також пробіг  $R$  частинки в речовині.

Загальний вигляд формули Бете-Блоха для іонізаційних втрат кінетичної енергії важкої зарядженої частинки з зарядовим числом  $z$  на одиниці шляху в речовині, що складається з атомів з зарядовим числом  $Z$ , виглядає наступним чином [13]:

$$-\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{іон}} = \frac{2\pi n z^2 e^4 Z}{m_e c^2 \beta^2} \left[ \ln \frac{2m_e E_{\kappa \text{ max}}}{\langle I \rangle^2 (1 - \beta^2)} - 2\beta^2 - \delta - U \right].$$

Тут  $\beta = v / c$  — швидкість частинки в одиницях швидкості світла;  $n$  — концентрація електронів в речовині;  $m_e$  — маса спокою електрона;  $\langle I \rangle$  — середній потенціал іонізації атома речовини;  $z$  — заряд частинки, одиниці  $e$ ;  $v$  — її швидкість;  $E_{\kappa \text{ max}}$  — максимальна енергія, яка передається частинкою електронам в атомах речовини;  $U$  — поправочний коефіцієнт, який враховує енергію зв'язку електронів на  $K$ - та  $L$ - оболонках атомів (за дуже малих швидкостей частинки);  $\delta$  — поправка, яка пов'язана з так званим ефектом густини (поляризацією середовища електромагнітним полем частинки при  $\beta \rightarrow 1$ ). В діапазоні енергій  $(1 \div 100) \text{ MeV}$  поправками  $U$  та  $\delta$  можна знехтувати.

Іонізаційні втрати енергії важкої зарядженої частинки в речовині (нерелятивістський випадок):

$$-\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{іон}} = \frac{4\pi e^4}{m_e} \frac{nz^2}{v^2} \ln \frac{2m_e v^2}{\langle I \rangle}.$$

Емпіричні формули для *середнього пробігу в повітрі* за нормальних умов  $\alpha$ -частинки та протона з кінетичною енергією  $E_{\kappa}$ , MeB:

$$R_{\alpha} = 0,31 \cdot E_{\kappa}^{3/2} \text{ (см)} \quad (4 \text{ MeB} < E_{\kappa} < 7 \text{ MeB});$$

$$R_p = R_{\alpha} (4E_{\kappa}) - 0,2 \text{ (см)} \quad (E_{\kappa} > 0,5 \text{ MeB}),$$

де  $R_{\alpha} (4E_{\kappa})$  — середній пробіг в повітрі  $\alpha$ -частинки з кінетичною енергією  $4E_{\kappa}$ .

*Середній пробіг  $\alpha$ -частинки в речовині*, що складається з атомів з масовим числом  $A$ :

$$R_{\alpha}' = 0,56 \cdot A^{1/3} R_{\alpha} \text{ (мг/см}^2\text{)},$$

де  $R_{\alpha}$  — пробіг  $\alpha$ -частинки з тією ж енергією в повітрі.

Пробіг важких заряджених частинок в речовині  $R \equiv \bar{x}$  характеризується рядом особливостей: всі частинки одного типу з однаковою енергією гальмуються на приблизно однаковій відстані і характеризуються малою дисперсією ( $\sqrt{\langle (x - D)^2 \rangle} \ll D$ , кутова розбіжність початкового паралельного пучка за рахунок багаторазового розсіювання мала ( $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle} \ll \pi$ , найбільші питомі іонізаційні втрати швидкої частинки мають місце перед її остаточною зупинкою. Ці особливості пов'язані з тим, що важкі частинки втрачають свою енергію в основному за рахунок взаємодії з атомними електронами, маса яких на декілька порядків менша за масу важких частинок. Внаслідок цього енергія втрачається дуже малими порціями, тобто монотонно і без істотних флуктуацій. Максимальне питома гальмування швидкої частинки відповідає зменшенню її швидкості до швидкості валентних електронів атомів.

Для важких частинок радіаційні втрати (втрати на випромінювання) в усіх випадках дуже малі в порівнянні з іонізаційними втратами і можуть не враховуватися. Це правило впливає з відомого в електродинаміці закону залежності потужності випромінювання від прискорення заряду



$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2q^2}{3c^3} \left| \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|^2 = -\frac{2q^2}{3c^3} \frac{|\vec{F}|^2}{M_q^2},$$

де  $\vec{F}$  — сила, з якою атом середовища діє на рухому частинку з зарядом  $q$  і масою  $M_q$  і прискорює її.

Радіаційні втрати енергії електрона (при  $E_\kappa \gg mc^2$ ),  $MeB/cm$  :

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{рад} = 2,32 \cdot 10^{-27} \cdot n E_\kappa Z \cdot \ln \frac{183}{Z^{1/3}} \equiv \frac{E_\kappa}{L_{рад}},$$

де  $E_\kappa (MeB)$  — кінетична енергія електрона;  $n (cm^{-3})$  — концентрація електронів в речовині;  $Z$  — порядковий номер атомів речовини,  $L_{рад}$  — радіаційна довжина.

Співвідношення між радіаційними та іонізаційними втратами енергії електрона описуються наближеною формулою:

$$\frac{(\partial E_\kappa / \partial x)_{рад}}{(\partial E_\kappa / \partial x)_{іон}} \approx \frac{E_\kappa Z}{800},$$

де  $E_\kappa (MeB)$  — кінетична енергія електрона;  $Z$  — порядковий номер атомів речовини.

Якщо енергія електрона істотно перевищує порогове значення  $E_\kappa \approx (800/Z)$ , то втрати енергії електрона в основному радіаційні, а його кінетична енергія в речовині зменшується з відстанню  $x$  за законом:

$$E_\kappa = E_{\kappa 0} \cdot \exp(-x / L_{рад})$$

Середній пробіг,  $g/cm^2$ , електрона з кінетичною енергією  $E_\kappa (MeB)$  в алюмінію:

$$R = 0,407 \cdot E_\kappa^{1,38} (0,15 MeB < E_\kappa < 0,8 MeB);$$

$$R = 0,542 E_\kappa - 0,133 (0,8 MeB < E_\kappa < 3 MeB).$$

Ці формули з достатньою для практичного використання точністю описують пробіг і в будь-яких речовинах, якщо втрати енергії електрона в основному іонізаційні.

Слід відмітити, що гальмування легких заряджених частинок внаслідок іонізаційних втрат відбувається за рахунок взаємодії з атомними електронами, які мають ту ж масу. Тому процес

гальмування є гранично випадковим (в окремому акті розсіювання може бути передана як мала, так і дуже велика енергія і це залежить від прицільної відстані) і характеризується дуже великою кутовою та енергетичною дисперсіями і великими флуктуаціями: всі частинки одного типу з однаковою енергією гальмуються в межах дуже широкого інтервалу довжин пробігу вздовж траєкторії відносно середнього значення  $\bar{x} \approx \sqrt{\langle (x - \bar{x})^2 \rangle}$ , кутова розбіжність паралельного пучка після гальмування також дуже велика ( $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle} \approx \pi$ ).

Якщо провести відповідне усереднення по всім кутам і всім можливим траєкторіям руху легких частинок, то отримаємо закон поглинання  $\beta^-$ -частинок під час проходження крізь шар середовища товщиною  $d$ :

$$J = J_0 \exp(-\mu d),$$

де  $J$  — потік  $\beta^-$ -частинок;  $\mu$  — лінійний коефіцієнт поглинання.

Масовий коефіцієнт поглинання,  $\text{см}^2/\rho$ :

$$\mu/\rho = 22 \cdot (E_{\kappa\beta}^{\max})^{-4/3}, \quad 0,5 \text{ MeV} < E_{\kappa\beta}^{\max} < 7 \text{ MeV},$$

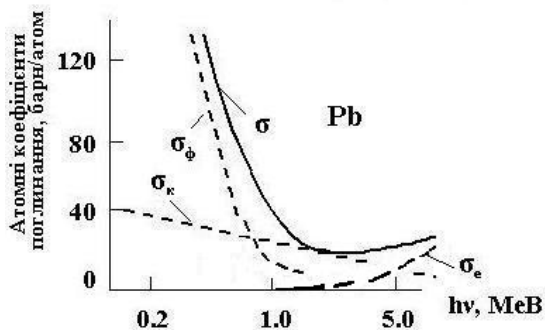
де  $E_{\kappa\beta}^{\max}$  (MeV) — гранична енергія спектру  $\beta^-$ -частинок.

Закон послаблення інтенсивності вузького пучка моноенергетичного  $\gamma$ -випромінювання:

$$J = J_0 \cdot \exp(-\mu x), \quad \mu = \tau + \sigma,$$

де  $\mu$ ,  $\tau$ ,  $\sigma$  — лінійні коефіцієнти послаблення, поглинання та розсіювання.

Існує три основних механізми послаблення  $\gamma$ -випромінювання: при відносно малій енергії квантів — *фотоефект*, при більшій — *комptonівське розсіювання*, а при енергії, яка істотно перевищує порогове значення  $\hbar\omega = 2m_e c^2$ , це процес *народження електрон-позитронних пар*. Кожен із них характеризується своїм коефіцієнтом послаблення та областю переважної дії (див. рис. 11.1). **Рис 11.1.(перемалювати за вимогами редакції)**



**Рис. 11.1. Залежність атомних коефіцієнтів поглинання гамма-квантів від енергії:  $\sigma_\phi$ ,  $\sigma_\kappa$ ,  $\sigma_e$  — атомні коефіцієнти поглинання, які зумовлені відповідно фотоефектом, комптон-ефектом та народженням електронно-позитронних пар;  $\sigma$  — повний атомний коефіцієнт поглинання.**

Для фотоефекту  $\mu \sim Z^5 / \omega^{7/2}$  при  $\hbar\omega > E_i$  і  $\mu \sim Z^5 / \omega$  при  $\hbar\omega \gg E_i$ , де  $Z$  — заряд,  $E_i$  — енергія іонізації атомів середовища.

Для комптонівського розсіювання в широкому інтервалі енергій квантів  $\mu \sim Z / \omega$ .

Процес народження пар є пороговим і починається з енергії фотону  $\hbar\omega = 2m_e c^2$ . Для цього процесу  $\mu \sim Z^2 \ln(\hbar\omega)$  в інтервалі  $5m_e c^2 < \hbar\omega < 50m_e c^2$ .

Для кожного середовища існує область енергій квантів, при якій ослаблення потоку буде мінімальним. Ця область лежить в перетині інтервалів переважної дії комптонівського розсіювання та процесу народження пар. Наприклад, для свинцю мінімальне ослаблення відповідає енергії  $\hbar\omega \approx 7 \text{ MeV}$ .

Основним механізмом гальмування нейтронів в середовищі є непружне (при великій енергії нейтронів) та пружне (при малій) розсіювання нейтронів на атомних ядрах. Під час непружного розсіювання крім прискорення цих ядер відбувається їх збудження.

В процесі розсіювання на ядрах мішені нейтрон поступово втрачає кінетичну енергію та імпульс, які передаються так званим ядрам віддачі, що починають швидко рухатись, інтенсивно іонізуючи середовище. В середньому на гальмування нейтрона до теплової енергії середовища (до стану термалізації), яке складається з легких атомів, необхідно близько 10 актів розсіювання. В середовищі з важких атомів термалізація вимагає значно більшої кількості розсіювань.

## 11.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.** Обчислити іонізаційні втрати енергії дейтрона з кінетичною енергією 4 MeV на одиниці шляху в азоті за нормальних умов.

**Розв'язання:** Важка заряджена частинка взаємодіє з електричними полями електронів та атомних ядер. Вона або іонізує, або збуджує атоми. Також відбувається й суто ядерна взаємодія частинки з атомним ядром. За рахунок цих процесів енергія частинки зменшується та її рух уповільнюється.

Іонізаційні втрати енергії важкої зарядженої частинки в речовині на одиницю шляху в нерелятивістському наближенні описуються окремим випадком формули Бете-Блоха [1]:

$$-\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{іон}} = \frac{4\pi e^4}{m_e} \cdot \frac{nz^2}{v^2} \ln \frac{m_e v^2}{\langle I \rangle (1 - \beta^2)}, \quad (11.1.1)$$

де  $z$  — заряд частинки в одиницях заряду електрона,  $v$  — її початкова швидкість,  $\beta = v/c$  — швидкість частинки в одиницях швидкості світла,  $n$  — концентрація електронів в речовині,  $\langle I \rangle \approx 13,5Z, \text{eV}$  — середня енергія іонізації атома речовини, що складається з атомів з порядковим номером  $Z$ .

Якщо в формулу (11.1.1) в нерелятивістському випадку ввести кінетичну енергію частинки  $E_{\kappa} = \frac{M}{2} v^2$ , то отримаємо наступний вираз:

$$-\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{іон}} = \frac{2\pi e^4}{m_e} \cdot \frac{nz^2 M}{E_{\kappa}} \ln \frac{2m_e E_{\kappa}}{M \langle I \rangle}. \quad (11.1.2)$$

Оскільки дейтрони заряджені позитивно, то в результаті свого уповільнення вони починають захоплювати електрони, відбираючи їх від атомів навколишнього середовища. За умовою задачі, речовиною, в якій гальмується дейтрон ( $z=1$ ), є азот, порядковий номер якого  $Z=7$ .

