

ГОС ответы на вопросы

Список питань до держіспиту бакалаврів 2016

Оглавление

1. Де використовуються в мікроелектроніці тунельні явища? Наведіть приклади.	5
2. Доведіть необхідність мікромініатюризації електронних схем. Причини виникнення наноелектроніки.	8
3. Запропонуйте та обґрунтуйте чи можливо створення довільного профілю легуючих домішок за допомогою методу іонної імплантації.....	10
4. Знайдіть паразитні параметри біполярного транзистора та його передаточну криву. Поясніть чим відрізняються режими роботи в схемах із загальним емітером та з загальною базою.....	13
5. Користуючись еквівалентною схемою біполярних транзисторів інтегральних мікросхем, проаналізуйте вплив паразитних параметрів на його роботу.	17
6. Обґрунтуйте використання методів ізоляції елементів інтегральних мікроелектронних схем за допомогою зворотно зміщених р-п переходів. Проаналізуйте їх позитивні та негативні властивості. Наведіть приклади.....	20
7. Які переваги використання кремнію при виготовленні інтегральних мікросхем?	22
8. Сформулюйте різницю у впливі просторового електричного заряду на електричний струм у вакуумному і напівпровідниковому діодах.	23
9. Сформулюйте умови виникнення та спостереження квантового розмірного ефекту. Наведіть приклад досліду, в якому чітко показано наявність квантового розмірного ефекту.	24
10. Чому при використанні польових транзисторів з ізольованим затвором використовують компліментарні структури.....	28
11. Окресліть області застосування еквівалентних схем біполярних транзисторів та обґрунтуйте їх корисність.	30
12. Особливості та застосування термоелектронної емісії. Чи має вона спільні риси з надбар'єрною емісією в напівпровідникових структурах?	33
13. Порівняйте основні властивості біполярних і польових транзисторів з ізольованим затвором.	37
14. Проаналізуйте від чого залежить ефективність емітера, коефіцієнт переносу неосновних носіїв заряду, ефективність збору колектора біполярного транзистора, що використовується в інтегральних мікросхемах.	39
15. Проаналізуйте за яких умов в каналах провідності спостерігається велика рухливість носіїв заряду.....	45
16. Проаналізуйте причини появи залежності електропровідності металевих плівок від їх товщини.	49
17. Проаналізуйте причини, що обмежують мінімальний розмір елемента інтегральних мікросхем.	51
18. Проаналізуйте умови експериментального спостереження класичного розмірного ефекту. Чому він майже не спостерігається в напівпровідниках? Як впливає вигин зон?	61

19. Проаналізуйте, за яких умов зменшення довжини каналу МОН (метал-оксид-напівпровідник) транзистора сильно впливає на його характеристики. Які параметри МОН транзистора при цьому почнуть змінюватися?.....	63
20. Проаналізуйте, яку роль грають гетероструктури в мікроелектроніці. Наведіть приклади гетероструктур, що використовуються.	65
21. Сформулюйте основні технологічні обмеження на мінімальні розміри елементів інтегральних схем. 69	
22. Фізичні основи роботи польових транзисторів з ізольованим затвором.	74
23. Що нового в мікроелектроніці відкриває застосування гетеропереходів? Приклади.	78
24. Яку роль відіграють дифузійні процеси у мікроелектроніці?.....	80
25. Загальна схема виготовлення інтегральних схем. Базові процеси мікро- та наноелектронного виробництва.	82
26. Фізичні обмеження мінімізації мікро- та наноелектронних елементів та систем.	85
27. Отримання монокристалів напівпровідників. Фізико-хімічні основи очистки кремнію в мікро- та наноелектроніці.	96
28. Термодинаміка процесів утворення зародків конденсованої фази і кристалізація.....	100
29. Методи виготовлення тонких плівок.....	103
30. Епітаксійне нарощування плівок. Газофазна та молекулярно-променева епітаксія. Фізико-хімічні процеси при епітаксії кремнію та сполук.	109
31. Методи отримання та застосування шарів оксидів в наноелектроніці.	114
32. Методи легування напівпровідників. Термічна дифузія в мікро- та наноелектроніці. Іонне легування напівпровідникових структур.	119
33. Літографічні процеси в нанотехнології. Оптична, електронна та рентгенівська літографії. Фізичні схеми процесів. Основні напрямки застосувань; недоліки та переваги різних типів літографії, необхідність їх використання.	123
34. Діелектрики в мікро- та наноелектроніці. Діелектричні плівки. Діелектрична проникність та тангенс кута втрат. Електрична міцність плівок.	128
1. Мікрохвильовий діапазон та його особливості.	136
2. Рівняння Максвелла в інтегральній та диференціальній формах.	136
3. Симетрична форма запису рівнянь Максвелла. Дуальність електромагнітного поля.....	136
4. Векторні та скалярні поля в електродинаміці. Класифікація електромагнітних явищ. Джерела електромагнітного поля.	136
5. Матеріальні рівняння. Частотна та просторова дисперсія середовища.	136
6. Електродинамічні граничні умови. Провідники, діелектрики та магнетики на НВЧ. Умови електричної та магнітної стінки.	136
7. Енергетичні характеристики електромагнітного поля.	137
8. Хвильове рівняння. Умови зведення рівнянь Максвелла до скалярних хвильових рівнянь.	137

9.	Метод комплексних амплітуд у мікрохвильовій електродинаміці.	137
10.	Електродинамічні потенціали.	137
11.	Загальні властивості плоских електромагнітних хвиль.	137
12.	Поляризація електромагнітних хвиль.	137
13.	Узагальнені плоскі хвилі. Стоячі хвилі.	137
14.	Похиłe падіння плоскої хвилі на плоску границю розділу двох середовищ. Формули Френеля. Кут повного внутрішнього відбиття. Кут Брюстера.	138
15.	Класифікація ліній передач НВЧ. Скалярні рівняння Гельмгольца для регулярної лінії передачі НВЧ та їх розв'язок.	139
16.	Характеристичне рівняння лінії передачі НВЧ. Дисперсія та явище відсічки в лініях передачі НВЧ.	145
17.	Система хвиль прямокутного хвилеводу.	152
18.	Система хвиль круглого хвилеводу.	152
19.	Повільні та поверхневі електромагнітні хвилі. Хвиля Ценнека.	153
20.	Хвилі в діелектричних хвилеводах. Уповільнюючі системи.	154
21.	Неоднорідності в лініях передачі НВЧ. Діафрагми та штирі в прямокутному хвилеводі.	162
22.	Струми і напруги в техніці НВЧ.	171
23.	Стоячі хвилі в лініях передачі НВЧ. Узгодження в лініях передачі.	176
24.	НВЧ резонатори.	185
25.	Плоскі хвилі в гіротропному середовищі. Феритові прилади НВЧ.	193
1.	Стационарні та ергодичні випадкові процеси.	198
2.	Нормальний випадковий процес.	203
3.	Коефіцієнт кореляції та його властивості.	208
4.	Аналітичний сигнал, його означення та властивості.	211
5.	Співвідношення невизначеностей для випадкових процесів.	213
6.	Реакція лінійної системи на випадкові впливи. Кореляційна функція випадкового процесу на виході лінійної системи.	215
7.	Спектр інтенсивності випадкового сигналу на виході лінійної системи з постійними параметрами.	223
8.	Нелінійні перетворення нормальних флуктуацій. Теорема Прайса.	229
9.	Перетворення нормального випадкового процесу квадратичним детектором.	239
10.	Перетворення нормального випадкового процесу ідеальним обмежувачем.	242
11.	Власна ширина лінії випромінювання атома. Гальмування у власному полі.	247
12.	Однорідне уширення спектральних ліній.	256

13.	Неднорідне уширення спектральних ліній внаслідок ефекту Доплера.....	262
14.	Просторова селекція в атомних пучках.....	269
15.	Інверсія в трирівневій системі.....	274
16.	Основні характеристики гелій-неонового лазера.....	276
17.	Напівпровідниковий лазер.....	282
18.	Багатомодовий режим генерації.	285
19.	Наближена теорія відкритого резонатора Таунса і Шавлова. Поздовжні і поперечні моди.....	289
20.	Дифракційна теорія конфокального резонатора.	295
21.	Природа спеклів.....	303

1. Де використовуються в мікроелектроніці тунельні явища? Наведіть приклади.

Важливими застосуваннями явища тунелювання є резонансний тунельний квантовий діод та тунельний мікроскоп, тунелювання використовується для розрядки елементів флеш пам'яті.

тунельна спектроскопія дає можливість досліджувати різноманітні особливості енергетичного спектру твердих тіл в приповерхневій області. Вона досить швидко розвивається і застосовується для досліджень приповерхневих станів твердих тіл. Поєднання її з тунельною скануючою мікроскопією, дає унікальні можливості досліджувати енергетичні особливості дослідження електронних станів в окремих місцях поверхні з атомною роздільною здатністю.

Явище тунелювання використовується в роботі тунельних діодів. В цих діодах використовується перехід між сильно легованими р- і n- областями, коли концентрація донорів та акцепторів становить $\sim 10^{18}-10^{19} \text{ см}^{-3}$ створюється надзвичайно вузький р-n перехід протяжністю $\sim 100\text{\AA}$. В вузькому переході утворюються великі електричні поля напруженістю $\sim 10^6 \text{ В/см}$. Які створюють сприятливі умови для міжзонного тунелювання.

В такі діоди мають ділянку від'ємного опору. Принцип роботи тунельного діоду та його ВАХ зображені на рисунку.(при необхідності детального пояснення див. с.184-186 «фіз.основинаноелектроніки»)

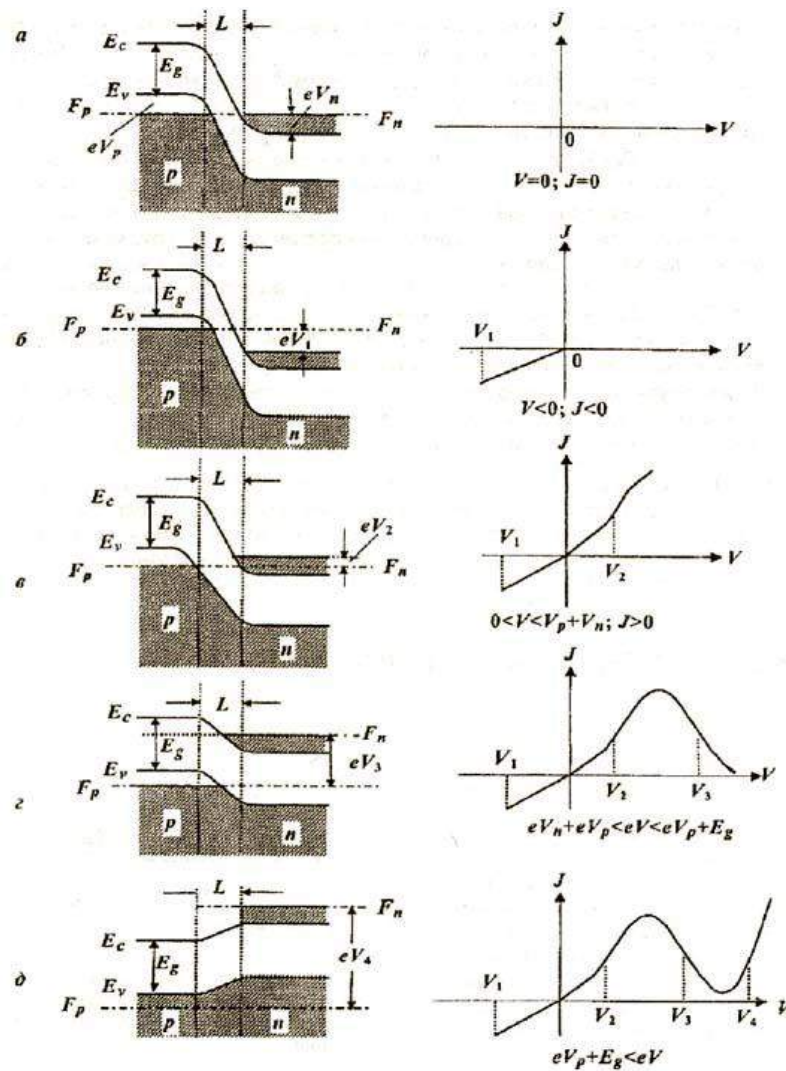


Рис. 6.11. Енергетичні діаграми p - n -переходу із вузьким шаром просторового заряду та відповідні ВАХ (E_g – ширина забороненої зони).

Резонансне тунелювання можна використати при розробці нових різновидів діодів та польових транзисторів. Для цього в області каналу провідності потрібно створити потенціальні бар'єри, які виділять дуже малу частину каналу, в якій виникнуть розмірні підзони. Наявність розмірних підзон, положення яких може змінюватись за допомогою напруги на затворі, дозволяє створювати умови для здійснення резонансного тунелювання. Енергія електронів, що йдуть від витоку до тунельного бар'єру, повинна для тунелювання збігатись з дозволеною енергією всередині потенціальної ями. Будова двохбар'єрного резонансного діоду наведена на рисунку.

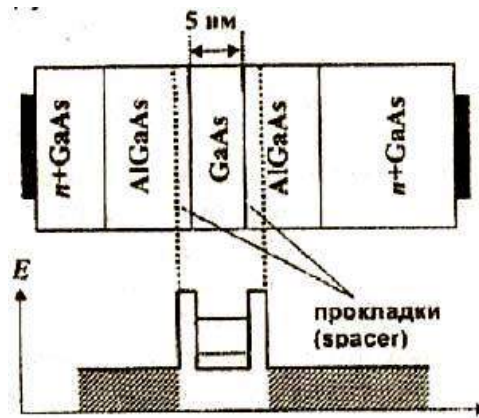


Рис. 6.14. Будова та енергетична схема двобар'єрного резонансно тунельного діода

Резонансне тунелювання і зокрема напівпровідникові двохбар'єрні системи застосовуються не тільки для створення НВЧ діодів, але й для створення транзисторів та інших складних мікроелектронних схем. При цьому двохбар'єрні системи використовуються як емітери, бази та колектори. Це дозволяє отримувати на їх вольтамперні характеристики з ділянками з від'ємним диференціальним опором та працювати в області НВЧ. Зокрема, якщо двохбар'єрні системи використовуються як емітери, то вдається в десятки разів зменшити енергетичний розкид електронів, що інжектують у базу.

2. Доведіть необхідність мікромініатюризації електронних схем. Причини виникнення наноелектроніки.

Розвиток сучасної радіoeлектроніки та електронної техніки характеризується ускладненням вимог і задач, котрі повинні розв'язуватись за допомогою радіоапаратури. Це призводить до суттєвого збільшення кількості елементів апаратури. Сучасна апаратура складається з десятків мільйонів елементів. При цьому потрібно збільшувати її функціональні можливості, зберігати її надійність, зменшувати енерговикористання, собівартість, габарити та вагу. Ці проблеми розв'язує мікroeлектроніка (МЕ) - новий науково-технічний напрямок, в якому використовуються нові принципи інтеграції. Вона забезпечує реалізацію електронних систем із мікромініатюрних радіодеталей та вузлів і охоплює проблеми дослідження, конструювання, виготовлення та застосування мікroeлектронних виробів із високим ступенем інтеграції.

Ідея зменшення об'єму та ваги радіoeлектронної апаратури при збереженні її надійності, підвищенні функціональних можливостей та зменшенні собівартості виникла одночасно з появою радіoeлектроніки. Проте принципове значення вона набула лише в 60-х роках ХХ сторіччя з таких причин:

- по-перше, підвищення надійності та ускладнення функціональних особливостей потребує збільшення кількості елементів шляхом дублювання або ще більшим ускладненням апаратури;
- по-друге, велику кількість елементів потрібно розмістити в малому об'ємі для того, щоб зменшити затримку сигналу, бо час затримки τ визначається лінійним розміром апаратури L і швидкістю світла c :

$$\tau \geq \frac{L}{c} \quad (1.1)$$

- Це співвідношення дозволяє оцінити мінімальний розмір елемента l_m . Позначимо кількість елементів розміром l_m через N , тоді

$$N = \frac{L^3}{l_m^3} \quad (1.2)$$

Комбінуючи (1.1) та (1.2), можна отримати l_m .

$$l_m \leq \frac{\tau \cdot c}{\sqrt[3]{N}} \quad (1.3)$$

Для мінімального часу затримки $\tau \cong 10^{-11}$ с при $N = 10^{10}$ згідно (1.3) мінімальний розмір елемента становить $l_m < 1.4 \cdot 10^{-4} \text{ см} = 1.4 \text{ мкм}$.

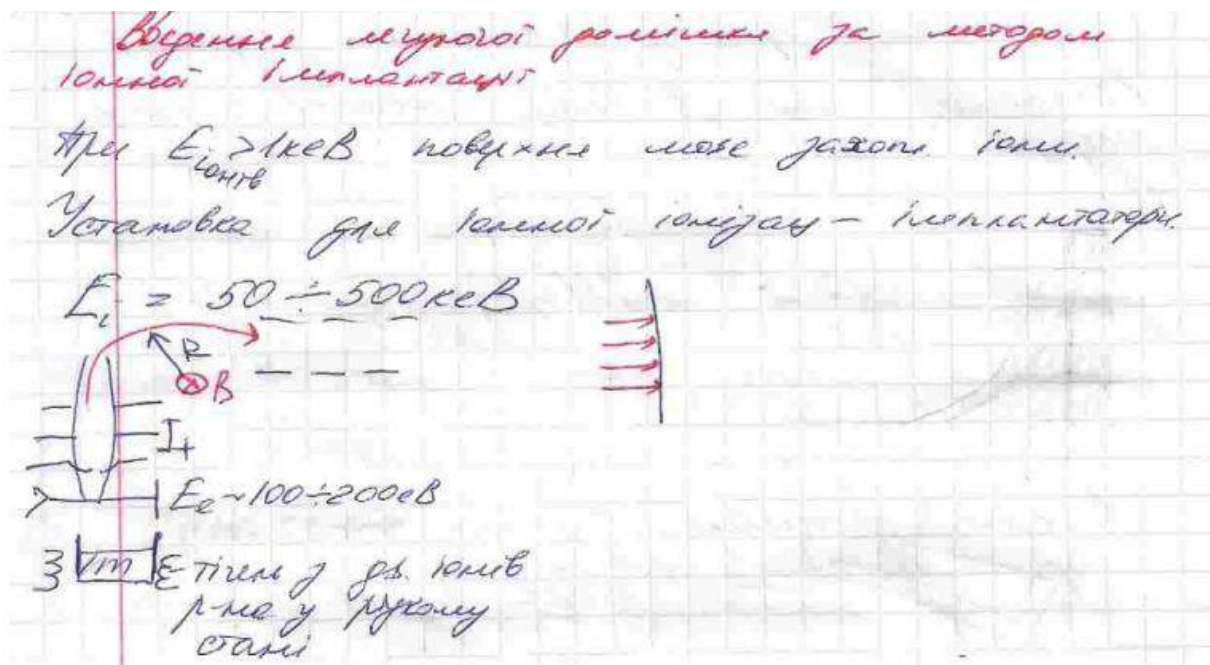
Частина об'єму повинна додатково використовуватися на міжз'єднання. Таким чином, окремі елементи повинні мати ще менші розміри.

- по-третє, велика кількість елементів потребує створення нової групової технології виготовлення, ефективного відводу тепла, бо кожний елемент схеми під час роботи виділяє певну кількість тепла, економії матеріалів, енергоресурсів та коштів.

У 60-х роках з'ясувалося, що системи з більше, ніж 10^5 окремими дискретними елементами не працюють, а з меншою кількістю елементів потребують значної витрати матеріалів, енергії і коштів на їх виготовлення та експлуатацію. В 60-х роках Дж.Кілбі і Р.Нойс отримали патенти на груповий метод виготовлення напівпровідникових діодів і тріодів на одній пластині кремнію. Вони запропонували здійснити металізацію на кремнієвій матриці транзисторів для приєднання до них пасивних елементів таким чином, щоб утворити інтегральну мікросхему (ІМС). Це і був початок розвитку мікромініатюризації і мікроелектроніки. Зараз у світі випускається більше, ніж 12 млрд. ІМС, а їх складність, наприклад, мікропроцесора 486-ї моделі фірми Інтел характеризується наявністю на одному чіпі 1.2 млн транзисторів. Групова технологія виготовлення ІМС завоювала світ, про що свідчить великий обсяг торгівлі ІМС. У 1990 він становив більше, ніж 200 млрд. доларів і продовжує зростати.

3. Запропонуйте та обґрунтуйте чи можливо створення довільного профілю легуючих домішок за допомогою методу іонної імплантації.

Іонна імплантація — спосіб введення атомів домішок у поверхневий шар пластини або епітаксимальної плівки шляхом бомбардування його поверхні пучком іонів домішки з високою енергією (10-2000 кеВ). Іонізація атомів домішки, прискорення іонів та фокусування іонного пучка виконується у спеціальних установках типу прискорювачів частинок у ядерній фізиці. Іонна імплантація використовується при створенні напівпровідникових приладів методом планарної технології. Її також застосовують як метод легування металів для зміни їх фізичних і хімічних властивостей (підвищення твердості, зносостійкості, корозійної стійкості тощо).



Пучок позитивно заряджених [іонів](#) домішки у іонно-променевому прискорювачі бомбардує кристал напівпровідника. Проникаючи у кристал, домішка [легує](#) його і разом з тим викликає утворення радіаційних дефектів, погіршуючи тим самим його електрофізичні параметри. Взаємодіючи з кристалом іони гальмуються, й зупинившись утворивши зв'язки з атомами Si, причому розподіл домішок по кристалу має Гаусів профіль.

$$\text{Довжина траєкторії іону } R = 0.07 \frac{Z_1^{\frac{2}{3}} + Z_2^{\frac{2}{3}}}{Z_1 Z_2} \frac{M_1 + M_2}{M_1} E$$

Середня глибина проникнення $R_p = R \frac{1}{1+b \frac{M_2}{M_1}}$

Дисперсія глибини проникнення $\Delta R_p = \frac{2 \sqrt{M_1 M_2}}{3 M_1 + M_2} R_p$

Де M_1, M_2 та Z_1, Z_2 – маса та атомний номер імплентованих іонів та атомів кремнію відповідно, E – енергія, b – коефіцієнт, який залежить від типу розсіяння.

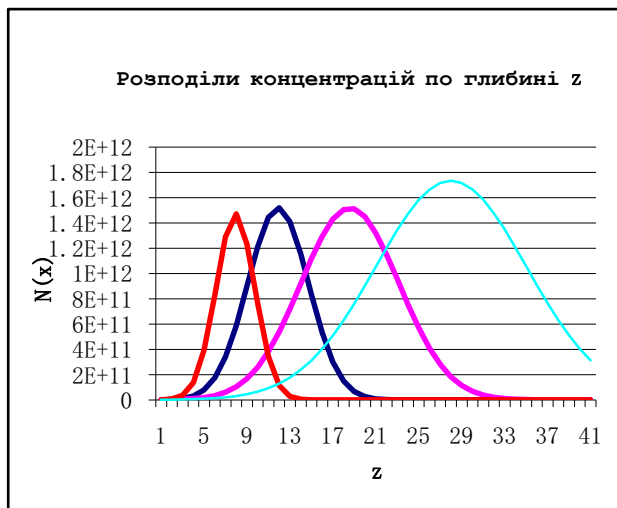
Тоді кількість домішок на певній глибині буде визначатись, як:

$$N(z) = N_{\max} \exp \left[-\frac{(z - R_p)^2}{2 \Delta R_p^2} \right], \quad \text{де} \quad N_{\max} = \frac{D}{\sqrt{2 \pi \Delta R_p^2}} \quad - \text{максимальна кількість}$$

домішок. Доза визначається, як: $D = \frac{j}{e} t$ – кількість іонів, які залишатимуться в середині твердого тіла.

Якщо використовувати декілька процесів іонної імплантації, при різних початкових енергіях домішок, та різних дозах, то в зразку можна створювати таку концентрацію домішок, яка необхідна в даному випадку. При використанні декількох Гаусівських розподілів, можна створити розподіл, який буде прямувати до

Концентрація домішки в імплентованому шарі залежить від густини струму в



іонному пучку і часу проведення процесу (експозиції). При невеликих дозах опромінення радіаційні дефекти не змінюють кристалічної структури напівпровідника, тоді як великі дози опромінення домішковими атомами призводять до аморфізації кристалу. Для усунення дефектів і

впорядкування кристалічної ґратки кремнію виконують відпал кристалу при температурі 500—800 °С.

Іонно-променевий прискорювач складається з таких основних блоків: джерела іонів, джерела високої напруги, прискорюючої трубки, магнітного сепаратора, системи фокусування пучка іонів, приймальної камери і вакуумної системи відкачки.

Робочі речовини для отримання іонів можуть знаходитися в газоподібному, твердому і рідкому станах. Для отримання іонів O^+ , Ne^+ , Ar^+ , F^+ , Cl^+ використовують відповідний газ, що надходить до вакуумної камери джерела іонів. Широко застосовують рідкі речовини, особливо хлориди BCl_3 , BBr_3 , PCl_3 , CCl_4 , $SiCl_4$, які добре випаровуються при кімнатній температурі.

Термізатор оформлює потік іонів, що випаров.
7 тис. е. утв. іонів. Зі рон. електратора
тем. керман форм. потік іонів. Стабч. по
секторний маселектрон. Ронор. шмат. пач
завертає пучок іонів, радіус заохотиле
вс. т. 1 так похв. роніш. бк.
І прох. чрез прискорювач. 7Е і поперек
не маселу ($10 \pm 100 \text{ еВ}$)

Недоліки:

- дорога установка
- оформл. лише дрінт пластини

Переваги:

- добре керування
- можна імантувати V матеріал
- низькі температури
- можна створювати практично V прарн.
розрину роніш. бк.
- контролювати Е, І, В-мат. пач
- немає біомор' розмито

4. Знайдіть паразитні параметри біполярного транзистора та його передаточну криву. Поясніть чим відрізняються режими роботи в схемах із загальним емітером та з загальною базою.

До структури $n^+p\text{-}n$ -транзистора ІМС (рис.) входить паразитний транзистор $p\text{-}n\text{-}p$ між базою (B), колектором (K) і підкладкою основного транзистора (S). Коли $n^+p\text{-}n$ -транзистор працює у нормальному активному режимі ($V_K < 0$), то паразитний $p\text{-}n\text{-}p$ -транзистор працює у режимі відсічки ($V_E < 0$), і струм крізь паразитний транзистор наближається до нуля. У цьому разі основну роль відіграють паразитна ємність C_{KS} і послідовно включений опір колекторної частини r_K , до якого додається зовнішній опір навантаження (вихідний опір) і ємність колектора C_K . Ефективна стала часу

$$\tau_{\alpha ef} = \tau_{\alpha} + (C_K + C_{KS})(r_K + R_{вих}).$$

Навіть за $\tau_{\alpha} = 0$, $C_K = 0$, $R_{вих} = 0$, $\tau_{\alpha ef} = C_{KS}r_K$. Наявність захованого шару суттєво зменшує r_K від $\sim 10^3$ до ~ 10 Ом, що зменшує $\tau_{\alpha ef}$.

При роботі основного $n^+p\text{-}n$ -транзистора в інверсному режимі ($V_E > 0$) паразитний транзистор знаходиться в активному режимі роботи ($V_{E_{пар}} < 0$). За цих обставин крізь нього у підкладку йде струм

$$I_{пар} = \alpha_{p\text{-}n\text{-}p} I_1,$$

де I_1 – частина базового струму, наявність якого погіршує параметри основного транзистора. Для зменшення коефіцієнта передачі $\alpha_{p\text{-}n\text{-}p} = \gamma\beta\alpha^*$ паразитного транзистора колекторну частину легують домішками золота. Атоми золота служать пастками для дірок, що збільшує швидкість їх рекомбінації, тобто зменшує час життя τ_p . У свою чергу зменшення τ_p у базовій області паразитного транзистора знижує його коефіцієнт передачі, оскільки падає коефіцієнт переносу носіїв крізь базу ($\beta_{p\text{-}n\text{-}p} = 1 - w_B^2 / 2L_p^2 = 1 - w_B^2 / 2D_p\tau_p$). Паразитні параметри транзистора залежать від типу його ізоляції. У випадку діелектричної ізоляції паразитний транзистор відсутній, але паразитна ємність C_{KS} залишається. Вона залежить від товщини діелектрика-ізолятора й може бути меншою, ніж у паразитного транзистора.

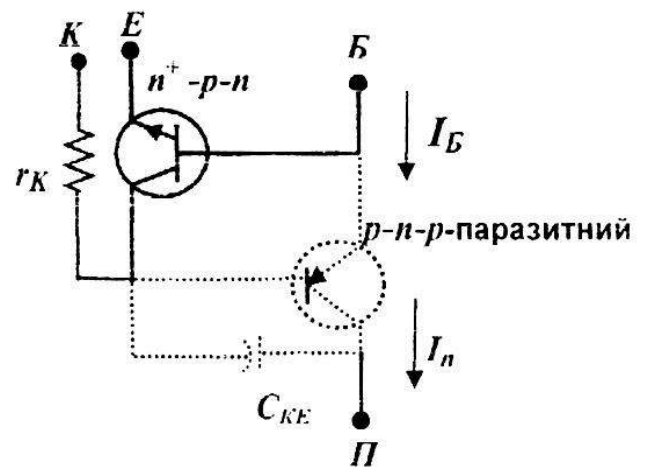
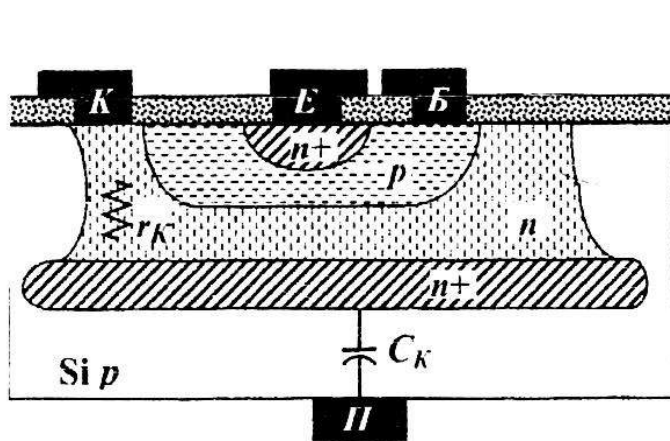


Рис. 12.17. Поперечний розріз і схема транзистора n^+-p-n , на якій подано паразитний $p-n-p$ -транзистор, утворений базою, колектором і підкладкою (П – контакт до підкладки)

Схема з загальною базою.

Сам транзистор, увімкнений за схемою СБ, не є підсилювачем, а лише *повторювачем* струму: прирости струму в колекторному колі не можуть перевищувати відповідних приростів струму в колі емітера: $\Delta I_K = \alpha \Delta I_E$, де $\alpha < 1$. Але транзистор здатний бути підсилювачем напру-

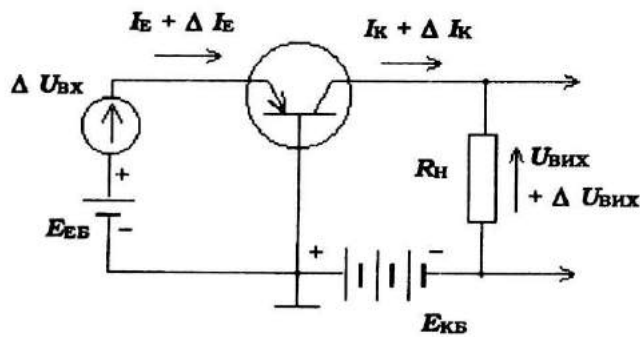


Рис.

ги та потужності. Для цього його потрібно навантажити, тобто ввімкнути в його вихідне коло навантажувальний опір R_H (рис.). Оскільки диференціальний і омичний опори колекторного переходу зазвичай досить великі, то й навантажувальний опір також може бути значним. Приріст вихідної напруги на ньому виявляється рівним $\Delta U_{\text{ВЫХ}} = \Delta I_K R_H$.

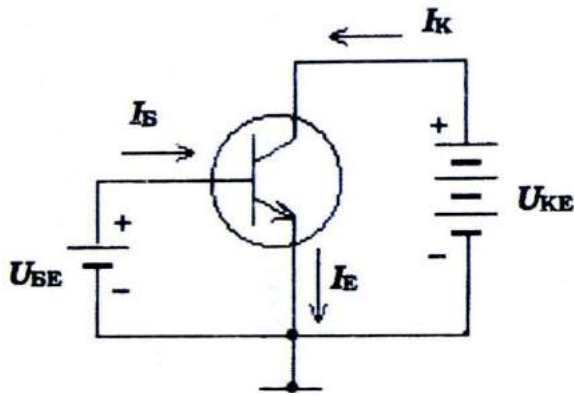
У свою чергу, приріст емітерного струму можна записати так:

$$\Delta I_E = \frac{\Delta U_{\text{ВХ}}}{R_{\text{ВХ}}},$$

де $\Delta U_{\text{ВХ}}$ – приріст вхідної (емітерної) напруги, $R_{\text{ВХ}}$ – диференціальний вхідний опір транзистора. Відношення $\Delta U_{\text{ВЫХ}}$ до $\Delta U_{\text{ВХ}}$ є коефіцієнтом підсилення напруги й дорівнює

$$k_U = \frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{\Delta U_{\text{ВХ}}} = \frac{\Delta I_K R_H}{\Delta I_E R_{\text{ВХ}}} = \alpha \frac{R_H}{R_{\text{ВХ}}} \approx \frac{R_H}{R_{\text{ВХ}}}.$$

Схема з загальним емітером



Іншим способом увімкнення транзистора, є увімкнення за схемою зі спільним емітером (СЕ), коли емітер вважають заземленим і потенціали на базі та колекторі відраховуються від нього. При такому увімкненні входом транзистора стає база, а входними струмом і напругою – відповідно I_B та U_{BE}

$$I_C = \beta I_E, \quad \beta = \frac{\alpha}{1-\alpha} \gg 1$$

Таким чином, транзистор, увімкнений за схемою СЕ, є підсилювачем струму, що надає цій схемі значні переваги порівняно зі схемою СБ.

При малих значеннях U_{CE} струм колектора стає незалежним від струму та напруги бази (втрачається її керуюча дія). Це відбувається в режимах, коли напруга на колекторі стає меншою від напруги на базі. Тоді колекторний перехід відкривається й нормальна робота транзистора стає неможливою. Подібний режим роботи називають режимом насичення.

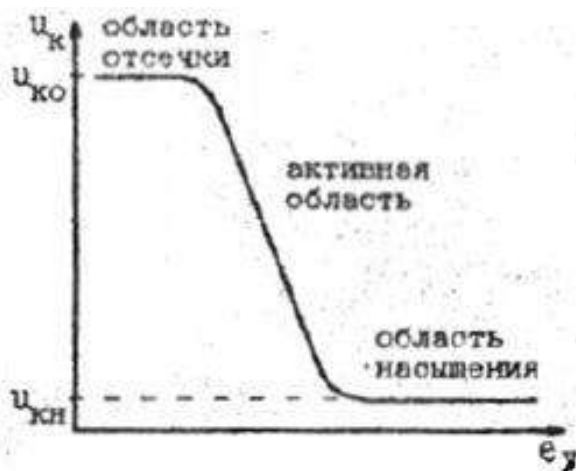


Рис. 2.2 Передаточная характеристика ключа

Передаточна характеристика ілюструє зміну станів транзистора. Передаточна характеристика для випадку схеми з загальним емітером зображена на

рисунку. Дійсно, в міру збільшення напруги на базі, транзистор опиняється в різних режимах, яким відповідають відповідні характерні області на передаточній кривій. Це:

- режим отсечки (на кривой — область отсечки); эмиттерный и коллекторный переходы транзистора заперты;
- режим усиления (на кривой — активная область); эмиттерный переход открыт, а коллекторный заперт;
- режим насыщения (на кривой — область насыщения); оба перехода открыты.