Швидкість дейтрона можна обрахувати, знаючи його кінетичну енергію  $E_\kappa$ :

$$v = \sqrt{\frac{2E_\kappa}{m_d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг}}{3,344 \cdot 10^{-24}}} = 1,96 \cdot 10^9 \text{ см/с}, \quad (11.1.3)$$

Концентрація електронів в азоті визначається через густину  $\rho$  речовини, в якій рухаються частинки, сталу Авогадро  $N_A$  та молярну масу  $\mu$ :

$$n = \frac{\rho Z N_A}{\mu} = \frac{1,25 \cdot 10^{-3} \cdot 7 \cdot 6,023 \cdot 10^{23}}{14} = 3,76 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}. \quad (11.1.4)$$

З урахуванням вже знайдених величин можна підставити числові значення до формули (11.1.2):

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial E_\kappa}{\partial x}\right)_{\text{іон}} &= \frac{4\pi(4,8 \cdot 10^{-10})^4}{9,1 \cdot 10^{-28}} \cdot \frac{3,76 \cdot 10^{20} \cdot 1^2}{(1,96 \cdot 10^9)^2} \ln \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-28} \cdot (1,96 \cdot 10^9)^2}{13,5 \cdot 7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}} = \\ &= 2,77 \cdot 10^{-7} \text{ ерг/см} = 0,17 \text{ MeB/см}. \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Знайти залежність радіаційної довжини  $L_{\text{рад}}$  електрона від порядкового номера речовини  $Z$ . Обчислити  $L_{\text{рад}}$  для електрона в азоті (за нормальних умов), в алюмінії та в свинці.

**Розв'язання:** Рухома легка заряджена частинка може втрачати енергію як за рахунок іонізації атомів, так і за рахунок гальмівного випромінювання під час взаємодії з атомами. У випадку низької енергії частинки основним механізмом втрат енергії є іонізаційні втрати, а для високої — втрати на випромінювання. Приблизна границя між цими механізмами визначається величиною

$E_{\kappa p} \approx \frac{800}{Z}, \text{ MeB}$ . При  $E < E_{\kappa p}$  основними є іонізаційні втрати, а при  $E > E_{\kappa p}$  — радіаційні. Якщо втрати енергії електрона в основному є

радіаційними, то кінетична енергія електрона в речовині зменшується за законом:

$$E_{\kappa} = E_{\kappa 0} \cdot \exp(-x / L_{\text{рад}}) \quad (11.2.1)$$

Тут  $E_{\kappa 0}$  та  $E_{\kappa}$  — кінетична енергія частинки до входження в речовину та на глибині  $x$ , відповідно. Радіаційна довжина  $L_{\text{рад}}$  — стала, що залежить від виду речовини, в якій рухається частинка. Фізичний зміст радіаційної довжини — довжина, на якій енергія частинки зменшується в  $e$  разів.

З іншого боку, напівемпіричний вираз для радіаційних втрат енергії електрона при  $E_{\kappa} \gg m_0 c^2$  [8]:

$$-\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{рад}} = 2,32 \cdot 10^{-27} n E_{\kappa} Z \cdot \ln \frac{183}{Z^{1/3}}. \quad (11.2.2)$$

Одиницею вимірювання для  $\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)$ , як і в попередній задачі, є  $\text{MeV}/\text{см}$ .

Отримати ще одне співвідношення для радіаційних втрат енергії електрона на одиниці шляху дуже просто з формули (11.2.1), диференціюючи її по глибині шару проникнення електрона в речовину:

$$\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{рад}} = -\frac{E_{\kappa 0}}{L_{\text{рад}}} \cdot \exp(-x / L_{\text{рад}}) = -\frac{E_{\kappa}}{L_{\text{рад}}}. \quad (11.2.3)$$

Порівнюючи вирази (11.2.2) та (11.2.3), отримуємо залежність радіаційної довжини  $L_{\text{рад}}$  електрона від порядкового номера речовини  $Z$ :

$$L_{\text{рад}} = \frac{4,31 \cdot 10^{26}}{n Z \cdot \ln \left( \frac{183}{Z^{1/3}} \right)}. \quad (11.2.4)$$

Концентрація електронів в речовині визначається за формулою (11.1.4). Для розрахунку потрібні густини речовин  $\rho$ , їх зарядові  $Z$  та масові числа  $A$ . Ці параметри за нормальних умов складають відповідно:

$$1) \text{ для азоту } \rho_N = 1,25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad Z_N = 7 \text{ та } A_N = 14;$$

2) для алюмінію  $\rho_{Al} = 2,7 \text{ г/см}^3$ ,  $Z_{Al} = 13$  та  $A_{Al} = 27$ ;

3) для свинцю  $\rho_{Pb} = 11,3 \text{ г/см}^3$ ,  $Z_{Pb} = 82$  та  $A_{Pb} = 207$ .

Підставивши ці параметри у вираз (11.2.4), отримаємо для азоту  $L_{рад}^N = 35862 \text{ см} \cong 360 \text{ м}$ , для алюмінію  $L_{рад}^{Al} = 9,7 \text{ см}$  та для свинцю  $L_{рад}^{Pb} = 0,5 \text{ см}$ .

**Приклад 3.** Знайти середній пробіг протонів з кінетичною енергією 3 MeV у свинці.

**Розв'язання:** Іонізаційні втрати енергії частинок (11.1.1) для частинок з різною масою та швидкістю, різним зарядовим числом, але з однаковою енергією, можна представити наступним чином:

$$-\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{іон}} = z^2 f(n, \langle I \rangle, v), \quad (11.3.1)$$

де  $f(n, \langle I \rangle, v)$  — функція, яка залежить тільки від концентрації електронів в речовині  $n$ , середньої енергії іонізації одного атома речовини  $\langle I \rangle$  та швидкості частинки  $v$ .

Пробіг частинки в речовині можна знайти з (11.3.1) наступним чином:

$$dx = -\frac{dE_{\kappa}}{z^2 f(n, \langle I \rangle, v)}. \quad (11.3.2)$$

Проінтегруємо вираз (11.3.2)

$$R = -\int_{v_0}^0 \frac{m d(v^2)}{z^2 f(n, \langle I \rangle, v)} = \frac{m}{z^2} F(n, \langle I \rangle, v). \quad (11.3.3)$$

Очевидно, що середній пробіг для різних частинок в одній і тій самій речовині залежить тільки від їх маси та заряду за умови однакової швидкості частинок.

Середній пробіг  $\alpha$  – частинки  $R_{\alpha}^{Pb}$  (см) в свинці:

$$R_{\alpha}^{Pb} = \frac{0,56 \cdot A^{1/3} R_{\alpha} \cdot 10^{-3}}{\rho_{Pb}}, \quad (11.3.5)$$

де  $R_{\alpha} = 0,31 \cdot E_{\kappa}^{3/2} (\text{см})$  — середній пробіг  $\alpha$  – частинки з кінетичною енергією  $E_{\kappa} (\text{МеВ})$  в повітрі,  $\rho_{\text{Pb}}$  — густина свинцю.

Таким чином, можна записати співвідношення між середніми пробігами у свинці для протона та  $\alpha$  – частинки з рівними швидкостями  $v_{\alpha} = v_p$  (нерелятивістське наближення  $E_{\kappa} = \frac{m}{2} v^2$ ):

$$R_p^{Pb}(m_p, E_{\kappa p}) = R_{\alpha}^{Pb}(m_{\alpha}, 4E_{\kappa p}). \quad (11.3.4)$$

Тут враховано співвідношення між масами та зарядом протона та  $\alpha$  – частинки:  $m_{\alpha} \cong 4m_p$  та  $z_{\alpha} = 2z_p$ .

Для протона з кінетичною енергією  $3 \text{ МеВ}$ , середній пробіг у свинці дорівнюватиме з формули (11.3.4):

$$R_p^{Pb} = \frac{0,174 \cdot 207^{1/3} \cdot 12^{3/2} \cdot 10^{-3}}{11,3} = 3,8 \cdot 10^{-3} (\text{см}) \quad (11.3.5)$$

**Приклад 4.** Який відсоток  $\beta^-$ -частинок, що випромінюються ізотопом  $^{32}\text{P}$ , поглинається в алюмінієвій фользі з масовою товщиною  $20 \text{ мг/см}^2$ ?

**Розв’язання:** Закон поглинання  $\beta^-$ -частинок в речовині має вигляд:

$$J = J_0 \cdot e^{-\mu d}, \quad (11.4.1)$$

де  $J_0$  та  $J$  — початковий потік  $\beta$  – частинок та потік на глибині  $d$  відповідно,  $\mu$  — лінійний коефіцієнт поглинання.

Відсоток  $\beta$  – частинок, які поглинаються шаром речовини товщиною  $d$ , складає:

$$\eta = \frac{J_0 - J}{J_0} = 1 - e^{-\mu d}. \quad (11.4.2)$$

Знайти лінійний коефіцієнт поглинання можна через масовий коефіцієнт поглинання  $\frac{\mu}{\rho}$ , який виражається через максимальну енергію  $\beta$  – спектра  $E_{\kappa\beta}^{\text{max}}$  (див. Розділ 4, Приклад 1) для конкретного ізотопу [8,9]:



$$\frac{\mu}{\rho} = 1,71 \cdot (E_{\kappa\beta}^{\max})^{-4/3}. \quad (11.4.3)$$

Тут масовий коефіцієнт поглинання вимірюється в  $\text{см}^2/\text{г}$ , а максимальна енергія  $\beta$ -спектра  $E_{\kappa\beta}^{\max}$  — в  $\text{MeV}$ . Формула (11.4.3) справедлива для випадку  $0,5 \text{ MeV} < E_{\kappa\beta}^{\max} < 7 \text{ MeV}$ .

Для ізотопу  $^{32}\text{P}$  величина максимальної енергії  $E_{\kappa\beta}^{\max} = 1,71 \text{ MeV}$ . Це значення можна взяти з таблиць, а можна розрахувати (див. Розділ 4, Приклад 1).

Отже, з урахуванням (11.4.3), формула (11.4.2) переписеться наступним чином:

$$\eta = 1 - \exp\left[-\frac{\mu}{\rho}(\rho d)\right] = 1 - \exp\left[-22 \cdot (E_{\kappa\beta}^{\max})^{-4/3} \cdot (\rho d)\right]. \quad (11.4.4)$$

Підстановкою числових даних у (11.4.4) отримаємо відсоток  $\beta$ -частинок, який поглинається в речовині згідно з умовою задачі:

$$\eta = 1 - \exp\left[-22 \cdot (1,71)^{-4/3} \cdot (20 \cdot 10^{-3})\right] \cong 0,2 \quad \text{або} \quad \eta = 20\%. \quad (11.4.5)$$

**Приклад 5.** Оцінити кінетичну енергію електронів, за якої радіаційні втрати енергії в алюмінії складатимуть  $\frac{3}{4}$  від всіх втрат. Обчислити величину критичної енергії електрона в цьому випадку та величину іонізаційних втрат для електрона з кінетичною енергією  $9 \text{ MeV}$ .

**Розв'язання:** Повні втрати енергії електрона з кінетичною енергією  $E_{\kappa}$  на одиницю шляху дорівнюють сумі іонізаційних (див. приклад №11.1) та радіаційних втрат:

$$\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{повн}} = \left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{іон}} + \left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{рад}}. \quad (11.5.1)$$

В залежності від енергії самого електрона, один з видів втрат енергії переважатиме. А саме, при кінетичній енергії електрона, яка менша за його енергію спокою ( $E_{\kappa} \ll m_e c^2$ , де  $m_e$  — маса спокою електрона), електрон в речовині буде рухатися досить повільно та встигатиме на своєму шляху іонізувати атоми середовища, тому

іонізаційні втрати переважатимуть над радіаційними. В протилежному випадку швидкого (релятивістського) електрона ( $E_{\kappa} \gg m_e c^2$ ), переважають радіаційні втрати. Але оскільки електрон є легкою частинкою, то іонізаційні втрати є не дуже суттєвими.

Треба зауважити, що для електронів формула (11.1.2) для іонізаційних втрат децю ускладнюється. Це відбувається через відмінність у ефективних перерізах близьких зіткнень електронів та важких частинок, різниці у величині, яка передається під час зіткнення двох електронів з енергіями  $E_{\kappa \max}$ , яка в цьому випадку дорівнює половині кінетичної енергії електрона  $E_{\kappa}$ . Також існує відмінність через зменшення приведеної маси системи [13].

Існує наступне співвідношення між іонізаційними та радіаційними втратами частинки, яка рухається з кінетичною енергією  $E_{\kappa}$  в речовині з порядковим номером  $Z$ :

$$\frac{\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{рад}}}{\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{іон}}} = \frac{E_{\kappa} Z}{800}. \quad (11.5.2)$$

Якщо радіаційні втрати енергії в алюмінію складатимуть  $\frac{3}{4}$  від всіх втрат, то в цьому випадку формула (11.5.2) виглядатиме наступним чином:

$$\frac{\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{рад}}}{\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{іон}}} = \frac{E_{\kappa} Z}{800} = \frac{3/4}{1/4} = 3, \quad (11.5.3)$$

звідки кінетична енергія електрона складатиме  $E_{\kappa} = \frac{2400}{Z_{\text{Al}}} = \frac{2400}{13} = 184,6 \text{ MeV}$ .

З (11.5.2) випливає, що радіаційні втрати дорівнюють іонізаційним при критичній енергії частинки  $E_{\kappa p} = \frac{800}{Z}, \text{ MeV}$ . Для алюмінію ця величина становить  $E_{\kappa p} = \frac{800}{13} = 61,5 \text{ MeV}$ .

Швидкість електрона з кінетичною енергією  $E_k = 9 \text{ MeV} = 14,4 \cdot 10^{-6} \text{ ерг}$  визначатиметься в релятивістському випадку з формули:

$$v = c \frac{\sqrt{E_k (E_k + 2m_e c^2)}}{E_k + m_e c^2} \quad (11.5.5)$$

Концентрація електронів в алюмінію визначається за формулою (11.1.4) та дорівнює  $n = 7,83 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$ .

На основі (11.5.4) після підстановки числових значень іонізаційні втрати енергії електрона з кінетичною енергією  $9 \text{ MeV}$  дорівнюватимуть:

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{іон}}^e = 0,65 \text{ eB/см}.$$

Видно, що у випадку, коли електрон рухається з ультрарелятивістською швидкістю, іонізаційні втрати енергії складатимуть незначну частину загальних втрат.

**Приклад 6.** При гальмуванні електронів достатньо великих енергій в полі ядра переріз випромінювання  $\gamma$ -квантів в інтервалі частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  поблизу максимальної частоти гальмівного випромінювання визначається формулою  $d\sigma = \frac{1}{nL_{\text{рад}}} \frac{d\omega}{\omega}$ , де  $n$  — кількість ядер в одиниці об'єму, а  $L_{\text{рад}}$  — радіаційна довжина. Знайти ймовірність того, що електрон втратить більше 90% своєї початкової енергії під час проходження через цинкову пластинку товщиною  $L = 1 \text{ мм}$ .

**Розв'язання:** Енергія, яка втрачається частинкою, що рухається в речовині, за рахунок електромагнітного випромінювання, називається радіаційними втратами. Випромінювання  $\gamma$ -квантів обумовлене розсіюванням частинок в кулонівському полі ядер. Кулонівське поле гальмує частинку, та вона втрачає енергію, випромінюючи  $\gamma$ -кванти. Випромінювання, яке виникає при цьому, називається гальмівним. Максимальна енергія  $\gamma$ -квантів визначається з умови:  $E_0 = \hbar\omega_{\text{max}}$  де  $E_0$  — початкова енергія електрона.

Імовірність випромінювання  $\gamma$ -квантів в інтервалі частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  дорівнюватиме:

$$d\omega = nL d\sigma. \quad (11.6.1)$$

Врахуємо, що переріз випромінювання  $\gamma$ -квантів в даному випадку становить:

$$d\sigma = \frac{1}{nL_{\text{рад}}} \frac{d(\hbar\omega)}{\hbar\omega}, \quad (11.6.2)$$

де  $\hbar\omega$  — енергія  $\gamma$ -кванта.

Вимога, сформульована в умові прикладу, означає, що ми повинні знайти імовірність того, що  $\gamma$ -кванти матимуть енергію в діапазоні від  $0,9E_0$  до  $E_0$ , де під  $E_0$  слід розуміти початкову енергію електрона. Тоді ймовірність того, що електрон втратить більше 90% своєї первісної енергії під час проходження через цинкову пластинку виражатиметься визначенням інтегралом від співвідношення (11.6.1) та запишеться, з урахуванням формули (11.6.2), таким чином:

$$w = \int_{0.9E_0}^{E_0} d\omega = \int_{0.9E_0}^{E_0} nL d\sigma = \frac{L}{L_{\text{рад}}} \int_{0.9E_0}^{E_0} \frac{d(\hbar\omega)}{\hbar\omega}. \quad (11.6.3)$$

Для визначення радіаційної довжини в цинку скористаємося формулою (11.2.4):

$$L_{\text{рад}} = \frac{4,31 \cdot 10^{26}}{nZ \cdot \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right)}. \quad (11.6.4)$$

Заряд ядра цинку складає  $Z_{\text{Zn}} = 30$ , а концентрація електронів в речовині:

$$n = \frac{\rho Z N_A}{M} = \frac{7,0 \text{ г/см}^3 \cdot 30 \cdot 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}}{65 \text{ г/моль}} = 19,46 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}. \quad (11.6.5)$$

Тут використано значення густини цинку  $\rho = 7,0 \text{ г/см}^3$  та його молярної маси  $M = 65 \text{ г/моль}$ .

Отже, радіаційна довжина електрона в цинку дорівнюватиме:

$$L_{\text{рад}} = \frac{4,31 \cdot 10^{26}}{19,46 \cdot 10^{23} \cdot 30 \cdot \ln\left(\frac{183}{30^{1/3}}\right)} = 1,81 \text{ см} . \quad (11.6.6)$$

Остаточню, шукану ймовірність з виразу (11.6.3) можна записати наступним чином:

$$w = \frac{L}{L_{\text{рад}}} \int_{0,9E_0}^{E_0} \frac{d(\hbar\omega)}{\hbar\omega} = \frac{0,1}{1,81} \cdot \ln\left(\frac{E_0}{0,9E_0}\right) = 5,8 \cdot 10^{-3} . \quad (11.6.7)$$

Як бачимо, ймовірність того, що електрон втратить більше 90% своєї первісної енергії під час проходження через цинкову пластинку товщиною  $L = 1 \text{ мм}$ , є досить малою, оскільки товщина платівки в цьому випадку майже в 20 разів менша за радіаційну довжину.

**Приклад 7.** Моноенергетичний пучок  $\gamma$ -квантів під час проходження алюмінієвої платівки товщиною 2,9 см послаблюється в 2,6 рази. Знайти відповідний масовий коефіцієнт розсіювання. Обчислити середню довжину пробігу такого пучка випромінювання.

**Розв'язання:** Закон послаблення вузького пучка моноенергетичного  $\gamma$  – випромінювання є експоненціальним:

$$J = J_0 e^{-\mu x} . \quad (11.7.1)$$

Тут  $J_0$  та  $J$  — початкова та кінцева інтенсивність пучка,  $x$  — товщина платівки,

$$\mu = \tau + \sigma , \quad (11.7.2)$$

де  $\mu$ ,  $\tau$  та  $\sigma$  — відповідні лінійні коефіцієнти послаблення, поглинання та розсіювання.

З умови задачі очевидно, що послаблення пучка випромінювання в 2,6 рази означатиме наступне співвідношення:

$$\frac{J_0}{J} = e^{\mu x} = 2,6 . \quad (11.7.3).$$

Щоб знайти масовий коефіцієнт розсіювання  $\sigma/\rho$ , треба спочатку з довідкових даних дізнатися відповідні значення масових коефіцієнтів послаблення  $\mu/\rho$  та поглинання  $\tau/\rho$  для даної довжини хвилі  $\gamma$  – випромінювання.

Оскільки довжина хвилі квантів нам невідома, можемо зробити навпаки: за допомогою формули (11.7.3) дізнатися масовий коефіцієнт послаблення  $\frac{\mu}{\rho}$  в алюмінію, а потім за його значенням знайти довжину хвилі пучка.

Отже, масовий коефіцієнт послаблення  $\frac{\mu}{\rho}$  в алюмінії (густина якого складає  $\rho = 2,7 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ ) дорівнюватиме:

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\ln J_0/J}{\rho d} = \frac{\ln 2,6}{2,7 \cdot 2,9} = 0,122 \frac{\text{см}^2}{\text{г}}, \quad (11.7.4)$$

що відповідає енергії  $\gamma$ -квантів  $E_\gamma = 0,2 \text{ MeV}$  [8].

Для цієї енергії  $\gamma$ -випромінювання, яке поширюється в алюмінію, з довідкових таблиць можна визначити масовий коефіцієнт поглинання  $\frac{\tau}{\rho} = 0,0275 \frac{\text{см}^2}{\text{г}}$ .

Тоді, згідно визначенню (11.7.2), масовий коефіцієнт розсіювання  $\frac{\sigma}{\rho}$  дорівнюватиме:

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} - \frac{\tau}{\rho} = 0,122 - 0,0275 = 0,0945 \frac{\text{см}^2}{\text{г}}.$$

**Приклад 8.** Для створення джерела монохроматичних фотонів з енергією, яка регулюється, можна використати комптонівське розсіювання лазерного випромінювання на прискорених електронах. Енергія  $E_\gamma$  фотона, що розсіявся, буде залежати від швидкості  $v$  прискореного пучка електронів, початкової енергії фотонів  $E_{\gamma 0}$  та кута зіткнення  $\vartheta$  фотонів лазерного випромінювання з пучком електронів, а також від кута  $\varphi$  між напрямками руху первісних та розсіяних фотонів:  $E_\gamma = E_{\gamma 0} \frac{1 - \beta \cos \vartheta}{1 - \beta \cos(\vartheta - \varphi)}$ , де  $\beta = \frac{v}{c}$ . Обчислити максимальну енергію отриманого монохроматичного випромінювання, якщо в якості джерела первісних фотонів використано випромінювання рубінового лазера ( $E_{\gamma 0} = 1,78 \text{ eV}$ ), а електрони мають кінетичну енергію, яка дорівнює  $E_{ke} = 1 \text{ GeV}$ .

**Розв'язання:** Енергія  $E_\gamma$  фотона, що розсіявся, згідно умови задачі, дорівнює:

$$E_\gamma = E_{\gamma 0} \frac{1 - \beta \cos \vartheta}{1 - \beta \cos(\vartheta - \varphi)}. \quad (11.8.1)$$

З виразу (11.8.1) очевидно, що максимальною енергія фотона буде, коли  $\cos \vartheta = -1$  та  $\cos(\vartheta - \varphi) = 1$ . Ця умова виконується при наступних значеннях кутів:  $\vartheta = \varphi = \pi$ .

Отже, максимальна енергія монохроматичного випромінювання дорівнюватиме:

$$E_{\gamma \max} = E_{\gamma 0} \frac{1 + \beta}{1 - \beta}. \quad (11.8.2)$$

Запишемо повну енергію електрона:

$$E = E_{\kappa e} + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (11.8.3)$$

де  $m_0$  — маса спокою електрона.

Зі співвідношення (11.8.3) можна виразити швидкість частинки в одиницях швидкості світла:

$$\beta = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha + 2)}}{\alpha + 1}, \quad (11.8.4)$$

де відношення кінетичної енергії електрона до його енергії спокою позначено як  $\alpha = \frac{E_{\kappa e}}{m_0 c^2}$ .

Оскільки електрони мають кінетичну енергію, яка дорівнює  $E_{\kappa e} = 1 \text{ GeV}$ , то в даному випадку коефіцієнт  $\alpha$  дорівнюватиме:

$$\alpha = \frac{E_{\kappa e}}{m_e c^2} = \frac{10^3 \text{ MeV}}{0,511 \text{ MeV}} = 1956,9. \quad (11.8.5)$$

Тоді підстановка числових значень до формули (11.8.4) дає швидкість електрона, яка дуже близька до швидкості світла:

$$\beta = \frac{\sqrt{1956,9(1956,9 + 2)}}{1956,9 + 1} = 0,999999869. \quad (11.8.6)$$

Остаточно, максимальна енергія монохроматичного  $\gamma$  – випромінювання дорівнюватиме:

$$E_{\gamma \max} = 1,78 \text{ eB} \cdot \frac{1 + 0,999999869}{1 - 0,999999869} = 27,2 \text{ MeB} . \quad (11.8.7)$$

### 11.3 Запитання та відповіді

56. Які пристрої використовують для реєстрації заряджених частинок?

*Прилади для реєстрації частинок називають детекторами частинок. Детектори поділяють на лічильники та трекові детектори. Окремо розглядають іскрові камери та іонізаційні камери неперервної дії. За допомогою лічильників реєструють проходження частинки через певну ділянку простору в певний момент часу. Крім того, за допомогою лічильників визначають енергію, заряд, швидкість та масу частинки. В трекових пристроях заряджена частинка залишає слід — трек, який зазвичай тим чи іншим способом фотографують.*

*До лічильників відносяться імпульсні іонізаційні камери, лічильники Гейгера-Мюллера, пропорційні, люмінесцентні, черенківські та напівпровідникові лічильники. До трекових детекторів відносяться камери Вільсона, бульбашкові камери та товстошарові фотоемульсії.*

*Метод ядерної фотографічної емульсії призначений для реєстрації траєкторій (треків) частинок. Заряджена частинка, яка проходить через емульсію, руйнує кристали галогеніду срібла та робить їх здатними до проявлення. Такий метод використовують в якості детектора частинок в ядерній фізиці, фізиці елементарних частинок, під час дослідження космічних променів та в дозиметрії.*

*З 1945 по 1955 роки за допомогою методу ядерної фотоемульсії було зроблено важливі відкриття: зареєстровано пі-мезони та постідовність розпадів  $\pi \rightarrow \mu + \nu$ ,  $\mu \rightarrow \beta^- + \nu + \bar{\nu}$ , досліджено ядерні взаємодії  $\pi^-$ - та  $K^-$ -мезонів; було оцінено час життя  $\pi^0$ -мезона ( $10^{-16}$  с). Методом ядерної фотоемульсії було також виявлено склад первинного космічного випромінювання, окрім протонів в ньому було знайдено ядра гелію та більш важких елементів, до заліза включно.*

*В камері Вільсона треки заряджених частинок візуалізуються завдяки конденсації пересиченої пари на іонах, утворених під час проходження зарядженої частинки через газ. За допомогою камери Вільсона було зроблено ряд відкриттів в ядерній фізиці (дослідження*



космічних променів, відкриття широких атмосферних злив, позитрону, знайдено сліди мюонів) та фізиці елементарних частинок (відкриття дивних частинок).

Більшу швидкість порівняно з камерою Вільсона має бульбашкова камера, в якій треки заряджених частинок реєструються за рахунок закипання перегрітої рідини вздовж траєкторії частинки. Швидка заряджена частинка вибиває з речовини електрони з різними енергіями ( $\sigma$  – електрони). Електрони з достатньо великою енергією, віддаляючись від траєкторії, в свою чергу, вибивають вторинні  $\sigma$  – електрони. В результаті багатократних зіткнень з атомами рідини електрони гальмуються поблизу траєкторії й викликають додаткове нагрівання рідини. Це й призводить до утворення центрів кипіння — зародків. Утворений зародок буде збільшуватись за рахунок випаровування рідини всередину бульбашки. Для однозарядної швидкої частинки експериментально встановлено залежність кількості бульбашок на одиниці шляху трека від її швидкості. Реєстрація треків в бульбашковій камері на ранній стадії формування бульбашок проводиться за допомогою прецизійної оптики або голографічними методами.

Бульбашкові камери використовуються зазвичай в експериментах з виведеними пучками заряджених та нейтральних частинок, які отримують в прискорювачах.

З 60-х років минулого століття широко застосовуються іскрові камери та електронні трекові детектори частинок, які дозволяють отримати більшу точність вимірів та можливість застосування ПК для обробки даних.