5. Користуючись еквівалентною схемою біполярних транзисторів інтегральних мікросхем, проаналізуйте вплив паразитних параметрів на його роботу.

Аналіз роботи транзисторів зручно здійснювати за допомогою еквівалентних схем. Вони складаються з лінійних елементів і вірно відображають похідні, котрі зв'язують між собою малі зміни струмів і напруг. В залежності від величини сигналу, способу включення транзистора та його частотного діапазону роботи розрізняють декілька еквівалентних схем. Наведемо приклади двох низькочастотних малосигнальних еквівалентних схем транзистора при включенні його із спільною базою і спільним емітером.

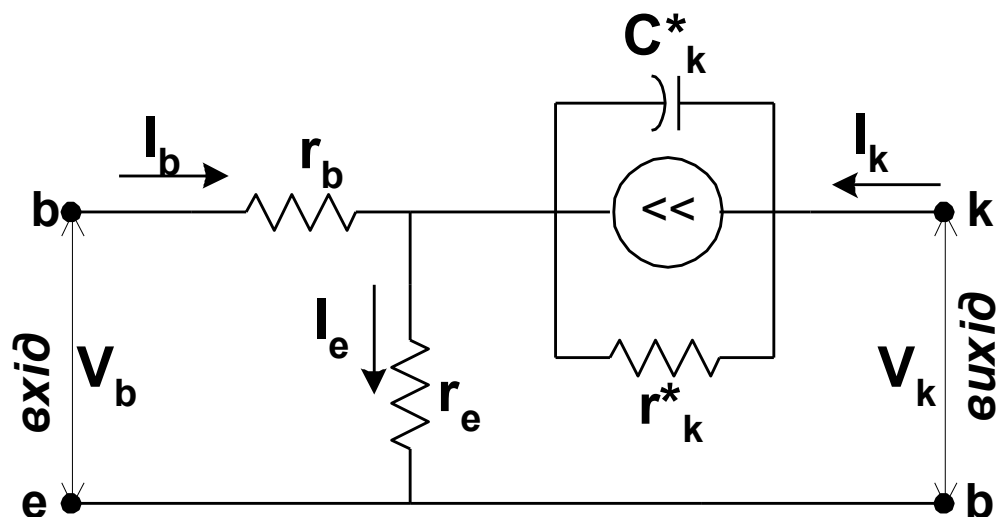
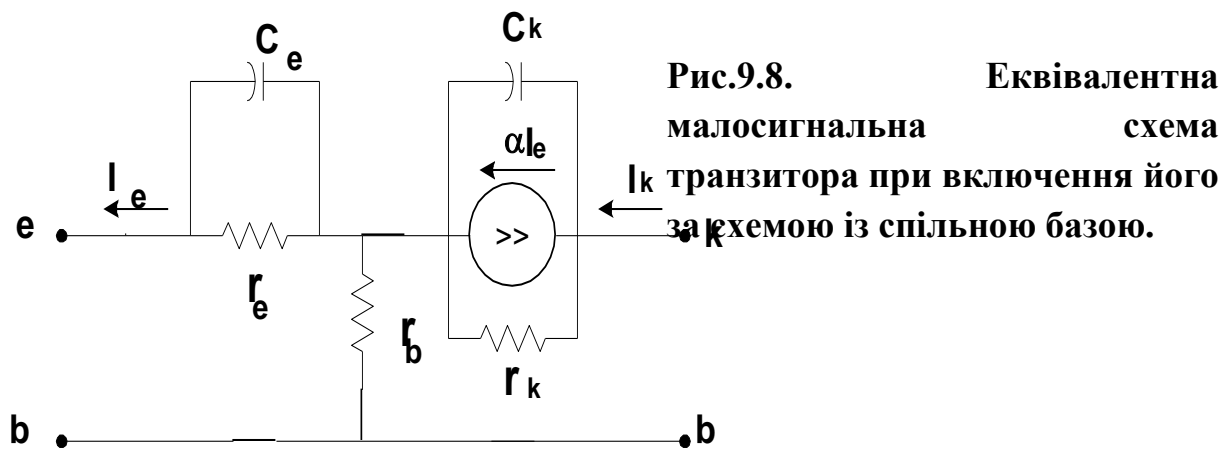


Рис.9.9. Еквівалентна схема включення транзистора із спільним емітером.

Еквівалентна схема при включенні із *спільною базою* зображена на рис.9.8. В цій схемі задається струм емітера і обраховуються або вимірюються всі останні параметри еквівалентної схеми.

Еквівалентна малосигнальна схема при включенні транзистора в схемі із *спільним емітером* зображена на рис. 9.9. В цій схемі задається струм бази. Аналізуючи схему включення транзистора із спільним емітером, бачимо, що колекторний струм досить сильно залежить від базового струму. При $\alpha_N = 0.99$ $B = \alpha_N / (1 - \alpha_N) = 0.99 / (1 - 0.99) = 99$.

Ємності C_e і C_k виникають тому, що на р-п і п-р переходах з'являються просторові заряди. Для надзвичайно грубої оцінки ємностей можна використати час зарядки цих конденсаторів

$$\tau_e = r_e C_e \quad (9.39) \quad \text{і} \quad \tau_b = r_b C_k \quad (9.40)$$

Величини постійних часу зарядки цих конденсаторів становлять $\tau_e \sim 0.1$ нс; $\tau_b \sim 1.0$ нс, тоді $C_e \sim 100$ пФ; $C_k \sim 1$ пФ.

Для більш точного розгляду ємностей потрібно пам'ятати, що колекторному і емітерному переходам притаманні ємності, котрі умовно можна розділити на *зарядну ємність*, зв'язану з наявністю зарядних струмів, і *дифузійну ємність*, зв'язану з інжекцією носіїв струму.

Розглянемо спочатку ємність емітерного переходу. Його *зарядна ємність* $C_{e,зар}$ наближено визначається таким чином

$$C_{e,зар} = \frac{\epsilon S}{4\pi l_{екр}} = \frac{\epsilon S}{4\pi} \sqrt{\frac{4\pi e N_a}{\epsilon(V_e \pm \phi)}} = S \sqrt{\frac{e N_a \epsilon}{4\pi(V_e \pm \phi)}} \quad (9.41)$$

Взагалі під коренем в (9.41) повинна стояти не концентрація акцепторів, а

співвідношення $\frac{N_a N_d}{N_a + N_d}$, котре для емітерного переходу при $N_d > N_a$

переходить в N_a . Контактна різниця потенціалів ϕ визначається матеріалами і становить за порядком величини $0.3 \div 0.4$ В.

Крім зарядної ємності емітерний перехід має ще *дифузійну ємність* $C_{e,диф}$. Вона виникає тому, що при зміні напруги на переході змінюється кількість нерівноважних інжектованих в базу носіїв струму. Дифузійна ємність прямо пропорційна постійному струму емітера і середньому часові існування нерівноважних зарядів в базі τ . Значення τ визначається середнім часом дифузії носіїв струму від емітера до колектора крізь базу $\tau = w_B^2 / 2D_n$.

$$C_{e,dif} = \frac{e}{kT} I_{e0} \tau = \frac{1}{r_e} \frac{w_B^2}{2D_n} \quad (9.42)^4$$

Ці ємності за порядком величини такі $C_{e,зар}=20\div100\text{пФ}$; $C_{e,диф}=800\text{пФ}$ при $I_{e0}=1\text{мА}$, тобто $C_{e,зар}<C_{e,dif}$.

Наявність емітерної ємності призводить до того, що коефіцієнт передачі α залежить від частоти $\alpha(\omega/\omega_\alpha)$, де $\omega_\alpha=2.43L^2/\tau_f w_B^2$, де τ_f - час життя носіїв струму в базі. Ці величини мають такі типові значення $\omega_\alpha\sim 6\cdot 10^7\text{с}^{-1}$, $\nu_\alpha\sim 10\text{мГц}$. Колекторний перехід також має зарядову і дифузійну ємність. Його зарядова ємність визначається формулою

$$C_{k,зар} = S \sqrt{\frac{\epsilon e N_a N_d}{4\pi(N_a + N_d)|V_k|}} \quad (9.43)$$

Ця ємність менша ніж емітерна дифузійна ємність, бо $N_a\sim N_d$ і під коренем буде стояти $N_a/2$ і крім того буде стояти $|V_k| > |V_e|$.

Дифузійна ємність колектора

$$C_{k,dif} = I_k \frac{w_B \Delta w_B}{D \Delta V_k} \quad (9.44)$$

Комбінуючи (9.44), (9.35) і (9.37), маємо

$$C_{k,dif} = I_k \frac{w_B}{D} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon}{e N_d |V_k|}} = \frac{\tau_k}{r_k} \quad (9.45)$$

$r_k > r_e$, тому $C_{k,диф} < C_{e,dif}$.

6. Обґрунтуйте використання методів ізоляції елементів інтегральних мікроелектронних схем за допомогою зворотно зміщених p - n переходів. Проаналізуйте їх позитивні та негативні властивості. Наведіть приклади.

На рис. 12.29 зображений поперечний переріз ІМС з ізоляцією за допомогою зворотно зміщених p - n переходів. Цей різновид ізоляції називають також *діодною ізоляцією*. Видно, що між окремими елементами ІМС знаходяться p - n переходи. Якщо за допомогою зовнішнього джерела напруги зворотно змістити всі p - n переходи, то між ними не буде йти струм і вони служитимуть ізолюючими прошарками між окремими елементами ІМС. Для створення такої ізоляції, як це видно з рис. 12.29, витрачається частина простору підкладинки протяжністю $d \times d$, що зменшує густину монтажу.

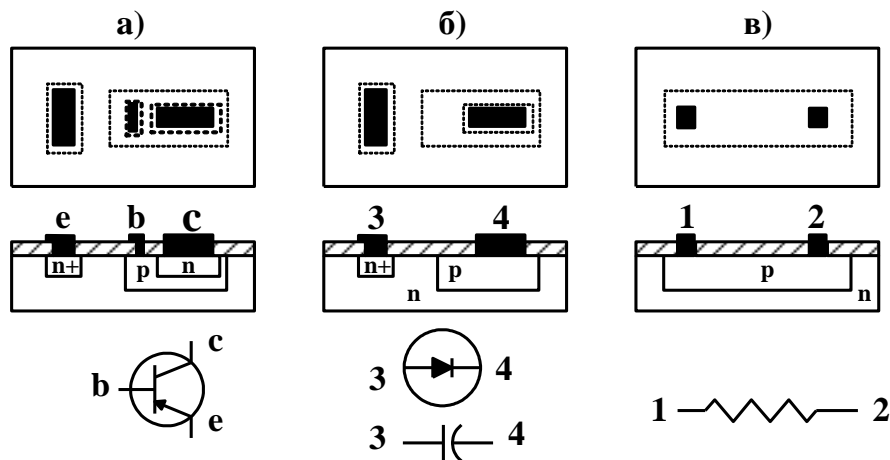


Рис. 12.30. Типові елементи твердотільних напівпровідникових ІМС: а) – транзистор, б) – діод або ємність, в) – резистор.

Цей спосіб ізоляції приваблює тим, що не виникає потреби вводити додаткові технологічні операції. Дійсно, всі елементи ІМС транзистори, діоди, ємності, резистори та діодна ізоляція виготовляються у приповерхневій частині напівпровідникової підкладинки у за допомогою однакової технології. Усе це разом із позитивними схемотехнічними якостями напівпровідникових елементів забезпечує широке практичне використання твердотільних напівпровідникових схем у мікроелектроніці. Проте метод діодної ізоляції має також свої недоліки, а саме:

- необхідність використання зовнішнього джерела напруги для створення зворотного зміщення на p - n переходах між елементами ІМС;
- складність еквівалентних схем, тому що потрібно додатково враховувати ємності зворотного зміщених p - n переходів;

- наявність гальванічних зв'язків між зворотно зміщеними p - n переходами тощо.

7. Які переваги використання кремнію при виготовленні інтегральних мікросхем?

Кремній є найбільш важливим напівпровідниковим матеріалом для мікроелектронної промисловості. На сьогоднішній день прилади на основі кремнію складають порядку 98 % усіх напівпровідникових приладів. Кремній – один з найбільш детально досліджених елементів періодичної таблиці. Основні переваги використання кремнію при виготовленні інтегральних мікросхем:

1. Висока поширеність у природі (25 % земної кори) і поступається у поширенні тільки кисню.
 2. Відносно велика ширина забороненої зони 1.1 еВ (для порівняння германій має тільки 0.66 еВ), що дозволяє суттєво зменшити паразитні струми «утечки (рос.)» для р-п переходів.
 3. Широкий діапазон робочих температур (+150.. -40 °C).
 4. Дуже просте створення якісного оксиду SiO_2 , а, як відомо, оксид є необхідною складовою процесу створення мікросхем.
 5. Випрямні прилади на основі кремнію мають високу пробивну напругу.
 6. Виготовлення кремнію є простішим і економічно більш вигідним процесом, аніж, наприклад, германію або напівпровідників групи A^3B^5 .
- Дж.: Зи, «Технология СБИС»

8. Сформулюйте різницю у впливі просторового електричного заряду на електричний струм у вакуумному і напівпровідниковому діодах.

Різниця полягає в тому, що рух заряду (електричного струму) у вакуумі відбувається без втрат, а в напівпровіднику присутнє відбиття, тертя, тобто деякі втрати. Отже, електричне поле неперервно прискорює заряд у вакуумному діоді – заряд рухається з прискоренням. А в напівпровідниковому діоді рух відбувається з відповідною сталою швидкістю.

До того ж, генераційний струм р-п переходу напівпровідника пропорційний товщині області просторового заряду. При прикладанні до р-п переходу напруги в прямому напрямку, то збільшується концентрація носіїв заряду в ОПЗ і переважають процеси рекомбінації. А для вироджених н/п ширина ОПЗ така, що можливе тунелювання носіїв заряду із заповнених електронами областей п- чи р-типу н/п на вільні р- чи п-типу н/п. У той же час для р-п переходу на вироджених н/п струми над бар'єром ОПЗ дуже малі внаслідок значної висоти бар'єра.

9. Сформулюйте умови виникнення та спостереження квантового розмірного ефекту. Наведіть приклад дослід, в якому чітко показано наявність квантового розмірного ефекту.

Квантові ефекти повинні виявлятися тоді, коли основні носії заряду рухаються у потенціальній ямі, створеній або двома поверхнями зразка, або контактним полем на гетеропереході, або просторовим зарядом у приповерхневій області напівпровідника, розміри якої менші довжини хвилі де Бройля, тобто при виконанні умови $d < \lambda_D$. В цьому випадку складова квазіімпульсу носіїв заряду вздовж осі, по якій товщина d обмежує розмір зразка або потенціальної ями, стає невизначеною ($\Delta p > 2\pi\hbar/d$). Енергетичний спектр квазічастинок починає залежати від форми та розмірів потенціальної ями $U(r)$.

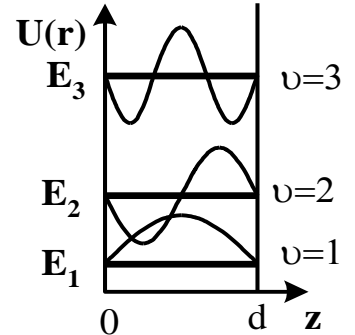


Рис.2.1. Прямокутна потенціальна яма. Рівні енергії та хвильові функції.

Квантовий розмірний ефект виникає й може спостерігатися за таких необхідних умов:

- *по-перше*, відстань між розмірними підзонами повинна бути більшою за тепловий розкид енергії квазічастинок

$$\Delta E_{v,v+1} > k_B T \quad (2.30)$$

Для напівпровідників при 300K ця умова виконується при товщинах $d < 10^{-5}$ см.

- *По-друге*, $\Delta E_{v,v+1}$ повинно бути більшим природної ширини енергетичних рівнів

$$\Delta E_{v,v+1} > \varepsilon \quad (2.31)$$

За допомогою співвідношення невизначеностей оцінка дає $\delta\varepsilon > 2\pi\hbar / \tau$, де τ - середній час життя на даному енергетичному рівні. Припустимо, що $\tau = \mu m / e$, тоді

$$\Delta E_{v,v+1} > 2\pi\hbar / \tau = 2\pi\hbar e / \mu m \quad (2.32)$$

Для напівпровідників із великими рухливостями носіїв, коли $\mu > 10^3 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \text{ с}^{-1}$, ця умова виконується при $d < 5 \cdot 10^{-6} \text{ см}$.

- *По-третьє*, концентрація носіїв заряду n повинна бути не дуже великою, щоб заповнювалась лише 1-ша розмірна підзона, що має місце при умові $n < g_1 = 3\pi/2d^3$ (2.33)

де $g_1 = 3\pi/2d^3$ - концентрація станів у 1-й розмірній підзоні.

(Концентрацію електронних станів в ν -й енергетичній зоні в 2D випадку можна знайти, використовуючи відповідне значення для густини станів (див.2.43):

$$g_\nu = \int_{E_\nu}^{E_{\nu+1}} g_{2D}(d) dE = \int_{E_\nu}^{E_{\nu+1}} (m / \pi \hbar^2 d) dE = (m / \pi \hbar^2 d) (E_{\nu+1} - E_\nu) = (p / 2d^3) (2\nu_1 + 1)$$

При $d \sim 10^{-5} \text{ см}$ ця умова виконується, коли концентрації носіїв у зразку менша за 10^{16} см^{-3} ($n < 10^{16} \text{ см}^{-3}$). Вона може бути виконана у не вироджених напівпровідниках при низьких температурах та в напівметалах таких, як Ві.

- *По-четверте*, тонкий зразок (нанометрових товщин) повинен бути однорідним із розкидом товщин меншим довжини хвилі де Бройля.

За цих умов КРЕ буде мати такі прояви:

1. зміну в енергетичному спектрі носіїв заряду, що може спричинити появу напівпровідникових властивостей у деяких напівметалах та викликати зміну ефективної маси носіїв заряду;
2. зміну густини електронних станів та її залежність від енергії; в двовимірному випадку вона перестав залежати від енергії носіїв і починає залежати від товщини зразка d ;
3. зміну концентрації носіїв заряду $n(d)$;
4. появу залежності часу релаксації носіїв заряду τ від d .
5. зміну глибини екранування електричного поля $L_e(d)$.

Квантовий розмірний ефект повинен призводити до зміни металевого характеру електропровідності зразка напівметалу, наприклад, Ві, на напівпровідниковий при зменшенні його товщини (рис.2.5.2а та рис.2.5.2b). Ця зміна відбувається внаслідок зміни енергетичного спектра згідно з (2.25) як електронів (n), так і дірок (p).

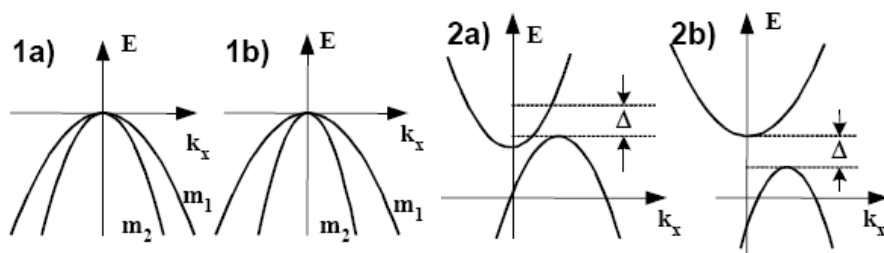


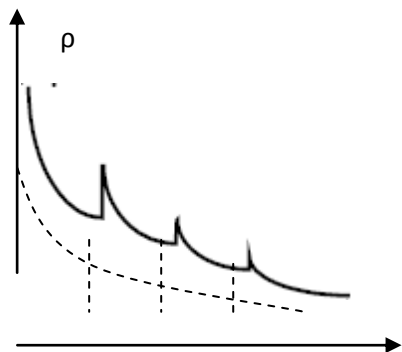
Рис.2.5. Енергетичні спектри носіїв: 1а) для нескінченного та 1б) тонкого зразків Si; 2а) та 2б) для нескінченного та тонкого зразків напівметалу.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ КРЕ

Розглянемо кілька прикладів експериментального дослідження КРЕ, а саме:

1. періодичні зміни товщинної залежності питомого опору напівметалів,
2. особливості вольт-амперних характеристик тунельного струму сандвічів з дуже тонким одним із електродів,
3. спектр вбирання в інверсних каналів провідності напівпровідників та ін.

1. Експериментально спостерігались *періодичні зміни питомого опору тонких шарів напівметалів Sb та Bi* в залежності від їх товщини при незмінності їх структури при зміні d . Ця залежність схематично зображена на рис. Період $\Delta d = \pi \hbar / \sqrt{2m^*F}$ дав можливість оцінити досить вірогідні значення енергії Фермі (F) для цих металів. Згодом були виконані досліди із дуже тонкими металевими дротами.



$$\frac{1}{\rho} = \sigma \sim \tau$$

$$\Delta E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* d^2} (2n + 1)$$

2. Спостерігались особливості вольт-амперних характеристик тунельного струму для сандвіча, котрий, наприклад, складається із тонкого окисленого шару Bi товщиною d , покритого плівкою Pb , як це показано на рис. 2.17.а. Товщина окисдної плівки δ була настільки малою, що крізь неї відбувалась тунельна емісія із Bi в Pb при помірних напругах на сандвічі. Товщина вісмутової плівки вибиралась меншою за довжину хвилі де-Бройля. Енергетичний спектр носіїв у вісмутівій плівці розбивається на розмірні підзони, як це зображено на схематичному Рис.2.16.б. Тунельний струм в сандвічі прямо пропорціональний густинам зайнятих станів в металевому електроді, з якого відбувається тунелювання, та незайнятих станів в металевому електроді, в який йде тунельний струм. Напруга V на електродах зсуває рівень Фермі в одному металі по відношенню до іншого,

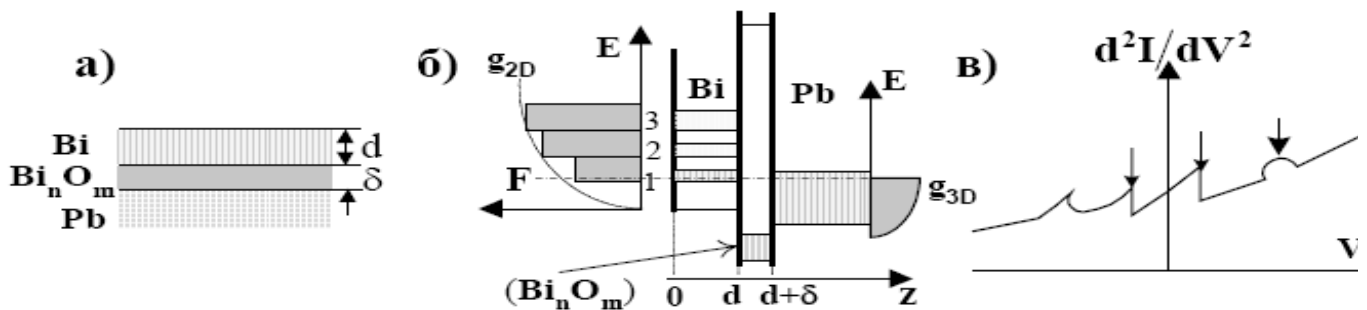
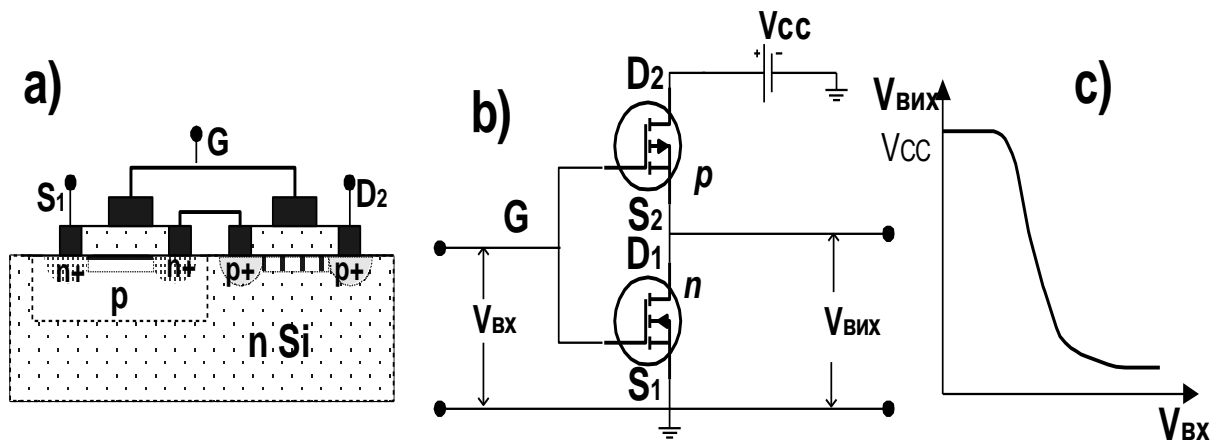


Рис.2.17. Bi-Pb сандвіч а), б) - його енергетична діаграма та в) - вольт-амперні характеристики його тунельного струму $I \propto V \propto$ залежність $d^2I/dV^2 \propto F \propto V$.

так що $F_{\text{Bi}} - F_{\text{Pb}} = eV$. Тому при деяких напругах густина зайнятих станів, наприклад, в 1-й підзоні вісмуту стане на одному рівні з рівнем незайнятих станів в свинцевому електроді, тобто перша розмірна підзона Bi стане вище рівня Фермі Pb . За таких умов тунельний струм зростає і на вольт-амперній кривій з'явиться особливість (Рис.2.16.с). Такі самі особливості виникають й тоді, коли створюються сприятливі умови для тунелювання з інших підзон. Характерні особливості вольт-амперних кривих тунельного струму в сандвічах з одним або обома тонкими металевими електродами, в яких можуть мати місце квантові розмірні ефекти, дійсно спостерігаються експериментально.

10. Чому при використанні польових транзисторів з ізольованим затвором використовують компліментарні структури.

Здебільшого для зменшення потужності, що витрачається при роботі МОН транзисторів, в мікроелектроніці використовуються **комплементарні (КМОН) транзистори**. Вони виготовляються на одному кристалі за допомогою групової технології й складаються із двох МОН транзисторів з р- і n- каналами провідності. Їх характерною особливістю є протилежна полярність напруг живлення та керування. Найбільш широке застосування вони знайшли в інверторах, призначених для перестановки вхідного та вихідного сигналів. На рис.3.16 зображено поперечний переріз КМОН транзистора, його електрична схема та



передаточна характеристика. Вона працює так. Нехай спочатку вхідний сигнал $V_{\text{ВХ}}$ менший порогового сигналу n-канального МОН транзистора але має досить значну від'ємну величину по відношенню до підкладинки-канального МОН транзистора. В такому режимі р-канальний транзистор відкритий, а n-канальний закритий. Відкритий р-канальний транзистор має малий опір, а закритий n-канальний транзистор великий опір. Тому виникає значний вихідний сигнал $V_{\text{вих}}$, котрий наближається до напруги зовнішнього джерела живлення V_{CC} ($V_{\text{вих}} \sim V_{\text{CC}}$). При зменшенні від'ємної напруги $V_{\text{ВХ}}$ знаку р-канальний транзистор закривається, а n-канальний відкривається. Зовнішня напруга починає падати на закритому р-транзисторі і вихідна напруга зменшується майже до нуля ($V_{\text{вих}} \rightarrow 0$). Таким чином, в двох станах інвертора його вихідна напруга або наближається до напруги зовнішнього джерела живлення, або рівна нулеві. Один із транзисторів КМОН інвертора завжди

закритий і крізь систему не тече статичний струм, тому середня статична потужність, що розсіюється, мала, бо $w \sim I_D V_{cc} \rightarrow 0$. Передаточна крива КМОН інвертора показана на Рис.3.16.с. Такі позитивні якості КМОН інверторів, як мала середня потужність, максимальна продуктивність більша за $10^{14} \text{ порт} \cdot \text{Гц}$, значний фактор якості $P\tau \sim 10^{-14} \text{ Дж}$ та більш проста і значно дешевша технологія їх виготовлення по зрівнянню з біполярними транзисторами забезпечує цьому різновиду елементів ІМС широке практичне застосування.

11.Окресліть області застосування еквівалентних схем біполярних транзисторів та обґрунтуйте їх корисність.

(взято з файла microrlectronika.docx)

Аналіз роботи транзисторів зручно здійснювати за допомогою еквівалентних схем. Вони складаються з лінійних елементів схем (R, C та L) й повинні вірно відображати похідні від залежностей $I(V)$, котрі зв'язують між собою малі зміни струмів і напруг. Таким чином, еквівалентна схема є моделлю схеми, яка за своїми властивостями передачі змінного сигналу повинна не відрізнятися від реального транзистора. В залежності від величини та частотного діапазону сигналу та схеми включення транзистора розрізняють декілька еквівалентних схем. Наведемо два приклади низькочастотних малосигнальних еквівалентних схем транзистора при включенні його зі спільною базою (ССБ) (рис.12.9) та спільним емітером (ССЕ) (рис.12.10).

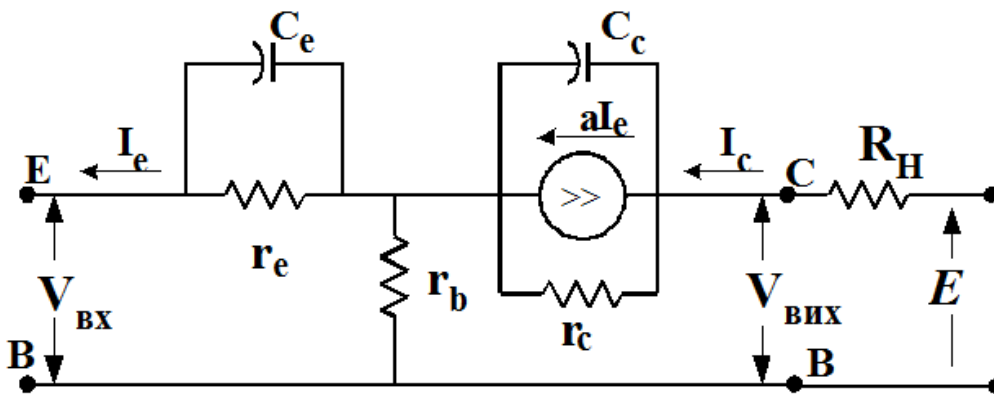


Рис.12.9. Еквівалентна малосигнальна схема транзистора зі спільною базою (ССБ).

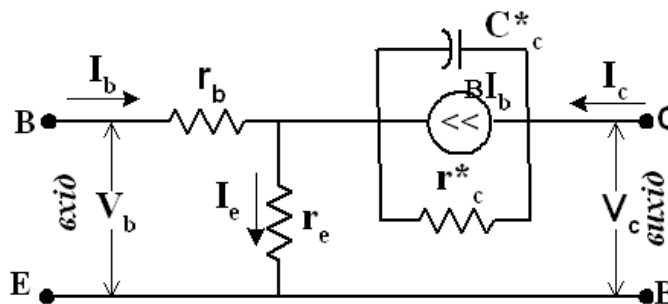


Рис.12.10. Еквівалентна схема включення транзистора зі спільним емітером, $\beta = \alpha / (1 - \alpha)$.

Еквівалентну схему транзистора зі спільною базою (ССБ) (рис.12.9) легко отримати з моделі Еберса-Молла, зображеної на рис.12.2, заміною емітерного і

колекторного переходів їх диференціальними опорами $z_e = \partial V_e / \partial I_{e|V_c} = r_e / (1 + j\omega C_e r_e)$ та $z_{\bar{n}} = \partial V_{\bar{n}} / \partial I_{\bar{n}|V_{\bar{a}}} = r_{\bar{n}} / (1 + j\omega C_{\bar{n}} r_{\bar{n}}^*)$ та знехтувавши джерелом $\alpha_j I_2$, тому що у нормальному робочому режимі можна знехтувати струмом носіїв I_2 , що інжектують із колектора в базу. При малих частотах, коли $\omega C_{e,c} r_{e,c} < 1$, диференціальні опори z_e та z_c можна розглядати як активні опори. В цій схемі задається струм емітера I_e і обраховуються або вимірюються всі останні її параметри. Коефіцієнт підсилення струму в схемі ССБ визначається прямим коефіцієнтом передачі $\alpha = \alpha_N$ ($M_I = i_2 / i_1 = i_c / i_e = \alpha$), а його вхідний та вихідний опори рівні $R_{ex} = r_{be} = r_e + r_b$, $R_{ex}^{-1} \cong r_c^{-1} + R_H^{-1}$, де R_H — опір навантаження колектора. При визначенні вихідного опору ми знехтували впливом на нього опору r_b , котрий менший за r_c ($r_b < r_c$).

Еквівалентна малосигнальна схема транзистора в схемі зі *спільним емітером* зображена на рис. 12.10. В цій схемі задається струм бази I_b та нехтується, як і в попередній схемі ССЕ, впливом колекторного переходу на емітерний перехід, тобто нехтуємо членом $\alpha_j I_2$ моделі Еберса-Молла. Коефіцієнт передачі струму B бази згідно (12.8а) залежить від α й, коли $\alpha = 0.99$, то $B = \alpha / (1 - \alpha) = 99$. Опір колекторного переходу r_c^* цієї схеми відрізняється від опору r_c схеми ССЕ ($r_c^* \neq r_c$), тому що ці еквівалентні

(на наступній сторінці продовження)

схеми мають різні джерела струму βi_b та αi_e відповідно. Співвідношення, що зв'язує ці опори, можна отримати з умови еквівалентності схем ССБ та ССЕ. Вони рівноцінні тоді, коли в режимі холостого ходу $i_e = i_b$ та $\beta i_b r_c^* = \alpha i_e r_c$, тобто, коли

$$r_c^* = (1 - \alpha) r_c \quad (12.30)$$

Оскільки $\alpha \leq 1$, то $r_c^* < r_c$.

При високих частотах сигналів потрібно враховувати вплив опору базової області та відповідних реактивних складових елементів схем. Одна з еквівалентних схем

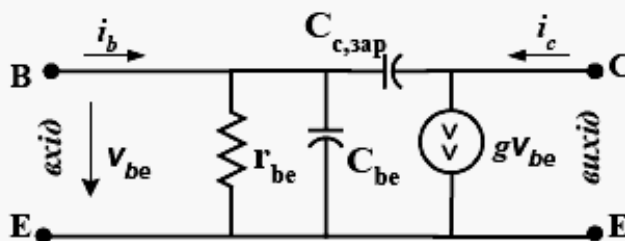


Рис.12.11. Еквівалентна ССЕ схема транзистора для області високих частот.

біполярного транзистора для області високих частот зображена на рис.12.11. В цій схемі C_{cq} - зарядна (бар'єрна) ємність колекторного переходу, C_{cdif} - дифузійна ємність колекторного переходу, зв'язана із інжекцією носіїв (12.40), $C_{BE} = C_{BEdif} + C_{BEq}$ - ємність база-емітер, $g = \partial I_C / \partial V_{BE} \approx i_c / |v_T|$ - крутизна, $r_{BE} = \partial V_{BE} / \partial I_B = gB$ - опір база-емітер, $C_{Bqf} = C_{BEdif} \cong w_B^2 I_E / 2 D_n V_T$, а гранична частота $\omega_m = [r_{be} (C_{be,dif} + C_{c,зар})]^{-1}$.