Зараз часто використовують комбіновані детекторні системи. Так, наприклад, в Національній лабораторії США ім. Фермі всередині 15-футової бульбашкової камери розташовано 2 контейнери з ядерною фотоемульсією.

57. Чи є шлях важкої зарядженої частинки в речовині прямолінійним?

Головну роль в зменшенні енергії важкої зарядженої частинки під час проходження через середовище відіграють процеси іонізації та збудження електронної оболонки атомів. Завдяки далекодіючому характеру кулонівських сил частинка взаємодіє одразу з багатьма електронами атомних оболонок, які в свою чергу впливають на частинку. Цей вплив носить випадковий, хаотичний характер, таким чином шлях частинки в речовині є практично прямолінійним.

Прямолінійність шляху також пов'язана з великою масою важкої частинки порівняно з масою електрона, внаслідок чого при кожній взаємодії з електроном вона відхиляється дуже мало та втрачає лише невелику частину своєї кінетичної енергії.

Однак, крім взаємодії з електронами атомних оболонок, існує також взаємодія заряджених частинок з атомними ядрами (резерфордівське розсіювання). Процес багаторазового розсіювання на ядрах призводить до викривлення треків навіть важких частинок, а кут багаторазового розсіювання використовують для визначення характеристик частинок, що лишають слід, наприклад, в камері Вільсона.

58. Як впливає поляризація середовища на рух частинки в ньому?

При дуже великих швидкостях частинки її електричне поле викликає поляризацію середовища. Вона послаблює (екранує) поле частинки, тому втрати енергії частинки зменшуються. При нерелятивістських швидкостях дебаївський радіус екранування перевищує розміри атома. Але в ультрарелятивістському випадку силові лінії електричного поля частинки сильно стискаються в напрямку руху та розтягуються в поперечному напрямку. Електричне поле стає неоднорідним. Тому вже на малих відстанях є вплив поляризації середовища.

59. Які особливості проходження позитронів через речовину?

Окрім іонізаційних та радіаційних втрат в цьому випадку виникають анігіляційні втрати за рахунок двох фотонної анігіляції позитронів з електронами речовини:  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ .

Анігіляційні втрати порівняно невеликі. Вони характерні тим, що призводять до виникнення анігіляційних квантів навіть в тій області енергій налітаючих частинок, де гальмівне випромінювання практично відсутнє.

60. Вкажіть основні особливості проходження легких заряджених частинок (на прикладі електронів) через речовину.

По-перше, на відміну від важких частинок, траєкторія електронів буде криволінійною (наявна велика кутова розбіжність електронного пучка:  $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle} \approx \pi$ , та значна просторова дисперсія:  $\bar{x} \approx \sqrt{\langle (x - \bar{x})^2 \rangle}$ ). Внаслідок цього інтенсивність пучка легких частинок зменшується плавно і неперервно, тому не має сенсу поняття визначеного пробігу легкої частинки. Оперують або поняттям максимального пробігу

(який дорівнює максимальній товщині речовини, в якій гальмуються всі частинки), або середнього пробігу (його знаходять, усереднивши за всіма частинками пучка довжину прямолінійної ділянки, пройденої частиною до зупинки). Для оцінки максимального пробігу на практиці користуються напівемпіричними формулами. У випадку моноенергетичних електронів пробіг оцінюють за формулою:

$$R_{\max} = (0,526E - 0,24) \frac{1}{\text{см}^2},$$

де  $E$  — енергія електрона, виражена в MeV.

По-друге, під час зміни імпульсу в результаті зіткнення електрон (або позитрон) випромінює, тому з'являються радіаційні втрати енергії, які зростають зі збільшенням енергії частинок. Гальмування електронів високих енергій використовують в прискорювачах для отримання пучків  $\gamma$  – квантів.

По-третє, під час руху електронів у середовищі слід брати до уваги квантові обмінні ефекти. Для позитронів суттєвим є ефект анігіляції під час взаємодії з атомними електронами:  $\beta^+ + \beta^- \rightarrow 2(3)\gamma$ .

Проте вклад останніх процесів є відносно невеликим.

61. Яким чином виникають  $\delta$ -електрони при русі заряджених частинок в середовищі?

В процесі іонізаційного гальмування кінетична енергія зарядженої частинки йде на збудження та іонізацію атомів середовища, через яке вона рухається. Електрони, які були вибиті з атомів в процесі іонізації, можуть, в свою чергу, іонізувати інші атоми. Це  $\delta$ -електрони. Оскільки їх енергія є великою в порівнянні з енергією зв'язку в атомі, то процес утворення  $\delta$ -електронів можна розглядати як розсіювання важкої зарядженої частинки на вільному електроні. Кут вильоту  $\delta$ -електрона знаходиться в межах  $0 \leq \psi \leq 90^\circ$ , а його енергія змінюється в залежності від кута наступним чином [17]:

$$E_{\kappa e} = \frac{4m_e M}{(M + m_e)^2} E_{\kappa} \cos^2 \psi,$$

де  $E_{\kappa}$  — кінетична енергія налітаючої частинки.

62. Якими є особливості фотоефекту на атомах речовини, через яку проходить пучок  $\gamma$  – квантів?

Як відомо, вільний електрон не може поглинати чи випромінювати  $\gamma$  – квант, оскільки це заборонено законами збереження, тому

фотоефект відбувається на зв'язаних електронах, так що імпульс та енергія  $\gamma$  – кванта передається електрону та атомному остову. Енергія фотоелектрона в цьому випадку дорівнюватиме  $E_e = \hbar\omega - E_{38}^i$ , де  $E_{38}^i$  – енергія зв'язку електрона на K, L, M – оболонках атома. Процес випромінювання фотоелектрона супроводжується серією каскадних переходів атомних електронів на вакантні місця в електронних оболонках. Такі каскадні переходи формують характеристичний рентгенівський спектр. Якщо  $\hbar\omega > E_{38}^K$ , найбільш імовірним буде процес викидання електрона з K – оболонки. Імовірність фотоефекту зростає зі збільшенням зарядового числа атома за законом  $Z^n$ ,  $n = 4 \div 5$ . Така залежність пояснюється тим, що в легких атомах порівняно з важкими електрони є менш зв'язаними. Зі збільшенням енергії  $\gamma$  – кванта імовірність фотоефекту зменшується, оскільки електрони вже не можна вважати зв'язаними, їх поведінка стає близькою до поведінки вільних електронів.

63. При великих енергіях  $\gamma$  – кванта ( $\hbar\omega > 2m_0c^2 \approx 1,02 \text{ MeV}$ ) основним механізмом взаємодії з речовиною стає народження електрон-позитронних пар. Проте згідно законів збереження енергії та імпульсу, один  $\gamma$  – квант не може породити електрон-позитронну пару. Яким чином відбувається цей процес?

Утворення електрон-позитронної пари відбувається в кулонівському полі ядра. Квантовомеханічний розрахунок, узгоджений з експериментом, показує, що процес утворення пари проходить поблизу ядра в області з лінійними розмірами порядку комптонівської довжини хвилі електрона. Ядро отримує імпульс віддачі, забезпечуючи виконання законів збереження, причому імпульс ядру передається за участі його електростатичного поля. Утворення електрон-позитронної пари  $\gamma$  – квантом можливе й у кулонівському полі електрона, хоча імовірність такого процесу невелика. Крім того, в результаті взаємодії електрон отримує енергію віддачі, співрозмірну з енергією частинок пари, тому енергія  $\gamma$  – кванта в цьому випадку має бути значно більшою за  $2m_0c^2$ . І нарешті, пара електрон+позитрон може з'явитись в процесі зіткнення двох  $\gamma$  – квантів.

64. Що таке наведена радіоактивність?

Якщо з середовищем взаємодіють частинки високих енергій, стають можливими процеси непружного зіткнення з атомними ядрами, в результаті яких з ядер вибиваються протони та нейтрони, або відбуваються ядерні перетворення. Утворені елементи та ізотопи, як правило, радіоактивні, тому в речовині з'являється наведена радіоактивність. Поріг реакцій взаємодії електронів та  $\gamma$ -квантів з ядром становить приблизно 10 МеВ, проте навіть при більших енергіях частинок імовірність непружної взаємодії з ядрами дуже мала внаслідок слабкості електромагнітної взаємодії. Проникненню важких заряджених частинок, таких як протон та  $\alpha$ -частинка, всередину ядра протидіє кудонівський потенціальний бар'єр, так що поріг останніх реакцій ще більший. Зауважимо, що частинки та  $\gamma$ -кванти, які виникають в результаті наведеної радіоактивності, мають невелику енергію (одиниці МеВ), тому викликати додаткову вторинну наведену радіоактивність не можуть.

65. В чому полягають особливості взаємодії заряджених частинок з монокристалами?

При розгляді проходження заряджених частинок через монокристали особливу увагу привертає рух частинок під малими кутами до кристалографічних осей або площин. При такій умові характеристики руху частинок дуже істотно залежать від знаку їх заряду.

Для позитивно заряджених частинок (наприклад, протонів та позитронів) їх рух відбувається всередині «каналів», утворених паралельними ланцюжками атомів або кристалічними площинами — **ефект каналювання**. Аксіальне каналювання спостерігається у випадку, коли пучок швидких заряджених частинок падає на монокристал під малим кутом до однієї з кристалографічних осей, при цьому відбувається майже дзеркальне відбиття позитивно зарядженої частинки від ланцюжка атомів. Таке дзеркальне відбивання відбувається при кутах падіння  $\vartheta < \vartheta_L$ , де  $\vartheta_L$  — кут Ліндхарда, який визначається співвідношенням:

$$\vartheta_L = \sqrt{\frac{\langle V \rangle_{\max}}{E}},$$

тут  $\langle V(r) \rangle_{\max} \equiv \langle V(r=0) \rangle \leq \frac{zZe^2}{d}$  — максимальна величина енергії взаємодії (висота потенціального бар'єру) рухомої частинки з зарядом  $ze$  та атома монокристалу, у якого ядро має заряд  $Ze$ , усередненої за відстанню  $d$  між атомами в ланцюжку:

$$\langle V(r) \rangle = (1/d) \int_{-d/2}^{d/2} V(r, x) dx;$$

$E$  — енергія частинки.

Введення поняття усередненої енергії взаємодії зарядженої частинки з кристалічними осями та площинами є обґрунтованим тільки для випадку, коли частинка з масою  $m$  рухається в кристалі з імпульсом

$$p > p_{\min} = \frac{2m \langle V \rangle_{\max}}{\hbar d}.$$

Величина кута Ліндхарда істотно залежить від енергії частинки та параметрів кристалу і лежить в інтервалі від десятків кутових хвилин (для відносно повільних протонів в кристалах з великим значенням  $Z \approx 30 \div 90$ ) до одиниць кутових секунд (для надрелятивістських позитронів в кристалах з  $Z \approx 3 \div 5$ ).

Площинне каналювання відбувається при падінні пучка під малими кутами до кристалографічних площин. При цьому частинки по чергово відбиваються від сусідніх площин і класична траєкторія їх руху нагадує синусоїду.

У випадку площинного каналювання усереднена потенціальна енергія взаємодії зарядженої частинки з атомною площиною має вигляд

$$\langle V(x) \rangle = (1/S) \int_{-d_z/2}^{d_z/2} \int_{-d_y/2}^{d_y/2} V(x, y, z) dy dz,$$

де  $S$  — площа елементарної частинки в площині каналювання.

При каналюваному русі позитивно заряджена частинка весь час знаходиться на значній відстані від ядер. Як наслідок — різке зменшення іонізаційних втрат, виходу характеристичного рентгенівського випромінювання та імовірності проходження ядерних реакцій.

Для негативних іонів кристалічна вісь та площина (при виконанні умови для імпульсу) представляє собою двовимірну або одновимірну потенціальну яму. При цьому негативні йони рухаються вздовж кристалічної площини, періодично перетинаючи її. Рух цих же йонів відносно кристалічної осі представляє гвинтову лінію, обернену навколо осі.

При такому рухові всі процеси взаємодії частинок з кристалами значно посилюються.

Для частинок, імпульс яких ненабагато перевищує граничне значення  $p_{\min}$ , коректний аналіз руху відповідає квантовомеханічному розрахунку (зокрема для протонів та позитронів — гармонічному осцилятору). Для частинок з великим імпульсом законним є використання класичного розрахунку.

66. Де і як використовується явище каналювання заряджених частинок в монокристалах?

Явище каналювання широко застосовується в різних галузях прикладної фізики. Це явище використовується в технології мікроелектроніки для управління процесом йонної імплантації напівпровідників.

Каналювання заряджених частинок застосовується також, наприклад, в методі зворотнього розсіювання на монокристалах. Пучок частинок направляють вздовж кристалографічних площин або осей і досліджують енергетичний спектр продуктів розсіювання або ядерних реакцій. Таким методом експериментально визначають положення домішкових атомів в кристалічній ґратці, досліджують структуру поверхневого шару тощо.

Якщо вузли кристалічної ґратки монокристала в результаті ядерних реакцій починають випромінювати заряджені частинки ( $\alpha$ -частинки або протони), то у напрямку кристалографічних осей та площин в кутовому розподілі частинок, які реєструються поза межами кристалу, спостерігаються мінімуми інтенсивності — «тіні». Фіксуючи кутовий розподіл розсіяних частинок у великому тілесному куті, наприклад, за допомогою ядерної фотоємльсії, отримують систему тіней — монограму. Цей метод отримав назву ефекту тіней.

На основі ефекту тіней розроблено метод вимірювання часу протікання ядерних реакцій в діапазоні  $10^{-19} \div 10^{-15}$  с. Під час опромінення монокристалу швидкими частинками відбувається зміщення утвореного складового ядра з вузла кристалічної ґратки.

Внаслідок цього заряджені частинки (продукти реакції) випромінюються ядром, яке не буде знаходитись у вузлі. При цьому каналювання цих частинок буде істотно залежати від місця їх випромінювання. За зміною форми тіні визначають середню величину зміщення джерел частинок та знаходять час протікання ядерної реакції. За допомогою цього методу досліджувались характеристики процесу поділу важких ядер. Вперше було визначено тривалість ділення збуджених ядер урану та трансуранових елементів в діапазоні  $10^{-17} \div 10^{-16}$  с.

Іншою областю застосування явища каналювання є використання квазімонохроматичного випромінювання рентгенівського та гама-діапазонів, яке відповідає періодичним осциляціям релятивістських каналюваних частинок. Висока частота випромінювання є наслідком перетворення Лоренца при випромінюванні швидкими зарядженими частинками.

67. В попередньому запитанні розглянуто ефект тіней, за допомогою якого отримують «картину» розподілу кристалічних осей та площин в монокристалі (монограму). Чим відрізняється цей метод від відомих способів дослідження монокристалів дифракційними методами (рентгенографія, нейтронографія, електронографія)?

Внаслідок малого значення довжини хвилі де Бройля у важких заряджених частинок ( $\lambda \sim 10^{-12}$  см для протонів з енергією 1 МеВ), дифракційні явища практично не впливають на утворення тіней. Плями та лінії на монограмі є результатом чисто корпускулярного характеру руху частинок в кристалі й відповідають перетину кристалографічних осей та площин з площиною фотоплатівки. Як наслідок, елементам монограми не властиві обмеження на роздільну здатність (хвильове розмиття плям в дифракційних картинах). Розподіл інтенсивності частинок в межах однієї тіні визначається складом та структурою кристалу, його температурою, наявністю дефектів у кристалі, а також видом та енергією заряджених частинок.



## 12. АСТРОФІЗИКА

### 12.1. Теоретичні відомості

Згідно сучасним даним, Всесвіт має радіус

$$R_0 = 2 \cdot 10^{28} \text{ см} \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ світових років} \approx 6 \cdot 10^9 \text{ парсек}.$$

Парсек є одиницею відстані в астрономії і відповідає відстані, з якої діаметр орбіти обертання Землі навколо Сонця видно під кутом в одну кутову секунду:  $1 \text{ парсек} \approx 3,26 \text{ світових роки} \approx 3 \cdot 10^{18} \text{ см}$ . Маса Всесвіту складає  $M = 2 \cdot 10^{55} \text{ грам}$  (в тому числі маса видимої частини Всесвіту рівна  $M \approx 10^{54} \text{ грам}$ ). Час з моменту створення Всесвіту приблизно рівний  $t_0 \approx 13,8 \text{ млрд років}$ .

В дослідженій частині Всесвіту (до радіусу  $R_1 \approx 1,5 \cdot 10^9 \text{ парсек}$ ) знаходиться приблизно  $10^9$  зоряних систем (галактик), в кожній з яких може бути  $10^{11} - 10^{12}$  зірок. Наша Галактика містить приблизно  $2 \cdot 10^{11}$  зірок, а також приблизно 2% міжзоряного газу та пилу. Середня густина міжзоряного газу  $1 \text{ см}^{-3}$ .

Походження галактик та зірок пов'язане з еволюцією Всесвіту з моменту його створення.

Модель нестационарного Всесвіту базується на законі Хаббла (1929 рік) та на властивостях однорідності та ізотропії Всесвіту (останнім часом зафіксовані невеликі відхилення від цих характеристик).

Закон Хаббла

$$\vec{v} = H\vec{r}$$

з'ясує середню радіальну швидкість  $\vec{v}$ , з якою взаємно віддаляються будь-які два об'єкти у Всесвіті, з відстанню між ними. Це співвідношення не залежить від точки відліку всередині Всесвіту. Величина  $H$  змінюється з часом і зараз має приблизне значення  $H \approx 70 \text{ км}/(\text{с} \cdot \text{Мпарсек})$ .

Рівняння для зміни цієї сталої має вигляд:

$$\frac{dH}{dt} = -\left(H^2 + \frac{4\pi G}{3}\rho(t)\right),$$

де  $\rho(t)$  — середня густина Всесвіту,  $G = 6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{\text{г} \cdot \text{с}^2}$  — гравітаційна стала.

Якщо представити Всесвіт, як однорідну (в середньому) сферичну область, то зміна поточного радіусу Всесвіту описується рівнянням

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G R_0^3 \rho_0}{3R} - \frac{8\pi G}{3} R_0^2 (\rho_0 - \rho_{\text{крит}}),$$

$$\rho_{\text{крит}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 0,7 \cdot 10^{-28} \text{ г/см}^3.$$

В цих співвідношеннях  $\rho_0$ ,  $R_0$  та  $H_0$  - густина Всесвіту, його радіус та конкретне значення сталої Хаббла в конкретний момент часу (як правило, розглядають поточний момент часу),  $\rho_{\text{крит}}$  — комбінація параметрів, яка має розмірність густини.

В даний час Всесвіт розширюється і  $\frac{dR}{dt} > 0$ . Швидкість розширення периферійної частини Всесвіту дуже велика і складає  $v_0 = H_0 R_0 \approx 0,5c$ . Подальший хід еволюції Всесвіту залежить від співвідношення між  $\rho_{\text{крит}}$  та  $\rho_0$ .

18) а) Якщо  $\frac{\rho_0}{\rho_{\text{крит}}} < 1$ , то Всесвіт буде необмежено розширюватися, причому при  $t \rightarrow \infty$  його радіус зростає згідно закону:

$$R_\infty \rightarrow t \sqrt{\frac{8\pi G}{3} R_0^2 (\rho_{\text{крит}} - \rho_0)},$$

а рух відповідає постійній швидкості

$$\frac{dR_\infty}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} R_0^2 (\rho_{\text{крит}} - \rho_0)}.$$

19) б) Якщо  $\frac{\rho_0}{\rho_{\text{крит}}} = 1$ , то радіус Всесвіту також необмежено зростає:

$$R_\infty = \sqrt[3]{6\pi G \rho_0^3 R_0 t^{2/3}}.$$

При цьому швидкість його розширення, середня густина і стала Хаббла асимптотично спадають до нуля

$$\frac{dR_\infty}{dt} = \sqrt[3]{\frac{8\pi G \rho_0^3 R_0}{3}} t^{-1/3}; \rho(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}; H(t) = \frac{2}{3t}.$$

20) в) Якщо  $\frac{\rho_0}{\rho_{\text{крит}}} > 1$ , то розширення Всесвіту припиниться при досягненні радіусу

$$R_{\text{max}} \rightarrow \frac{R_0}{1 - \rho_{\text{крит}}/\rho_0},$$

після чого почнеться його стискання аж до моменту необмеженого колапсу Всесвіту при  $R \rightarrow 0$ .

Згідно з останніми даними, які весь час уточнюються,  $\frac{\rho_0}{\rho_{\text{крит}}} \approx 1,1 - 1,05$ , що відповідає моделі замкнутого Всесвіту.

Складові середньої густини розподілу маси наступні (у відсотках):

- "звичайна" видима матерія (зірки, міжзоряний газ, "чорні дірки", холодні об'єкти типу планет тощо), яка складається з баріонів та лептонів, тобто протонів, нейтронів, електронів та позитронів —  $(4,5 \pm 1,5)\%$ ;
- електромагнітне випромінювання всіх діапазонів (з основним максимумом в області довжин хвиль  $\lambda = (6 \div 0,6) \text{ мм}$  і піком при енергії, що відповідає температурі реліктового випромінювання  $kT = 2,7 \text{ К}$ ) —  $0,01\%$ ;
- гаряча "темна" (невидима) матерія (в основному швидкі нейтрино) —  $(0,1 \pm 1)\%$ ;
- холодна "темна" матерія (небаріонна форма матерії, "планківські" частинки та їх ансамблі тощо) —  $(27 \pm 4)\%$ ;
- "темна" енергія (квантовані поля різних частинок та квазічастинок, які знаходяться в основному або "вакуумному" стані і якісно подібні на вакуумний стан будь якого осцилятора) —  $(73 \pm 4)\%$ .

Введення понять "темна матерія" та "темна енергія" пов'язане з такими астрономічними аномаліями, як неоднорідність просторового розподілу реліктового випромінювання, локальні відхилення від закону Хаббла, аномальність руху видимих зірок в віддалених

областях Всесвіту, де немає видимих джерел гравітаційного поля тощо.

Згідно з моделлю "гарячого Всесвіту" його розширення почалося приблизно  $t_0 \approx 13,8$  млрд років тому з Великого Вибуху. Безпосередньо перед моментом вибуху маса Всесвіту становила  $m_{pl} = \sqrt{\hbar c / G} \approx 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ з}$ , а початковий радіус, густина та температура були рівні відповідно

$$R_{pl} = \sqrt{G \hbar / c^3} \approx 1,6 \cdot 10^{-33} \text{ см}; \rho_{pl} = c^5 / G^2 \hbar \approx 10^{93} \text{ з/см}^3;$$

$T_{pl} = \sqrt{c^5 \hbar / G} \approx 10^{32} \text{ К}$ . В процесі вибухового розширення Всесвіту температура і густина речовина дуже швидко спадали.

Через  $t = 10^{-38} \text{ с}$  температура зменшилась до  $T \approx 10^{28} \text{ К}$  і з'явилися перші елементарні частинки —  $X-, Y-, Z-$  векторні бозони та антибозони, маса яких була рівна  $M_{X,Y,Z} \approx 10^{-9} \text{ з}$ . При зменшенні температури до  $T \approx 10^{27} \text{ К}$  відбувся їх розпад і почали утворюватися кварки, які знаходились в стані динамічної рівноваги з баріонами та антибаріонами. Розпад цих бозонів та антибозонів відбувався шляхом перетворення їх як в кварки ( $q$ ) і лептони ( $l$ ), так і в антикварки ( $\bar{q}$ ) та антилептони ( $\bar{l}$ ).

Наприклад, векторний  $X$  – бозон мав два альтернативних шляхи розпаду:

$$X \rightarrow q + q + \gamma,$$

$$X \rightarrow \bar{q} + \bar{l} + \gamma.$$

Векторний анти  $\tilde{X}$  – бозон теж мав два шляхи розпаду:

$$\tilde{X} \rightarrow \bar{q} + \bar{q} + \gamma,$$

$$\tilde{X} \rightarrow q + l + \gamma.$$

Така подвійність каналів розпаду була можливою, поки сильна та слабка взаємодії були не розділеними. Ці процеси в стаціонарному дуже гарячому Всесвіті протікали б майже рівноімовірно, але, як всякий спонтанний розпад, вони флуктували з часом (в один момент трохи більше кварків, а в інший — антикварків). Наш Всесвіт є нестаціонарним. Після розділення єдиної взаємодії на сильну та слабку було зафіксовано поточне число кварків та антикварків. Цей

процес почався при  $t = 10^{-28} \text{ с}$  і досяг максимальної ефективності при  $t = 10^{-20} \text{ с}$ .

Чисто випадково виявилось, що в цей момент співвідношення кварків та антикварків було трохи відмінним від одиниці:

$$\frac{N_q - N_{\bar{q}}}{N_q} \approx 10^{-9}.$$

Ситуація могла бути іншою — наприклад, їх кількість могла бути однаковою, або, навпаки, антикварків було б трохи більше.

Кварки й антикварки почали об'єднуватися в баріони та антибаріони. Їх кількість трохи відрізнялась.

При  $t = 10^{-8} \text{ с}$  температура Всесвіту зменшилась до  $T \approx 10^{13} \text{ К}$  і відбулася масова попарна анігіляція баріонів та антибаріонів, після якої всі антибаріони зникла, а дуже мала кількість "зайвих" баріонів визначили теперішній "баріонний" стан Всесвіту (є протони, але немає антипротонів). Якби в той момент часу була б повна симетрія, то зараз Всесвіт виявився б порожнім.

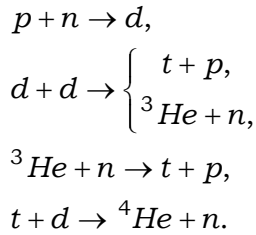
Цей процес супроводжувався масовим утворенням гама-квантів, які зараз (після зниження частоти в процесі непружного розсіювання) утворюють реліктовий фон з густиною  $n_\gamma \approx 450 \text{ см}^{-3}$ . Таку ж гуштину мають реліктові нейтрино та антинейтрино, які (порівну електронних, мюонних та тау-нейтрино та антинейтрино).

До моменту часу  $t = 10^{-3} \text{ с}$ , поки температура Всесвіту не впала до  $T \approx 10^{10} \text{ К}$ , відбувалося взаємне перетворення протонів та нейтронів. Після подальшого пониження температури таке взаємоперетворення стало неможливим і число протонів та нейтронів виявилось зафіксованим у відповідності до розподілу Больцмана:

$$n_n / n_p = \exp \left( - \frac{(m_n - m_p) c^2}{kT} \right) \approx 0,12 \text{ при } kT = 5 \cdot 10^9 \text{ К}.$$

Число електронів дорівнювало числу протонів.

Починаючи з часу  $t = 1 \text{ с}$ , якому відповідала температура  $T \approx 2 \cdot 10^9 \text{ К}$ , взаємодію між нуклонами починає визначати ланцюжок реакцій ядерного синтезу



За період до  $t = 10^3$  с у Всесвіті формується плазма, яка складається з ядер  ${}^4\text{He}$ , протонів та електронів, причому протони складають 75% всієї маси, а ізоотп  ${}^4\text{He}$  — 25%.

Ця плазма зберігається в незмінному зарядовому стані до часу  $t = 10^6$  років, поки плазма не охолонула до температури  $T \approx 4000$  K, при якій відбувається інтенсивна рекомбінація йонів і утворюється суміш нейтрального водню та гелію.

Через  $t = 5$  млрд років газова суміш, яка складала Всесвіт, охолонула до  $T \approx 30 - 50$  K, що створило умови для початку процесу структурування Всесвіту.