12. Особливості та застосування термоелектронної емісії. Чи має вона спільні риси з надбар'єрною емісією в напівпровідникових структурах?

(Фізична мікроелектроніка Находкін ст. 117)

Якщо джерелом енергії для подолання бар'єра на гетеропереході є енергія теплового руху, то це явище називається надбар'єрною або термоелектронною емісією. Носії струму, котрі за рахунок теплової енергії піднімаються на енергетичні рівні, енергія яких більша за висоту потенціального бар'єру на гетеропереході, можуть подолати цей бар'єр і перейти із одного електрода в інший або із метала в напівпровідник (діелектрик).

Спочатку розглянемо приклад МДМ сандвича з товщиною діелектрика L меншою за довжину вільного пробігу носіїв струму в діелектрику ℓ . Позначимо роботи виходу металів M_1 і M_2 через ϕ_1 і ϕ_2 , а їх рівні Фермі через F_1 і F_2 . Нехай в діелектрику відсутні пастки і його можна наближено вважати ідеальним. Найкращою моделлю ідеального діелектрика є вакуумний проміжок. На рис.5.2.а і б. зображені енергетичні схеми такого

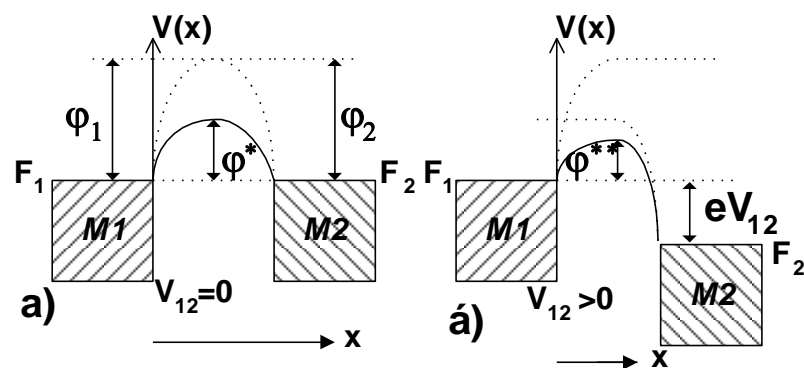


Рис.5.1. Енергетична схема сандвича, створеного за допомогою двох різних металів M_1 і M_2 , розділених вакуумним проміжком: а) - з нульовою напругою $V_{12}=0$; б) - з скінченною напругою $V_{12}>0$.

сандвича для двох випадків нульової напруги між електродами $V_{12}=0$ і скінченної напруги $V_{12}\neq 0$. Крізь такий сандвич буде йти струм $i=i_1-i_2$, де кожен із струмів $i_{1,2}$ визначається термоелектронною емісією носіїв струму із металу в діелектрик.

Ці струми визначаються за допомогою формул Річардсона-Дешмана для термоелектронної емісії

$$i_{1,2} = S_{1,2} A_{1,2} T^2 \bar{D}_{1,2} e^{-\frac{e\phi_{1,2}}{kT}} \quad (5.1)$$

де S -площа гетеропереходу, $A_{1,2}$ -константи Річардсона, D - середній коефіцієнт прозорості потенціального бар'єра, $e\phi_{1,2}$ - роботи виходу, T - температура, k -стала Больцмана. Після підстановки (5.1) у вираз для струму крізь перехід отримаємо

$$\begin{aligned} i &= i_1 - i_2 = S_1 A_1 \bar{D}_1 T^2 e^{-\frac{e\phi^*}{kT}} - S_2 A_2 \bar{D}_2 T^2 e^{-\frac{e\phi^{**} + eV_{12}}{kT}} = \\ &= S_1 A_1 \bar{D}_1 T^2 e^{-\frac{e\phi^*}{kT}} \left(1 - \frac{S_2 A_2 \bar{D}_2}{S_1 A_1 \bar{D}_1} e^{-\frac{eV_{12}}{kT}} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Величина висоти бар'єра ϕ^* показана на рис.5.23. Висота бар'єра $e\phi^{**}$ залежить від напруженості електричного поля E між електродами M_1 та M_2

$$e\phi^* = e\phi_1 - \left\{ \left(\frac{e^2 \lg 2}{L\epsilon} \right)^2 + \frac{e^3 E}{\epsilon} \right\}^{1/2} \quad (5.3)$$

де L -товщина діелектрика, ϵ -діелектрична стала. Цей вираз отриманий для параболічного бар'єра. Для великих полів, коли $e^3 E / \epsilon > (e^2 \lg 2 / L\epsilon)$,

$$e\phi^* \cong e\phi_1 - \frac{e^{3/2} \sqrt{E}}{\sqrt{\epsilon}} \quad (5.4)$$

висота потенціального бар'єру має такий самий вигляд, як і для поверхні металу в електричному полі (ефект Шотткі). При дуже малих значеннях L висота потенціального бар'єра згідно формули (5.3) залежить від L .

Таким чином, основною рисою надбар'єрної емісії є експоненційна залежність надбар'єрного струму від температури. Проте слід зауважити, що формула (5.2) повинна бути уточнена шляхом врахування таких особливостей:

- по-перше, залежності сталої Річардсона A від структури зон, котра частково може бути врахована за допомогою ефективної маси m^* , тому що $A = \frac{4\pi k^2 e m^*}{h^3}$;
- по-друге, залежності середньої прозорості потенціального бар'єра \bar{D} від його форми;

- по-третє, проникнення електричного поля в напівпровідник. Врахування проникнення електричного поля в напівпровідник призводить до того, що в формулі (5.3) для висоти бар'єра замість товщини діелектрика треба використовувати довжину, котра характеризує екранування просторового заряду. Тому, коли глибина екранування L_e менша за відстань між електродами L ($L_e < L$), в формулі (5.3) доцільно замість L використовувати саме L_e

$$L_e = \left(\frac{\varepsilon(e\phi \pm eV_{1,2})}{2\pi N_d e^2} \right)^{1/2} \quad (5.5)$$

тобто замінити величиною, котра залежить від кореня квадратного від різниці потенціалів $V_{1,2}$. Таким чином, напруженість електричного поля в напівпровіднику по іншому, ніж у вакуумі, залежить від різниці потенціалів:

$$E = \frac{V_{12}}{L_e} \propto \frac{V_{12}}{V_{12}^{1/2}} = V_{12}^{1/2} \quad (5.6)$$

Якщо тепер вираз (5.6) для напруженості електричного поля підставити в формулу (5.2) для струму крізь сандвич, то

$$i = S_1 A_1 \bar{D}_1 T^2 e^{-\frac{e\phi^*}{kT}} \left(1 - \frac{S_2 \bar{D}_2 A_2}{S_1 \bar{D}_1 A_1} e^{-\frac{eV_{12}}{kT}} \right) = i_0(T) \left(1 - \beta e^{-\frac{eV_{12}}{kT}} \right) \quad (5.7)$$

де

$$\beta = \frac{S_2 \bar{D}_2 A_2}{S_1 \bar{D}_1 A_1} \quad (5.8)$$

$$i_0(T) = S_1 A_1 \bar{D}_1 T^2 e^{-\frac{e\phi^*}{kT}}$$

При збільшенні електричного поля, коли $e^3 E / \varepsilon > (e^2 \lg 2 / \varepsilon L)^2$ тобто при умові, що $V_{12} > (\lg 2) e / \varepsilon L$

$$\lg \frac{i}{i_0} \approx -\frac{e\phi^*}{kT} \cong -\frac{e\phi_1}{kT} + \frac{e^{3/2} \sqrt{E}}{kT} \propto \frac{B V_{12}^{1/4}}{\varepsilon^{1/2} kT} \quad (5.9)^1$$

Із формули (5.9) видно, що логарифм надбар'єрного струму у випадку напівпровідників повинен бути прямо пропорційним кореню четвертого ступеня від напруги.

- По-четверте, в реальних зразках майже завжди існують рівні прилипання, котрі можуть захоплювати інжектвані носії струму і змінювати величини струмів інжектованих носіїв.
- По-п'яте, при великих рівнях інжекції струм обмежується просторовим зарядом.

13.Порівняйте основні властивості біполярних і польових транзисторів з ізольованим затвором.

Порівняльна характеристика МОН та біполярних транзисторів:

Біполярні (n-p-n)	КМОН, МОН
1. Здійснюється керування струму I.	1. Здійснюється керування напруги U.
2. У базу біполярного транзистора струм протікає протягом усього часу роботи.	2. У затвор КМОН структури струм протікає лише в момент переключення, що зменшує нагрівання транзистора.
3. Коефіцієнт підсилення за струмом $M_I = \alpha < 1$, $M = \beta > 1$.	3. Коефіцієнт підсилення за напругою $M_U \approx \frac{2}{\lambda V_{dsat}}$ (в насиченні).
4. Малий вхідний опір $R_{ex} < 10^5 \text{ Ом}$.	4. Великий вхідний опір $R_{ex} \approx 10^{13} \text{ Ом}$.
5. Потрібна ізоляція один від одного.	5. Не потрібно додаткової ізоляції один від одного.
6. Для виконання фотоепітаксії потрібно більше 8-ми фотошаблонів.	6. Для виконання фотоепітаксії потрібно більше 5-ти фотошаблонів.
7. При виготовленні транзистора виконується біля 130 технологічних операцій.	7. При виготовленні транзистора виконується біля 38 технологічних операцій.
8. В процесі виготовлення відбувається нагрівання до 1000°C приблизно 10 разів. (Потрібно пам'ятати про дифузію).	8. В даному випадку лише 1-2 операції нагріву.

9. Мінімальна напруга колектор-емітер ≈ 0.2 В	9. Мінімальна напруга стік-витік може прямувати до 0.
10. Робота з міліамперними струмами і, як наслідок, більша крутизна	10. Переважно робота з мікроамперними струмами.

Таким чином МОН транзистор технологічно простіший біполярного транзистора, потребує для роботи значно менше енергії та дозволяє збільшувати ступень інтеграції ІМС. Крім того, на відміну від біполярних транзисторів, котрі забезпечують точне перетворення аналогових сигналів та мають значні керуючі струми, КМОН транзистори мають низьку енергію, що витрачається, керуються напругою та ефективно використовуються в запам'ятовуючих пристроях.

14. Проаналізуйте від чого залежить ефективність емітера, коефіцієнт переносу неосновних носіїв заряду, ефективність збору колектора біполярного транзистора, що використовується в інтегральних мікросхемах.

(2 варіанти відповіді)

1 варіант:

Ефективність емітера γ або коефіцієнт передачі інжекції визначається

$$\gamma \equiv \left. \frac{\partial I_{ne}}{\partial I_e} \right|_{V_k} \quad (9.15)$$

Коефіцієнт переносу струму крізь базу β визначається

$$\beta \equiv \left. \frac{\partial I_{nk}}{\partial I_{ne}} \right|_{V_k} \quad (9.16)$$

Ефективність колектора або коефіцієнт множення струму колектора α^* визначається

$$\alpha^* \equiv \left. \frac{\partial I_k}{\partial I_{nk}} \right|_{V_k} \quad (9.17)$$

В формулах (9.15 ÷ 9.17) індексом n позначено електронний компонент струму у випадку n^+ -р-п транзистора. Для р-п-р транзистора індекс n потрібно замінити індексом р.

Оскільки $|I_{nk}| < |I_{ne}| < |I_{nk} + I_{np}|$, завжди $\alpha < 1$. Для типових транзисторів $\alpha = 0,990 \div 0,998$.

Оцінимо, як залежать параметри транзистора від параметрів напівпровідників, котрі використовуються в транзисторах.

Коефіцієнт інжекції або ефективність емітера γ легко оцінити таким чином

$$\gamma \equiv \left. \frac{\partial I_{ne}}{\partial I_e} \right|_{V_k} = \frac{I_{ne}}{I_{ne} + I_{pe}} \quad (9.18)$$

де індексами n і р позначають електронну та діркову складові

струму. Електронний струм в базі і дірковий в емітерній частині в дифузійному наближенні теорії транзистора мають такий вигляд

$$I_{ne} \propto S_e e D_n \frac{\Delta n}{\Delta x} \approx e S_e D_n \frac{n_0 e^{\frac{eV_e}{kT}}}{w} \quad (9.19)$$

$$I_{pe} \propto S_e e D_p \frac{\Delta p}{\Delta x} \approx e S_e D_p \frac{p_0 e^{\frac{eV_e}{kT}}}{L_p} \quad (9.20)$$

Підставимо (9.19) і (9.20) в (9.18), тоді

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 + \frac{D_p p_0 w_B}{D_n n_0 L_p}\right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{e \mu_p p_0 w_B}{e \mu_p n_0 L_p}\right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma_p w_B}{\sigma_n L_p}\right)} \cong 1 - \frac{\sigma_p w_B}{\sigma_n L_p} \quad (9.21)$$

В формулі (9.21) використані такі позначення S_e - площа емітерного переходу, $D_{n,p}$ - коефіцієнти дифузії електронів і дірок, w_B - ширина бази, L_p - довжина дифузії дірок, n_0 , p_0 - концентрації рівноважних носіїв струму, а також використано співвідношення Ейнштейна

$$\mu_{n,p}/D_{n,p} = e/kT \quad (9.22)$$

Аналізуючи вираз (9.21) для коефіцієнта інжекції, можна дійти до таких висновків:

- для збільшення ефективності емітера (або коефіцієнта інжекції γ) потрібно, щоб електропровідність емітерної частини σ_n була більшою за електропровідність бази σ_p ($\sigma_n > \sigma_p$), тому емітерна n^+ частина транзистора значно сильніше легується ніж база і колектор; на практиці здебільшого використовують n^+ -р-п транзистор ще й тому, що донорна домішка фосфор значно краще розчиняється в кремнії і тому легше утворити n^+ емітер;
- для збільшення γ потрібно зменшувати ширину бази так, щоб $w_B/L_p \ll 1$;
- крім того час прольоту носіїв струму крізь базу залежить від рухливості носіїв струму тому базу бажано робити із кремнію р-типу, бо при цьому $\mu_n > \mu_p$ і саме прольот інжекттованих електронів в базі визначає інерційність транзистора ($t_n = w_B/\mu_n E < t_p = w_B/\mu_p E$);

За цих обставин на практиці здебільшого при виготовленні транзисторів перевагу віддають n^+ -р-п транзисторам, у яких γ має значення близьке до одиниці.

Звернемося до аналізу коефіцієнту переносу носіїв струму крізь базу β

$$\beta \equiv \frac{\partial I_{nk}}{\partial I_{ne}} \Big|_{V_k} \cong \frac{I_{ne} - I_r}{I_{ne}} \quad (9.23)$$

де I_{ne} - струм інжектіваних в базу неосновних носіїв (електронів), I_r - струм, щоспричиняється рекомбінацією інжектіваних носіїв струму в базі. Ці струми можна знайти, якщо розв'язати задачу про перенесення нерівноважних носіїв струму в напівпровідниках (глава 4). Наближено їх можна записати таким чином

$$I_{ne} \cong e S_e D_n \frac{n_0 e^{\frac{eV_e}{kT}}}{w_B} \quad (9.24)$$

$$I_r \approx e S_e \frac{w_B n_0 e^{\frac{eV_e}{kT}}}{2\tau_n} \quad (9.25)$$

Підставимо (9.24) і (9.25) в формулу (9.23), тоді

$$\beta = 1 - \frac{I_r}{I_{ne}} = 1 - \frac{w_B^2}{2L_n^2} \quad (9.26)^3$$

Якщо врахувати ще й поверхневу рекомбінацію, то замість τ_n в формулі (9.25) потрібно підставити ефективний час рекомбінації

$$\frac{1}{\tau_{ef}} = \frac{1}{\tau_n} + \frac{s}{d} = \frac{1}{\tau_n} \left(1 + \frac{s\tau_n}{d} \right) \quad (9.27)$$

тоді L_n^2 потрібно замінити на $L_{n\,ef}^2$

$$\frac{1}{L_{n\,ef}^2} = \frac{1}{D_n \tau_{n\,ef}} = \frac{1}{L_n^2} \left(1 + \frac{s\tau_n}{d} \right) \quad (9.28)$$

Підставимо (9.28) в вираз для β (9.26)

$$\beta = 1 - \frac{w_B^2}{2L_n^2} - \frac{w_B^2 s \tau_n}{2L_n^2 d} \frac{\Sigma'}{S_e} \quad (9.29)$$

³Більш точно I_r знаходиться за допомогою розв'язку рівняння $\frac{d^2(n-n_0)}{dx^2} - \frac{(n-n_0)}{D_n \tau_n} = 0$ з граничними умовами при $x=0$ $(n-n_0)=(n-n_0)_0 \exp\{eV_e/kT\}$; при $x=w$ $n-n_0=0$, тоді $\beta = \{Ch(w/L_n)\}^{-1}$.

де s - швидкість поверхневої рекомбінації, а Σ'/S_e - відношення площі, на якій відбувається поверхнева рекомбінація, до площі емітерного переходу. Аналізуючи вираз (9.29) для коефіцієнту переносу, можна дійти до таких висновків:

- вигідно мати базу p - типу, бо $\mu_n > \mu_p$, тобто $D_n > D_p$, тобто $L_n > L_p$, а це призводить до того, що $\beta_n < \beta_p$;
- зменшувати ширину бази так, щоб $w_B < L_n$;
- зменшувати швидкість поверхневої рекомбінації s , що збільшує β .

Ефективність колектора α^* іноді може бути більшою за одиницю за таких причин:

- по-перше, електрони, котрі попадають в колекторну область збільшують потік дірок в базу і

$$\alpha^*_1 = 1 + p_k \mu_p / n_k \mu_n \quad (9.30)$$

- по-друге, електрони в електричному полі колектора можуть прискоритись так, що виникне ударна іонізація і розмноження носіїв струму

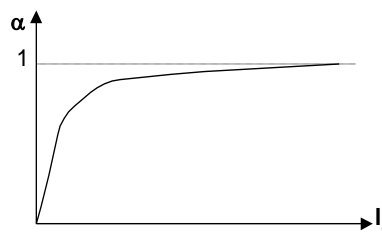
$$\alpha^*_2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{V_k}{V_{проб}} \right)^m} \quad (9.31)$$

де $V_{проб}$ - пробивна колекторна напруга, при якій виникає лавинне розмноження носіїв струму прискорених електричним полем в колекторній частині транзистора, $m < 2$. Тоді

$$\alpha^* = \alpha^*_1 \alpha^*_2 = \left(1 + \frac{p_k \mu_p}{n_k \mu_n} \right) \frac{1}{1 - \left(\frac{V_k}{V_{проб}} \right)^m} \quad (9.32)$$

Повний коефіцієнт підсилення або коефіцієнт передачі згідно (9.15) рівний добутку $\gamma \beta \alpha^*$

$$\alpha = \gamma \beta \alpha^*$$



Він залежить від струму емітера, як це показано на рис. 9.7, і здебільшого в робочих режимах досягає значень $0,98 \div 0,99$.

Рис.9.7.

Залежність α від емітерного струму

2 вариант:

Для характеристики свойств БТ используются внутренние и внешние физические параметры. К числу внутренних параметров

относятся параметры, характеризующие свойства эмиттера, базы и коллектора и измерить которые нельзя.

Эффективность эмиттера – внутренний параметр, характеризующий инжекционную способность эмиттерного перехода.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Определяется как } \gamma = \frac{I_{\text{Эр}}}{I_{\text{Э}}} = 1 - \frac{\sigma_n W}{\sigma_p L_n} \text{ - для } p\text{-}n\text{-}p \text{ БТ} \\ \text{Определяется как } \gamma = \frac{I_{\text{Эн}}}{I_{\text{Э}}} = 1 - \frac{\sigma_p W}{\sigma_n L_p} \text{ - для } n\text{-}p\text{-}n \text{ БТ} \end{array} \right\} (3.3)$$

Можно так же записать выражения для γ в общем виде

$$\gamma = 1 - \frac{\sigma_E W}{\sigma_{\text{Э}} L_{\text{Э}}}, \quad (3.4)$$

где $\sigma_E, \sigma_{\text{Э}}$ – электропроводность базы и эмиттера соответственно.

$L_{\text{Э}}$ – длина диффузионного смещения носителей, инжектированных из базы в эмиттер.

Эффективность эмиттера γ всегда меньше единицы и чем ближе она к единице, тем лучше свойства эмиттерного перехода.

Коэффициент переноса носителей через базу α_n – характеризует свойства базы и определяется для $p\text{-}n\text{-}p$ БТ следующим выражением:

$$\alpha_n = \frac{I_{\text{КР}}}{I_{\text{Эр}}} = 1 - \frac{W^2}{2L_{\text{б}}^2}, \quad (3.5)$$

где $L_{\text{б}}$ – длина диффузионного смещения носителей, инжектированных из эмиттера в базу. α_n всегда меньше единицы и зависит от толщины базы и параметров материала базы ($L_{\text{б}}$).

Эффективность коллектора α^* – характеризует способность коллекторного перехода экстрагировать неосновные носители из базы. Для $p\text{-}n\text{-}p$ БТ α^* определяется как

$$\alpha^* = \frac{I_K}{I_{KP}} \approx 1 \quad (3.6.)$$

Обычно эффективность коллектора полагают равной единице, поскольку из-за разницы в площадях эмиттерного и коллекторного переходов ($S_K \gg S_9$) все носители, инжектированные эмиттером, собираются коллекторным переходом.

15. Проаналізуйте за яких умов в каналах провідності спостерігається велика рухливість носіїв заряду.

Балістичним транспортом називається такий різновид перенесення носіїв, коли вони рухаються вільно без зіткнень. Термін балістичний виник від грецького слова “ballo” – кидаю. Квазічастинки в режимі балістичного транспорту рухаються вільно або під дією лише зовнішніх сил. Найпростішим прикладом балістичного транспорту є рух заряджених частинок у вакуумі.

Умови, за яких в каналах провідності виникає велика рухливість носіїв заряду:

Балістичний режим транспорту носіїв у твердому тілі встановлюється тоді, коли його розміри (L) стають меншими за довжину вільного пробігу квазічастинок (\square)

$$L < \ell \quad (7.1)$$

У тих випадках, коли відбувається мала кількість актів розсіяння ($L \leq \ell$), транспорт називають *квазібалістичним*.

Характерними розмірами у напівпровідників може бути товщина активної області напівпровідникових діодів, товщина бази біполярних транзисторів, відстань між витоків та стоком уніполярних транзисторів тощо. Вони залежать від напівпровідникової структури, її розмірів, концентрації домішок та дефектів, температури тощо й можуть змінюватися в широких межах від 0,01 до 10 *мкм*.

Особливості:

Балістичний рух носіїв визначається динамікою вільних квазічастинок, які рухаються без зіткнень, та впливом хвильових властивостей з урахуванням їх когерентності. Динаміка балістичного руху квазічастинок чутлива до їх закону дисперсії. Вони також можуть фокусуватись у магнітному полі. Важливою рисою балістичного транспорту у напівпровідниках є нерівноважність носіїв, тому що робочі напруги, як правило, прискорюють їх до енергій більших за теплову ($eV > k_B T$). При значних густинах струму він обмежується просторовим зарядом. Залежність струму в режимі просторового заряду від напруги відрізняється від типової квадратичної залежності, притаманної напівпровідникам у дифузійному або дрейфовому режимах транспорту, й становить, як для вакууму, $j \propto V^{3/2}$, тому що квазічастинки у балістичному режимі неперервно прискорюються електричним

полем без зіткнень. Значні швидкості, котрі квазічастинки набувають у полі, створеному прикладеною різницею потенціалів, зменшує час їх прольоту крізь характерні розміри напівпровідникових приладів, що дозволяє отримувати час їх перемикання $\sim 10^{-12}$ с. В умовах балістичного транспорту різко виявляються розмірні ефекти, тому що у відсутності зіткнень в об'ємі зразків значно підсилюється роль розсіяння на їх поверхні. Для пояснення особливостей балістичного транспорту в низькорозмірних системах необхідно враховувати хвильові властивості носіїв, їх фазу та когерентність.

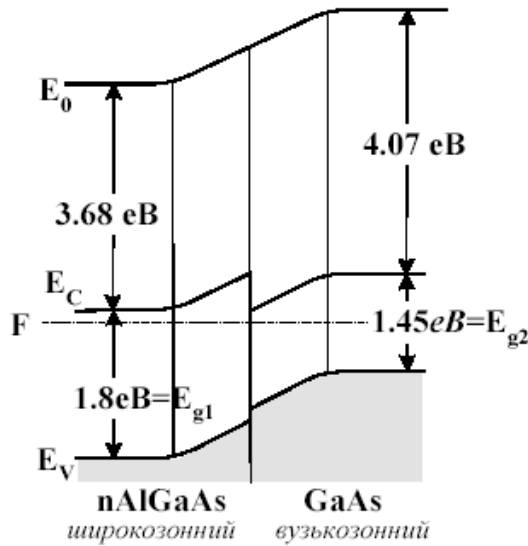
Використання:

Балістичний режим транспорту носіїв знайшов широке практичне застосування у вакуумній електроніці. Розвиток технології виготовлення мікросхем та можливість створення тунельних мікроскопічних катодів відкрили шлях до конструювання та створення *вакуумних мікроелектронних* тріодів, тобто дали поштовх до розвитку нового напрямку – *вакуумної мікроелектроніки*.

Використання балістичного транспорту носіїв у напівпровідниках також виявилось важливим для розвитку фізики твердого тіла. Було виявлено квантову провідність в 1D системах та у квантових точках (0D), котра виникає при послідовному заповненні струмових каналів, що асоціюють із розмірними квантовими рівнями.

Здавалося-б завдяки ефектам короткого та тонкого каналу повинна збільшуватись рухливість. Але ні. Там виникає розігрів електронів провідності, а розігрів зменшує рухливість (по якійсь-там формулі). Тому єдине що можна написати про велику рухливість – це НЕМТ транзистори, або транзистори на гетеропереходах

НЕМТ транзисторами називаються транзистори з великою рухливістю електронів (High Electron Mobility Transistor, скорочено НЕМТ). У них використовують канали провідності, що утворюються між напівпровідниками з різною зонною структурою (різною шириною забороненої зони). Такий контакт називається гетеро-контактом на відміну від гомоконтакту, котрий утворюється між напівпровідниками з однаковою шириною забороненої зони.



Контактна різниця потенціалів на гетероконтакті між двома напівпровідниками створює контактне електричне поле, котре вигинає зони біля контакту. Розглянемо приклад типового контакту (рис.3.28) широкозонного напівпровідника $n\text{-Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ (з шириною забороненої зони $E_{g1} = 1,8 \text{ eV}$) та вузькозонного напівпровідника $i\text{-GaAs}$ (із забороненою зоною $E_{g2} = 1,45 \text{ eV}$). Зобразимо енергетичну схему такого гетеропереходу. В рівновазі хімічні потенціали системи знаходяться на одному рівні ($F_1 = F_2$). Робота виходу вузькозонного напівпровідника більша за роботу виходу широкозонного. Тому контактне електричне поле (йому відповідає потенціальна енергія E_0) вигинає зони вузькозонного напівпровідника „униз”, а у широкозонному – „уверх”, як це видно на рис.3.28. На гетеропереході утворюється *розрив зон* і в зоні провідності утворюється стрибок потенціальної енергії. З одного боку від стрибка потенціалу на гетеропереході в широкозонному напівпровіднику утворюється потенціальний бар’єр, а в широкозонному - збіднений носіями шар. У потенціальній ямі власного вузькозонного напівпровідника можуть накопичуватися електрони, а у випадку, коли замість власного вузькозонного напівпровідника використовується вузькозонний напівпровідник р-типу, у його потенціальній ямі накопичуються носії з інверсним знаком заряду. **Таким чином, на гетеропереході здійснюється просторове розділення зарядів іонізованих домішок** (у даному випадку іонізованих донорів у широкозонному напівпровіднику) **та 2D електронного газу в каналі провідності, локалізованому у вузькозонному напівпровіднику.**

Таким чином 2D канал на гетеропереході дозволяє отримувати в ньому *великі рухливості носіїв*. Наприклад, у каналі між GaAs та $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ при кімнатній

температурі рухливість електронів дорівнює $\mu(300\text{K}) \sim 8000 \text{ см}^2/\text{Вс}$, а при температурі рідкого азоту $\mu(78\text{K}) \sim 10^5 \text{ см}^2/\text{Вс}$, що суттєво покращує параметри МОН транзисторів. Такі транзистори називаються НЕМТ транзисторами. Вони мають час перемикання при кімнатній температурі менше 56 нс , а при 78K – $17 \cdot 10^{-12}$ сек. В перспективі це дозволяє створювати транзистори, котрі при температурах 78K працюють на частотах, сумірних із частотами контактів Джозефсона, котрі працюють при температурах $4,2\text{K}$.

16. Проаналізуйте причини появи залежності електропровідності металевих плівок від їх товщини.

(Це класичний розмірний ефект, можна з книжки чи з консп по Ковалю) (Находкін 37-38)

- квантовий розмірний ефект, коли $\lambda_D > d$

При розгляді кінетичних (транспортних) ефектів в обмежених кристалах, коли ефективна довжина вільного пробігу ℓ_{ef} починає залежати від розміру кристала), одночасно з розсіянням носіїв заряду на внутрішніх порушеннях кристалічної структури слід враховувати їх поверхневе розсіювання. Для опису ефектів поверхневого розсіювання звичайно використовують дифузійне наближення. В цьому наближенні припускається, що лише частина електронів $\mathfrak{R} \neq 1$ дзеркально розсіюється від поверхні кристала із зміною напрямку нормальної складової їх швидкості. Решта електронів $1 > (1 - \mathfrak{R}) > 0$ розсіюються дифузно з повною втратою напрямку імпульсу та енергії, набутої у зовнішньому полі. Таким чином, при дифузному розсіянні на поверхні вигляд функції розподілу носіїв заряду повертається до вигляду у незбуреному стані. Це означає, що поверхневе розсіювання призводить до неоднорідного розподілу носіїв заряду в просторі зразка, тобто до координатної залежності функції розподілу, внаслідок чого виникає залежність кінетичних коефіцієнтів від геометричних розмірів зразка.

Зробимо оцінку класичного розмірного ефекту для випадку однорідного, однодолинного, ізотропного напівпровідника. В ньому відсутня міждолинна релаксація ($\tau_{vm} \rightarrow \infty$) і $\tau_E > \tau_p$. Обмежимося також розглядом лише тих носіїв заряду, котрі знаходяться поблизу дна зони провідності або біля стелі валентної зони. Розглянемо випадок $\nabla T = 0$ і $B = 0$. Тобто розглядається випадок провідності напівпровідникового зразка подібний до електропровідності відповідного металевого зразка. У цьому випадку

$$\tau \sim \tau_p = \ell_p / v \quad (2.18)$$

Нехай зразок має вигляд тонкої плівки товщиною d , на границях якої *фактор дзеркальності* $\mathfrak{R} \neq 1$, тобто носії струму на границях плівки розсіюються дифузно. Тоді при $\ell_s > d$ із формули (2.15) можна записати:

$$\frac{1}{\tau_{ef}} = \frac{1}{\tau_v} + \frac{1}{\tau_s} = \frac{1}{\tau_v} \left(1 + \frac{\tau_v}{\tau_s} \right) \cong \frac{1}{\tau_v} \left(1 + \frac{\ell_v}{d} \right) \quad (2.19)$$

де ℓ_v - довжина вільного пробігу рівноважних носіїв заряду.

Знаючи τ_{ef} із (2.19), можна визначити $\mu_{ef}(d)$ та $\sigma(d)$:

$$\mu_{ef}(d) = \frac{e}{m} \tau_{ef} = \mu_v \left(1 + \frac{\ell_v}{d} \right)^{-1} \quad (2.20a)$$

$$\sigma(d) = en\mu_{ef}(d) = \sigma_v \frac{1}{1 + \ell_v/d} \quad (2.20b)$$

де $\mu_v = e\tau_v/m$ - рухливість носіїв заряду в об'ємі зразка. Таким чином, співвідношення (2.20) описують *класичний розмірний ефект*, який *полягає в залежності $\tau_{ef}(d)$ або $\mu_{ef}(d)$* . **Класичний розмірний ефект має місце, коли фактор дзеркальності $\Re \neq 1$, $\ell_v < d$, та $\ell_v > \lambda_D$** , де λ_D - довжина хвилі де Бройля носіїв заряду. Остання нерівність $\ell_v > \lambda_D$ обмежує різновиди напівпровідників, в яких може мати місце класичний розмірний ефект. Дійсно при умові $\ell_v/\lambda_D > 1$ з урахуванням виразів для ℓ_v і для λ_D ($\ell_v = \mu v$, $\lambda_D = h/mv$) маємо

$$1 < \frac{\ell_v}{\lambda_D} = \frac{2\pi\mu m^2 v^2}{e\hbar} = \frac{2\pi\mu m^3 k_B T}{e\hbar} \quad (2.23)$$

або

$$\mu_{T=300} > 100 m_0/m \left[\tilde{n}^2 \cdot B^{-1} \cdot c^{-1} \right] \quad (2.24)$$

де m_0 - вакуумна маса електрона. Ця умова виконується для досить широкого кола напівпровідників Ge, Si, InSb, InAs, GaAs. Проте до цього часу класичний розмірний ефект в напівпровідниках експериментально не спостерігався, бо в них майже завжди існує приповерхневий вигин зон, що ускладнює спостереження цього ефекту.

17. Проаналізуйте причини, що обмежують мінімальний розмір елемента інтегральних мікросхем.

1.4. МІНІМАЛЬНИЙ РОЗМІР ЕЛЕМЕНТІВ ІМС

Зменшення розмірів елементів ІМС ℓ_m здійснюється такими способами:

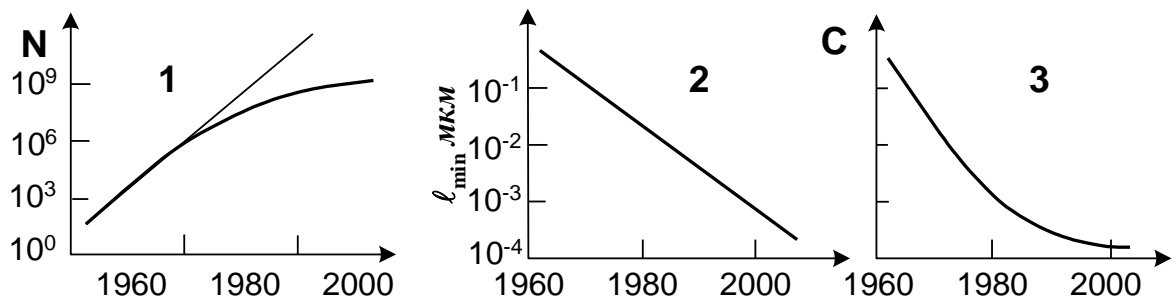
- вибором оптимальної геометрії елемента та оптимальної топології схеми, тобто оптимального розташування й сполучення елементів на підкладинці;
- зменшенням розміру окремого елемента ℓ_m ;
- за допомогою функціональної інтеграції, коли втрачаються особливості окремого елемента системи (кола).
- Перші два способи інтеграції ефективно використовувались на практиці до 1980 років, що дозволило створити ІМС із типовими характеристиками, наведеними в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2.

Роки	1980 р.	1980 ÷ 1990 р.	2000÷2003 р.	2003÷2010
N активних елементів на чіпі	$10^4 \div 10^5$	$3 \cdot 10^5 \div 10^6$	$5 \cdot 10^7$	$10^8 \div 10^9$
τ час перемикання [с]	$10^{-5} \div 10^{-6}$	$10^{-8} \div 10^{-9}$	$10^{-9} \div 10^{-10}$	
$\nu = 1/4\pi\tau$ тактова частота [Гц]	$10^4 \div 10^5$	$10^7 \div 10^8$	$10^8 \div 10^9$	$10^9 \div 10^{10}$
Nv функціональна швидкодія	$10^8 \div 10^{10}$	$10^{13} \div 10^{14}$	$10^{14} \div 10^{15}$	
P потужність при перемиканні [Вт]	10^{-4}	10^{-5}	$\sim 10^{-6}$	
ℓ характерний розмір [мкм]	3,5	0,5	0,1÷0,07	0,07÷0,03

с вартість [$\$ \cdot \text{bit}^{-1}$]	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-8}
---	-----------	-----------	-----------	-----------

•



• **Рис.1.2. Зміна параметрів ІМС у часі: 1 - кількість елементів на чіпі; 2 - їх мінімальний розмір; 3 – вартість елементу.**

На рис.1.2 схематично наведена тенденція змін характерних параметрів ІМС по роках. Видно, що швидкість темпу їх зміни з часом зменшується. Якщо у 60-80 роках кількість елементів на чіпі щорічно збільшувалася вдвічі (закон Мура), то після 90-х років темп зростання зменшується. Дія закону Мура¹ обмежується, коли розміри елементів стають сумірними з розмірами атомів.

Причини, що обмежують ступінь інтеграції інтегральних схем, можна поділити на три групи, а саме:

1. *технологічні обмеження ℓ_m у виробництві ІМС;*
2. *обмеження на розміри окремих елементів схем ℓ_m та на ступінь інтеграції, зв'язані із взаємодією елементів один з одним;*
3. *розмірні ефекти - обмеження, пов'язані із зміною особливостей фізичних ефектів речовини в тонких шарах.*

Розглянемо більш детально ці три групи причин, що обмежують мінімальний розмір

1.4.а. Технологічні обмеження мінімального розміру елементів.

Найбільш важливими чинниками, що викликають технологічні обмеження мінімального розміру елементів ІМС, є такі:

¹ Гордон Мур – один із засновників фірми Intel (США).

- дифракційні явища, сферична аберація та розсіяння квантів світла та частинок, котрі використовуються при виготовленні елементів ІМС певної форми методами літографії,
- розмиття краю елементів ІМС, що викликається флуктуаціями в технологічному процесі створення ІМС,
- флуктуація концентрації домішок,
- дифузія.

Дифракційні явища, сферична аберація та розсіяння квантів світла та частинок. У промисловості використовується обмежена кількість методів виготовлення геометричних структур елементів, із яких найбільш часто використовується фотолітографія, рентгенолітографія, електронолітографія тощо. Літографія дає можливість створити конфігурацію елементів певних розмірів, із роздільною здатністю, котра визначається дифракцією та сферичною аберацією. Дифракційна роздільна здатність, котра обернено пропорційна до радіуса дифракційного розмиття променя r_d , збільшується прямо пропорційно довжині хвилі λ випромінювання, що використовується в літографії

$$r_d \sim \gamma \lambda / \alpha' \quad (1.4)$$

де α' - апертура ($\alpha' = 2n \cdot \sin(\alpha/2)$), де n - показник заломлення, α - апертурний кут, $\alpha \approx \alpha'$ при малих кутах α), а γ - коефіцієнт, що залежить від форми та параметрів середовища. Із формули (1.4) видно, що зменшення λ зменшує кружок дифракційного розмиття r_d тобто збільшує дифракційну роздільну здатність (r_d^{-1}). Тому для збільшення роздільної здатності треба зменшувати λ , тобто використовувати рентгено- або електронолітографію.

Проте зменшення λ збільшує вплив сферичної аберації. При малих апертурних кутах радіус кружка розсіювання внаслідок впливу сферичної аберації залежить від куба апертурного кута α . Роздільна здатність, що визначається дифракцією і сферичною аберацією, визначається за формулою

$$r = r_d + r_{cf} = \gamma \lambda / \alpha + C_{sa} \alpha^3 \quad (1.5)$$

де C_{sa} - коефіцієнт сферичної аберації. Із формули (1.5) ми бачимо, що, коли виконується умова $dr/d\alpha = 0$, існує оптимальне значення апертури α_{opt} , при якому r мінімальне й рівне $r_m = 4/3 \{3(\gamma \lambda)^3 C_{sa}\}^{1/4}$. Проте не завжди доцільно використовувати такі малі апертури, як α_{opt} , тому що при цьому збільшується необхідна для літографії експозиція й вартість виготовлення чіпів. Тому на

практиці використовують більші апертури, коли можна знехтувати дифракційним розмиттям. В цьому разі

$$r \cong r_{sa} \geq C_{sa} \alpha^3 \quad (1.6)$$

Визначимо тепер, як залежить r від часу експозиції t . Відомо, що для утворення елемента ІМС потрібна експозиція більша за порогову експозицію K даного літографського процесу

$$It > (It)_{min} = K \quad (1.7)$$

де I - інтенсивність світла, рентгенівських променів або електронів, що діють на речовину при літографії, котра залежить від яскравості джерела B і апертурного кута α

Комбінуючи (1.7) і (1.8), знайдемо кут α і підставимо його у формулу (1.6), тоді

$$r_{sa} \geq C_{sa} \alpha^3 = C_{sa} (K/\pi B t)^{3/2} \quad (1.9)$$

Ця залежність зображена кривою 1 на схематичному рис.1.3. Видно, що r_{sa}

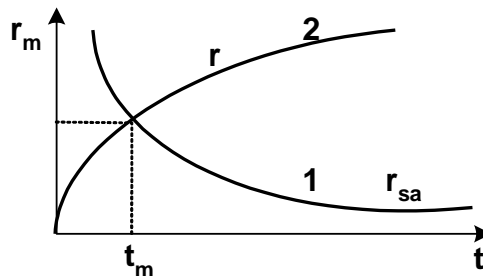


Рис.1.3. Залежність радіуса розмиття електронної плями від експозиції з 2-х причин: 1 - сферичної аберації та 2 - вартості процесу літографії.

зменшується із зростанням експозиції t .

Проаналізуємо вплив вартості експонування C , котра прямо пропорційно часу експозиції й обернено пропорційна квадрату лінійного розміру r площі, що експонується

$$C \geq (S_{ch}/\pi r^2) q t \quad (1.10)$$

де S_{ch} - площа чіпу, $S_{ch}/\pi r^2$ - кількість елементів на чіпі, q - вартість експонування одного елемента за 1 с. Із (1.10) можна бачити, що

$$r_c > \left(\frac{S_{\text{ин}} q t}{\pi C} \right)^{1/2} \quad (1.11)$$

Таким чином, при заданій вартості експонування C техніко-економічного процесу, що використовується, розмір елемента r_c зростає (крива 2 на рис.1.3), а ефективний радіус r_{sa} сферичної аберації зменшується (крива 1 на рис.1.3) при збільшенні часу експозиції t . Це означає, що існує оптимальна експозиція t_{opt} й мінімальний ефективний радіус r_m при заданій вартості процесу літографії C та коефіцієнта аберації C_{sa} . Його визначення зрозуміло з рис.1.3.

Необхідність збільшення роздільної здатності, котра обмежується дифракційними явищами, примушує зменшувати довжину хвиль випромінювання, що використовується в літографії. У випадку електронної літографії це здійснюється збільшенням енергії електронів E_p . Збільшення енергії E_p призводить до зростання повного пробігу електронів у речовині R , тому що $R = A(E_p)^n$, де $1,5 < n < 2$, A - параметр речовини, що експонується електронами. Для органічних резистів, наприклад, при $E_p = 25 \text{ кеВ}$ пробіг $R = 3 \text{ мкм}$. Величина пробігу R визначає розміри області, в якій відбувається **розсіяння**

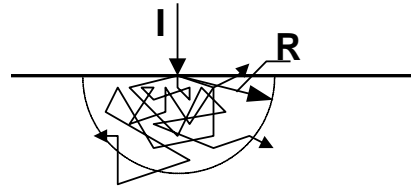


Рис.1.4. Область розсіяння електронів з пробігом R , котрий залежить від їх енергії

електронів, тобто область, на яку діють електрони в речовині, як це видно із рис.1.4. Величину R можна зменшити, використовуючи замість електронів іони, бо $A_{\text{іон}} < A_e$, проте іонна літографія значно дорожча за електронну.

Тепер розглянемо вплив флуктуацій, що мають місце в ході технології виготовлення елементів, на розмиття краю та мінімальний розмір елементів ІМС, а також вплив на нього флуктуацій домішок у напівпровідниках.

Розмиття краю. Кожний технологічний процес повинен багатократно відтворюватись. При цьому внаслідок флуктуацій, притаманних технологічним процесам виготовлення елементів, край їх структури відтворюється з певною похибкою, тобто з певним розмиттям краю. Це є однією із технологічних причин обмеження мінімального розміру елементів ІМС. Якщо причини розмиття краю структури є статистично незалежними, то має місце нормальний (гауссівський)

закон розподілу ймовірності із певною дисперсією σ^2 . Тоді ймовірність того, що нормально розподілена величина x , а це може бути розмір елемента або концентрація домішок в елементі, знаходиться в інтервалі $\bar{x} - \alpha < x < \bar{x} + \alpha$, де \bar{x} - середнє значення x , запишеться таким чином

$$P(\bar{x} - \alpha < x < \bar{x} + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{\bar{x}-\alpha}^{\bar{x}+\alpha} \exp\left[-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad (1.12)$$

де $\alpha = \xi \bar{x}$ - відхилення розміру x від середнього значення \bar{x} , а $\xi = (x - \bar{x})/\bar{x}$ відносне відхилення розміру від середнього значення. Перейдемо до нових змінних $y = (x - \bar{x})/\sigma$, тоді інтеграл у правій частині (1.12) зводиться до

$$P(\bar{x} - \alpha < x < \bar{x} + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\alpha}{\sigma}}^{\frac{\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \text{erf}\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad (1.13)$$

Таким чином, якщо ми захочемо записати ймовірність того, що розмір ($x = \ell$) хоча б одного елемента виходить за межі інтервалу з допустимим відхиленням від середнього значення $\alpha = \xi \bar{x}$,

$$\bar{x} - \alpha < x < \bar{x} + \alpha \quad (1.14)$$

то ця ймовірність буде

$$P_1 = 1 - P = 1 - \text{erf}\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \text{erfc}\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad (1.15)$$

Нехай тепер схема має N елементів або N країв, які відтворюються статистично незалежно один від одного. В цьому випадку ймовірність того, щоб хоча б один із елементів вийшов за межі інтервалу (1.14) є сумою ймовірностей

$$P_1 + P_1 + P_1 + \dots = NP_1 \quad (1.16)$$

Тому для нормальної роботи схеми потрібно, щоб імовірність того, що хоча б один із i елементів вийшов за межі інтервалу (1.14), тобто щоб хоч один із елементів був дефектним, буде знаходитись із умови

² Дисперсія в теорії ймовірності (від лат слова dispersio - розсіяння) є величиною, що характеризує інтенсивність флуктуацій випадкового параметра x : $\sigma = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \equiv \overline{\Delta x^2}$, де $\Delta x = x - \bar{x}$ - флуктуація, а \bar{x} - середнє значення величини x .

$$NP_1 = \operatorname{Nerfc}\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right) < 1 \quad (1.17)$$

1.4.б. Фізичні причини обмеження, зв'язані із взаємодією елементів ІМС

Найбільш важливими процесами взаємодії елементів між собою слід назвати такі:

- їх розігрів;
- розігрів міжелементних з'єднань;
- паразитні зв'язки.

Причиною розігріву елементів та з'єднань є енергія, що виділяється при роботі елементів та проходження струму у з'єднаннях. Хоча при перемиканні одного елемента виділяється мало енергії, проте елементів багато і сумарна потужність може бути значною. Коли окремі елементи рівномірно розподілені в об'ємі, то енергія, котра виділяється в 1 см^3 за 1с, може бути обрахована за формулою:

$$W = P\tau\nu N$$

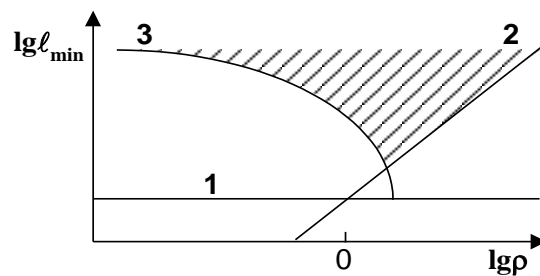


Рис.1.8. Залежність мінімального розміру елемента ІМС від питомого опору для 3-х випадків: 1 - крайового розмиття, 2 - флуктуацій домішок, 3 - перегріву елемента.

1.4.в. Фізичні причини обмеження ступеню інтеграції, зв'язані з розмірними ефектами

Зменшення геометричних розмірів окремих елементів змінює їх робочі характеристики. Множини F , котрі характеризують зміни робочих характеристик

окремих елементів при зміні їх геометричних розмірів у K разів, є функціями K . Вони називаються **скейлінговими (масштабними) коефіцієнтами** $F(K)$ й визначаються за допомогою конкретних моделей роботи елементів ІМС. Коли при зменшенні розмірів модель перестає відбивати основні риси роботи елемента, то коефіцієнт $F(K)$ змінюється. Таким чином, скейлінг обмежується такою областю розмірів елементів ІМС, в якій розмірні ефекти не впливають на їх роботу. Розглянемо, наприклад, опір електричному струму

$$R = \rho \frac{\ell_1}{\ell_2 \ell_3} \quad (1.32)$$

До тих пір, поки $\rho = \text{const}$, зміна розмірів елемента в K разів призводить до того, що R також змінюється в K разів, ті скейлінговий коефіцієнт опору рівний $K = F_R$

$$\frac{R'}{R} = \frac{\ell'_1 / \ell_1}{\ell'_2 / \ell_2 \cdot \ell'_3 / \ell_3} = \frac{K^{-1}}{K^{-1} \cdot K^{-1}} = K = F_R \quad (1.33)$$

Коли ℓ_i стає меншим за довжину вільного пробігу носіїв заряду, скейлінговий коефіцієнт опору $F_R(K)$ починає змінюватись, тому що змінюється питомий опір $\rho(\ell)$ і $\rho' / \rho \neq 1$.

Таблиця 1.3. Скейлінгові коефіцієнти для МОН транзистора. $E_D = \text{Const.}$			
	Параметри	Формули	$F(K)$
1	Розміри ℓ_i ; d_a - товщина оксиду, w -ширина; L -довжина .	$\frac{\ell'_i}{\ell_i}$	K^{-1}
2	Напруга стоку V_D , та затвору V_g	$V_D = E_D L$	K^{-1}
3	Концентрація домішок у підкладинці N_a	Електричного поля просторового заряду $E_s \approx \sqrt{(V_G - E_1 d_1) N_a} = \text{const}$, $E_1 d_1$ - падіння потенціалу на оксиді	K

4	Струм в лінійній частині <i>IV</i> -характеристики	$J_D = (w\epsilon\mu/dd_a)V_GV_D$	K^1
5	Ємність затвора (<i>Gate</i>)	$C = \epsilon w L d_a^{-1}$	K^1
6	Максимальна густина елементів	$N = (wd)^{-1}$	K^2
7	Час затримки перемикання	$\tau_{\max} = d^2/\mu V_D$	K^1
8	Джоулеве тепло при перемиканні	$P_j = J_D V_D$	K^2
9	Потужність при управлінні	$P = 1/2 C \Delta V_G^2$	K^3
10	Параметр якості	$\Pi = P_j \tau$	K^3
11	Функціональна швидкодія	$FS = N \tau^{-1}$	K^3

В таблиці 1.3 приведені скейлінгові коефіцієнти $F(K)$ для МОН (метал-оксид-напівпровідник) транзисторів із довгим каналом провідності, в робочому стані яких електричне поле залишається сталим $E_D = const$ (глава 3). Проте зміна моделі, що викликається зміною фізичного процесу роботи транзистора внаслідок впливу розмірних ефектів, призведе до зміни його скейлінгових коефіцієнтів $F(K)$.

Внаслідок того, що фізичні величини залежать від структури плівок, яка залежить від їх товщини, то їх фізичні властивості також залежать від їх товщини. Проте навіть тоді, коли структура плівки не відрізняється від структури масивної речовини, її властивості можуть змінюватись також, тому що в *тонких шарах* мають місце різні **розмірні ефекти**:

1. *Класичний розмірний ефект*, коли розміри зразка стають меншими за довжину вільного пробігу носіїв ($d < \ell$), для металів при 300K $\ell \sim 100 \text{ \AA}$, й питомий опір починає залежати від розмірів зразка.
2. *Квантовий розмірний ефект*, коли розміри зразка стають меншими за довжину хвилі де Бройля носіїв ($d < \lambda = \sqrt{150/V[\text{В}]} \text{ \AA}$), й змінюються: енергетична

структура (з'являються підзони), густина електронних станів та інші властивості речовини.

3. *Зникає надпровідність*, коли розміри зразка d стають меншими за глибину проникнення магнітного поля в напівпровідник ($d < \lambda_L = \sqrt{\hbar^2 / 4\pi m_s e^2}$, де n_s - концентрація надпровідних електронів, μ - магнітна проникливість) або меншими за джозефсонівська глибину проникнення ($d < \lambda_J = \sqrt{\Phi_0 c / 8\pi^2 J_c \lambda_L}$, J_c - критичний струм Джозефсона, $\Phi_0 = hc/2e$ – квант магнітного потоку (флюксоїд)).
4. *Відбувається інтенсивне тунелювання*, коли $d < \hbar / 2 \cdot (2m(U - E))^{-1/2}$, де U - висота потенціального бар'єра, E - енергія електронів, що тунелюють.
5. *Змінюється характер та структура магнітних доменів*, коли розміри зразка стають меншими за розмір доменних стінок тощо.

Таким чином, *розмірні ефекти* змінюють особливості фізичних явищ у низько- розмірних 2D, 1D та 0D системах. Вони змінюють скейлінгові коефіцієнти та обмежують рівень мікромініатюризації мікроелектронних приладів. Це має місце, здебільшого, в зразках нанометрових розмірів. У зв'язку з цим необхідно створювати нові спеціальні наноелектронні прилади, в роботі яких будуть враховані і використані розмірні ефекти.

18. Проаналізуйте умови експериментального спостереження класичного розмірного ефекту. Чому він майже не спостерігається в напівпровідниках? Як впливає вигин зон?

Находкін 37 - 38)

Розглянемо однорідний, однодолинний, ізотропний напівпровідник з плоскими зонами. В ньому відсутня міждолинна релаксація ($\tau_v \rightarrow \infty$) і $\tau_E > \tau_p$. Обмежимося також розглядом лише тих носіїв струму, котрі знаходяться на дні зони провідності або біля стелі валентної зони. Розглянемо випадок $\nabla T = 0$

і $H = 0$. В цьому випадку

$$\tau_{\text{ef}} \sim \tau_p = \ell_p / v \quad (2.18)$$

Нехай зразок має вигляд тонкої плівки товщиною d , на границях якої *фактор дзеркальності* $p \neq 1$, тобто носії струму на границях плівки розсіюються дифузно. Тоді при $\ell_s > d$ із формули (2.15) можна записати:

$$1/\tau_{\text{ef}} = 1/\tau_v + 1/\tau_s = 1/\tau_v(1 + \tau_s/\tau_v) = 1/\tau_v(1 + \ell/d) \quad (2.19)$$

де ℓ - довжина вільного пробігу рівноважних носіїв струму. Знаючи τ_{ef} ... із (2.6), можна визначити $\mu_{\text{ef}}(d)$ та $\sigma(d)$:

$$\mu_{\text{ef}}(d) = e\tau_{\text{ef}}/m^* = (e\tau_v/m^*)1/(1+\ell/d) = \mu_v(1+\ell/d)^{-1} \quad (2.20)$$

$$\sigma(d) = en\mu_{\text{ef}}(d) = \sigma_v(1+\ell/d)^{-1} \quad (2.21)$$

де $\mu_v = e\tau_v/m^*$ - рухливість носіїв струму в об'ємі зразка. Таким чином, співвідношення (2.21) описує класичний розмірний ефект, який полягає в залежності $\tau_{\text{ef}}(d)$ або $\mu_{\text{ef}}(d)$. Більш точне доведення формули для $\sigma(d)$ дає такі співвідношення:

$$\sigma_{\infty}/\sigma = 1 + 3/8(1-p)\ell/d \quad \text{для } \ell/d \leq 1$$

$$\sigma_{\infty}/\sigma = 4/3[(1-p)/(1+p)] \{1 + d/\ell(\ln \ell/d + 0,42)\} \quad \text{для } \ell/d \geq 1 \quad (2.22)$$

Класичний розмірний ефект має місце, коли фактор дзеркальності $\Re \neq 1$, $\ell_v < d$, та $\ell_v > \lambda_D$, де λ_D - довжина хвилі де Бройля носіїв заряду. Остання нерівність $\ell_v > \lambda_D$ обмежує різновиди напівпровідників, в яких може мати місце класичний розмірний ефект. Дійсно при умові $\ell_v/\lambda_D > 1$ з урахуванням виразів для ℓ_v і для λ_D ($\ell_v = \mu m v / e$, $\lambda_D = h / m v$) маємо

$$1 < \frac{\ell_v}{\lambda_D} = \frac{2\pi\mu m^2 v^2}{e\hbar} = \frac{2\pi\mu m 3k_B T}{e\hbar} \quad (2.23)$$

або

$$\mu_{T=300} > 100 m_0 / m \left[\tilde{n}^2 \cdot B^{-1} \cdot c^{-1} \right] \quad (2.24)$$

де m_0 - вакуумна маса електрона. Ця умова виконується для досить широкого кола напівпровідників Ge, Si, InSb, InAs, GaAs. Проте до цього часу класичний розмірний ефект в напівпровідниках експериментально не спостерігався, бо в них майже завжди існує приповерхневий вигин зон, що ускладнює спостереження цього ефекту.

19. Проаналізуйте, за яких умов зменшення довжини каналу МОН (метал-оксид-напівпровідник) транзистора сильно впливає на його характеристики. Які параметри МОН транзистора при цьому почнуть змінюватися?

МОН транзистор з коротким каналом з великою рухливістю носіїв струму в каналі мають досить високі робочі параметри і малий коефіцієнт шумів.
 Проте зменшення довжини каналу L з великою швидкістю збільшує крутизну ВАХ та інверсійну працездатність.
 Проте при цьому виникають дві причини ефектів короткого каналу:

- ефекти великого попереткового поля E_y
- ефекти великого попереткового поля E_z

Зменшення довжини каналу L при $V_D \text{ const}$ (напруга на стоці) збільшує попереткове електричне поле $E_y \propto V_D/L$. При цьому збільшують за критичне поле $E > E_k$, коли $eE_y \tau > k_B T$, де τ - довжина вільного пробігу носіїв, починається їх розсіювання. При цьому величина дрейфової швидкості носіїв стає оберненою до їх теплової швидкості, починає залежати від напруженості електричного поля. Електричне поле зменшує рухливість носіїв

$$\mu = \left(\frac{e}{m}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \cdot \frac{\sqrt{E}}{E_y} ; \text{ де } L\text{-коефіцієнт асоціації}$$

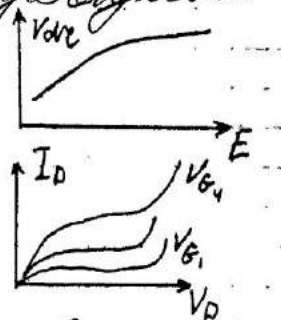
а зменшення рухливості в свою чергу призводить до насичення дрейфової швидкості ($v_{dr} \approx \mu E_y$). ($V_D \sim 1\text{В}$, $L \sim 1\text{мкм}$)

Залежність рухливості носіїв та насичення дрейфової швидкості призводить до таких змін статистичних х-к МОН:

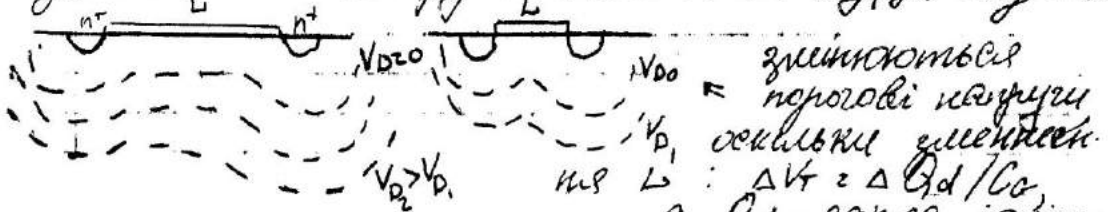
- 1) зменшення крутизни ВАХ $I_D \propto dI_D/dV_G$

- 1) зменшення часу прольоту носіїв $\tau \propto \frac{L^2}{\mu_n(V_g - V_T)}$, де μ_n визначає швидкодію транзистора.
- 2) збільшення коефіцієнту гучності
- 3) зменшення вхідної електропровідності

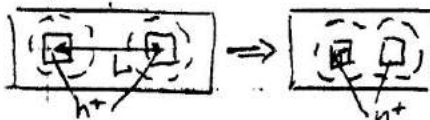
При подальшому зростанні напруженості електричного поля E_y виникає проблема, при якій починається необоротні процеси, що руйнують транзистор.



- Зменшення довжини каналу провідності при постійній напрузі змінює поперечне електричне поле E_z , що призводить до появи розширених ефектів. Збільшає каналу провідності має сумішок з λ_D .
- залежності напруженості поле $E_y(y)$ від E_z .



Вони, джерел протікання порівняно залежить від L . Змінюються порогові напруги V_{D0} , оскільки зменшен V_D , $\Delta V = \Delta Q_d / C_o$, а Q_d - заряд іонізації.



Зниження області просто. роботою заряду витоку та струму I_{D0} зменшує напругу V_D у каналі збільшує

втрати, оскільки струм тепер буде протікати не тільки в каналі провідності.

Зменшення ширини W буде компенсує затору (каналу) вплив ефекту короткого каналу. Тільки $L_{min} \approx 0.4 [\epsilon \epsilon_{ox} (V_g + V_D)^2]^{1/3}$ ϵ_{ox} - товщина оксидного шару, ϵ - ширинна області витоку і отоку, V_g, V_D - ширини з'єднань

областей витоку і отоку. $L < L_{min}$ - ефекти к.к.

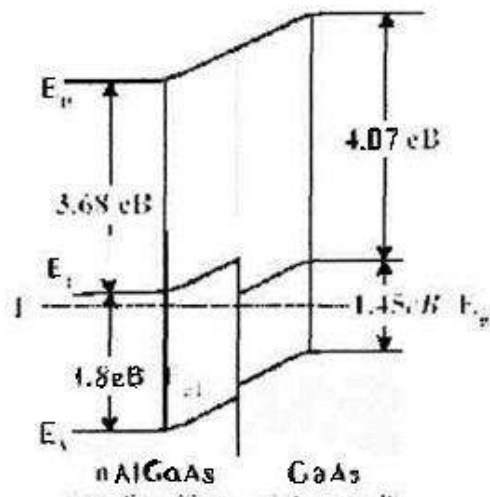
20. Проаналізуйте, яку роль грають гетероструктури в мікроелектроніці.

Наведіть приклади гетероструктур, що використовуються.

(тут є 2 варіанта ответа)

1 варіант:

Контакт з різною зонною структурою (різною шириною забороненої зони) називається гетероконтактом, на відміну від гомоконтакту, котрий утворюється між напівпровідниками з однаковою шириною забороненої зони. Контактна різниця потенціалів на гетеро контакті між двома напівпровідниками створює контактне електричне поле, котре вигинає зони біля контакту. Розглянемо приклад типового контакту широкозонного н.-п. $n\text{-Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ ($E_g = 1.8 \text{ eV}$) та вузькозонного н.-п. типу GaAs ($E_g = 1.45 \text{ eV}$). Зобразимо енергетичну схему такого гетеропереходу. В рівновазі хімічні потенціали системи знаходяться на одному рівні ($F_1 = F_2$). Робота виходу вузькозонного н.-п. більша за роботу виходу широкозонного. Тому контактне електричне поле вигинає зони вузькозонного напівпровідника «у низ», а в широкозонному «у верх». На гетеропереході утворюється розрив зон і в зоні провідності утворюється стрибок потенціальної енергії. З одного боку від стрибка потенціалу на гетеропереході в широкозонному напівпровіднику утворюється потенціальний бар'єр, а в широкозонному – збіднений носіями шар. У потенціальній ямі власного вузькозонного напівпровідника можуть накопичуватись електрони, а у випадку, коли замість власного вузькозонного напівпровідника викор. вузькозонний н/п р-типу. У його потенц. ямі накопичуються носії з інверсним знаком заряду. Таким чином на гетеропереході здійснюється просторове розділення зарядів іонізованих домішок та 2Делектронного газу в каналі провідності, локалізованому у вузькозонному н/п. Таким чином 2D канал на гетеропереході дозволяє отримувати в ньому великі рухливості носіїв.



Використання гетероструктур:

- Швидкодіючі діоди, транзистори і тиристори. НЕМТ-транзистори (high-electron-mobility-transistor)
- Оптиелектронні прилади (гетеролазери, гетеро світлові діоди)
- Приймачі оптичного випромінювання (фотодіоди, лавинні фотодіоди, фототранзистори, фоторезистори, перетворювачі ІЧ-випромінювання в видиме)
- Сонячні батареї на основі гетеро структур типу n-p-p (КПД 25%)

2 варіант:

Якщо йдеться про контактні структури між різними речовинами, наприклад, металу з напівпровідником або між двома різними напівпровідниками, то їх називають *гетеропереходами*. Вони досить широко використовуються для побудови напівпровідникових приладів. (практично у всіх галузях мікроелектроніки) (нано-мікро електр. с. 143)

Справа в тім, що коли з'єднуються два матеріали хімічні потенціали системи знаходяться на одному рівні ($F_1 = F_2$). Але за рахунок різних робіт виходу виникає контактна різниця потенціалів. Електричне поле контактної різниці потенціалів створює просторовий перерозподіл зарядів, що знаходить відображення на зонній діаграмі у вигляді вигину зон біля гетеропереходу. Приклади:

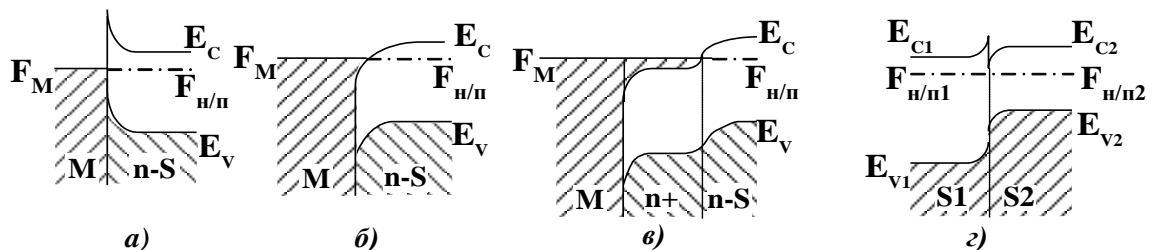


Рис.6.1. Енергетичні діаграми гетеропереходів: а) бар'єр Шотткі, $\phi_M > \phi_{n/p}$; б) антизапірний шар, $\phi_M < \phi_{n/p}$; в) омичний контакт $\phi_M < \phi_{n/p}$ n^+-n р-типу; г) гетероперехід між двома n/p (S1 та S2) із різними забороненими зонами.

Якщо робота виходу менша ніж у сусіда вигин зон відбувається вниз, якщо більша – то вгору. (стосується тільки n-p, у металів не вигинаються).

На гетеропереходах може відбуватись просочування нерівноважних надлишкових носіїв заряду в напівпровідник (діелектрик). Це явище називається **інжекцією носіїв струму**. Деякими з цих механізмів можна керувати, тому інжекція електронів у напівпровідникових приладах знайшла широке застосування.

Деякі конкретні приклади застосування гетероструктур:

- Швидкодіючі діоди, транзистори и тиристори.

(Наприклад польові транзистори на гетеропереході на основі напівпровідникових сполук, наприклад, $AIII BV$, $AIV BIV$ або напружених сплавів $SiGe$. Діоди Шоткі, HEMT-транзистори (high-electron-mobility-transistor) (у них канал провідності утворюється в об'ємі напівпровідникової структури на глибині ($\sim 150 \text{ \AA}$) від поверхні. Тому на електрони в 2D каналі слабо впливають такі різновиди розсіювання: • кулонівське розсіювання іонізованими донорами, бо вони просторово відокремлені від 2DEG у каналі провідності нейтральною прокладкою товщиною $d \neq 0$, що згідно (3.61) збільшує рухливість носіїв, • нерівностями поверхні напівпровідників, бо його границя віддалена від каналу; • дефектами, котрі часто важко усунути, коли канали провідності створюються в приповерхневих шарах напівпровідників; • нерухомими зарядами на границі з оксидними шарами тощо. Ці особливості 2D каналу на гетеропереході дозволяють отримувати в ньому великі рухливості носіїв.)

- Оптиелектронні прилади (гетеролазери, гетеро світлові діоди)

Найкращі параметри мають світловипромінюючі діоди (СВД), виготовлені на основі гетеропереходів. Світловипромінюючі діоди (СВД) або просто світлодіоди (СД) є основними електролюмінесцентними джерелами некогерентного світла. Основною їх функціональною частиною є гомо або гетеро р-п перехід або бар'єр Шоткі. За допомогою електричних полів, що створюються напругою на переході або бар'єрі, збуджуються носії заряду, котрі рекомбінують з випромінюванням світлових квантів

Найбільш широко в СВД використовують гетеропереходи із напівпровідникових сполук $A_{III}B_V$ та їх 3-х та 4-х компонентних твердих розчинів. (функц. Електр. Стр. 94)

- Напівпровідникові інжекційні лазери, які генерують когерентне випромінювання за своєю будовою схожі на СВД і складаються із напівпровідникового діода малого розміру $\sim 250 \times 25 \times 100 \text{ мкм}$, бокові грані якого утворюють оптичний резонатор (рис.7.1). (ФЕ стр.105)
- Приймачі оптичного випромінювання (фотодіоди, лавинні фотодіоди, фототранзистори, фоторезистори, перетворювачі ІЧ-випромінювання в видиме)

-Фотодіоди можна виготовляти за допомогою р - n гетеропереходів між двома напівпровідниками з різними ширинами заборонених зон ($E_{g1} \neq E_{g2}$). Світловий сигнал надходить до фотодіода крізь широкозонний

напівпровідниковий шар, наприклад, $p^+-\text{GaAlAs}$, служить прозорим вікном для випромінювання. Воно не поглинається в ньому через те, що енергія його квантів менша ширини забороненої зони ($h\nu < E_{g1,\text{GaAlAs}}$). Це дозволяє зменшити втрати при розповсюдженні випромінювання на шляху до активної зони фотодіода та змістити її в об'єм напівпровідника, де значно менше поверхневих станів, які збільшують рекомбі-наційні втрати носіїв.

-Біполярні транзистори також можна зробити фоточутливими. Для цього потрібно забезпечити умови поглинання світла в базовій області транзистора. Для цього потрібно спеціально підбирати його конфігурацію. В транзисторах з гомопереходами, наприклад, на основі германію та кремнію використовується планарна модель з базовою областю наближеною до поверхні вхідного вікна (рис.9.13). Фототранзистори включаються в схемі із загальним емітером та плаваючою базою. і вони можуть виконувати функції фото-детекторів. Такі транзистори називаються *фо-тотранзисторами*. Підсилення транзисторів забезпечує йому досить високу фоточутливість. (ФЕ с.124)

-Сонячні батареї на основі гетеро структур типа n-p-p (КПД 25%)

21. Сформулюйте основні технологічні обмеження на мінімальні розміри елементів інтегральних схем.