Це структурування викликане дією сил гравітації та тепловим рухом атомів та молекул. Всесвіт, що розлітався, почав флуктуаційно ділитися на дуже великі області, на поверхні кожної з яких гравітаційний тиск

$$P_{zp} \approx \frac{GM^{2/3}}{5} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \left( \frac{Am_p}{Z} \right)^{4/3} n_e^{4/3}$$

перевищував газокінетичний (тепловий) тиск. Маса кожної з таких областей відповідає умові гравітаційної нестійкості Джинса

$$M \geq M_{\text{Джинса}} = \left( \frac{3kT}{Gm_p} \right)^{3/2} \frac{1}{\rho^{1/2}},$$

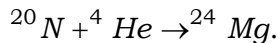
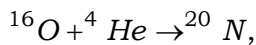
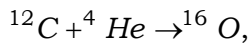
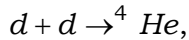
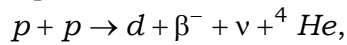
де  $\rho$  — густина газу.

Стискання в межах кожної області вело до зростання густини при майже незмінній температурі (газ був розрідженим і охолоджувався за рахунок процесу теплового випромінювання, яке вільно покидало межі області стискання. Зростання густини в цих умовах приводить до зменшення  $M_{\text{Джинса}}$  і до того, що нестійкість починає проявлятися в ще менших областях. Далі процес повторювався.

Таке поетапне структурування приводить до того, що весь Всесвіт поступово розбивається на відносно малі області, кожна з яких стабілізована силами гравітації, а потім стане зіркою. Фрагментація припиняється, коли середовище внаслідок зростання густини стає непрозорим для випромінювання, що зупиняє процес охолодження і приводить до нагрівання при гравітаційному стисканні.

Якщо маса зірки  $M < 0,08M_{\odot}$ , де  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}$  — маса Сонця, то нагрівання цієї області буде малим і недостатнім для початку ядерних реакцій.

Початковий розігрів кожної з областей з масою  $M > 0,08M_{\odot}$  до температури  $T \geq 10^7 \text{ К}$  приводить до початку протікання ядерних реакцій синтезу за участю спочатку водню та гелію, а потім більш важких синтезованих ядер:



На одній з цих реакцій завершується початковий ядерний синтез в зірках (на легких зірках раніше, а на важких — пізніше).

Проходження цих реакцій супроводжується "випалюванням" найбільш легких ядер (протонів та гелію), розігрівом центральної частини зірки і збільшенням кінетичного тиску.

За рахунок цього тиску, який протидіє силі гравітації, зірка збільшує свій розмір. Після випалювання легких ядер реакції припиняються із-за того, що температура всередині зірки є недостатньою для протікання реакцій за участю більш важких ядер. Зменшення температури призводить до стискання зірки. Цьому стисканню при високій енергії Фермі ( $E_F > kT$ ) протидіє кінетичний ферміївський тиск виродженого електронного газу.

Для нерелятивістського виродженого газу електронів в межах зірки він дорівнює величині:

$$P_e^{\text{нерел}} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} n_e^{5/3} \approx \frac{9\hbar^2}{5m_e} n_e^{5/3},$$

а для релятивістського газу

$$P_e^{\text{рел}} = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c n_e^{4/3} \approx \frac{3}{4} \hbar c n_e^{4/3}.$$

Якщо маса зірки  $M < 1,45M_{\odot}$ , то стискання припиняється на стадії *білого карлика*, коли зірка містить нерелятивістський вироджений газ електронів. В такому стаціонарному стані зірка може знаходитись дуже довго, поступово охолоджуючись і проходячи стадії блакитного, зеленого, жовтого, червоного карлика і переходить у стан чорного карлика, який є невидимим об'єктом.

Такі об'єкти самі по собі є стійкими. Але стан стійкості може порушитись, коли вони починають поглинати інші легкі зірки (процес *акреції*, або перетікання мас). В цьому випадку маса зірки може перевищити порогове значення  $M \approx 1,45M_{\odot}$ , і це може привести до *гравітаційного колапсу* (нижче).

Якщо маса зірки  $M > 4M_{\odot}$ , то тиск як нерелятивістського, так і релятивістського електронного газу не здатний зупинити гравітаційне стискання зірки, яке призводить до *гравітаційного колапсу*.

Для зірок з масою  $1,45M_{\odot} < M < 4M_{\odot}$  процес стискання також починається під дією сил гравітації після випалювання центральної частини зірки, яка за рахунок високої температури розширилась до стадії *червоного велетня*. При гравітаційному колапсі процес стискання зірки починається з поверхні, відбувається дуже швидко (1–2 с) і має вид падіння оболонки зірки на її центр, що проходить з швидкістю, близької до швидкості світла. При цьому центральна частина зірки, на яку діє падаюча оболонка, дуже сильно розігрівається і стискається за рахунок ударної хвилі. В ній в миттєвому режимі починаються термоядерні реакції з виділенням великої енергії за участю більш важких ядер, які були синтезовані раніше ( $^{16}\text{O}$ ,  $^{20}\text{N}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ). Наслідком такого процесу є глобальний термоядерний вибух, який має назву вибух *Наднової 1 типу* і супроводжується виділенням дуже великої енергії. Під час цього вибуху оболонка зірки, яка падала до центру і в якій зосереджено (20 ÷ 40)% від повної маси зірки, прискорюється і покидає зірку,



рухаючись з швидкістю, яка може досягати  $(10 \div 30)\%$  від швидкості світла. Центральна частина зірки перетворюється в стабільний червоний карлик.

Для зірок з масою  $M > 4M_{\odot}$ , процес стискання проходить за участю фундаментальних ядерних перетворень ще до початку вибуху. Спочатку відбувається випалювання легких ядер і розширення зірки до стану *червоного надгіганту*, а потім починається гравітаційний колапс. На протязі процесу стискання відбувається *нейтронізація* ядер, тобто процес перетворення протонів в нейтрони за рахунок захоплення електронів з складу релятивістського виродженого електронного газу. Такий процес можливий, коли енергія Фермі електрона в стискуваному виродженому релятивістському газі стає більшою за різницю енергій нейтрона і протона в конкретному ядрі. При такому стисканні відбувається поетапне зменшення кількості протонів і електронів при майже фіксованій концентрації і тиску електронів. В максимально стиснутому стані відносна концентрація нейтронів складає  $(98 \div 99)\%$ , а протонів та електронів —  $(1 \div 2)\%$ .

Подальша доля зірки залежить від її маси.

Якщо  $4M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$ , то процес гравітаційного колапсу зупиняється при досягненні стану виродження газу протонів та нейтронів в об'ємі зірки (це пов'язано з тим, що ядерна матерія має дуже великий коефіцієнт жорсткості відносно стискання). Стискання з супутнім процесом нейтронізації проходить дуже швидко і носить характер падіння оболонки на центр, але на відміну від Наднової I типу це падіння не приводить до термояденого вибуху (всі ядра встигають нейтронізуватися і зірка являє собою, по суті, одне велетенське ядро, в якому синтез неможливий). Результатом падіння оболонки на центр зірки є механічне імпульсне перестискання центральної частини з утворенням ударної хвилі, що біжить до центру зірки, а потім повертається назад. Результатом дії зворотної ударної хвилі є відрив від зірки дуже масивної оболонки (в ній може бути зосереджено до половини маси зірки). Цей процес відповідає вибуху *Наднової II типу*. Після скидання оболонки залишається стабільна нейтронна зірка.

Якщо  $M > 8M_{\odot}$ , то процеси нейтронізації та формування виродженого газу нейтронів не можуть зупинити гравітаційний колапс. При цьому за рахунок ударної хвилі також відбувається скидання оболонки і вибух *Наднової II типу*, але центральна частина

зірки не зупиняється на стадії нейтронної зірки і продовжує стискатись за рахунок сил гравітації до стану *чорної дірки*.

Чорна дірка є об'єктом, який створює гравітаційне поле, для якого друга космічна швидкість перевищує швидкість світла. Сферична маса стає чорною діркою, коли її радіус  $R$  буде меншим за *гравітаційний радіус*:

$$r_G = \frac{2GM}{c^2}.$$

На основі класичних понять чорну дірку не може покинути жодне тіло чи випромінювання.

Квантова механіка свідчить, що біля поверхні чорної дірки за рахунок дуже сильного викривлення простору відбувається віртуальне народження (на основі співвідношення невизначеностей) елементарних частинок та квантів. Частинки після народження знову поглинаються, а кванти можуть покинути чорну дірку, тим самим зменшуючи її масу. Для дірки з радіусом  $R$  частота випромінювання рівна  $\omega = 2\pi c/R$ . Загальна потужність випромінювання визначається виразом

$$R \frac{dW}{dt} \approx \frac{10^{35}}{M(z)} \text{erg}/c.$$

Повна тривалість такого квантовомеханічного випаровування чорної дірки рівна:

$$\tau \approx 10^{-35} M^3(z) [\text{років}]$$

Випаровування чорних дірок є процесом "очищення" Всесвіту від все збільшуваної множини чорних дірок, у які (у відсутності такого випаровування) міг би перетворитися весь Всесвіт.

Вибух обох типів Наднової є найбільш потужним явищем у Всесвіті. Під час цього вибуху за короткий час виділяється приблизно  $10^{53} \text{erg}$  енергії. Яскравість оптичного випромінювання оболонки, що розлітається від зірки, на протязі багатьох днів в мільярди разів перевищує яскравість звичайних зірок.

Процеси нейтронізації, які поєднані з вибухом, є основним джерелом нейтронів, які необхідні для синтезу важких і надважких елементів — всі елементи, які важче заліза, утворюються у Всесвіті (і існують на Землі) тільки під час вибуху Наднових зірок. Існування таких елементів на Землі свідчить про те, що Земля і вся сонячна

система не є результатом утворення перших зірок і пройшли, як мінімум, два перетворення у вигляді вибуху наднових зірок.

## 12.2. Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.** Гравітаційний радіус об'єкта, який має масу  $M$ , або радіус Шварцшильда, визначається співвідношенням  $r_G = \frac{2GM}{c^2}$ , де

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$  — гравітаційна стала. Визначити гравітаційний радіус для Землі, Сонця та Місяця.

**Розв'язання:** Гравітаційний радіус — це радіус сфери, на якій сила тяжіння, створена масою, що не обертається й що повністю лежить всередині цієї сфери, прямує до нескінченності. Якщо тіло стиснути до розмірів гравітаційного радіуса, то ніякі сили не зможуть зупинити його подальше стискання під дією сил тяжіння. Такий процес називається релятивістським гравітаційним колапсом. Вважалося, що при цьому зі сфери радіусом  $r_G$  не може виходити ніяке випромінювання, ніякі частинки. Але на сьогоднішній день теорія С.Хокінга спростовує це твердження, запропонувавши та дослідивши процес квантовомеханічного випаровування речовини (аналог тунельного ефекту). Детальніша інформація про це, наприклад, в [3].

Отже, розрахуємо гравітаційні радіуси деяких об'єктів.

Маса Землі складає  $M_{\oplus} = 5,976 \cdot 10^{27} \text{ г}$ , маса Сонця  $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{33} \text{ г}$  та маса Місяця  $M_M = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ г}$ .

Гравітаційні радіуси дорівнюють відповідно для Землі, Сонця та Місяця:

$$r_{G\oplus} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} \cdot 5,976 \cdot 10^{24} \text{ кг}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 8,86 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 8,86 \text{ мм}, \quad (12.1.1)$$

$$r_{G\odot} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ кг}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 2,95 \cdot 10^3 \text{ м} = 2,95 \text{ км}, \quad (12.1.2)$$

$$r_{GM} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} \cdot 7,35 \cdot 10^{19} \text{кг}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 10,9 \cdot 10^{-8} \text{м} = 1,09 \text{нм}. \quad (12.1.3)$$

Очевидним є той факт, що гравітаційний радіус реальних тіл в порівнянні з їх справжнім радіусом є мізерним.

**Приклад 2.** Зірка являє собою повністю іонізовану плазмову сферу із водню масою  $M$  та радіусом  $R$ . Прийняти, що електрони утворюють вироджений нерелятивістський газ однакової по об'єму густини. Визначити рівноважний стан зірки за умови, що єдиною утримуючою силою, яка протидіє гравітації, є кінетичний тиск газу вироджених електронів.

**Розв'язання:** На заключних стадіях еволюції (після припинення термоядерних реакцій в центрі зірки) подальша доля зірки визначається тим, чи можуть при температурі абсолютного нуля в речовині розвинутих сили, здатні протидіяти гравітаційному стисканню.

Силі гравітації, яка намагається стиснути зірку, протидіє кінетичний тиск газу електронів, точніше, градієнтний баланс цих двох сил і визначає механічну рівновагу зірки.

При високих густинах матерія зірки складається з «голих» ядер та електронів, причому роль кулонівської взаємодії частинок суттєво зменшується під час збільшення густини. Тому при великих густинах ( $\rho \geq 10^3 \text{ г/см}^3$ ) електронний та ядерний газ є виродженими. Оскільки під дією тиску відбувається еволюція атомарного стану речовини в зірках, то при високих тисках будь-яка речовина набуває вигляду кубічної ґратки, де умовно „вузлами” ґратки можна вважати атомні ядра, а між ядрами рухається однорідний газ вільних електронів. В середньому все середовище є нейтральним. Можна вважати, що наявність ядер не впливає на ідеальність електронного газу, оскільки кінетична енергія електронів набагато більша за потенціальну енергію ядер. Для нерелятивістського виродженого газу справджується умова: чим більша густина, тим більшою є ідеальність газу.

Під час подальших викладок ми не будемо враховувати кінетичний тиск ядерного газу, оскільки внаслідок великої маси швидкості ядер, а отже й тиск, що ними створюється, він є набагато меншим, ніж електронний.

Для стиснутого газу можна ввести поняття високої та низької температури, причому при низькій температурі це буде вироджений квантовий газ. В цьому газі частинками будуть заповнені всі квантові рівні нижче рівня Фермі, а вище енергії Фермі рівні залишатимуться порожніми.

Припущенням про сферичну симетрію зірки ми нехтуємо впливом наступних факторів: 1) осьового обертання; 2) припливних ефектів (якщо зірка не є поодинокю) та 3) крупномасштабних магнітних полів.

Для розв'язку задачі скористаємось моделлю виродженого Фермі-газу, наведеною в Розділі 1, Прикладі 7. Знайдемо кінетичний тиск газу електронів  $p_e$ . За законами термодинаміки тиск можна визначити диференціюванням повної енергії електронів у зірці  $E$  по повному об'єму  $V$  зірки:

$$p_e = - \left. \frac{\partial E(Z, N)}{\partial V} \right|_S, \quad (12.2.1)$$

де  $S$  — ентропія системи.

Вираз для середньої енергії  $\langle E \rangle$ , що припадає на один електрон можна отримати за аналогією до виразу (1.7.16) (Розділі 1, Приклад 7):

$$\langle E \rangle = \frac{3(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{10m_e} n_e^{2/3}, \quad (12.2.2)$$

де  $m_e$  — маса спокою електрона,  $n_e = N_e/V$  — концентрація електронів в системі. Повна енергія всіх електронів дорівнюватиме:

$$E = N_e \langle E \rangle = \frac{3(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{10m_e} \frac{N_e^{5/3}}{V^{2/3}}. \quad (12.2.3)$$

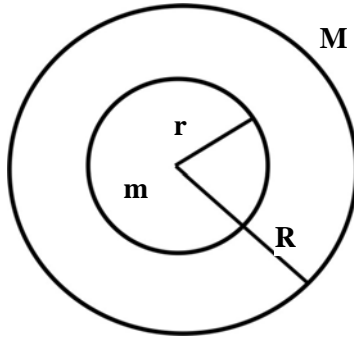
Продиференціюємо попередній вираз по об'єму та отримаємо тиск електронного газу, який намагається розширити зірку зсередини:

$$p_e = - \frac{3(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 N_e^{5/3}}{10m_e} \frac{\partial}{\partial V} \left( V^{-2/3} \right) = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} n_e^{5/3}. \quad (12.2.4)$$

Для знаходження гравітаційного тиску спочатку визначимо енергію зірки масою  $M$  у власному гравітаційному полі (Рис. 12.1):

$$W_G = \int_0^M U dm = \int_0^M \frac{G}{r} m dm = \frac{GM^2}{2R} \left\langle \frac{R}{r} \right\rangle, \quad (12.2.5)$$

де  $U = Gm/r$  — гравітаційний потенціал ( $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 / (\text{г} \cdot \text{с}^2)$ ) — гравітаційна стала,  $m$  — маса елемента зірки всередині,  $r$  — радіус цього елемента,  $R$  — радіус зірки,  $\left\langle \frac{R}{r} \right\rangle$  — усереднене по масі зірки значення. Останній параметр знайдемо згідно визначенню середнього:



**Рис. 12.1.** Зірка масою  $M$  та радіусом  $R$ .

$$\left\langle \frac{R}{r} \right\rangle = \frac{\int_0^M \frac{R}{r} m dm}{\int_0^M m dm} = \frac{2}{M^2} \int_0^M \frac{R}{r} m dm. \quad (12.2.6)$$

Якщо густина зірки є сталою по об'єму, можемо виразити масу таким чином:

$$m = \frac{4\pi}{3} \rho r^3, \quad dm = 4\pi \rho r^2 dr, \quad (12.2.7)$$

та підставити в (12.2.6), переходячи до іншої змінної:

$$\left\langle \frac{R}{r} \right\rangle = \frac{2R}{M^2} \frac{16\pi^2}{3} \rho^2 \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{M^2} \frac{16\pi^2}{15} \rho^2 R^6 = \frac{6}{5}, \quad (12.2.8)$$

де враховано вираз для густини  $\rho = \frac{M}{4\pi/3 R^3}$ .

Таким чином, гравітаційна енергія зірки становитиме:

$$W_G = \frac{3GM^2}{5R} = \frac{3GM^2}{5} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} V^{-1/3}. \quad (12.2.9)$$

Диференціюючи вираз (12.2.9) за об'ємом, знайдемо гравітаційний тиск зірки:

$$P_G = - \left. \frac{\partial W_G(M, R)}{\partial V} \right|_S = \frac{3GM^2}{5} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{1}{3} V^{-4/3} = \frac{3}{20\pi} \frac{GM^2}{R^4}. \quad (12.2.10)$$

В останній формулі виразимо радіус зірки через інші параметри, а саме: густину та концентрацію електронів.

Для водневої зірки концентрація електронів виражається через молярну масу атома водню  $\mu_H = 1 \text{ з/моль}$ , його зарядове число  $Z_H = 1$  та сталу Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ :

$$n_e = \frac{N_A}{\mu_H} \rho Z_H = \frac{\rho Z_H}{m_p}, \quad (12.2.11)$$

де  $\frac{N_A}{\mu_H} \approx \frac{1}{m_p}$ ,  $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ , в чому можна переконатися самостійно.

Радіус зірки виразимо через концентрацію електронів, врахувавши (12.2.11):

$$R = \left( \frac{3}{4\pi} V \right)^{1/3} = \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{Z_H^{1/3} M^{1/3}}{m_p^{1/3} n_e^{1/3}}, \quad (12.2.12)$$

та підставимо у (12.2.10):

$$P_G = \frac{3}{20\pi} \frac{GM^2}{R^4} = \frac{G}{5} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{m_p^{4/3} M^{2/3}}{Z_H^{4/3}} n_e^{4/3}. \quad (12.2.13)$$

Кінетичний тиск електронного газу намагається розширити зірку назовні („розірвати зсередини”), а гравітаційний тиск, навпаки, стискає її, в стані рівноваги ці тиски мають бути однаковими.

Тому рівність співвідношень (12.2.4) та (12.2.13) є умовою термодинамічної рівноваги зірки:  $p_e = p_G, \Rightarrow$

$$\frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} n_e^{5/3} = \frac{G}{5} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{m_p^{4/3} M^{2/3}}{Z_H^{4/3}} n_e^{4/3} \Rightarrow$$

$$n_e^{1/3} = G \frac{2^{2/3} m_e}{3\pi \hbar^2} (m_p)^{4/3} M^{2/3}, \quad (12.2.14)$$

де враховано, що  $Z_H = 1$ .

Цей вираз дає залежність між основними параметрами зірки (її масою та концентрацією електронного газу). Формулу (12.2.14) можна переписати через густину речовини, з якої складається зірка:

$$\rho_e^{1/3} = G \frac{2^{2/3} m_e}{3\pi \hbar^2} (m_p)^{5/3} M^{2/3}. \quad (12.2.15)$$

При заданій масі  $M$  зірки рівноважним її стан буде тоді, коли виконуються умови (12.2.14) та (12.2.15) для концентрації та густини електронного газу.

В загальному випадку нерелятивістської зірки рівність (12.2.14) буде мати вигляд:

$$n_e^{1/3} = G \frac{2^{2/3} m_e}{3\pi \hbar^2} \left( \frac{m_y}{Z} \right)^{4/3} M^{2/3}, \quad (12.2.16)$$

тут  $m_y$  — маса ядер, з яких складається зірка,  $Z$  — їх заряд.

**Приклад 3.** Зірка являє собою повністю іонізовану плазмову сферу із заліза масою  $M$  та радіусом  $R$ , причому електрони утворюють вироджений релятивістський газ однакової по об'єму густини. Визначити рівноважний стан зірки та її можливу еволюцію (стискання до виродженого стану ядер, стискання до проміжного стану, необмежений розліт, інше) в залежності від параметрів задачі ( $M$  та  $R$ ) за умови, що єдиною утримуючою силою, яка протидіє гравітації, є кінетичний тиск газу вироджених електронів. Взяти масу рівною 1 та 1,5 мас Сонця.

**Розв'язання:** Спочатку обрахуємо кінетичний тиск релятивістського електронного газу. Для спрощення розрахунків розглянемо ультрарелятивістський випадок, коли енергія частинки є пропорційною до її імпульсу:  $E = pc$ .

Кількість можливих станів одного ферміона дорівнюватиме по аналогії з формулою (12.1.6):



$$N = \frac{Vp^3}{3\pi^2\hbar^3} = \frac{VE^3}{3\pi^2\hbar^3c^3}. \quad (12.3.1)$$

Густина станів частинок складатиме:

$$\rho(E) = \frac{VE^2}{\pi^2\hbar^3c^3}. \quad (12.3.2)$$

В системі можуть існувати частинки від нульової енергії до граничної енергії — енергії Фермі, загальна кількість ферміонів (в нашому випадку — електронів) в системі дорівнює:

$$N_e = \int_0^{E_F} \rho(E) dE = \frac{VE_F^3}{3\pi^2\hbar^3c^3}. \quad (12.3.3)$$

Концентрація вироджених електронів визначатиметься наступним чином:

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{E_F^3}{3\pi^2\hbar^3c^3}. \quad (12.3.4)$$

Повна енергія електронного газу обраховується як

$$E = N_e \langle E \rangle = \int_0^{E_F} E \rho(E) dE = \frac{V}{\pi^2\hbar^3c^3} \int_0^{E_F} E^3 dE = \frac{VE_F^4}{4\pi^2\hbar^3c^3}. \quad (12.3.5)$$

З формули (12.3.3) виразимо енергію Фермі електронів, враховуючи, що  $n_e = N_e/V$ :

$$E_F = \left(3\pi^2\right)^{1/3} \hbar c n_e^{1/3}. \quad (12.3.6)$$

Підставимо енергію Фермі електронів у вигляді (12.3.6) до виразу (12.3.5) та отримаємо співвідношення для повної кінетичної енергії частинок:

$$E = \frac{3^{4/3} \pi^{2/3} \hbar c N_e^{4/3}}{4V^{1/3}}. \quad (12.3.7)$$

Знайдемо кінетичний тиск релятивістського газу електронів, скориставшись виразом (12.2.1) та вважаючи число частинок в системі незмінним:

$$P_e = - \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_S = \frac{3^{4/3} \pi^{2/3} \hbar c}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{N_e^{4/3}}{V^{4/3}} = \frac{\left(3\pi^2\right)^{1/3}}{4} \hbar c n_e^{4/3}. \quad (12.3.8)$$

Концентрацію електронного газу можна виразити наступним чином:

$$n_e = \frac{ZN_A}{A} \cdot \frac{M}{V} = \frac{N_A}{\mu} \cdot \frac{M}{V}, \quad (12.3.9)$$

де  $N_A$  — число Авогадро,  $Z$  — зарядове число,  $A$  — масове число елемента, з якого складається зірка,  $\mu = A/Z$  — кількість нуклонів в ядрі, що припадає на один електрон атома. Для заліза ця величина дорівнює:  $\mu = 56/26 = 2,15$ . Отже, кінетичний тиск електронного газу з двох попередніх виразів дорівнює:

$$P_e = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c \left( \frac{ZN_A}{A} \cdot \frac{M}{V} \right)^{4/3} = \frac{(3)^{5/3}}{4^{7/3} \pi^{2/3}} \hbar c \left( \frac{N_A}{\mu} \right)^{4/3} \frac{M^{4/3}}{R^4}. \quad (12.3.10)$$

Гравітаційний тиск, який ззовні діє на сферичну зірку масою  $M$  та радіусом  $R$ , можна взяти у вигляді (12.2.10) з попереднього прикладу та, порівнявши з кінетичним тиском, який протидіє гравітації, отримаємо умову рівноважного стану релятивістської зірки:

$$\frac{(3)^{5/3}}{4^{7/3} \pi^{2/3}} \hbar c \left( \frac{N_A}{\mu} \right)^{4/3} \frac{M^{4/3}}{R^4} = \frac{3}{20\pi} \frac{GM^2}{R^4}. \quad (12.3.11)$$

Таким чином, маса рівноважної зірки (критична маса, або чандрасекарівська межа) буде залежати тільки від її матеріалу та світових констант:

$$M_{кр} = \frac{15}{16} \sqrt{5\pi} \left( \frac{N_A}{\mu} \right)^2 \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2}. \quad (12.3.12)$$

Для заліза зарядове число  $Z = 26$ , масове —  $A = 56$ . Обрахуємо числове значення маси (12.4.11):

$$M = \frac{15\sqrt{5\pi}}{16} \cdot \left( \frac{26 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}}{56} \right)^2 \times \left( \frac{1,05 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}}{6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 / (\text{г} \cdot \text{с}^2)} \right)^{3/2} = 2,77 \cdot 10^{33} \text{ г} = 1,39 M_{\odot} \quad (12.3.13)$$

Приблизна оцінка чандрасекарівської межі проводиться за такою формулою [1]:

$$M_{кр} \approx \frac{5,75}{\mu} M_{\odot}. \quad (12.3.14)$$

Для заліза це приводить до співвідношення:  $M_{кр} \approx 1,25 M_{\odot}$ . Як бачимо, ми отримали результат, який досить добре співпадає з теоретичними розрахунками.

Розглянемо випадок, коли маса релятивістської зірки співпадає з масою Сонця:  $M = M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}$ . В такому разі відношення гравітаційного тиску до кінетичного тиску виродженого електронного газу становитиме:

$$\frac{P_G}{P_e} = \frac{4 \cdot \left(\frac{4}{9\pi}\right)^{1/3} G M^{2/3}}{5 \hbar c \left(\frac{N_A}{\mu}\right)^{4/3}} = 5,07 \cdot 10^{-23} M^{2/3} \approx 0,8. \quad (12.3.15)$$

тобто  $p_G < p_e$ , відбувається процес розльоту зірки.