Найважливішими чинниками, які викликають технологічні обмеження мінімального розміру ІМС, є:

- дифракційні явища, сферична аберація, розсіювання квантів світла та частинок, що використовуються при виготовленні елементів ІМС певної форми методами літографії

Дифракційна роздільна здатність, котра обернено пропорційна до радіуса дифракційного розмиття променя r_d збільшується прямопропорційно довжині хвилі λ випромінювання, що використовується в літографії

$$r_d \sim \gamma \lambda / \alpha' \quad (1)$$

де α' - апертура, а γ - коефіцієнт, що залежить від форми та параметрів середовища. Із формули (1) видно, що зменшення λ зменшує кружок дифракційного розмиття r_d тобто збільшує дифракційну роздільну здатність (r_d^{-1}). Тому для збільшення роздільної здатності треба використовувати рентгено- або електронолітографію.

Зменшення λ збільшує вплив сферичної аберації. При малих апертурних кутах радіус розсіювання внаслідок впливу сферичної аберації залежить від кубу апертурного кута α . Роздільна здатність, що визначається дифракцією і сферичною аберацією визначається за формулою

$$r = r_d + r_{sf} = \gamma \lambda / \alpha + C_{sf} \alpha^3 \quad (2)$$

де C_{sf} - коефіцієнт сферичної аберації. Із формули (2) ми бачимо, що існує оптимальне значення апертури α_{opt} . Проте не завжди доцільно використовувати такі малі аперттури, як α_{opt} , тому що при цьому збільшується необхідна для літографії експозиція й вартість виготовлення чіпу.

Необхідність збільшення роздільної здатності, котра обмежується дифракційними явищами, примушує зменшувати довжину хвиль випромінювання, що використовується в літографії. У випадку електронної літографії це здійснюється збільшенням енергії електронів E_p . Збільшення енергії E_p призводить до зростання повного пробігу електронів у речовині R , тому що $R = A(E_p)^n$, де $1,5 < n < 2$, A - параметр речовини. Наприклад, при $E_p = 25$ кеВ пробіг $R = 3$ мкм. Величина пробігу R визначає розміри області, в якій

відбувається **розсіяння електронів**, тобто область, на яку діють електрони в речовині, як це видно із рис.2. Величину R можна зменшити, використовуючи замість електронів іони, бо $A_{\text{іон}} < A_e$.

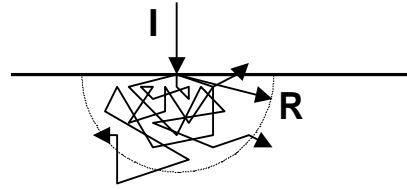


Рис.2 Область розсіяння

Тепер розглянемо вплив електронів з пробігом R , котрий флуктуацій, що мають місце в ході технології виготовлення елементів, на розмиття краю та мінімальний розмір елементів ІМС, а також вплив на нього флуктуацій домішок у напівпровідниках.

- розмиття країв елементів ІМС, що є наслідком флуктуацій у технологічному процесі створення ІМС

Кожний технологічний процес повинен багатократно відтворюватись. При цьому внаслідок флуктуацій, притаманних технологічним процесам виготовлення елементів, край їх структури відтворюється з певною похибкою, тобто із певним розмиттям краю. Якщо причини розмиття краю структури статистично незалежні, то має місце нормальний (гауссовий) закон розподілу ймовірності із певною дисперсією σ^2 .

Тоді ймовірність того, що хоча б один з N параметрів виходить за межі інтервалу $\bar{x} - \alpha < x < \bar{x} + \alpha$

$$NP_1 = N \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha}{\sigma \sqrt{2}} \right) < 1 \quad (3)$$

Ми отримали інтегральне співвідношення, аналіз якого дає значення $x_{min} = \ell_{min}$, якщо для даної технології відомі такі величини: значення дисперсії σ , відносно допустиме $\xi = (\ell - \bar{\ell})/\bar{\ell} = \Delta\ell/\bar{\ell}$ та абсолютне допустиме відхилення α величини ℓ від її середнього значення та кількість елементів N . Здебільшого нас цікавлять випадки великих кількостей елементів, коли $N \gg 1$. В цьому разі згідно умові (3) $erfc(\alpha/\sigma\sqrt{2}) < 1/N \ll 1$, що має місце при

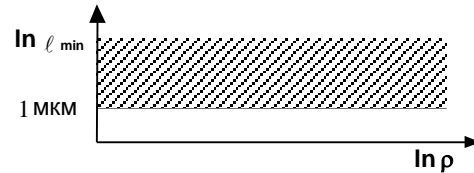


Рис.1 Залежність ℓ_{min} , що визначається крайнім розмиттям, від питомого опору матеріалу.

великих значеннях аргументу $\alpha/\sigma\sqrt{2} > 1$. В цьому випадку функцію $erfc\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right)$ можна представити у вигляді ряду і отримати замість формули (3) більш просте співвідношення

$$\frac{\alpha}{\sigma} > 2,1\sqrt{\lg N} \quad (4)$$

Звертаємо увагу, що згідно умовам (3 і 4) мінімальний розмір елементів ℓ_{min} , котрий визначається крайовим розмиттям, не залежить від питомого опору матеріалу ρ . Заштрихована область на рис.1 відповідає можливим значенням ℓ_{min} .

- флуктуація концентрації домішок

Розглянемо один із N елементів ІМС із лінійним розміром ℓ і середньою кількістю донорних домішок $\bar{n} = n_d \ell^3$, n_d - середня концентрація домішок. Позначимо дозволений інтервал флуктуаційних змін кількості домішок в елементі через $\bar{n} - \Delta n < n < \bar{n} + \Delta n$, де $\Delta n = \xi \bar{n} = \alpha$. Тоді ймовірність того, що флуктуації домішок в одному елементі не виходять за межі дозволеного інтервалу знаходиться, як і в попередній задачі, за допомогою нерівності (3) або (4). В нерівності

$$\alpha = \xi \bar{n} = \xi n_d \ell^3 \quad (5)$$

Знайдемо n_d через питомий опір напівпровідника. Питомий опір ρ залежить від концентрації легуючих домішок n_d , наприклад, для донорного напівпровідника при низьких температурах

$$\rho^{-1} = e\sqrt{n_d}\mu\beta = \beta_1\sqrt{n_d} \quad (6)$$

де μ рухливість, а $\beta = 2^{-1/2} \cdot N_c^{1/2} \cdot \exp\{-E_d/k_B T\}$, N_c - ефективне число станів, приведене до дна зони провідності, E_d - енергетична глибина залягання донорів, k_B - стала Больцмана.

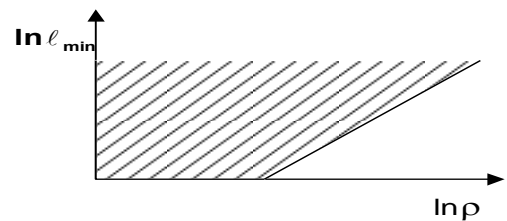
$$\bar{n} = \bar{\ell}^3 n_d = \frac{\bar{\ell}^3}{(\rho\beta_1)^2} \quad (7)$$

і формулу (16) можна переписати у такому вигляді

$$\frac{\xi n_d \bar{\ell}^3}{\sigma} = \frac{\xi \bar{\ell}^3}{\sigma \beta_1^2 \rho^2} > \sqrt{4,6 \lg N} \quad (8)$$

Із (8) видно, що ℓ_{\min} залежить від питомого опору ρ . При малих флуктуаціях домішок для оцінки дисперсії можна скористатись тим, що розподіл Гауса наближається до розподілу Пуасона і тому $\sigma = \sqrt{\bar{n}}$. Скориставшись цим виразом для дисперсії для і тим, що, як і раніше, нерівність (8) має місце при великих значеннях аргументу, отримаємо такий вираз

$$\ell_{\min}^3 > \frac{4,6}{\xi^2 n_d} \lg N \quad (9)$$



Залежність ℓ_{\min} елемента ІМС, що визначається флуктуаціями концентрації домішок, від питомого опору матеріалу.

яка дозволяє проводити оцінку мінімального розміру елемента ℓ_{\min} , котрий визначається флуктуаціями домішок. На схемі зображений приклад такої залежності. Заштрихована область показує можливі значення розмірів елемента. При $\xi=0,1$; $N_d = 10^{19} \text{ см}^{-3}$; $N = 1/\bar{\ell}^3 = 10^6$; $\ell_{\min} = 0,1 \text{ мкм}$.

- дифузія атомів (молекул)

Безперечно, що дифузія також впливає на різкість краю, тому що середня глибина дифузії x_d , яка визначається таким співвідношенням

$$x_d = (2Dt)^{1/2}$$

іноді стає сумірною із краєвим розмиттям елементу. Тут D - коефіцієнт дифузії при даній температурі виготовлення елемента ІМС, а час плинності цього процесу.

22. Фізичні основи роботи польових транзисторів з ізольованим затвором.

(2 варианта ответа)

Находкін ст38

Польовий МОН-транзистор⁵ є напівпровідниковим чотирьохполюсником, в якому використовується рух рівноважних носіїв струму. Він знайшов широке застосування в сучасній мікроелектроніці, як базовий елемент ІМС. Напруга на одному з його електродів V_G (затворі) створює в напівпровіднику управляюче електричне поле. Це електричне поле змінює концентрацію носіїв струму в тонкому шарі просторового заряду, локалізованого біля затвора, що призводить до зміни його електропровідності і дрейфового струму основних

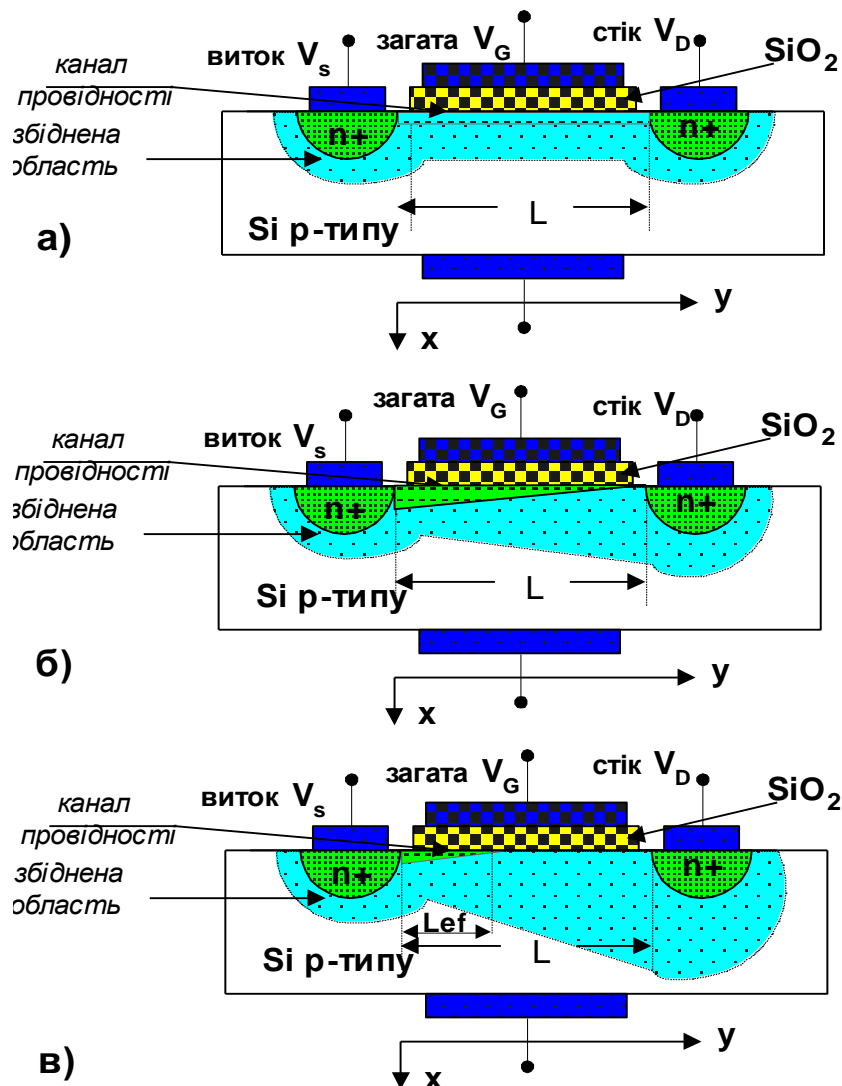


Рис.2.17. Схема будови МОН - транзистора і утворення довгого інверсного каналу провідності в ньому при різних умовах: а) $V_s = V_B = 0$; $V_D \approx 0$; $V_G \neq 0$; б) $V_s = V_B = 0$; $V_D \neq 0$; $V_D < V_G - V_T$; в) $V_s = V_B = 0$; $V_D > V_T$; $V_G \neq 0$.

носіїв між витокom та стоком.

На рис.2.17.а зображена принципова схема будови польового МОН-транзистора. Він утворюється на напівпровідниковій пластинці здебільшого з кремнію р-типу, на поверхні якої виготовлені дві області n^+ -типу, для створення омичних контактів витoku S [S- source] та стоку D [D - drain]. До цих областей через металеві (здебільшого алюмінієві) контактні електроди прикладається напруга V_{DS} - виток-стік і йде струм стоку I_D . Стоковий струм йде, головним чином, крізь канал провідності, тому що n^+ -р переходи в областях витoku і стоку перешкоджають дрейфу носіїв струму в напівпровідникову підкладинку. Зауважимо, що оскільки в каналі провідності рухаються рівноважні носії струму, то виток S і стік D *оборотні*, тобто їх можна поміняти місцями. Над каналом провідності створюється металевий електрод загати (затвору) G [G - gate], котрий відокремлюється від кремнієвої підкладинки тонким шаром оксиду SiO_2 або іншого діелектрика. В залежності від типу діелектрика розрізняють два типи транзисторів⁶: МОН- транзистор з діелектриком із SiO_2 і МДН - транзистор з іншим діелектриком⁷.

Здебільшого на практиці використовують два типи каналів провідності, а саме:

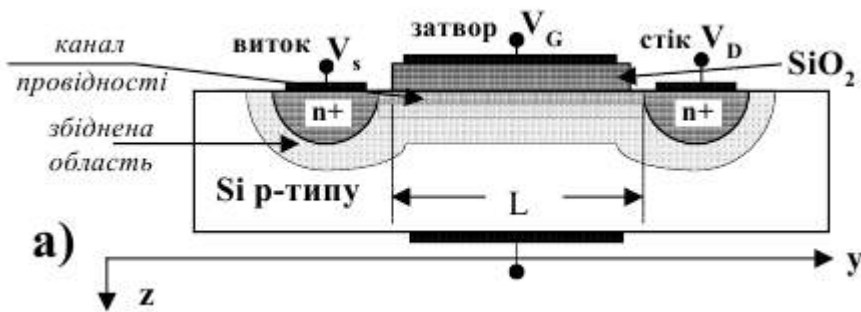
1. *вмонтований канал провідності*, котрий створюється додатковим легуванням приповерхневого шару кремнієвої пластинки. В цьому випадку напруга на загаті V_G збіднює канал провідності носіями струму і тому такі транзистори називаються *збідненими* МОН транзисторами.

2. *наведений канал*, котрий створюється (наводиться) напругою на загаті V_G . Величину і знак V_G вибирають так, щоб відбувалось збіднення каналу носіями струму і при певних $V_G \geq V_T$ наступала інверсія знаку носіїв струму в каналі. Транзистори з таким каналом називаються *збагаченими* МОН транзисторами, тому що напруга загати під час роботи транзистора змінює інтенсивність збагачення каналу провідності інверсними носіями струму. Саме такі транзистори, виготовлені на поверхні кремнієвих пластинок р-типу з інверсним каналом n-типу, найбільш часто застосовуються в мікроелектроніці. В цьому випадку крізь канал дрейфують носії з більшою рухливістю ($\mu_n > \mu_p$), що дозволяє виготовляти транзистори з кращими параметрами.⁸

На рис.2.17 показано, як відраховується довжина каналу провідності L . Вона направлена вздовж осі y , котра йде від виток до стоку паралельно поверхні напівпровідника. Вздовж осі x канал характеризується глибиною x_c . Крім довжини використовують ще й *ширину каналу* w в напрямку перпендикулярному до осі y і паралельно до поверхні напівпровідника рис.2.17. Вона вибирається так, щоб при заданих параметрах каналу отримати необхідну електропровідність транзистора при робочих напругах на його електродах

2 варіант:

МОН-транзистор є напівпровідниковим приладом, у каналі провідності якого відбувається рух (транспорт) рівноважних носіїв заряду. Він є чотирьохполюсником. Напруга V_G на одному з його електродів - затворі⁴ створює керуюче електричне поле. Воно змінює концентрацію носіїв заряду в каналі провідності - шарі просторового заряду біля затвора, що призводить до зміни електропровідності каналу між *витоком* S (source) та *стоком* D (drain). Таким чином, польовий транзистор та його різновид МОН-транзистор є напівпровідниковими приладами, підсилення яких обумовлені транспортом (переносом) основних носіїв у каналі провідності, котрий керується електричним полем, створеним потенціалом затвору.



3.3.a. Наближення плавного каналу

В наближенні плавного каналу електричне поле уздовж каналу E_y суттєво менше електричного поля в поперечному напрямку E_z , тобто уздовж осі z ($E_y < E_z$), тому можна вважати, що електричне поле E_z , котре формує наведений канал провідності, залишиться однорідним уздовж усієї довжини каналу провідності. Наближення плавного (або довгого) каналу виконуються за таких умов:

1. у випадках довжин каналу L , котрі значно більші за розміри збіднених областей біля стоку й витоку L_e ($L \gg L_e$);
2. сталої рухливості носіїв заряду ($\mu_n = \text{const}$);
3. при значно більшій перпендикулярній складовій електричного поля по зрівнянню з повздовжнім полем ($E_z \gg E_y$);
4. сталого поперечного електричного поля (E_z не залежить від y);
5. малого повздовжнього градієнта електричного поля ($dE_z/dz \gg dE_y/dy$)

Таким чином,

$$\begin{aligned} L &\gg L_e; \\ \mu_n &= \text{Const}; \\ E_z &\gg E_y; \quad \frac{dE_z}{dz} \gg \frac{dE_y}{dy} \end{aligned} \quad (3.1)$$

За умов (3.1) роботу транзистора можна аналізувати за допомогою *одновимірної моделі*. Спочатку розглянемо якісну картину роботи МОН транзистора, а в наступному розділі доведемо основні формули в межах цієї моделі. Напруга на затворі V_G змінює параметри каналу транзистора. Це схематично показано на рис.3.1.а.б.в. Спочатку при $V_S = V_D \cong 0$ обрана величина напруги на затворі V_G призводить до збіднення каналу носіями. При напругах $V_G \geq V_T$, де V_T - *порогова напруга* (див. (3.11)), в каналі провідності відбувається *інверсія знаку носіїв заряду*. Утворюється майже однорідний інверсний канал провідності з електропровідністю, котра зростає зі збільшення V_G (рис.3.1.а). При появі стокової напруги V_D у каналі провідності між стоком та витоком іде струм. Він створюється дрейфом основних носіїв заряду під дією поздовжнього електричного поля E_y , створеного різницею потенціалів витік-стік $V_D - V_S$.

Збільшення стокової напруги $V_S < V_D \leq V_G - V_T$ зменшує товщину каналу провідності біля стоку, як це показано на рис.3.1.б. Основними причинами зменшення то-

вшини каналу провідності біля стоку є те, що стокова напруга створює зворотну напругу на діоді стік-підкладинка, а також з'являється струм між витоком і стоком. Зворотна напруга на діоді стік-підкладинка збільшує товщину збідненого шару біля стоку, а падіння напруги стік-виток змінює просторовий розподіл потенціалу в каналі $V_C(y)$, котре зменшує товщину інверсного каналу провідності біля стоку.⁵

Коли стокова напруга V_D стає більшою певного значення V_{Dm} , то ділянка каналу поблизу стоку зменшує свою товщину майже до нуля, бо на ній зменшується концентрація носіїв. На цій ділянці канал зникає ("перекривається"), тому що напруга між затвором і підкладинкою стає недостатньою для сильної інверсії носіїв заряду в цій області. "Перекриття" каналу провідності при $V_D = V_{Dm}$ обмежує його електропровідність і настає *насичення стокового заряду*. Збільшується опір цієї ділянки каналу, тому що вона знаходиться не в режимі інверсії, а в режимі збіднення. При цьому струм стоку I_D майже не змінюється. Подальше збільшення $V_D \geq V_{Dm}$ супроводжується збільшенням зворотної напруги на p^+ -р переході стік-підкладинка, що викликає збільшення товщини збідненого шару біля стоку, зменшення ефективної довжини каналу L_{ef} , як це показано на рис.3.1.в, та незначного зростання стокового струму. Це явище називається *модуляцією довжини каналу*. Воно обмежує величину вихідного опору МОН транзисторів. Нарешті, при ще більших напругах V_D настає *електричний пробій*, при якому стоковий струм зворотно або не зворотно різко зростає.

23.Що нового в мікроелектроніці відриває застосування гетеропереходів? Приклади.

на гетеропереході здійснюється просторове розділення зарядів іонізованих домішок (у даному випадку іонізованих донорів у широкозонному напівпровіднику) та $2D$ електронного газу в каналі провідності, локалізованому у вузькозонному напівпровіднику.

Канал провідності в цій структурі утворюється в об'ємі напівпровідникової структури на глибині ($\sim 150 \text{ \AA}$) від поверхні. Тому на електрони в $2D$ каналі слабо впливають такі різновиди розсіяння:

- кулонівського розсіяння іонізованими донорами, бо вони просторово відокремлені від 2DEG у каналі провідності нейтральною прокладкою товщиною $d \neq 0$, що згідно (3.61) збільшує рухливість носіїв,
- нерівностями поверхні напівпровідників, бо його границя віддалена від каналу;
- дефектами, котрі часто важко усунути, коли канали провідності створюються в приповерхневих шарах напівпровідників;
- нерухомими зарядами на границі з оксидними шарами тощо.

Ці особливості $2D$ каналу на гетеропереході дозволяють отримувати в ньому великі рухливості носіїв. Наприклад, у каналі між GaAs та $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ при кімнатній температурі рухливість електронів дорівнює $\mu_n(300\text{K}) \sim 8000 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, а при температурі рідкого азоту $\mu_n(78\text{K}) \sim 10^5 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, що суттєво покращує параметри МОН транзисторів. Такі транзистори називаються НЕМТ транзисторами (High Electron Mobility Transistor - транзистор із великою рухливістю електронів). Вони мають час перемикавання при кімнатній температурі $< 56 \text{ пс}$, а при 78K - $17 \cdot 10^{-12} \text{ с}$. В перспективі це дозволяє створювати транзистори, котрі при температурах 78K працюють на частотах сумірних із частотами контактів Джозефсона, котрі працюють при температурах $4,2\text{K}$.

Приклади

УНІПОЛЯРНІ НЕМТ ТРАНЗИСТОРИ

HEMT транзисторами називаються транзистори з великою рухливістю електронів (High Electron Mobility Transistor або скорочено HEMT). У них використовують канали провідності, що утворюються між напівпровідниками з різною зонною структурою (різною шириною забороненої зони). Такий контакт називається гетероконтактом на відміну від гомоконтакту, котрий утворюється між напівпровідниками з однаковою шириною забороненої зони. Для того щоб уникнути утворення механічних напружень та дислокацій на контакті, використовують напівпровідники з майже однаковими кристалічними ґратками але різними ширинами заборонених зон. Для цього, здебільшого, використовують напівпровідникові сполуки $A^{III}B^V$ та $A^{IV}B^{VI}$ та їх тверді розчини, наприклад, GaAs, $Al_xGa_{1-x}As$ та AlAs; InP та $InGa_{1-x}P_yAs_{1-y}$, GaSb та $Al_xGa_{1-x}As_ySb_{1-y}$ а також Si та SiGe. Тверді розчини на основі сполук $A^{III}B^V$ перекривають діапазон ширин заборонених зон від 0,2 до 2,5 еВ при дуже незначній зміні параметрів кристалічних ґраток. Гетероконтакт виготовляють за допомогою молекулярно-променевої епітаксії. Контактна різниця потенціалів на гетероконтакті між двома напівпровідниками створює контактне електричне поле, котре вигинає зони біля контакту. Значний внесок у вирішення проблеми виготовлення гетеропереходів зробив нобелівський лауреат академік РАН Ж.І. Альферов.

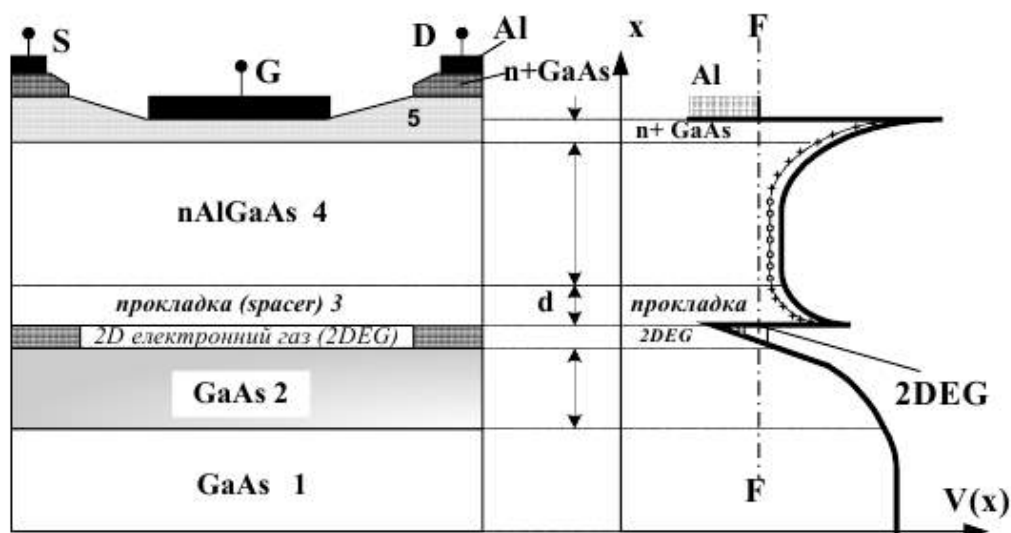


Рис.3.29. Переріз польового транзистора з гетеропереходом AlGaAs-GaAs та зона діаграми. 1 – підкладка із напівізолюючого GaAs, 2 – вузькозонний GaAs, 3 – прокладка із не легованого GaAs, 4 – широкозонний nAlGaAs, 5 – сильно легований n+AlGaAs.

транзистор із модуляцією швидкості (VMT - velocity modulation transistor) (рис.3.31). Він виготовляється на основі гетеропереходів із сполук $A^{III}B^V$. Модуляцію дрейфової швидкості або рухливості носіїв здійснюють зміною просторової локалізації 2D електронного газу відносно локалізації іонізованих домішок, що розсіюють носії.

24. Яку роль відіграють дифузійні процеси у мікроелектроніці?

Дифузія в мікроелектроніці відіграє як позитивну, так і негативну роль. З одного боку дифузійні процеси дозволяють створювати пір області при створенні транзисторів, з іншого боку обмежують мінімальний розмір елементів ІМС.

3. Яку роль відіграють дифузійні процеси в мікроелектроніці?

Дифузійні процеси в мікроелектроніці відіграють дуже велику роль. З розвитком сучасної радіоелектроніки та електронної техніки з'явилася потреба у мініатюризації. Дифузія є одним з найбільш важливих чинників що викликають технологічні обмеження мінімальних розмірів елементів ІМС. Вона впливає на різкість краю, тому що середня глибина дифузії x_d , яка визначається таким співвідношенням

$$x_d = (2Dt)^{1/2}$$

Іноді стає сумірною із краєвим розміром елементу. Тут D – коефіцієнт дифузії при даній температурі виготовлення елемента ІМС, а t – час плинності цього процесу.

При малих полях, коли

$$E_x \ll 2I_{D_n}^{-1} \quad (5.29)$$

$$a_1 = 1/I_{D_n} \quad (5.30)$$

$$\Delta n = \Delta n_0 \exp(-x/I_{D_n}) \quad (5.31)$$

Таким чином, носії, що інжектують у точці $x=0$ із концентрацією n'_0 , дифундують у глибину зразка й у стаціонарному стані встановлюється експоненціальний розподіл концентрації вздовж осі x . На глибині $x = I_{D_n}$ концентрація зменшується в e разів. Ця глибина називається *глибиною дифузії* $I_{D_n} = \sqrt{D_n \tau_{fn}}$. Розглянемо ще раз нерівність (5.29), яка визначає умову, коли дифузія переважає дрейф носіїв. Скориставшись співвідношенням Ейнштейна, яка встановлює зв'язок між коефіцієнтом дифузії та рухливістю носіїв у невідродженому напівпровіднику поблизу стану термодинамічної рівноваги (див. задачу 5.6)

$$\frac{\mu_{n,p}}{D_{n,p}} = \frac{e}{k_B T}, \quad (5.32)$$

отримаємо такий вигляд для нерівності (5.29) і з урахуванням (5.23а)

$$eE_x I_{D_n} \ll 2k_B T, \quad (5.33)$$

або

$$\ell_{en} \ll I_{D_n}, \quad (5.33a)$$

де введена величина ℓ_{en} , котра чисельно дорівнює довжині шляху, який проходять носії за час життя із швидкістю дрейфу

$$\ell_{en} = \mu_n E \tau_{fn} \quad (5.33b)$$

Вона називається довжиною дрейфу. Таким чином, згідно (5.33b), дифузія має місце, коли енергія, що її набувають носії струму на дифузійній довжині, менша за $k_B T$, або навпаки, коли довжина дифузії більша за довжину дрейфу (5.33b).

Дуже велике значення має дифузія у р-п переході, бо саме завдяки їй утворюється збіднений шар, без нього використання діодів та транзисторів було б неможливе. Крім того на основі дифузійних процесів побудован дифузійний резистор який досить широко застосовується при виготовленні ІМС.

12.5.а. Дифузійні резистори

Дифузійні резистори складаються з тонкої приповерхневої області напівпровідникової підкладки певної форми й розмірів. Схема такого резистора зображена на рис.12.24. Резистором є дифузійний шар між контактами *A* і *B*. Його опір є рівним

$$R = \rho \frac{\ell_1}{\ell_2 d} = R_{\square} \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad (12.63)$$

де ℓ_1 і ℓ_2 - довжина й ширина, $\rho/d=R_{\square}$. Величини опору $R_{\square} = 5\div 200 \text{ Ом}/\square$, тому $R = 50\div 50000 \text{ Ом}$.

Як видно з рис.12.24, еквівалентна схема резистора досить складна, він узагалі є нелінійним елементом. Його позитивною рисою є те, що він виготовляється за допомо-

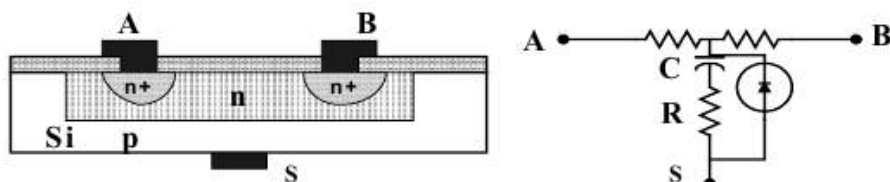


Рис.12.24. Схема дифузійного резистора.

гою тієї самої технології, що і транзистори. Ця обставина є причиною, чому він досить широко застосовується при виготовленні ІМС. Проте треба мати на увазі і його недоліки, а саме:

- нелінійність,
- залежність від температури,
- великий розкид значень опорів - 30%.

25. Загальна схема виготовлення інтегральних схем. Базові процеси мікро- та наноелектронного виробництва.

10.09.
2015

Загальна схема виготовлення ІС для першого шару
1) Прийняття монокристалічного кремнію-декларат якій схеми. Влас кристалу ~ 17 , $d=30\text{см}$,
Чим більший кристал, тим більше дефектів.
Дефекти токові.
Вискозність - не дефект.
Світові товщі монокристал виготовлені ІС не шов-
4 мо.

- розріз, механ. обробка, очистка пластини

2) Формування робочого шару нр на монокристалі - Епітаксія. Мовне брив. досконалий шар нр з контрольованою кількістю домішок.
Товщина шару $\sim 3-4\text{мкм}$.

3) Оксидування. Оксид утворює рівномірну плівку

4) Літографія - створення першого малюнка на ІС

5) Лезування - введення домішок в шар. Малюнок карманів. Витягу, стону, малюнок різних каналів.

6) Літографія - створення вузлових областей в та С карманах певного типу (n або p)

7) Лезування

8) Металізація - нанесення шарів металевих плівок

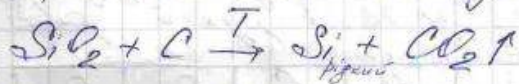
9) Літографія

Точність нанесення всіх шарів має бути $\sim 1\text{мкм}$!
Змішування не допустимі.
Чим вище ступінь інтеграції, тим більше шарів.

Технології виготовлення інтегральних схем.
- необхідно мати пластину монокристал. мовального кремнію; товщ. $P_{\text{дрн}} \approx 10^5 - 10^6$

Сировина для виготовл. кремнію - кварцовий пісок без L -домішок.

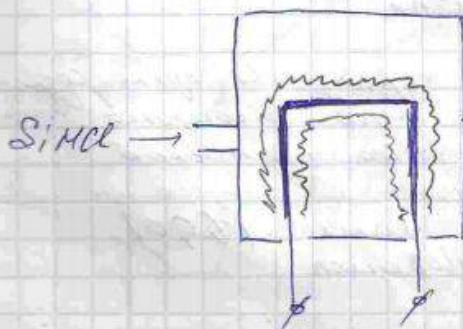
1) Уголь з SiO_2 отримати Si треба очистити його від, який має більшу енергію зв'язку з киснем.



В ел. дуговій печі суміш SiO_2 та коксу (C) при високих температурах вуглистість і отримують Si 98%
 Si чистий - алмазний в якому знаходиться 70% Si



$$T_{кип}(SiMCl_3) = 34^\circ C$$

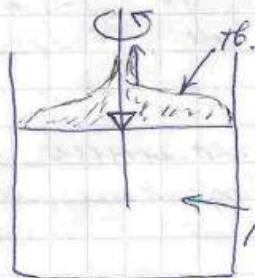


продукт H_2

На штифтах росте шар Si, знімають з штифтів і мають полікристалічний кремній.

49

Заправку у велику посудину залив Si і плавить. Туди вставляють монокристалічну заправку



Заправка обертається і піднімається, де росте монокристал до того часу поки воно не стане розмірів посудини.

Кристали зс. методом Чохральського отримують таким чином

Концентрація домішок в тв. і рідкій фазі різна. Відома к-сть домішок у тв. рідкій фазі наз. **сегрегація - впрокращення**

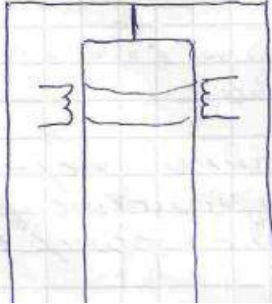
	Al	Fe	Sb	P	As	C	O	B
$C_{тв}$	10^{-3}	10^{-5}	10^{-2}	0,3	0,3	0,8	0,82	0,83
C_p								

коэф. сегрег.

С - ... П - ...

Проблема з L та O . Коэф. стиснення бл. 1, тому в тв. і рідкій фазі композит розмішок буде \approx однакова.

Епітаксія
Зонна плавка. Кристалі монокристал закріплюють і за допомогою великої індукції плавлять тонкі шари кремнію. \downarrow велика різь. Кристалі переміщують в рідину фазу, яка складається з країв і матию густий монокристал.



Обрізаємо край, а бумо розді-
ляємо так, щоб площини пла-
стини врівноважили певний
часи Si .
Робота чини (1,90)
Механ. оброблення

20

Товщ. пластини в якій $\Delta d < 10 \text{ мм}$.
 Δd - функція товщини.



Літографія - основний п-о створення малюнку

Wafer - підкладочна, частина

- 1) нанесення шару оксиду
- 2) нанесення резисту - рідкого фотолитографічного х-м під
- 3) дію р-ну. чинників.
- 4) сушка резисту
- 5) порівнювання та експонування
- 6) розчинення експонованої частини маси
- 7) оброблення резисту
- 8) промив - "розчинення резисту"
- 9) контроль малюнка
- 10) стрівання оксиду
- 11) стрівання резисту - "lift-off" - матию до-
ступ до кремнію.
- Оксид має муркий коэф. дифузії. При створ. ча-
стину концентрації розповсюд. фінанса.
- 12) фінальний контроль.

26. Фізичні обмеження мінімізації мікро- та наноелектронних елементів та систем.

Фізичні обмеження мінімізації в наноелектронних схемах

1. Технологічні обмеження
2. Обмеження функціонування окремих елементів
На довжині каналу 90 нм класичний транзистор перестав функціонувати
3. Енергетичні обмеження (при зведенні до кінця шляху не працює через низьку провідності. Н-д: управління тепловідводом)
4. Обмеження масштабування (зменшення каналу пропорційно)
5. Розміри окремих елементів стають тоді, коли розміри елементів стають менші, ніж довжина вільного пробігу фотонів (збільшення ефекту розсіювання або довжини хвилі де брассе-діраковського ефекту енергетична структура релаксує)
6. Теплові ефекти (Довжина вільного пробігу ~ 10 нм)
Довжина хвилі де брассе-діраковського

$$\lambda_{\text{дБ}} = \frac{12,5}{\sqrt{E(\text{eV})}} [\text{\AA}]$$

Технологічні обмеження

При такій швидкості, як можна зменшити до монокристалічного, деякі елементи виробити не можна. При великих напругах в приладах, а саме в напругах, можна виробити деякі типи ~~структур~~ неоднорідностей. Коли ми змінюємо технологічний неоднорідності.



канал

Si (кремій)

$$n_{\text{сф}} = C_{\text{сф}} D^3$$

коэф. сфер. абсорбції

$$r = \gamma \frac{\lambda}{D} + C_{\text{сф}} \cdot D^3$$

В оптимальній ситуації є мінімальний радіус оптичної шпильки

λ - довжина випромінювання;

D - апертура; $\gamma \approx 1$ (коефіцієнт)



$$D \sim \lambda_d \sin \alpha$$

Збільшення D призводить до сферичних аберацій

Діа: знайти оптимальне значення D

В існуючих структурах $\lambda > 150$ нм (при існуючих) менших довжинах хвилі всі релаксуючі канали непрозорими для такого світла).

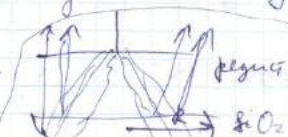
На довжинах можна виробити систему з $\lambda \approx 10,8$ нм

Але це дороге думка, бо неоднорідності мають бути меншими ніж період з λ , а це технологічно складно

Можна використовувати інфра червоні елементи ($E > 150$ eV, $\lambda \approx 8$ нм)

Якщо є проблема

через високі енергії збільшення об'єкта з λ - збільшення довжини



розширювальна: $R = A E^n$

$$n = 1,5 \div 2,5$$

$A = \text{const}$

(3)

В полевом транзисторе при разности потенциалов, в нелинейном режиме.

В этих условиях процесс инжекции носителей до $T \sim 1000\text{ K}$. Все инжектировано до равновесия minority

Диффузионный коэффициент: $\bar{X} \approx 2 \sqrt{D\tau}$

$D = f(T) \sim \exp(T)$ температура. ↑ коэффициент диффузии

Пример концентрации германия $n_p \approx 10^{18} / 10^{19} \frac{\text{ат}}{\text{см}^3}$

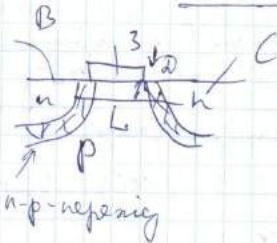
При сильной концентрации ~~необходимо~~ учитывать поправки к формулам.



$$n = 10^{18} \text{ см}^{-3}$$

→ 1 атом в таноме об'єкта.

Объемный функциональный элемент



внутренний p-n переход:

$$L^* = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_{nh} \cdot \epsilon_0 \cdot \psi}{e N_d}}$$



$$\psi \approx 1 \text{ В}$$

$$L > 3L^*$$

↑ добротность канала

концентрация германия

Пороговая длина, при этой добротности канал не работает: $U_0 \sim \sqrt{2e\epsilon_0\epsilon_{nh}N_d\psi}$

$$E = \frac{U_0}{D} \sim \sqrt{\frac{2e\epsilon_0\epsilon_{nh}N_d\psi}{\epsilon_0\epsilon_g}}$$

D

↑ толщина затвора

Критическое поле $E_{кр} \approx 10^7 \text{ В/см}$, не поле переинвертирует канал в инверсионный режим.

$$E \leq \frac{E_{кр}}{\gamma}$$

$$N_{g \max} = 10^{18} \text{ см}^{-3}$$

$$L_{\max} \approx 3L^*$$

$L_{\max} > 0,1 \text{ мкм}$ (было все транзисторы максимумом)
 или транзистор

(2.)

15.07.10

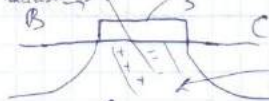
$$n \sim 10^9; f = 3 \cdot 10^9 \text{ ГГц}; \epsilon = 10^{-14} \text{ Дж}$$

$$P_{\text{полупров}} \sim 10^2 \text{ Вт}; P_{\text{электр}} \sim 5 \cdot 10^2 \text{ Вт} \quad \leftarrow \text{на микроволнах } \sim 1 \text{ см}^2$$

Потребляемая мощность огромна, чтобы создать элемент переключателя из чистого кремния, который бы работал на частоте 3 ГГц:

$$n \cdot f \cdot \epsilon = 3 \cdot 10^4 \text{ Вт}, \text{ а не на нас будет меньше за } P_{\text{на}} \text{ (здесь } P_{\text{на}} \sim 1 \div 2 \text{ кВт, площадь } \sim 200 \text{ см}^2 \Rightarrow 10 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2})$$

Для создания структуры интеграции на объемных кремниевых пластинах. При этом переключатель, не будучи элементом, должен иметь структуру, позволяющую ему работать на частоте 3 ГГц.



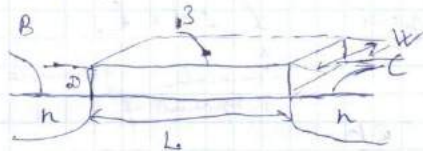
Как же сделать так, чтобы переключатель работал на частоте 3 ГГц, без индуктивности?

используя диоды и конденсаторы

и тем самым уменьшить индуктивность

Объемные интегральные структуры

линейный переключатель элемент переключателя в одной и той же структуре



$U = \frac{U_0}{K}$ (коэффициент масштабирования)

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$$l = \frac{l'}{K}; S = \frac{S'}{K^2}$$

как упрощенно считать в кремнии:

$$\tau = \frac{L}{v_{\text{эф}}} = \frac{L}{\mu E} = \frac{L^2}{\mu \cdot U_{\text{эф}}}$$

$$E = \frac{U_{\text{эф}}}{L}$$

$R' = R \cdot K$ (опр. зрительного упрощения переключателя)

затяжка емкости:

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 \cdot W \cdot L}{d}; Q = -C(U_2 - U_0)$$

$$\text{Амплитуда: } I = \frac{Q}{\tau} = \frac{\mu \epsilon_0 \epsilon_0 W}{L \cdot d} (U_2 - U_0) \cdot U_{\text{эф}}$$

$$d' = \frac{d}{K}; L' = \frac{L}{K}; W' = \frac{W}{K}; \tau' = \frac{\tau}{K}; C' = \frac{C}{K}; I' = \frac{I}{K}$$

$$j' = j \cdot K$$

← чтобы получить переключатель, нужно использовать кремний. Тогда-таки переключатель имеет объемные элементы на кремнии. Поэтому переключатель имеет структуру, позволяющую ему работать на частоте 3 ГГц.

$$\begin{aligned} j_{\text{Ac, max}} &\leq 10^5 \div 10^6 \frac{\text{А}}{\text{см}^2} \\ j_{\text{dc, max}} &\leq 10^6 \frac{\text{А}}{\text{см}^2} \end{aligned}$$

Транзисторная структура (в интегральных схемах) имеет структуру переключателя, позволяющую ему работать на частоте 3 ГГц.

так записываем: $R'C' = RC$ (не забываем)

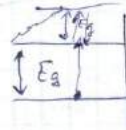
Значимости C , все же можно зрительно представить E_g только записав генерацию (SiO_2) на своем i и j максимум E_g .

$$E' = \frac{C'U^2}{2} = \frac{E}{K^3}, \text{ где мы берем } E' \gg kT$$

Значимости температурности.

Энергия идет в электрический ток.

до минимальных Полупроводников эффект



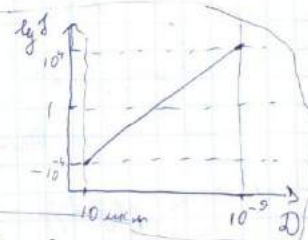
$$E = e E \cdot l$$

$$E \approx E_g$$

Контроль тока < ток
где полупроводниковый эффект.

Полупроводниковый генератор
не может генерировать
минимум: $D \sim 1 \text{ nm}$ (2006 pic)
минимум не может

$$D' = \frac{D}{K}$$



таким образом полупроводник эффект
будет в генерации!

$$\Delta_g < d < l_e$$

затрагивает
де факто

затрагивает бинарное
проблема
энергия

$$\mu = \frac{e}{m} T_0$$

↑
примечание

↑
так пересчитываем

$$\epsilon_0 = e \mu_0 \leftarrow \text{примечание}$$

↑
пересчитываем
примечание (матрица)

следующая g-на пропорция: f_0

$$f - f_0 = (f - f_0) \Big|_{t=0} \cdot e^{\frac{t}{\tau}}$$

↑
до момента времени затухания

$$\frac{1}{\tau_0} = \sum_i^n \frac{1}{\tau_i}$$

↑
интерпретация как
пересчет

22.09.15

$$\mu = \frac{e \langle n \rangle}{m^*}$$

Минимум полупроводника (k-зона где эффективная
масса, перекрывает минимальную бинарную генерацию
энергии.

$$\tau_p = \frac{l}{v_{thermal}} - \text{на фотонах}$$

$$\frac{1}{\langle \tau \rangle} = \sum_i^n \frac{1}{\tau_i}$$

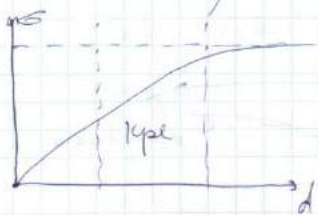
$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{\tau_p}$$

$$\tau_s = \frac{d}{v}$$

6.

$$\frac{1}{\epsilon_{\text{эф}}} = \frac{1}{\epsilon_p} + \frac{1}{\epsilon_s} \approx \frac{1}{\epsilon_s} \left(1 + \frac{\epsilon}{d}\right) ; \quad \mu_{\text{эф}} = \mu_0 \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{d}}$$

$$\sigma = e n \mu$$



$$\sigma_{\text{эф}} = \sigma_0 \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{d}} \leftarrow \text{гуде}$$

наиме больше КРЕ наблюдается в мембранах, где толщина уменьшается; $m^* \sim \frac{d^2 \epsilon}{dk^2}$

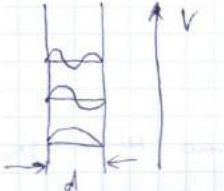


наиме мем генерации.

Квантовый поперечный эффект

$$d = \Delta$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi d}{n} \right)^2 \right), \quad n=1, 2, 3, \dots$$



наиме большая мем генерации

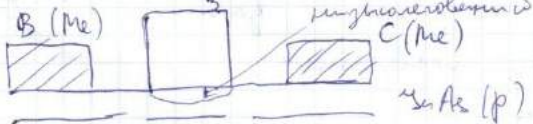
$$\Delta E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m d^2} (2n+1)$$



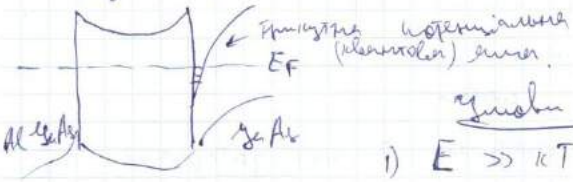
сдвиг энергии

наиме i приближение квантового поперечного эффекта.

HEMT — транзистор с квантовым поперечным эффектом



Види y и z будут генерироваться, $E_0 < E_F$. репер дигитально или пикетом \bar{e} не \bar{e} поле поперечный



умень Δ КРЕ:

1) $E \gg kT$ (неме индиферент Δ kT)

2) Взаимодействие между мембранами не будет мембрана Δ дигитально: $\Delta E > \delta \approx \hbar / \tau = \hbar / (\mu \frac{m^*}{e})$

3) $\frac{Ad}{d} \ll 1$ (диэлектрик не будет тонким)

1. $n_{3D} = \frac{m}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{2mE}$

↑ гравитационный эффект

2. $n_{2D} = \frac{m}{\pi \hbar^2}$

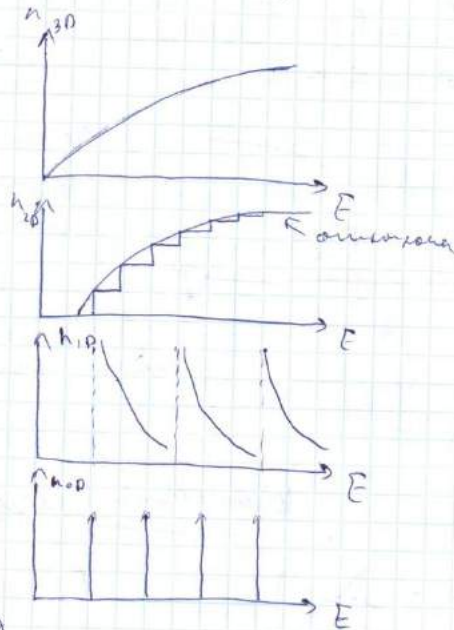
↑ гравитационный эффект

3. $n_{1D} = \frac{1}{\pi \hbar} \sqrt{\frac{2mE}{L}}$

↑ гравитационный эффект

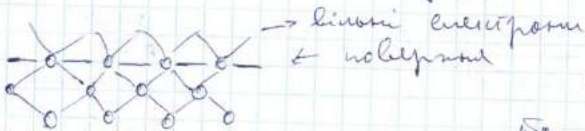
4. $n_{0D} = \delta(E - E_n)$

↑ 0-мерный эффект



Квантовые состояния, что E и n

n/n может быть произвольным.

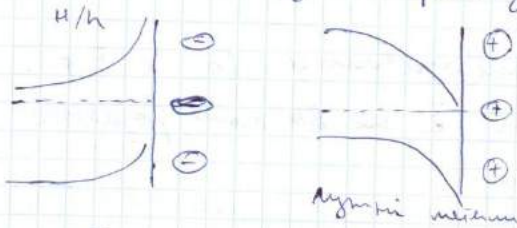


не обязательно не важно
структура Si (100)

1) Максимальный поверхностный эффект $\rightarrow \sigma \rightarrow \sigma = \sigma \leftarrow \sigma$

2) Дефицитный эффект

Квантовый эффект \rightarrow эффект, что зависит от геометрии, напр. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100



3) Максимальный поверхностный эффект

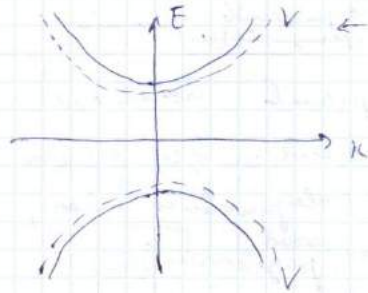
$\sigma \rightarrow \sigma$ / поверхность σ не зависит

Вектор \vec{k} ок: $\vec{k} = \vec{k}_1 + i \cdot \vec{k}_2$

8. $n_p = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ (к-то не зависит)

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2}{2m} [k_1^2 + k_2^2] + i \frac{\hbar}{m^*} (\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)$$

В кванти $k_2 = 0$, набухну поверхности $k_1 \perp k_2$ ^{мгновенно = 0}
 могут быть заповнены або не
 в зависимости от p -ой Ферми.
 Могут быть заповнены до
 максимумов на нек. p -ых Ферми
 ио при этом до макс. энергии
 (- або +)
 Кванти имеют энергию $(a, 0)$



$$x_D = (2Dt)^{1/2}, \quad (1.24)$$

іноді стає сумірною із розміттям краю елемента. Тут D – коефіцієнт дифузії за даної температури виготовлення елемента ІМС, а t – час плину цього процесу.

1.4.2. Фізичні причини обмеження, пов'язані із взаємодією елементів ІМС

Найважливішими процесами взаємодії елементів є:

- їх розігрів; ▪ розігрів міжелементних з'єднань; ▪ паразитні зв'язки.

Причиною розігріву елементів і з'єднань є енергія, що виділяється при роботі елементів, і проходження струму у з'єднаннях. Хоча при перемиканні одного елемента виділяється мало енергії, проте елементів багато, і сумарна потужність може бути значною. Коли окремі елементи рівномірно розподілені в об'ємі, то енергію, що виділяється в 1 см^3 за 1 с , можна обрахувати за формулою:

$$W = P\tau\nu N, \quad (1.25)$$

де P – потужність розсіювання при перемиканні одного елемента, τ – час перемикання, ν – тактова частота, $N = \ell^{-3}$ – кількість елементів в 1 см^3 . Якщо скористатись даними табл. 1.2 для сучасних ІМС: $P = 10^{-5} \text{ Вт}$, $\tau = 10^{-9} \text{ с}$, $\nu = 10^7$, $N = \ell^{-3} = (0,5 \cdot 10^{-4})^{-3} = 8 \cdot 10^{12}$ і вважати, що всі елементи працюють одночасно, то за допомогою (1.25) маємо: $W \approx 10^{-5} \cdot 10^{-9} \cdot 10^7 \cdot 10^{12} \cdot 8 \approx 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-3}$. Тобто в одиниці об'єму виділяється надзвичайно велика потужність⁷. (На практиці об'ємні ІМС ще не виготовляються.) Щільність елементів реальних ІМС менша за N , і при їх роботі виділяється менша потужність. Наприклад, процесор Intel Pentium 4 має сім шарів напівпровідників, розташованих в ізоляційному матеріалі. Вони утворюють 1,2 млн транзисторів. Процесор споживає потужність близько 80 Вт (достатню для неможливості нехтувати впливом нагріву на роботу ІМС), що розсіюється площею поверхні $2,2 \text{ см}^2$. Тому здебільшого потрібні спеціальні заходи для примусового охолодження ІМС.

Тепловий розрахунок ІМС – досить складне завдання, тому обмежимося найпростішим випадком. Для цього розглянемо пластинку товщиною h , в об'ємі якої рівномірно розподілені елементи зі щільністю $N = \ell^{-3}$ (рис. 1.7). В одиниці об'єму пластинки, згідно із (1.25), виділяється за одиницю часу енергія W .

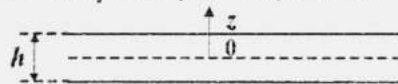


Рис. 1.7. Пластинка товщиною h

Рівняння теплового балансу за рахунок теплопровідності має такий вигляд

$$\gamma c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + W, \quad (1.26)$$

де c_v – теплоємність [$\text{Дж} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$], γ – густина речовини [$\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$], λ_T – коефіцієнт теплопровідності [$\text{Вт} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$], T – температура, t – час. Якщо створити на границях $z = \pm h/2$ температурні умови $T = T_1 = \text{const}$, то при розв'язанні рівняння (1.26) отримаємо у стаціонарних умовах у центрі пластинки при $z=0$ температуру T_0 із співвідношення (див. задачу 1.6)

⁷ Протягом доби людина розвиває середню потужність лише у 10 Вт.

$$\frac{8(T_0 - T_1)\lambda_T}{h^2} = W. \quad (1.27)$$

Підставимо до (1.27) вираз для W із (1.25), тоді

$$\frac{8(T_0 - T_1)\lambda_T}{h^2} = P_{\tau\nu}N = P_{\tau\nu}\frac{1}{\ell^3}. \quad (1.28)$$

Із (1.28) можна записати визначення для ℓ

$$\ell^3 \geq \frac{P_{\tau\nu}h^2}{8\lambda_T\Delta T}, \quad (1.29)$$

що дає можливість оцінити мінімальний розмір елемента ℓ_{\min} .

Величина допустимого перегріву $\Delta T = T_0 - T_1$ визначається матеріалом пластинки та явищами, що використовуються у роботі ІМС, тобто $T_{z=0}$ визначається критичною температурою, а T_1 – інтенсивністю охолодження поверхні. Величина P вибирається значно більшою за P_{\min} . Зазвичай для оцінок користуються величиною $P_{\min}\tau = 10 \cdot k_B T$, де k_B – стала Больцмана. Для резистивних елементів мінімальна потужність переключення

$$P_{\min} = \frac{V_{\min}^2}{R}, \quad (1.30)$$

де $V_{\min} = (10k_B T)/e$, e – елементарний заряд, а R – опір елемента

$$R = \rho \frac{\ell}{\ell^2} = \frac{\rho}{\ell}. \quad (1.31)$$

Тут ρ – питомий опір матеріалу, із якого виготовлено елементи схеми. При комбінуванні (1.29), (1.30) і (1.31) одержимо формулу для оцінки мінімального розміру резистивного елемента

$$\ell_{\min}^2 \geq \frac{(10k_B T)^2 \tau \nu h^2}{e^2 \rho \lambda_T \Delta T}, \quad (1.32)$$

з якої видно, що ℓ_{\min} залежить від допустимого перегріву $\Delta T = (T_{z=0} - T_1)$, часу перемикання τ , тактової частоти ν , температуропроводності λ_T і питомого опору ρ . Таким чином ℓ_{\min} , що визначається допустимим перегрівом елемента, зменшується за зростання ρ (крива 3 на рис. 1.8). Звичайно, у кожному конкретному випадку залежності складніші, оскільки визначаються властивостями речовин, граничних та інших умов реальних задач, що можуть суттєво відрізнятися від умов розглянутої моделі. Проте загальна тенденція зменшення ℓ_{\min} за збільшення питомого опору ρ зберігається. На рисунку схематично подано також залежності ℓ_{\min} , що визначаються розмиттям краю (крива 1) і флуктуаціями домішок (крива 2), які у реальних випадках одночасно впливають на мінімальний розмір елементів ІМС. Вони по-різному залежать від питомого опору матеріалу, з якого виготовлені: за незначних $\rho < 1$ Ом·см ℓ_{\min} обмежується, головним чином, тепловим ефектом (перегрівом елементів); при $\rho \sim 1$ Ом·см і великих дисперсіях σ ℓ_{\min} – розмиттям краю елементів; при $\rho > 1$ Ом·см – флуктуаціями домішок.

Допустимі розміри елементів у випадку впливу всіх трьох факторів показано над кривими 1, 2, 3 у заштрихованій області (рис. 1.8).

Безперечно, що зміна граничних умов, наприклад примусове охолодження, дасть інші залежності, оскільки воно збільшує можливий перегрів ΔT , що зменшує величини ℓ_{\min} . Проте розглянутий приклад показує, що тепловий режим роботи ІМС суттєво впливає на мінімальний розмір схеми.

Взаємодія елементів виникає через існування гальванічних, ємнісних та індуктивних зв'язків, які здебільшого можна зменшити за допомогою ізоляції окремих елементів, вибору оптимальних відстаней між елементами та введення оптичного каналу зв'язку, що розриває гальванічні та зменшує ємнісні й індуктивні зв'язки.

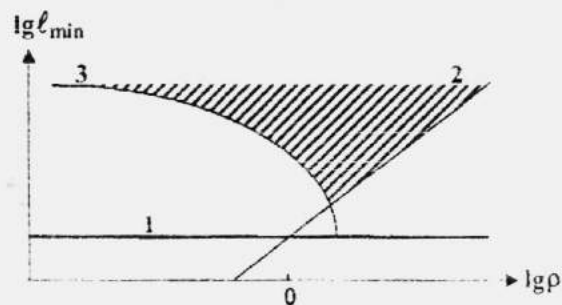


Рис. 1.8. Залежність мінімального розміру елемента ІМС від питомого опору для: 1 – розмиття краю, 2 – флуктуацій домішок, 3 – перегріву елемента

1.4.3. Фізичні причини обмеження ступеня інтеграції, пов'язані із розмірними ефектами

Зменшення геометричних розмірів окремих елементів змінює їх робочі характеристики. Множники F , що характеризують зміни робочих характеристик окремих елементів за зміни їх геометричних розмірів у K разів, є функціями K . Вони називаються скейлінговими (масштабними) коефіцієнтами $F(K)$ й визначаються за допомогою конкретних моделей роботи елементів ІМС. За зменшення розмірів модель перестає відбивати основні риси роботи елемента та $F(K)$ змінюється. Таким чином, скейлінг обмежується такою областю розмірів елементів ІМС, в якій розмірні ефекти не впливають на їх роботу. Розглянемо, наприклад опір електричному струму

$$R = \rho \frac{\ell_1}{\ell_2 \ell_3}.$$

Доки $\rho = \text{const}$, зміна розмірів елемента у K разів викликає зменшення R також у K разів, і скейлінговий коефіцієнт опору $K = F_R$:

$$\frac{R'}{R} = \frac{\ell'_1 / \ell_1}{\ell'_2 / \ell_2 \cdot \ell'_3 / \ell_3} = \frac{K^{-1}}{K^{-1} \cdot K^{-1}} = K = F_R. \quad (1.33)$$

Коли ℓ_i стає меншим за довжину вільного пробігу носіїв заряду, скейлінговий коефіцієнт опору $F_R(K)$ змінюється, оскільки змінюється питомий опір $\rho(\ell)$ і $\rho'/\rho \neq 1$.

У табл. 1.3 наведено скейлінгові коефіцієнти $F(K)$ для МОН-транзисторів (метал–оксид–напівпровідник) із довгим каналом провідності, у робочому стані яких електричне поле залишається сталим $E_D = \text{const}$ (див. розд. 3).

Проте зміна моделі, що викликається зміною фізичного процесу роботи транзистора внаслідок впливу розмірних ефектів, викличе зміну його скейлінгових коефіцієнтів $F(K)$.

Таблиця 1.3

Параметри	Формули	$F(K)$
Розміри ℓ_i , d_{ox} – товщина оксиду, w – ширина; L – довжина	ℓ'_i / ℓ_i	K^{-1}
Напруга стоку V_D (Drain) і затвору (Gate) V_G	$V_D = E_D L$	K^{-1}
Концентрація домішок у підкладці N_A	електричного поля просторового за- ряду $E_s \approx \sqrt{(V_G - E_1 d_1) N_A} = \text{const}$, $E_1 d_{ox}$ – падіння потенціалу на оксиді	K
Струм у лінійній частині I_V -характеристики	$J_D = (w \epsilon \mu / 4 \pi d_{ox} L) V_G V_D$	K^{-1}
Ємність затвору	$C = \epsilon W l (4 \pi d_{ox})^{-1}$	K^{-1}
Максимальна густина елементів	$N = (w d)^{-1}$	K^2
Час затримки перемикачів	$\tau_{\max} = d^2 / \mu V_D$	K^{-1}
Джоулеве тепло при перемикачів	$P_f = J_D V_D$	K^{-2}
Потужність при управлінні	$P = 1/2 C \Delta V_G^2$	K^{-3}
Параметр якості	$\Pi = P_f \tau$	K^{-3}
Функціональна швидкодія	$FS = N \tau^{-1}$	K^3

Оскільки фізичні величини залежать від структури плівок (відповідно до їх товщини), вони залежать також і від товщини d . Проте навіть коли структура плівки не відрізняється від структури масивної речовини, її властивості можуть змінюватись, адже у тонких шарах мають місце різні розмірні ефекти:

- класичний розмірний ефект настає, коли розміри зразка стають меншими за довжину вільного пробігу носіїв $d < \ell$ (для металів при 300K $\ell \sim 100 \text{ \AA}$) і питомий опір починає залежати від розмірів зразка;

- квантовий розмірний ефект настає, коли розміри зразка стають меншими за довжину хвилі де Бройля носіїв ($d < \lambda_D = \sqrt{150/V[B]} \text{ \AA}$) й змінюються: енергетична структура (з'являються підзони), густина електронних станів та інші властивості речовини;

- зникнення надпровідності, коли розміри зразка d стають меншими за глибину проникнення магнітного поля у надпровідник ($d < \lambda_L = \sqrt{m c^2 / 4 \pi n_s e^2}$, де n_s – концентрація надпровідних електронів, μ – магнітна проникливість), або меншими за джозефсонівську глибину проникнення ($d < \lambda_J = \sqrt{\Phi_0 c / 8 \pi^2 J_c \lambda_L}$, J_c – критичний струм Джозефсона, $\Phi_0 = hc/2e$ – квант магнітного потоку (флюксоїд));

- інтенсивне тунелювання відбувається, коли $d < \hbar/2 \cdot (2m(U-E))^{-1/2}$, де U – висота потенціального бар'єра, E – енергія електронів, що тунелюють;

- зміна характеру та структури магнітних доменів, коли розміри зразка стають меншими за розмір доменних стінок тощо.

Таким чином, *розмірні ефекти* змінюють особливості фізичних явищ у низькорозмірних 2D-, 1D- та 0D-системах. Вони змінюють скейлінгові коефіцієнти та обмежують рівень мікромініатюризації мікроелектронних приладів. Це має місце, здебільшого у зразках нанометрових розмірів, тому виникає потреба у створенні нових спеціальних наноелектронних приладів із застосуванням розмірних ефектів.

27. Отримання монокристалів напівпровідників. Фізико-хімічні основи очистки кремнію в мікро- та нанoeлектроніці.

29.09.2015 Вал. комп'ютер. зарядів на поверхні; ~~то~~ може ~~бу~~ призвести до інверсії провідності. Атоми Me мають заряд +. Зв'язати їх можна іонами Cl. Це дозволить зняти Me сильно рутансь.

Технології виготовлення інтегральних схем.
- необхідно мати чистий монокристал мовалю-го кремнію; конц. Прим $< 10^{15} - 10^{16}$

Сировина для виготовл. кремнію - кварцовий пісок без L-домішок

1) Щоб з SiO_2 отримати Si треба очистити його Me, який має більшу електрону зв'язку з киснем.



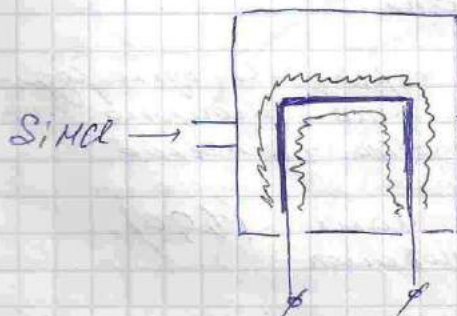
В ел. дуговій печі суміш SiO_2 та коксу (C) при високій температурі вугливодять і отримують Si 98%

Сировина - англійський в якому знах. до 70% Si

2) $\text{Si} + \text{MCl} \xrightarrow{\text{Темп.}} \text{SiMCl}_3 + \text{H}_2 \uparrow$ - переведення кремнію в газову фазу

$$T_{\text{кип}}(\text{SiMCl}_3) = 34^\circ\text{C}$$

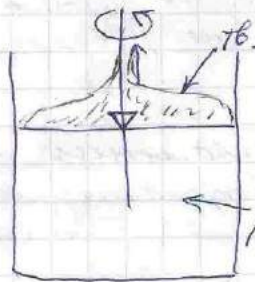
В замкненому об'ємі П-континент штилька кремнію, яка нагріта до температури.



продукт p-типу

На штильці росте шар Si, знімаємо її штильку і маємо полікристалічний кремній.

Заправка у вел посудину докато Si і плавить.
Потім вставляють монокристалічну заправку



Заправка обертається і підіймає, відчу, де поростає монокристал до того часу поки воно не стане розмірів посудини.

Кристали це методом Чохральського отримують таким чином

Концентрація домішок в тв. і рідкій фазі різна. Відомі K -ці домішок у тв. і рідкій фазі маю

сегрегація - впрокращення

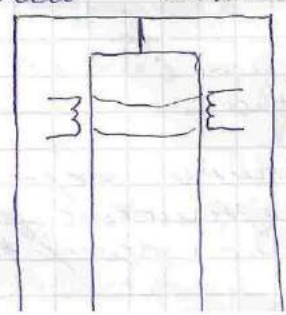
	Al	Fe	Si	P	S	C	O	B
$K_{тв}$	10^{-3}	10^{-5}	10^{-2}	0,3	0,3	0,8	0,82	0,85
K_r								

коэф. сегрег.

Проблема у C та O . Коэф. сегрегації бл. 1, тому в тв. і рідкій фазі концентр. домішок буде \approx однакова.

Спінтаксія

Зонна плавка. Чимінг монокристал закріплюють і до розплавленої великої індуковані плавильної ванни ки марш кремнію. Під рідким розлв. домішки переходять в рідку фазу, які спливають до країв і мають густий монокристал.



Обрізаємо край, а було розді-
ляють так щоб площина плав-
ки врівноважує певний
час Si .
Робота чаші (1,90)
Механ. оброблення

Найпростіший ризиковий напорошувач - протина з протинкою M_e (V, M_o), куди вкладається порошок, яку треба напорошити. Перевіряти в руку

А

Б

фазу, а потім випаровується. Тут важко отримати плівку до шв. напорошеним мена. у вакуумі досягають димних газів.

Залежність густоти плівки від напорошення

Плівки повинні бути необхідної стехіометрії
Нерівності: 1) в розташованій фазі M_e вкладається з матеріалом протини

6.10.2015

2) Не в металі можна напорошити та-

Утвор. пластини в шві $ad < 10 \text{ мм}$.
 ad - фігурація товщини.



Отримання тонких плівок на поверхні приладів мікро та напоселектроніки

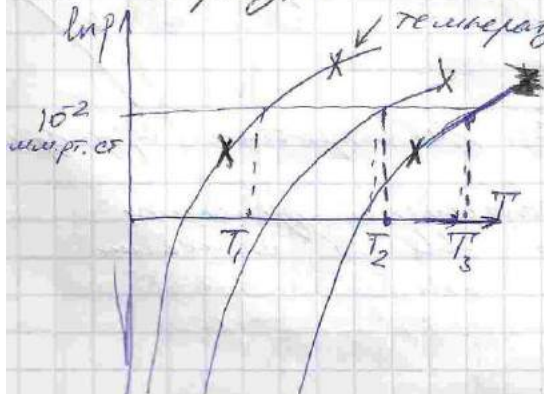
Першим способом отримання тонких плівок - кування.

- Способи отримання тонких плівок
- спосіб переведення матеріалу, що осаджується в вакуумі, газу фазу, річку фазу, тв. фазу.
 - проста конденсація, хм. р-ція, електроліз, р-ція.
 - різні механізми переносу: дифузія в газі, рідині, вільний проліт.