У випадку, коли маса залізної зірки  $M = 1,5 M_{\odot} = 3 \cdot 10^{33} \text{ г}$ , співвідношення між тисками буде таким:

$$\frac{P_G}{P_e} = 5,07 \cdot 10^{-23} M^{2/3} \approx 1,05. \quad (12.3.16)$$

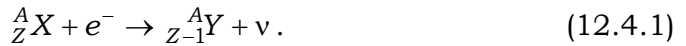
тобто  $p_G > p_e$ , продовжує відбуватися процес стискування зірки.

**Приклад 4.** Визначити, за яких умов для зірки з масою Сонця в стисненому стані вироджених релятивістських електронів буде відбуватися процес нейтронізації кожного з типів ядер (наприклад,  $p \rightarrow n$ ,  $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{B}$ ,  $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn}$ ). Енергії зв'язку для ядер  $^{12}\text{C}$ ,  $^{12}\text{B}$ ,  $^{56}\text{Fe}$  та  $^{56}\text{Mn}$  складають 92,2 MeV, 79,6 MeV, 492,2 MeV та 489,3 MeV, відповідно. Для процесу  $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn}$  записати другу реакцію нейтронізації та розрахувати її поріг (енергія зв'язку для нукліда  $^{56}\text{Cr}$  дорівнює 488,44 MeV).

**Розв'язання:** Нейтронізація речовини — це перетворення протонів, які входять до складу зірок, на нейтрони на заключних етапах еволюції зірок. Молоді зірки складаються переважно з водню з домішкою гелію та дуже малим відсотком більш важких ядер. Тому на початку термоядерної еволюції зірок всі нейтрони в зоряній

речовині зв'язані в атомних ядрах та на 6 протонів в середньому припадає приблизно один нейтрон. Наприкінці еволюції кількість нейтронів стрімко зростає, на що вказує існування нейтронних зірок. На заключних стадіях еволюції густина зоряної речовини в їх центральних областях сильно збільшується та електронний газ стає виродженим. Про це детальніше можна прочитати, наприклад в [13].

Отже, протонів, які входять до складу зірок, перетворюються на нейтрони за наступною схемою:

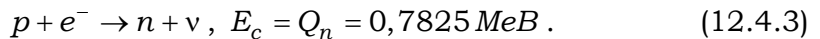


Це зворотний  $\beta^-$  – розпад. енергетичний поріг реакції (12.4.1) зазвичай є великим, тому тільки при високих густинах речовини енергія Фермі електронів  $E_F$  може перевищити критичну величину  $E_c$  — поріг нейтронізації:

$$E_F > E_c = E_{3\beta}(Z, A) - E_{3\beta}(Z-1, A) + Q_n, \quad (12.4.2)$$

де  $Q_n = (m_n - m_p - m_e)c^2 = 0,7825 \text{ MeV}$  — енергія  $\beta^-$  – розпаду нейтрона,  $E_{3\beta}(Z, A)$  та  $E_{3\beta}(Z-1, A)$  — енергії зв'язку материнського та дочірнього ядер, відповідно.

Розглянемо реакцію перетворення протона на нейтрон:



Умовою початку процесу нейтронізації є (12.4.2). Знайдемо випадок рівності енергії Фермі та порогу нейтронізації. Енергія Фермі релятивістських електронів виражається формулою (див. Розділ 12, Приклад 3):

$$E_c = E_F = \left(3\pi^2\right)^{1/3} \hbar c n^{1/3}, \quad (12.4.4)$$

де  $n$  — концентрація електронів. Звідси гранична концентрація дорівнюватиме:

$$n_{кр} = \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{E_c}{\hbar c} \right)^3. \quad (12.4.5)$$

Оцінімо величину  $n$  :

$$n_{кр} = \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{0,7825 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг}}{10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}} \right)^3 = 2,46 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}. \quad (12.4.6)$$

Також можна обрахувати критичну густину  $\rho_{кр}$  речовини зірки, при якій починається процес перетворення (12.4.3):

$$\rho_{кр} = \frac{A}{Z} \cdot n_{кр} \cdot m_p = 2,46 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 3,9 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3. \quad (12.4.7)$$

Наступна реакція — перетворення ізотопу  $^{12}\text{C}$  на ядро  $^{12}\text{B}$ :



Поріг нейтронізації для реакції (12.4.8) складатиме:

$$E_c = E_{зв}(6,12) - E_{зв}(5,12) + Q_n = 92,2 - 79,6 + 0,7825 \approx 13,38 \text{ Мев}. \quad (12.4.9)$$

За формулами (12.4.5) та (12.4.7) критичні концентрація та густина електронного газу релятивістських частинок для випадку реакції (12.4.8) дорівнюватиме:

$$n_{кр} = \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{13,38 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг}}{10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}} \right)^3 = 1,23 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3} \quad (12.4.10)$$

$$\rho_{кр} = \frac{12}{6} \cdot 1,23 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 4,0 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$$

Аналогічні математичні викладки можна провести для реакції перетворення заліза на марганець:

$$^{56}\text{Fe} + e^- \rightarrow ^{56}\text{Mn} + \nu, \Rightarrow E_c = E_{зв}(26,56) - E_{зв}(25,56) + Q_n = 492,2 - 489,3 + 0,7825 \approx 3,7 \text{ Мев};$$

$$n_{кр} = \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{3,7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг}}{10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}} \right)^3 = 2,6 \cdot 10^{32} \text{ см}^{-3}, \quad (12.4.11)$$

$$\rho_{кр} = \frac{56}{26} \cdot 2,6 \cdot 10^{32} \text{ см}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 9,0 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3.$$

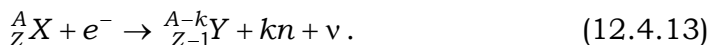
За першою реакцією нейтронізації речовини може відбуватися друга, якщо продовжує виконуватися умова (12.4.2). Тоді реакція нейтронізації, до якої вступають електрони з енергією  $E_e$  в інтервалі  $E_c < E_e < E_F$ , стає енергетично вигідною. Енергія системи в кожному акті зменшується на величину  $E_e - E_c$ , яка уноситься електронним нейтрино.

Друга реакція нейтронізації для ізотопу  $^{56}\text{Fe}$  виглядатиме наступним чином:



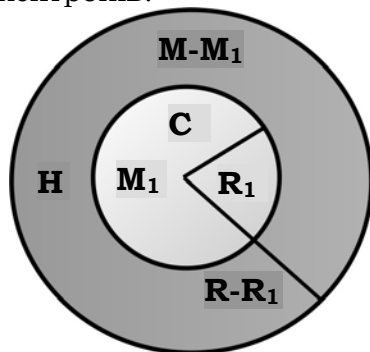
Порогова енергія другого процесу нейтронізації складатиме:  
 $E_c = E_{38}(25,56) - E_{36}(24,56) + Q_n = 489,3 - 488,44 + 0,7825 \cong 1,64 \text{ MeV}.$

Ланцюжок реакцій нейтронізації призводить до утворення ядер, які перевантажені нейтронами. Як тільки ядро, що утворилося в процесі, стає нестійким по відношенню до випускання нейтронів, нейтронізація речовини продовжується з виділенням в кожному акті одного чи  $k$  нейтронів:



За рахунок нейтронізації речовини приблизно 99 % протонів в атомних ядрах перетворюються на нейтрони практично за час порядку секунди від початку гравітаційного колапсу. Внаслідок захоплення електронів тиск електронного газу зменшується, що призводить до подальшого стискання зірки. Таким чином утворюється нейтронна зірка густиною  $\rho \approx 10^{14} \text{ г/см}^3$  та радіусом  $R \approx (3 \div 10) \text{ км}.$  Всередині такої зірки залишається невелика кількість електронів, що компенсують протонний заряд.

**Приклад 12.5.** Зірка являє собою водневу повністю іонізовану плазмову сферу масою  $M$  та радіусом  $R$ , причому електрони утворюють вироджений нерелятивістський газ. В інтервалі  $0 < r < R_1$  зірка складається з іонізованого вуглецю  ${}^{12}\text{C}$  та має масу  $M_1$ , а в інтервалі  $R_1 < r < R$  — з іонізованого водню та має масу  $M - M_1$  (див. Рис. 12.2). В кожному з шарів густина електронів однакова по об'єму. Визначити рівноважний стан зірки та двох її шарів за умови, що єдиною утримуючою силою, яка протидіє гравітації, є кінетичний тиск газу вироджених електронів.



**Рис.12.2. Двошарова зірка масою  $M$  та радіусом  $R$ .**

**Розв'язання:** Формула для кінетичного тиску газу вироджених нерелятивістських електронів вже була виведено (див. формулу (12.2.4) з Розділу 12, Прикладу 2):

$$p_e = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} n_e^{5/3}. \quad (12.5.1)$$

Тоді тиск у внутрішньому (вуглецевому) шарі зірки дорівнює:

$$p_{e1} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} (n_{e1})^{5/3} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} \left( Z_C \cdot \frac{M_1}{V_1} \cdot \frac{N_A}{A_C} \right)^{5/3}, \quad (12.5.2)$$

де для вуглецю зарядове число  $Z_C = 6$ , масове —  $A_C = 12$ .

Або можна виразити (12.5.2) через заданий параметр задачі — радіус внутрішнього шару сферичної зірки:

$$p_{e1} = \frac{3^{7/3} \hbar^2}{5 \cdot 2^{10/3} \pi^{1/3} m_e} \left( Z_C \cdot \frac{N_A}{A_C} \right)^{5/3} \frac{M_1^{5/3}}{R_1^5}. \quad (12.5.3)$$

Запишемо аналогічний вираз для кінетичного тиску електронного газу в зовнішній (водневій) частині зірки:

$$p_{e2} = \frac{3^{7/3} \hbar^2 (N_A)^{5/3}}{5 \cdot 2^{10/3} \pi^{1/3} m_e} \cdot \frac{(M - M_1)^{5/3}}{(R^3 - R_1^3)^{5/3}}. \quad (12.5.4)$$

В попередньому виразі враховано, що для водню зарядове та масове числа  $Z_H = A_H = 1$ .

Визначимо взаємний рівноважний стан двох шарів зірки, прирівнявши кінетичні тиски (12.5.3) та (12.5.4):

$$p_{e1} = p_{e2}, \Rightarrow \frac{M_1}{2R_1^3} = \frac{M - M_1}{R^3 - R_1^3}. \quad (12.5.5)$$

Звідси отримаємо рівноважне співвідношення радіусів внутрішнього та зовнішнього шарів зірки:

$$R_1 = R \left( \frac{M_1}{2M - M_1} \right)^{1/3}. \quad (12.5.6)$$

Гравітаційний енергія, яка виділяється при формуванні двошарової зірки, становитиме:

$$W_G = G \left[ \int_0^{M_1} \frac{m_1}{r_1} dm_1 + \int_0^{M-M_1} \frac{(M_1+m_2)}{r_2} dm_2 \right]. \quad (12.5.7)$$

Виконуючи розрахунки аналогічно до наведених в Прикладі 1 (Розділ 12), знаходимо:

$$W_G = G \left[ M_1^2 \frac{3}{5R_1} + \frac{3}{2} \frac{R^2 - R_1^2}{R^3 - R_1^3} M_1 (M - M_1) + \frac{3}{5} \frac{R^5 - R_1^5}{R^6 - R_1^6} (M - M_1)^2 \right]. \quad (12.5.8)$$

Використаємо рівноважне співвідношення (12.5.6) та перетворимо вираз для гравітаційної енергії (12.5.8):

$$W_G = \frac{3G}{5R} \left\{ M_1^2 \left( 2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{1/3} + \frac{5}{2} M_1 \left( M - \frac{M_1}{2} \right) \left[ 1 - \left( 2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{-2/3} \right] + \right. \\ \left. + (M - M_1)^2 \frac{1 - \left( 2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{-5/3}}{1 - \left( 2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{-2}} \right\} = \frac{3G}{5R} f(M, M_1), \quad (12.5.9)$$

де

$$f(M, M_1) = \left\{ M_1^2 \left( 2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{1/3} + \frac{5}{2} M_1 \left( M - \frac{M_1}{2} \right) \left[ 1 - \left( 2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{-2/3} \right] + \right. \\ \left. + (M - M_1)^2 \frac{1 - \left( 2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{-5/3}}{1 - \left( 2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{-2}} \right\}. \quad (12.5.10)$$

Вираз для гравітаційного тиску отримаємо, диференціюючи (12.5.9) за об'ємом та виразивши радіус як  $R = \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} V^{1/3}$ :

$$p_G = \frac{G}{5} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} f(M, M_1) \frac{1}{V^{4/3}} = \frac{3G}{20\pi} \frac{f(M, M_1)}{R^4}. \quad (12.5.11)$$



Рівноважний стан двошарової зірки визначається з умови рівності кінетичного тиску зовнішнього шару (12.5.4) та гравітаційного тиску (12.5.11). Кінетичний тиск електронного газу зовнішньої частини зірки (12.5.4) перепишемо з урахуванням рівноважної умови (12.5.6):

$$p_{e2} = \frac{3^{7/3} \hbar^2 (N_A)^{5/3}}{5 \cdot 2^{10/3} \pi^{1/3} m_e} \cdot \frac{\left(M - M_1/2\right)^{5/3}}{R^5}. \quad (12.5.12)$$

Остаточно, умова рівноваги двошарової зірки  $p_G = p_{e2} \Rightarrow$  запишеться так:

$$\frac{3^{7/3} \hbar^2 (N_A)^{5/3}}{5 \cdot 2^{10/3} \pi^{1/3} m_e} \cdot \frac{\left(M - M_1/2\right)^{5/3}}{R^5} = \frac{3G}{20\pi} \frac{f(M, M_1)}{R^4}. \quad (12.5.13)$$

З (12.5.13) можемо виразити рівноважний радіус зірки:

$$R = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2 (N_A)^{5/3}}{G m_e} \frac{\left(M - M_1/2\right)^{5/3}}{f(M, M_1)}. \quad (12.5.14)$$