Найконтрольованішим середовищем є вакуум.
Це відрізняє контрольоване газове середовище.

Методи хімі. розкрити дієвості не хімі.
 р-ції: атом з перш. фаз, хімічне епітак-
 сія, електрол., розподілювальний процес

Термічне випаровування є рахунок експоненці-
 го нагріву.



температура первинне р-ції
 при високій температурі випаровування,
 що дозволяє припустити для
 термічного способу?

$$\ln p = - \frac{A}{T} + C$$

Ф-ія, що
 описує термі-
 чне випаровування

28. Термодинаміка процесів утворення зародків конденсованої фази і кристалізація.

Зростання пилки
Нотка оскріат на поверхню.

1) Механізми поперового зростання



Механізми Франко-Зандер-Мурке

Н с-на ктерочемиа, сфатва
умова зрост. је поперовим метамірином:

$$\frac{|a_s - a_{ss}|}{a_s} < 3\% - \text{неупадат сталит цеток}$$

a_s - стала цетит пунмартити
 a_{ss} - адсорбат



2) на ат. з малим Δ зрост.
ат. з великим Δ

Звирит цитв. до зтвр. дислокацій \Rightarrow зростання
виртв. је механірином

1) зтвр. монтрв. монотер је умови

$$\frac{|a_s - a_{ss}|}{a_s} > 3\%$$

2) зрост. виртв. по острівцевому механірилу
або виртв. на змоторогау монотері
або виртв. на механіри Франска-Кростанова



3)



ЗФ механірилу
механірилу Волмер-Ведер
виртв. виртв.

Ак і приклад показує, що опис. н-е фазовий
за рач. конденсації вбуд. енергії утвор. об'єкту

$$\Delta G = \frac{4}{3} \pi r^3 \Delta G_v$$

$$\Delta G_v = - \frac{kT}{\Omega} \ln \frac{P}{P_H} + \frac{4}{3} \pi r^2 \sigma$$

логарифм пересилених

Ω - атомний об'єм

P - тиск маси, керм. фазов.

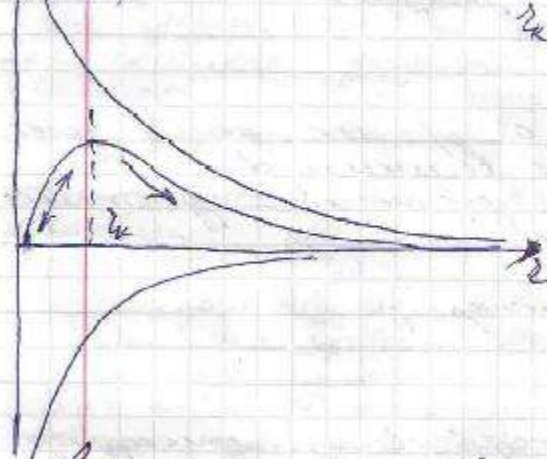
P_H - тиск маси, керм. при

Тм фазового

ΔE як фаз.

Значення повної енергії як фаз. конденсації

$\Delta G(r)$



$$r^* = \frac{2\sigma\Omega}{kT \ln \frac{P}{P_H}}$$

σ - коэф. поверхневої енергії або вільної енергії

Розр. енергії, коли вільна енергія фазової конденсації
 σ_s - інтерфейсу, σ_f - плівки

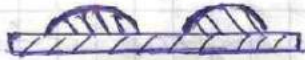


$$\sigma_s < \sigma_f + \sigma_i$$

Висновки: буде таким чином, що замінює
світло обл. поверхні системи.

30 $\sigma_s > \sigma_f + \sigma_i$ - і плівка замінює σ_f
а) витрати енергії

б) жирови. поверхні термич. змочуванні мономерами,
а реші - осередки / епітакс. рост, на жирових ву
злах цота



Сурфактанти - поверхнево-активні речовини. Змінює
поверхневий натяг (З.В. мін), фіз. власт. речо-
вини.

29. Методи виготовлення тонких плівок.

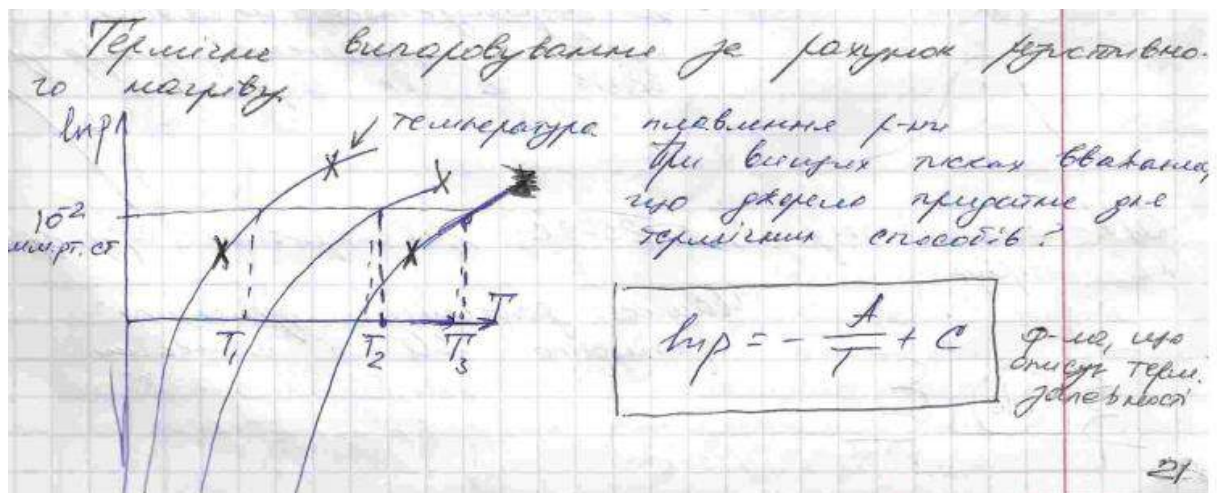
Способи одержання тонких плівок

- спосіб наведення матеріалу, що одержується в вакуумі, газу, фару, річку фару, т.в. фару.
- проста конденсація, хім. р-ція, електронне р-ня.
- різні механізми переносу: розбризкування в газі, річці, влітний праліт.

Найкращим середовищем є вакуум. Це забезпечує контрольоване газове середовище.

З фізичних методів розсіювання, термічне випаровування, електропроменне, лазерне випаровування, іонно-променне, в катодній магнетронній розпорці.

Методи хім. розсіювання ґрунтуються на хім. р-ції: газу з газом фару, річкове епітаксія, електроліз, розпорювальний процес.



Найпростіший експериментальний метод розсіювання - розпалювання порошків, яку треба попередньо нагрівати, куди вкисається фару, а потім випаровується. Тут важко отримати плівку бо швидкість випаровування велика.

У вакуумі маємо дуже тонкі плівки.

Залежність густоти пилки вугілля від порожнин

Пилки повинні бути необхідної стехіометрії
 Нерівності: 1) в розташованій фазі Me взаємодія з матеріалом ретину

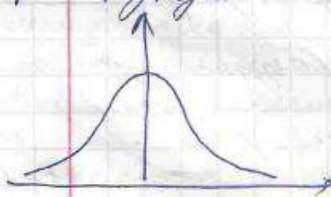
6.10.2015

2) Не в металі можна морфологію та-
 ким методом

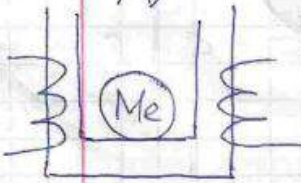
Стехіометричні опові так не можна морфоло-
 гію сильно взаємодія. ретину з матеріалом
 морфологія

Як робити стехіометричну пилку методом
 тривалого морфологічного

4 Розрив по поверхні нерівності.
 - це вирішується шляхом
 додання декількох розриву-
 валь та їх обертання



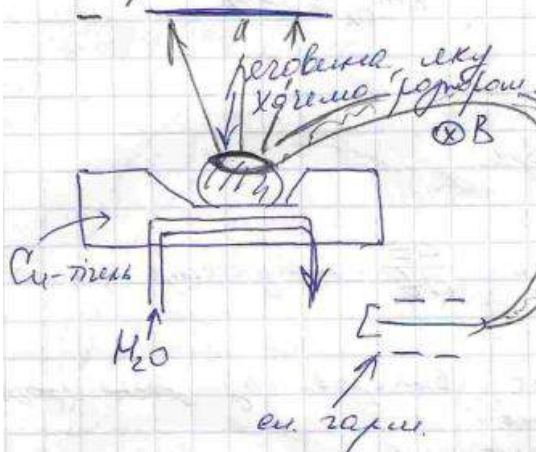
ВН-мак високу $T_m \approx 2500^\circ\text{C}$, діє кристаліна структура,
 не абсорбує.



22

Часто розпадаєт зрештою
 взаємодія Me з отриманим

Електроно-променеве морфологічне



В ширі запускання вогню
 електронів. Сп. живл. вел.
 $I_{\text{сп}} \approx 0,5 \text{ А}$ $U \approx 10 \text{ кВ}$
 спрямований в отвір. Фокусований
 пучок ел. покриває на
 поверхні матеріалу який
 ми хочемо розморфувати роз-
 плавляючи і випаровувати.
 Для рівномірного морфоло-
 гічного обертання ретину.

Шв. напором при $\frac{dz}{dt} \sim 5 \text{ мм/с}$

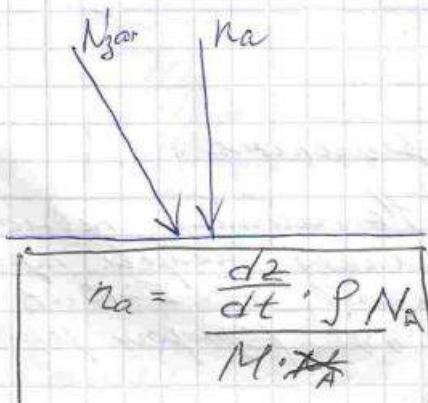
Сп. / променеві напором $\frac{dz}{dt} \sim 20 \div 30 \text{ мм/с}$
 В прохній випров мають звор не тільки потки атомів, але й іонів, які можна зробити з великою користю

Аргенту (примітання) можна зробити:

- використання циркулярних
- протів "і" на циркулярному відносно можна то тієї \Rightarrow збільш. швидкості проникнення

У вакуумі поверхня всеодно забруднюється за дією іонів. Високий вакуум сприяє $\frac{dz}{dt}$ високу вартість \Rightarrow не вигідно, краще збільшити $\frac{dz}{dt}$

У вакуумі поверхня всеодно забруднюється за дією іонів. Високий вакуум сприяє $\frac{dz}{dt}$ високу вартість \Rightarrow не вигідно, краще збільшити $\frac{dz}{dt}$



При малому на поверхню рівномірний матеріал 2 конвек. потоки:

- n_a - потік атомів з ф.
- іонізованих іонів

$$N_{Za} \ll n_a$$

довести що ф. му
 M - молярна маса
 S - площа ф. му
 $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$

23

$$N_{Za} = \frac{P}{\sqrt{2\pi M_{Za} \cdot kT}}$$

$$M_{Za} = 29$$

$$N_{Za} = \frac{n \cdot \bar{v}}{4}$$

У ф. му швидкість спр. втр.

- $\downarrow N_{Za} \rightarrow \downarrow P$ - ф. му

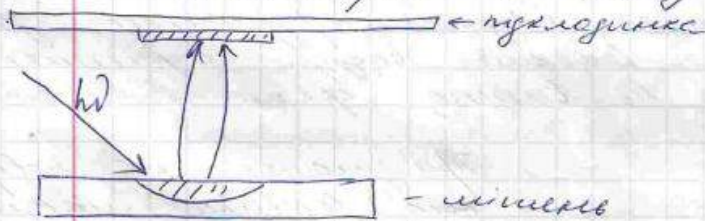
- $\uparrow n_a \rightarrow \downarrow M$

ф. му шв. іонів: збільшити $\frac{dz}{dt}$ - швидкість напос.
 або зменшувати вакуум

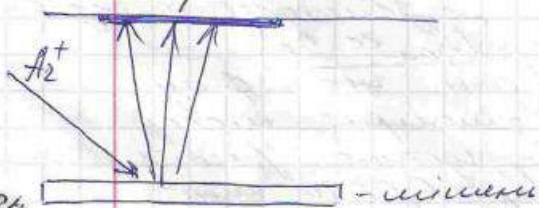
Лазерне абляція - процес випаровування поверхневого шару матеріалу випромінюванням.
 - (температура розжигу) миттєве розжигання
 - висока температура

$T \sim 10^4 \text{ K}$, товщина півки $d \sim 10-20 \text{ nm}$
 $\frac{dz}{dt} \sim 1 \text{ m/s}$

Лазерні в ПМД - висока к-сть швидких іонів, можуть руйнувати пучки іони. ~~Лазерні~~
Лазерні - миттєві мапери в середньому вакуумі
 - швидкі пучки;
 - стаціонарні в чаші миттєво зупиняються.



Іонне / іонізаційне мапериження



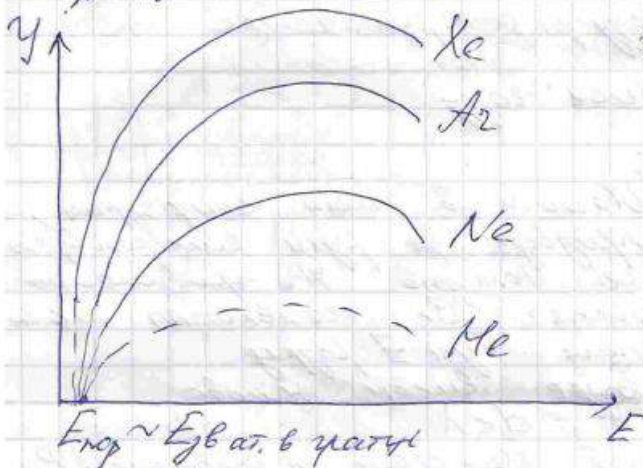
На мішені лівного
 шару мапери. пучок
 іонів $E \sim 5-10 \text{ keV}$;
 вив. розжигу, розжигу.

24

Коef. іонного розжигу

$\gamma = 1 \div 10$

$$\gamma = \frac{m_{\text{іон}}}{m_{\text{атом}}} - \text{к-сть атомів мішені, що вив. іонном}$$

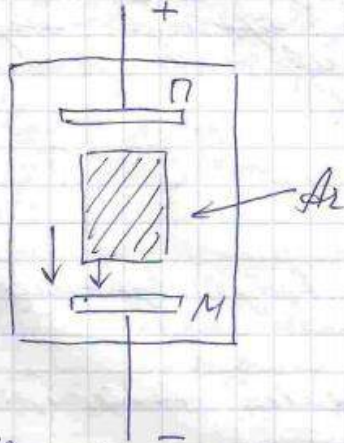


$m_{\text{іон}} > m_{\text{атом}}$
 $\gamma > 1$

На мішені вив. за розжигу
 потрапляння іонів
 в швидку матеріалу

1) Атоми випадають в білошій кількості і повер-
не до рідкого металу розпором. Ва перет-
вориться з $GaAs$ на $GaAs$. Згодом за рах.
малого коеф. розпором. поже випаровується $GaAs$
і поже осідає на підкладку $GaAs$.

Детальні мехр. розпором.

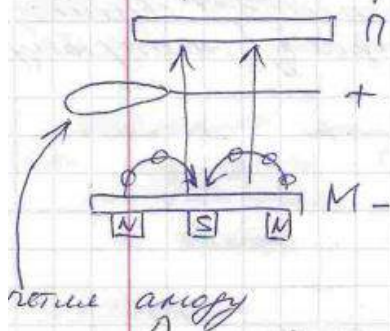


Умови: тліючий розряд I при високій $P(Ar)$ 25

Між електродом і
мішалкою, поміща в
певний об'єм залукає-
мо інертний газ і
до П та М приклад. високі
різні потенціали
 \Rightarrow з'являється тліючий розряд \Rightarrow
 \Rightarrow іонізований газ \Rightarrow поже-
дає іони на М \Rightarrow вибиває
елементи з катода (М) \Rightarrow
потрати на підкладку

Умова безперешкодного перенесення: $d < \lambda$
розмір е-м $<$ довжина вільного пробігу електр.
 λ - довжина вільного пробігу електр.
 $\lambda \sim \frac{1}{\omega P}$; P - тиск газу

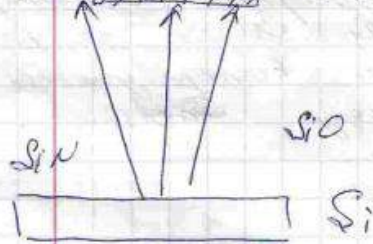
Магнетронне розпором.



Магніти в такій конфігурації
приведе до руху електронів по
циклодроту як іонізов. газ при малих
тисках. За наявності магн.
полі буде I розряд
буде висок. умова
 $d < \lambda$
Зв. тиску газу P

Активне вогнище розпорошення

Методи плавки Π



Si_3N_4 - нітрід
 SiO_2 - оксид

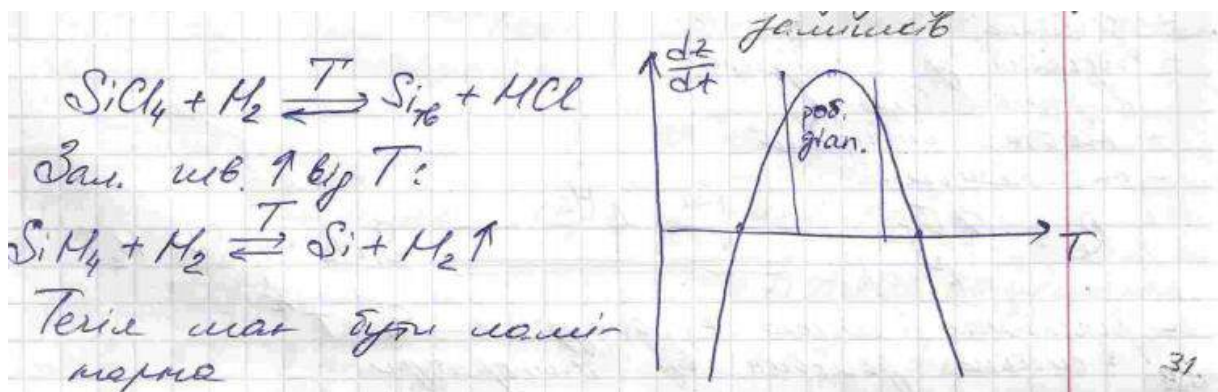
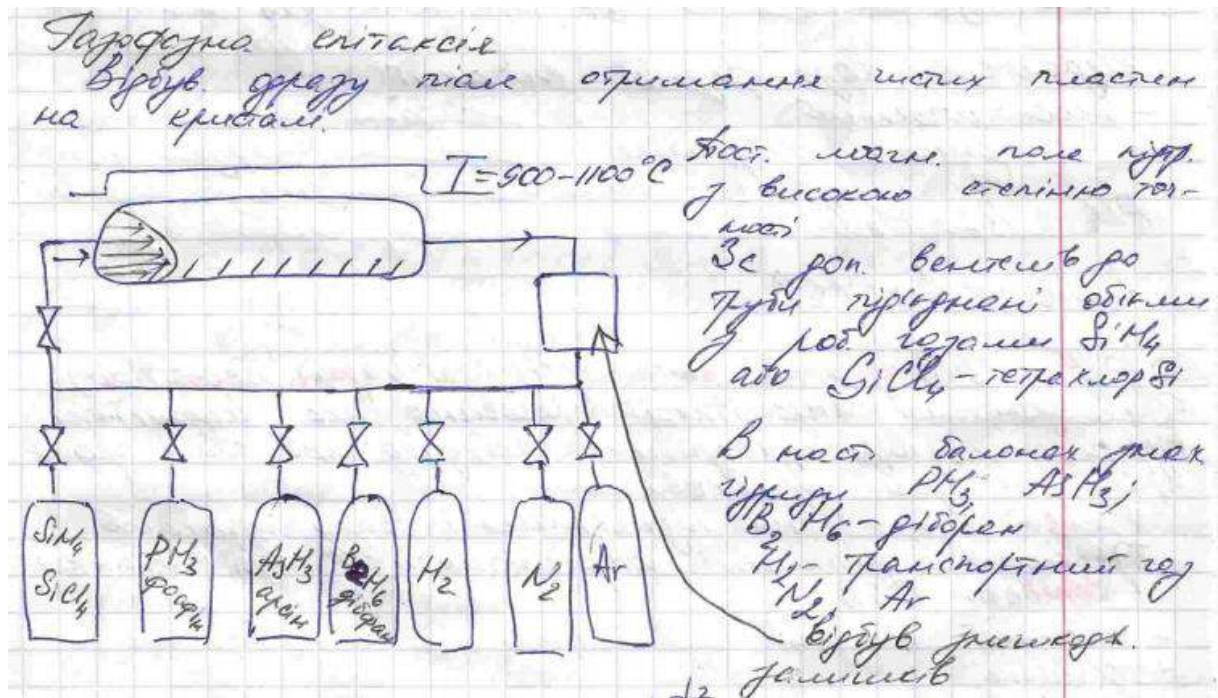
В атмосферу крім Ar додають O_2 або N_2 .

Атоми Si взаємодіють з жидким металом, і в так розпорош. Si .

SiO досягає підпалки і розпадає на SiO_2 .

Держать температуру шари елементів

30. Епітаксійне нарощування плівок. Газофазна та молекулярно-променева епітаксія. Фізико-хімічні процеси при епітаксії кремнію та сполук.



Транспорт реагентів має бути дифузійним.

$$Re = \frac{D \cdot \rho \cdot v}{\mu} - \text{число Рейнольдса}$$

$Re < 40$, щоб тече було ламінарне

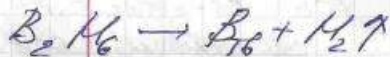
D - діаметр
 v - шв. руху
 ρ - щільність, тиск газу
 μ - в'язкість

Чим ρ та v більші $\frac{dz}{dt} \approx 0,1 - 2 \text{ мкм/хв}$

Недоліки газо-фазної епітаксії

- неколоніальність

- складність створення $\frac{\Delta P}{n}$ шару



20.10.15 CVD (хімічне опитаксія / chemical vapour deposition)

Для утворення ітеросітаксїт (перш ніж, не осаджується, виростає від підкладки) необхідно щоб стали чисті і чисті і не були окисленими

Формітаксія - і-м підкладки і осадку окислює

Прикладом утворення ітеросітаксїт є K_p епітаксія.

Форми CVD

- швидкий

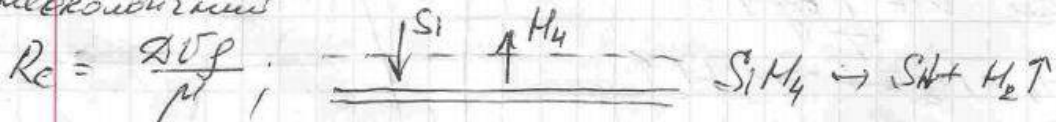
- гелевий

- повільний у реалізації

Недоліки CVD

- багато швидкий

- неколоніальність



- кінетичною швидкою + дифузій $D \sim T^n$

32 - сильно залежить від температури

Для дієвості газу маємо можливість змінювати тиск. $Re = const$ а потім змінювати. Більш дозв. змінювати склад газу і вихідні структури з різними властивостями.

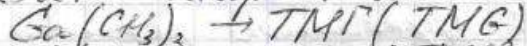
Такі структури виходять у реакторі змеш. р. **MO CVD**

metal organic

As, V, Ga - металеві органіки: $GaAs, InP, GaP, AlAs,$

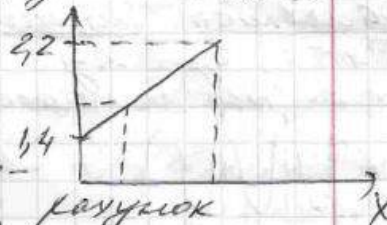
GaN - виробляють у MOCVD

GaN - використовують для дієвості газу у сплавах



ΔE - енергія активації, її можна змінювати за рахунок концентрації реагентів $Al(CH_3)_3$

Для метри MOCVD мають певні високі T



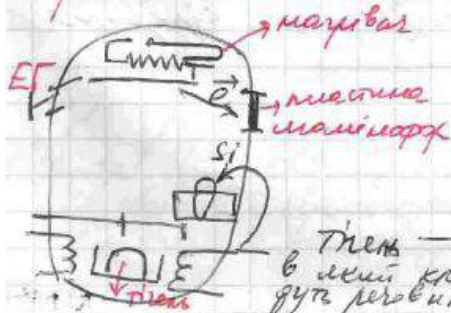
$SiH_4 \rightleftharpoons Si \downarrow + H_2 \uparrow$ - може відбув зворотне р-ня за рахунок високх Т на поверхні пластини



Високі Т руйнують цю структуру на молекулярній стадії, тому цей метод має бути керованим.

MOCVD має низький рівень контролюваності, можна контролювати лише Р, Т, V. Найкраще контролюється в вакуумі.

MBE - molecular beam epitaxy. Молекулярно-променева епітаксія



$P \approx 10^{-10} - 10^{-12}$ Torr
 $T = 1700 - 2000^\circ C$
Ступінчасті A_3B_5



В тіліє політикою
 A_3, Ga, Al, \dots
 $\Delta T_{\text{пл}} = \pm 0,5^\circ C$

33

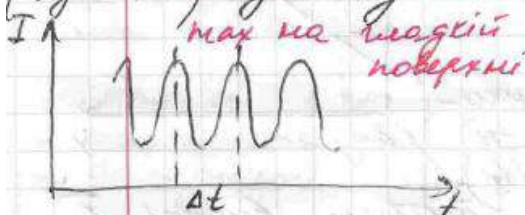
Над тілієм та засувки, які їх відкривають або закривають

Велика точність контролю

$\frac{\Delta Z}{\Delta t} < 10 \text{ нм/хв}$ - дуже повільно але висока точність

В камері можна розмістити датчики (диф. пов. \vec{e} , диф. шв. \vec{e} на відбитті і т.д.)

Залежність інтенсивності дифракційного рефлексу (відбиття) від часу:



Δt дов. відстані шв. відбиття і монохром.

Si у такій с-лі наносити електронно-променевим випромінюванням, цього вико-

ристовують як домішку A_3B_5 н/н

Переваги:

- розарощованість
- чистота
- висока T
- екологічність

Недоліки:

- дуже короткий
- дуже повільний

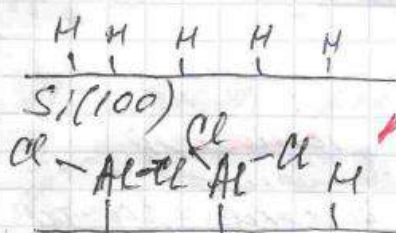
Таким чином можна створити маршево-частотні транзистори.

Вступ іонізованих маршевих бурхливо у 60-х рр.

Атомно-шарова епітаксія

А-с випрош. скл. з 2-х металевих п-сів атомами. Препарати $AlCl_3$ і H_2O .

Як їх змішати при високій T то можна утворити Al_2O_3 як погано, бо утв. полікристал. плівки і немає контролю над таким п-вом.

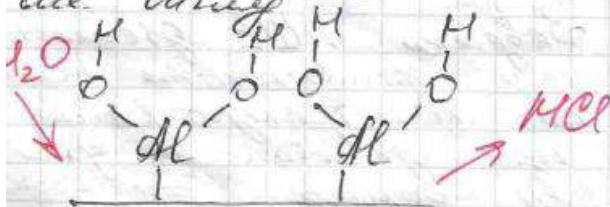


$AlCl_3$

HCl

Звернуто Si (об'їзди факти) масивуємо H_2 інакше випливає в атом. версії протити певного часу. А-с саморегулювання. На цю структуру осередкується $AlCl_3$ як ватеростійке з H_2 утв. HCl , як плівки р-чн. прийнято, п-с функціонує.

Зайнято з реакції камери $AlCl_3$ і розраховано H_2O . H_2O ватеростійке з атомами шаром і знову утв. HCl як ватеростійке. тобто моменту поки всі поверхні не приймуть вигляд.



Метале прову не пускає $AlCl_3$ і на H марше, п-с саме, що і виступає.

В результат отримано майже ідеальний шар Al_2O_3 . Це найбільш контрольований.
~~перевали~~ ^{присутність} дефектів
Широко погав використовували тільки в 2008/20

Цим методом Intel марочує підтверджені шар.
Також ув. у виготовленні конденсаторів для DRAM (Random access memory).

Підсумок:

- ~~перевали~~
- 1) ALE - шар марочує тільки ривок на різних поверхнях з точністю марочу і монотонно
 - 2) Ближній до шару газ-фазної епітаксії, але ALE сам себе зоближує, а для прекурсора розклада в газі.

Недоліки:

- дуже повільний

31. Методи отримання та застосування шарів оксидів в нанoeлектроніці.

Фізичні - розкладання при високій температурі 27.10.2015

$$\text{SiH}_4 + \text{H}_2\text{O} \xrightarrow{T} \text{SiO}_2 + \text{H}_2 \uparrow$$

Атомно-шарова епітаксія
 Це верифікована 2-х медальйонів п-с в апараті. Процесори AlCl_3 і H_2O .
 Якщо їх змішати при високій T то почне утворюватися Al_2O_3 . Це погано, бо утв. полікристал. пилу. потрібен контроль над таким п-сом.

Поверхню Si (об'єкти Si) масивуємо H_2 і AlCl_3 виступає в атом. версії потім певною ізою. Це саморегулюється. На цю структуру осаджують AlCl_3 та виступає з H_2O утв. AlCl_3 . Це тільки р-ч. не протікає, п-с функціонує.

Забудовуємо реакційну камеру AlCl_3 і додаємо H_2O . H_2O виступає з апаратом і швидко утворює Al_2O_3 . Це відбувається моментально на всій поверхні не протікає. Використовуємо H_2O .

Метод швидко напускає AlCl_3 і H_2O на поверхню п-с, що і виникає.

В результаті отримують майже ідеальний шар Al_2O_3 - найкраще контрольований. **Фізичні** присутність деяких Швидко пораз використовується тільки в 2008/35

Чим ширше Intel маркує підстроєний шар.

Також з'яв. у виробленні конденсаторів для RAM. (Random access memory).

Пірсунок:

Пірсунок:

- 1) АШЕ - шар маркує тільки шари на поверхні з товщиною шару 1 монетару
- 2) Вирізняє до шару роз-формат епітаксії, а АШЕ сам себе зобов'язує, а два процесорів розрізняє в гості.

Недоліки:

- дуже повільний

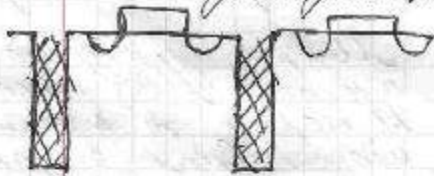
Діелектрики в інтегральній технології

Отримання шарів оксидів целюлози

Завдяки шарам оксидів Si можна робити найкращі мікропроцесори в Intel, електроніці.

Найвищі дієл. в інтегр. елементах:

- мілкі металізація
- мілкі елементи (ізоляція між окремими транз.)
- під затвором
- носіїв заряду (затвор біл. з'яв. шиммів)
- на підкладці (інтеграція)



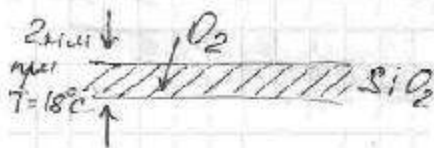
Завдяки АШЕ діелектри-
ки з'являються в шарі
в мілкі транзисторах,
що з'являється їх дієл.
в шарі.

- RHI - кремній на ізоляторі
(SOI silicon on Insulator)

Шар SiO_2 не плоский, так и плоский SiO_2 принимает форму шару на Si і далі дру-
гою плоскості починають піднімати до того часу
поки не відбудеться процес затримки шару Si



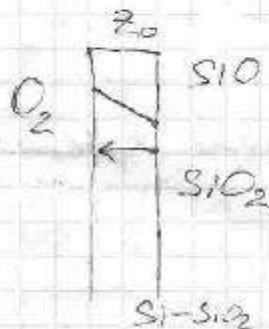
процес затримки.



O_2 окислює вуглець з по-
верхнього шару, щоб не був би-
вело ір жовтий при високій
температурі.

Не вуглець рівняє: H_2 , C_2 , Ti

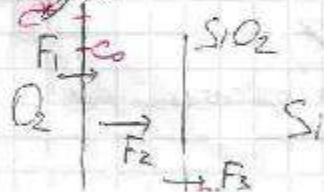
Рівновага сили окислювача зумовлена зарядом
також компенсації.



При русі атомів до поверх-
ні шару утворює шар на поверхні.

В Si окис. вуглець з рахунок
руху в SiO_2 до Si
а в Si навпаки.

Окис. процес O_2 через лівий шар, а потім
марку H_2O , а потім виводять зовнішній шар
окислів.



$$F_1 = h(C^+ - C_0)$$

h - коефіцієнт константи

$$F_2 = D \frac{dc}{dz} = \frac{D(c_0 - c_1)}{z_0}$$

D - коеф. дифузії; верхній діаметр $F_{\text{вх}}$

$$F_3 = kC_i - \text{зв'язок протікання рідини}$$

k - константа шв. реакції
Між рідиною рідк. вимиваючу і тверд. др. шк.
шар оксиду

$F_1 = F_2 = F_3$ - в шар оксиду немає ні зворот.
ні стоків оксиду.

F_3 - визначає шв. рідк. порожн. вимиваю.

$$F_3 = N_i \frac{dz_0}{dt}$$

N_i - концентр. поверхні оксиду в дану оксиду
Можна контролювати; $T, P(z_0), t$.

z_0 - товщина

$$z_0 = f(T, P, t) (*)$$

Для і Фроуе запропоновано швидк. в реакції
якою визначають змінюваність (*)

$$F_3 = kC_i = \frac{kC^*}{1 + \frac{k}{h} + \frac{kz_0}{D}} = N_i \frac{dz_0}{dt}$$

$$N_i \int_{z_i}^{z_0} \left(1 + \frac{k}{h} + \frac{kz_0}{D}\right) dz_0 = kC^* \int_0^t dt$$

$z_i, z_{\text{вх}}$ - поч. товщина оксиду

T - т-та зр. серед. шар z_i порожн. др.

$$z_0^2 + Az_0 = B(t + T)$$

$$A = 2B \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{h} \right) \approx \frac{2B}{L}$$

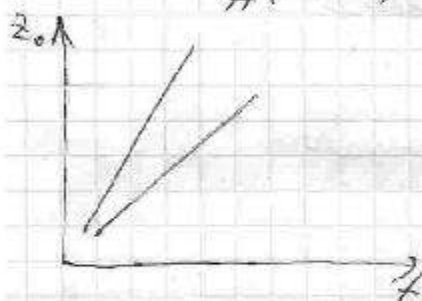
$$B = \frac{2DC^*}{N_i}$$

$$\tau = \frac{z_i^2 + Az_i}{B}$$

1) Випадок малих часів (початково дрібн. оксиду)

$$(t + \tau) \ll \frac{A^2}{4B}$$

$$z_0 \approx \frac{B}{A}(t + \tau) = \frac{KC^*}{N_i}(t + \tau) - \text{ліній. рос. від часу}$$



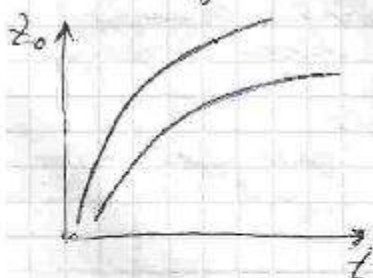
Врхній матеріал: концентрація і мех. терміматор - параметр, що найбільш впливає на швидкість реакції

C^* - фактично мех. газу в газовій фазі

2) $t \gg \tau$, $t \gg \frac{A^2}{4B}$

$$z_0 = (Bt)^{1/2} = \left(\frac{2DC^*}{N_i} t \right)^{1/2}$$

Взаємодія між оксидом і металом буде зменшуватися



Наступною разю К.Р.

2 теор. питання та задачі

32. Методи легування напівпровідників. Термічна дифузія в мікро- та наноелектроніці. Іонне легування напівпровідникових структур.

10.11.15

Легування

Визначає, коли треба отримувати певну концентрацію легуючого домішника у напівпровіднику

- локальне
- нелокальне

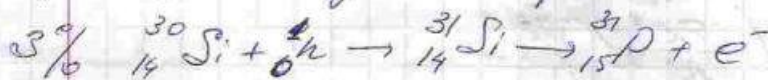
- 1) Кордвання концентрації легуючого домішника
- 2) забезпечити однорідного розподілу домішника
- 3) домішник повинен бути легким (вуглець)
- 4) повинен бути вбудованим

Методи легування

- 1) дифузійне легування
- 2) іонне імплантаційне легування
- 3) радіаційне легування

Метод радіаційного легування

3% $^{30}_{14}\text{Si}$ - ізоотоп кремнію



Небезпека: однорідний розподіл домішника, бо довгі шляхи проходження нейтронів великі, порівняно з розміром мікроелементів. Також потрібно захистити

Недоліки: наявність др. реакторів, певний час вивчення, щоб вивести розподіл (кілька годин)

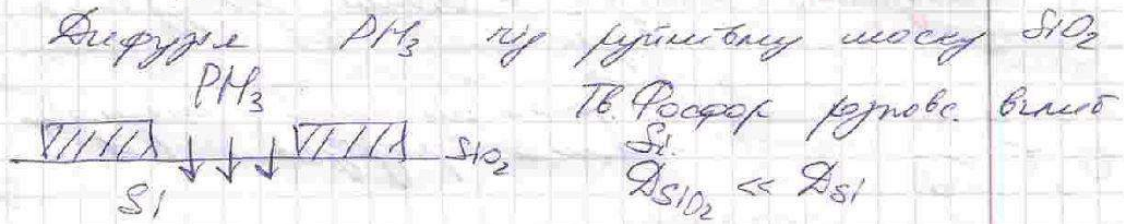
Дифузійне легування

Визначає:

- 1) у формуванні Б і Е областей у біполярних структурах
- 2) у МОН технології в області витягу-Стру
- 3) в сонячних елементах для легування полікристалічного кремнію

Способы диффузии

- 1) Диффузия из жидк. фазы, чаще при высоких температурах



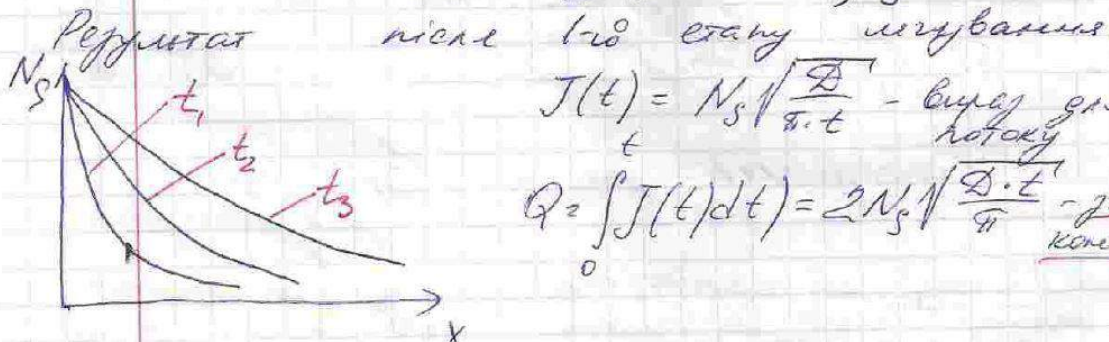
- 2) На поверхности ст. оксид нанесением легированного фторидного, т.е. боро/фосфоросиликатного стекла.

- 3) Диффузия вводов при плавном ионном легировании поверхности. В-с вводов в плавную реакцию с тиском легированного фторидного, транспортным иониз. (H_2) контролем фазы иониз., их в изотермическом

Диффузия и легирование

- 1) Этап легирования из жидк. фазы. Ж. из жидк. фазы. Вес жидк. фазы. Ж. из жидк. фазы.

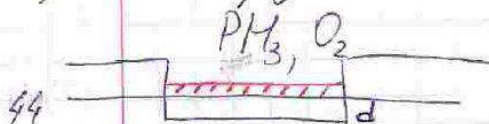
$$N(x, t) = N_s \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{Dt}}} e^{-\xi^2} d\xi \right]$$



$$J(t) = N_s \sqrt{\frac{D}{\pi \cdot t}} - \text{выражение для потока}$$

$$Q = \int_0^t J(t) dt = 2 N_s \sqrt{\frac{D \cdot t}{\pi}} - \text{закон Кнелл-Горна}$$

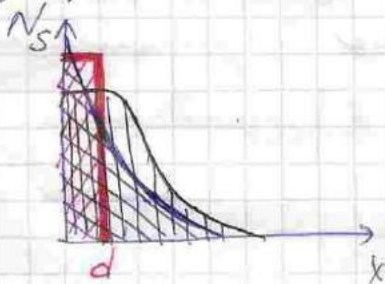
- 2) Этап легирования (диффузия из обливочной фазы)



На поверхности оксид
 ксид из жидк. P/фосфора

1. урв. шир. імпульсного сигналу дифузійно розповсюджується. А дані змін. пог. і граничні умови нешого процесу (об'ємом джерела)

Вважаємо, що в шарі товщиною d у нас джерело. К-ся розміром Q .



$$N(x, t) = N_s \quad 0 \leq x \leq d$$

$$N(x, t) = 0, \quad x > d$$

Аналіз. Рішення 2-го м. ФКЕ

$$Q = N_s \cdot d$$

$$N(x, t) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) - \text{гаусіан}$$

При заданому Q розподіл буде змінюватися з часом. Але площа під граф. залишається незмінною.

Значення Q можна контролювати к-ся джерела в криповірневих шарах.

Переваги:

- простота
- дешево
- швидко
- дозволяє значно збільшити величину к-ся

Недоліки:

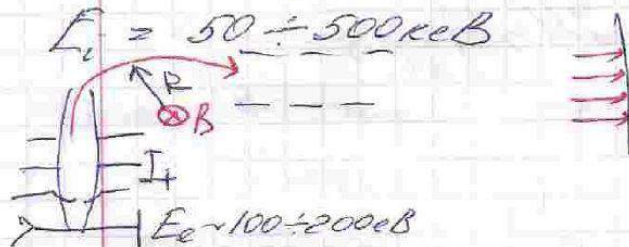
- висока темп. тому мобільність ІС на пог. етапах
- погано контролюється (тільки P, T, t)
- екологічно-небезпечний (P, T, t -обумовлений)

- Високоєф. тілми колес D_s бул дуже високим.

Введення мутної рідини за методом
іонної імплантації

При $E_{\text{іонів}} > 1 \text{ кеВ}$ поверхня має заряд. іони.

Установка для іонної іонізації - іонізатори.



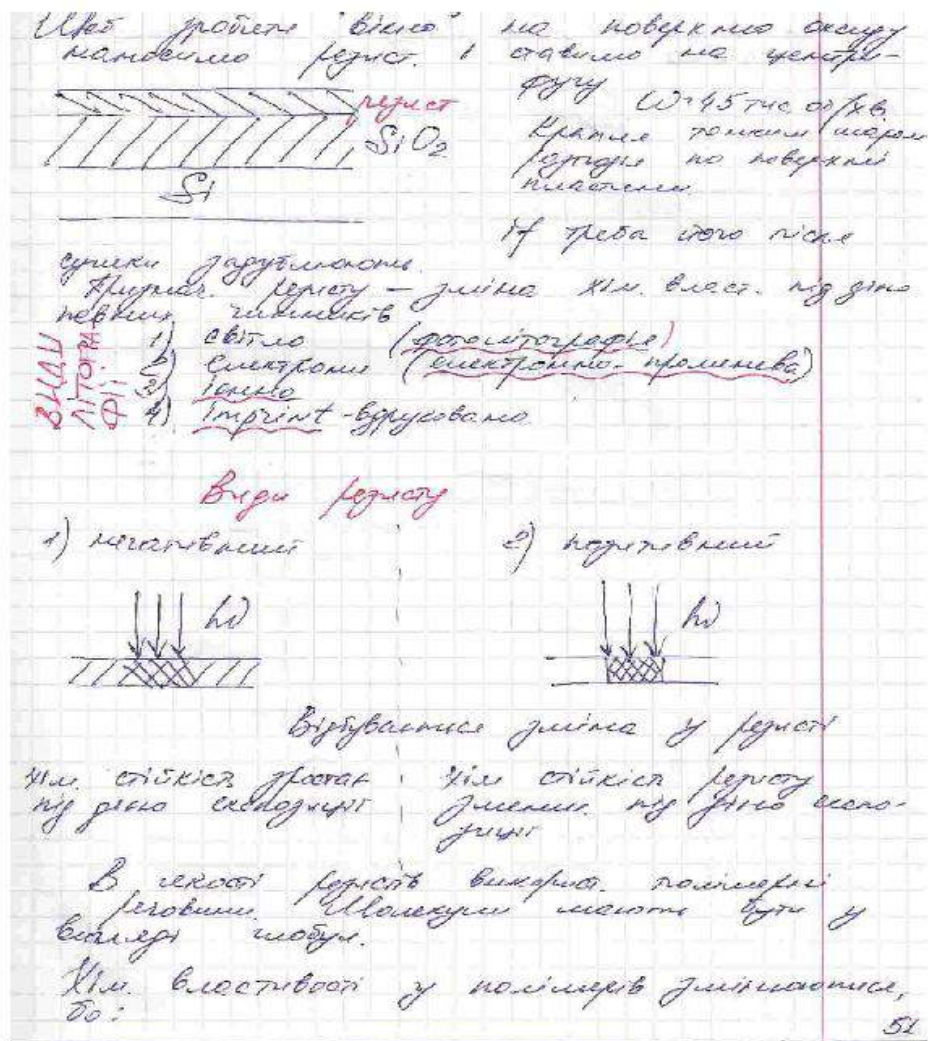
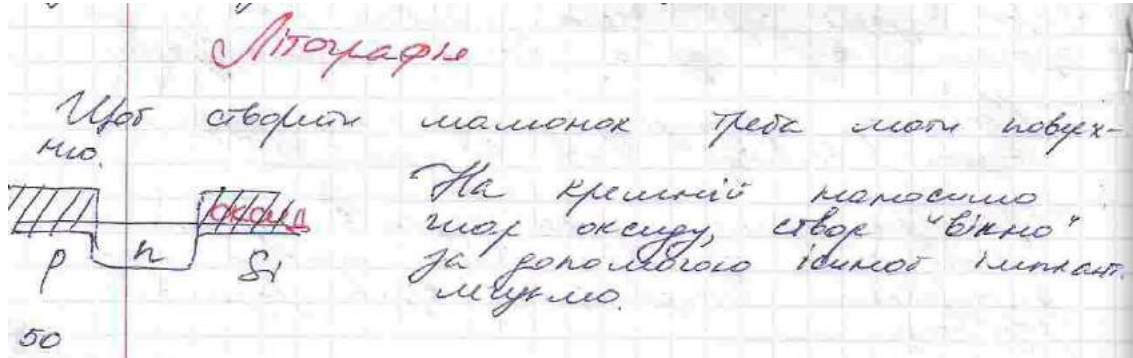
3 \sqrt{m} E тім з др. іонів
рме у рррррр
отамі

Іонізатор опромінює потік іонів, що виперед
7 тім 1 зб. іонів. Зі ррр. електростат.
іон. іонізації дррр. потік іонів. Стабильно
секторний масспектр. дррр. іонів. Іонізатор
завртає пучок іонів радіус зафармлі
6 \sqrt{m} 1 тім подррр. дрррр.
І пррр. пррр. пррррр. E і подррр.
ме масспектр (10 ÷ 100 кеВ)

Недоліки: • дорога установка
• опромін. менше дррр. пластини

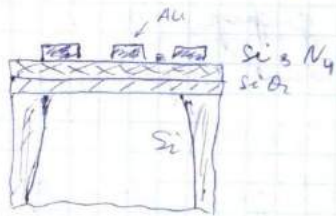
Переваги: • добре керування
• можна імпламентувати \forall матеріал
• низькі температури
• можна створювати практично \forall пррр.
ррррр. дрррр.
• контролювати E , I , B -мачі ррр
• немає обррр. ррррр

33. Літографічні процеси в нанотехнології. Оптична, електронна та рентгенівська літографії. Фізичні схеми процесів. Основні напрямки застосувань; недоліки та переваги різних типів літографії, необхідність їх використання.



висота $\sim 1 \text{ см}$.

На поверхні товстого шару кремнію випалюється шар SiO_2 , потім шар Si_3N_4 , потім золото (Au).



Потім з'являється кремнієвий шар товщиною кілька мікрон. За допомогою мембрани на пористому кремнії

можливо отримати неоднорідності з Au, її розпорозують існують пучки. Варіант — $10 \div 100 \text{ нм}$ товщини.



сповіщення
континуальне
рівня
шляху

$$S = \frac{h \cdot g}{L}$$

L — висота
лінійного і
гнучкого

$$d = \frac{Tg}{L}$$

— друків та континуальних
сповіщення. З них легко
боротися при сформованій масі.

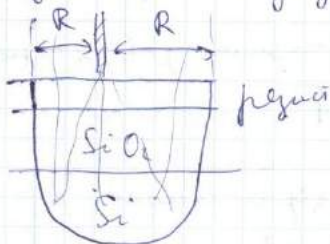
Починає 10^{-4} експеримент
визначення іже
на випромінюванні

Переваги: 1) відносно простота, не експозиції
цілої маси $\sim 1 \text{ зв}$. 2) нема дифракційних ефектів
за рахунок малої довжини хвилі. 3) за рахунок
високої прозорості, експозиція одностороння по всіх
напрямах. 4) нема ефектів бітунності. 5) зворотна
мас в точності вертикальні сітки. 6) не потрібні
до збудження маси.

Обмеження: 1) неможливо змешати \rightarrow неможливо
сповіщення.

Електроны итотрагит

Без проблем можно считать энергию электронов $E \leq 10 \text{ keV}$. Пренебрежительно малая энергия для расчета кинетической энергии ионизации.



$$R \sim AE^n$$

$$50 \text{ keV} \rightarrow 1 \text{ мкм}$$

энергия по
поверхности, выходящая
из точки, выходящая

Выводы: 1) расчеты итотрагит
2) векторный итотрагит

Векторный итотрагит необходим для расчета энергии (энергии) ионизации электронов (непрямая ионизация), а также, для расчета энергии ионизации.

ограду итотрагитно итотрагит,
в области, где нам треба

маленького итотрагитно итотрагитно $\sim 10 \text{ мкм}$, при этом итотрагитно итотрагитно. Таким образом, итотрагитно итотрагитно, итотрагитно итотрагитно (ионизация).

Выводы: 1) можно считать малую энергию ионизации; 2) можно считать итотрагитно итотрагитно.

Рентгеновская итотрагит

Рентгеновская итотрагитно итотрагитно \rightarrow характеристическая

Выводы по итотрагитно: итотрагитно итотрагитно, итотрагитно итотрагитно.

$$I = I_0 e^{-\mu x} \leftarrow \text{затухание интенсивности итотрагитно итотрагитно.}$$

Основной механизм итотрагитно итотрагитно итотрагитно итотрагитно

08.12.15 Выводы по итотрагитно итотрагитно итотрагитно итотрагитно итотрагитно.

маленького итотрагитно итотрагитно итотрагитно.



high z
low z
диаметр итотрагитно итотрагитно итотрагитно

конструкция

Оптическая микроскопия

Названия ~~структурных элементов~~ элементов:

длина волны	Xe F	-	350 nm
3-6 eV	Xe Cl	-	308 nm
длина волны	Kr F	-	248 nm
длина волны	Ar F	-	193 nm
↑	F ₂	-	157 nm

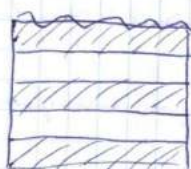
Экспериментальная установка ультракоротколучевой микроскопии (EUV) - 13,5 nm (оптически микроскопия резистивного литографии)

Зеркала и линзы запрещены из-за LiF.

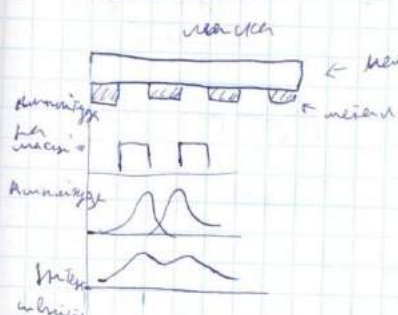
лампа запрещенной зоны ~10 eV
Треба: (CaF₂, MgF₂)

Для изготовления $\lambda = 13,5$ nm
нужны покрытия ≤ 1 nm
+ формулы Рунге-Бесселя
не вычисляются

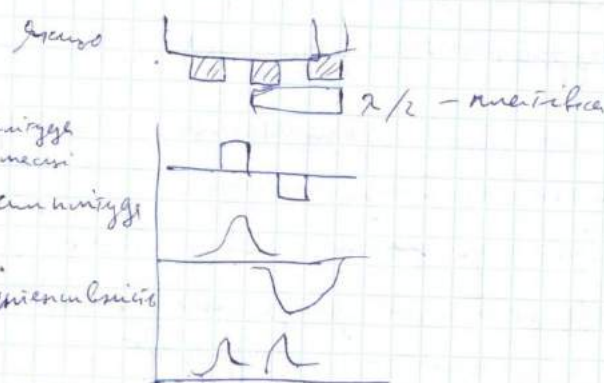
структура



Базовый процесс
создания из металла, резистивного гетероструктур,
чтобы уменьшить зеркала.



металл, прозрачный для
ультракороткого излучения



Dual-tone resist

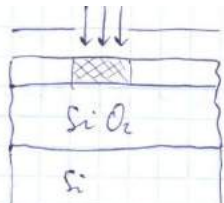


Видеоскопический
прибор для измерения интенсивности
и для получения точных измерений
на резисте в периодическом состоянии.

Пределы опти. лит.:

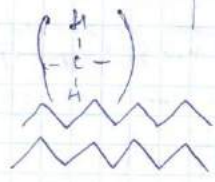
- 1) высокая производительность;
- 2) разработка технологий литографии;
- 3) высокая точность;
- 4) разрешение литографии до 30 nm;
- 5) возможность литографии в резистивном слое (покрова) - результат очень высокого качества;
- 6) возможность...

01.12.15

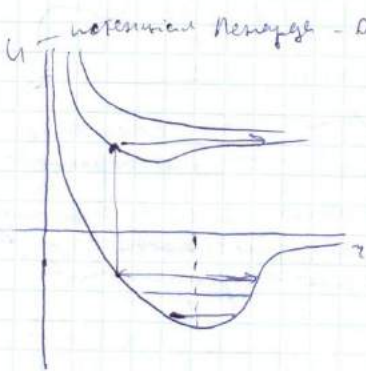


термодинаміка за гомогенного
уважувати.

Результат - балансовий рівняння



За гомогенного розчинення гіт
на результ. біохімічного розчинення
істор. атомів.



якщо при розчиненні потенціал
єсть без мінімуму, то існує
різниця між розчиненням і
атомом / біохімічним розчиненням /
розрив хімічних зв'язків

Тоді розрив зв'язків -
геохімія.

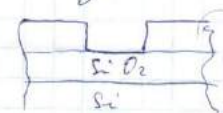


Але біохімія розчинення має, тому біохімія
цікавіше до хімії. рівняння.

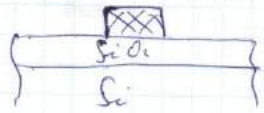
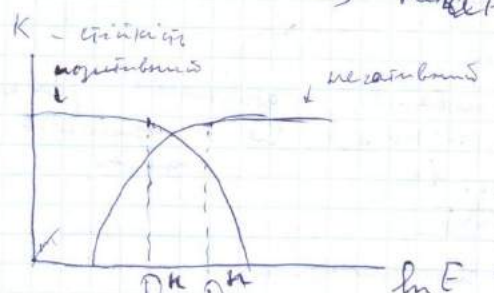
Але процес може бути гомогенним - процес
змішування (з'єднання різних речовин), а не
на основі гомогенності.

Результат

→ позитивний (єсть мінімум)
геохімія



→ негативний (в цьому біохімічному
процесі змішування, єсть
мінімум)

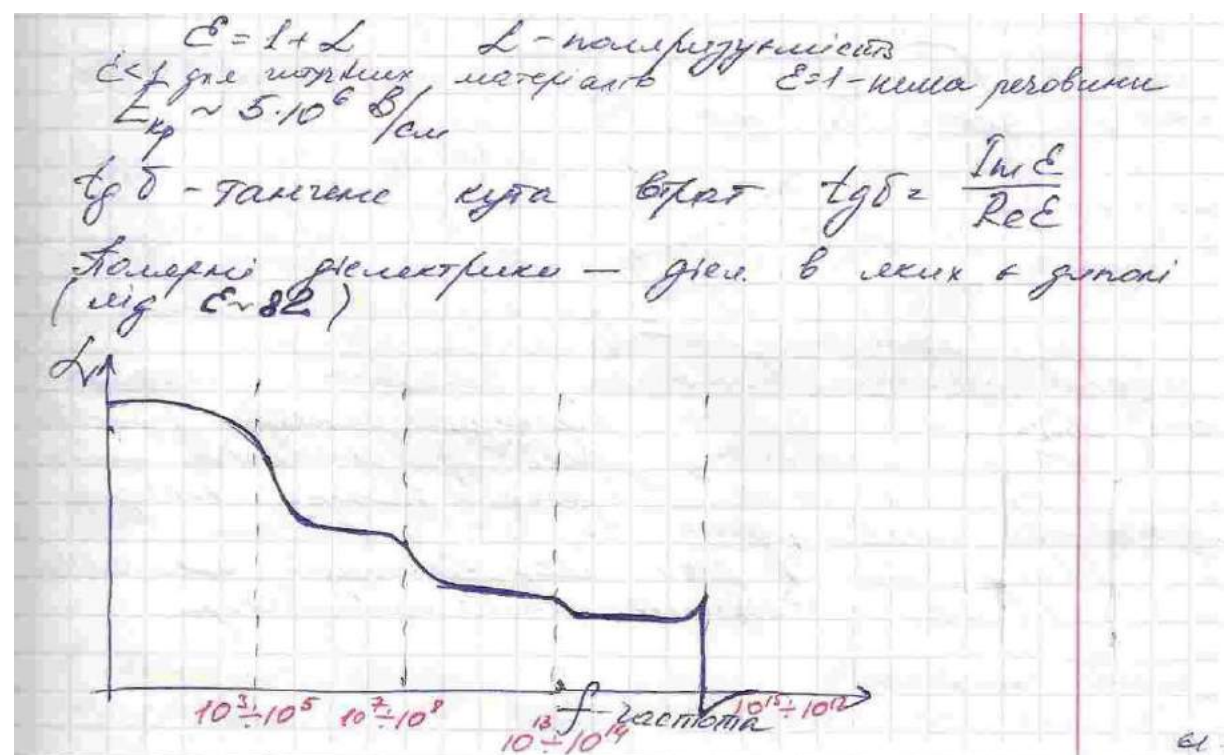


$\ln E$ - енергія
енергетична

Результатом результ. біохімії є процес розчинення, а не

34. Діелектрики в мікро- та наноелектроніці. Діелектричні плівки.
Діелектрична проникність та тангенс кута втрат. Електрична
міцність плівок.

Діелектрики. Властивості
 Діелектрики використов. для ізоляції;
 пасивації в підсформованому шарі.
 Мінімальна товщина для $\sim 10 \text{ \AA}$, шелак
 буде проводити за рахунок зумовленого ефекту

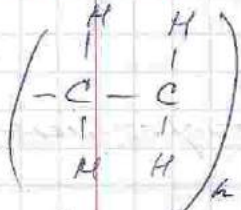


Діелектрики - р-ми з широкою
і малою провідністю (ρ) $33(3,5) > eV(12eV)$

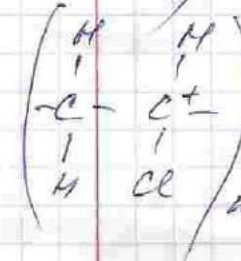
	$\rho(\text{Ом}\cdot\text{см})$	ϵ	$E_{\text{пр}}^{\text{Влів}}$ ПТФЕ - політетрафторетилен $5 \cdot 10^6$ регион	$\text{tg } \delta$ 10^{-4}
SiO_2	$10^{16} \div 10^{18}$	4,9		
Me	$10^5 \div 10^4$	—		
ПТФЕ	$10^{16} \div 10^{18}$	2,1	10^7	
Al_2O_3	$10^{15} \div 10^{16}$	8,7	$5 \cdot 10^6$	
NaCl	$10^{10} \div 10^{12}$	2,5	10^6	0,35
H_2O	$10^{15} \div 10^{17}$	26	$5 \cdot 10^6$	10^4

Діелектрична спротивність
Діелектрична проникність показує зв'язок між:
Д - індукцією та Е-ем. полем.

10.12.2015



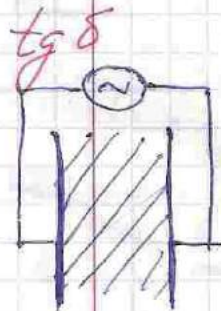
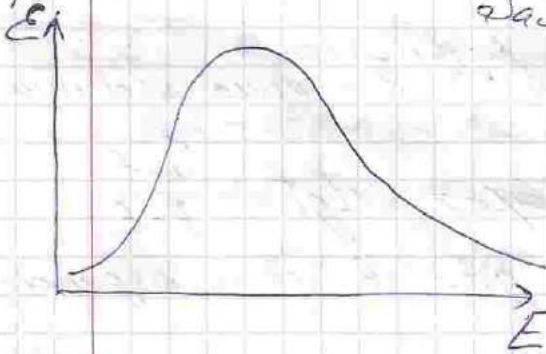
полиетилен - непроводящий



поливинилхлорид - проводящий диел.

Линейный диел. $\epsilon \neq f(E)$ не зависит от величины электрического поля

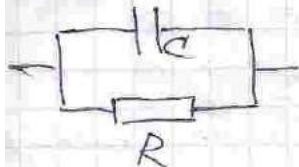
Нелин. диел. $\epsilon = f(E)$ переважно сегнетоелект. Залежить від величини ел. поля



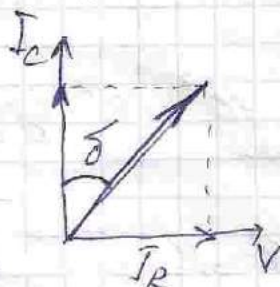
Вимірює тангенс діелектричного, до якого прикладено деяку різницю напруги

$\tan \delta$ диел. має великий, але скінченний питомий опір

Світан. схема такого конденсатора



Діаграма струму:



$$I_C = \omega C V$$

$$I_R = \frac{V}{R}$$

$$\tan \delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{V}{R \omega C V} = \frac{1}{\omega C R}$$

$$\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon \epsilon_0}$$

σ - провідність діелектрика
 ϵ_0 - діел. стала

$$W = \sigma E^2 = \omega \epsilon_0 \epsilon E^2 \tan \delta$$

Наєвність втрач. дж.мощ. теплову енергію та частоту

Діел. має міграційну еквівалентну поляризацію, тобто має іони. А іони при дії ел. поля можуть рухатися.

Міграційна еквівалентна поляризація переважає при частотах $10^3 - 10^7$ Гц (2.б. наведення)

На частотах $10^7 - 10^8$ Гц починається погірш. і переважає примісна дипольна поляризація, тому вплив на дієв. ел. поле зменш. коли збільш. обертання диполь.

При частотах $10^8 - 10^{10}$ Гц діє іонна поляризація.

В іонному кристалі I еквів. втрачає іонна поляризація. I_f таку структуру поміщає в 63

єв. поле то іони Na і Cl будуть злитися і
буде утвор. іонне напруження. $\ominus \ominus \ominus$

При частотах $10^{15}-10^{17}$ вірш електронної полярності
який зникає $\oplus \ominus \oplus$

З того ж зру зменш. втрач. необхідно, щоб
було електронна полярність

Типи провідності діелектриків

і) розрив діел. буде великим, тоді маскують
їх зруш. привернуть до втрач.

В аморфних матеріалах немає ЗЗ, а
їх чинна руйнівності.

у кристал. діел. \exists 3 типи провідності

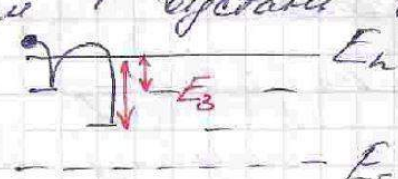
1) Френкелівська провідність
вона є в деяких частині носіїв отримують
в іоні провідності

$$\lambda = \lambda_0 e^{-\frac{E_a}{kT}}$$

2) Вакансійна провідність. Виникає внаслідок
того, що у діел. поблизу іонів зруш.
провідності \exists дискретні рівні "посадки" для
електронів. (т.зв. F-центри в шкільних-галоген-
них металах. Виникають тоді, коли
іони вакансій металогідра-метала електронів
кванта мають. Випром. достатньо, щоб
зруш. електронів. у кристал. мабуває координ.
в залежності від шкільних залежання чинить
єв. що френкелів в ЗП дають. рівний і
має на кращу зруш. певний час.

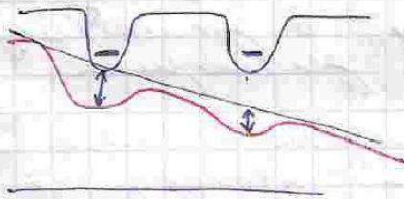
$$\tau = \tau_0 e^{-\frac{E_a}{kT}}$$

Чим \uparrow висота бар'єра ЗП до рівня, тим E_z - енергія заряджання.



/// // // // // E

if \uparrow є-ма потен. лм в лмх змодульованої маси поблизу дна ЗП, накладеної ел. поле картинка змінюват. E_z тж змінюват. (зменшується $\Rightarrow T \downarrow \Rightarrow$ перенос наближається до дрейфового переносу)



Пробі - навмисні ефекти. Мазуни публікує феморик.

Типи пробів
1) Теплові.

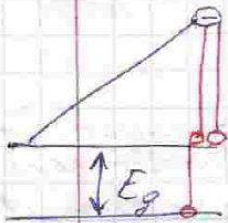
Причина: розсіювання енергії $\sim E^2$ це призв. до генерації в діелектрику певної кількості тепла.
Розрив в локальній обл призведе до \uparrow концентрації носіїв $\Rightarrow \uparrow$ провідності $\Rightarrow \uparrow$ втрати $\Rightarrow \uparrow$ провідності \Rightarrow виникає лавина.
Темперов. деп. має бути достатньою, щоб це забезпечило треба полістити між 2 ме діелектр. Сам повний шор для елмнне чіткіше.

2) Тепловий провід

З зменш. товщ. кристалічної плас. збільшується.

$$F = eE \quad l \cdot l \Rightarrow W = eEl \cdot l > E_g$$

іф см. буде більша за ширину ЗЗ, це призведе до того, що електроном малої величини енергії може призвести до з'яв. електронно-діркової пари \Rightarrow лавина



З точки зору температур чист. n-с. розв. півпров. під тепловим.

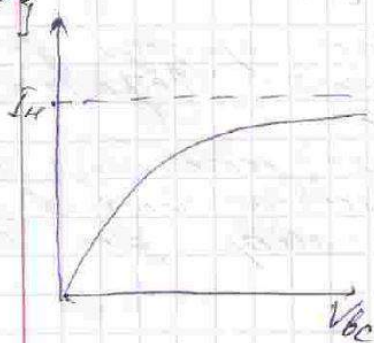
Тепловий провід більш руйнівний. Зв'язок з можливістю протікання току під зноб, це призведе до електролізу в діелектрику і пошкодженню властивостей діелектрика.

З 2005р. мікро- і наноелектроніка позаче жалюїтованим SiO_2 тонкими діелектриками.

Товщина деяк. фін. призводить до 7 велик. маск-решки струмів в МОН транзисторі ($J = 10^2 \text{ A/cm}^2$)

При масштабуванні $RC = \text{const.}$

Струм насичення МОН-транзистора



$$I_n = \frac{W}{L} \mu C_i \frac{(V_g - V_h)^2}{2}$$

L - довжина каналу
 μ - питома рухливість
 W - ширина каналу
 V_g - напруга затвору
 V_h -

При δ розмірів δ та

при розміст. C_i на поверхні розміст. I_n .

$$C_i = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}; \text{ при 1d розміст. } C_i$$

Тинні діелектрики:

$$Al_2O_3 - \epsilon = 7 \div 8$$

$$TiO_2 - \epsilon \approx 65$$

$$HfO_2 - \epsilon = 26$$

$$SiO_2 - \epsilon = 3,9$$

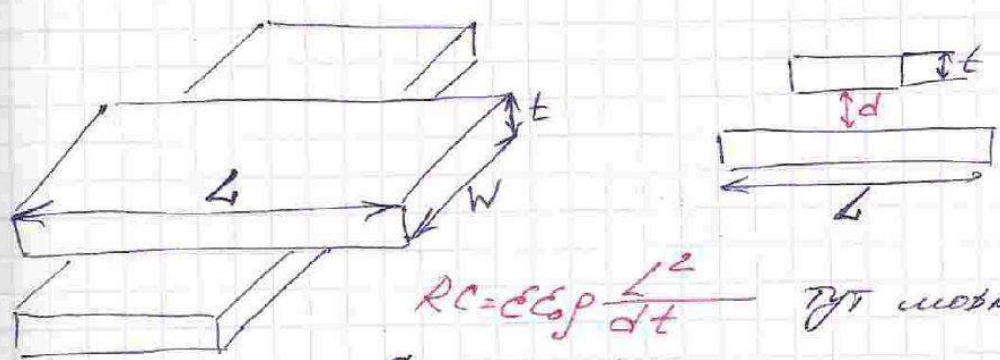
Необх. товщ діелектрика HfO_2 еквал. шару SiO_2 товщ. 1 нм

$$h = 1 \text{ нм} \cdot \frac{\epsilon_{HfO_2}}{\epsilon_{SiO_2}} \approx 6 \text{ нм}$$

HfO_2 заміщує товщ. підсформовані шари інтегрує мікроелементи

Вимощує діелектр. які використовують у багатомарковій металізації.

- краєва теплопровідність



Значення ϵ

$$RC = \epsilon \epsilon_0 \rho \frac{L^2}{d t}$$

де $R = KR'$, $r = \frac{L}{W}$

Тут можна

67

Зараз шари діел. створюють з менш ніж ϵ щоб зменшували RC . Використов. пористі матеріали (класична гімнастика)

Створ. з г.в. аерогелі-матеріали з великою кільк. пористих проміжків. $\epsilon = 1,8 \div 2$



1. Мікрохвильовий діапазон та його особливості.

Ст. 13, п.1.3., особливості – п. 1.4.1-1.4.7.

2. Рівняння Максвелла в інтегральній та диференціальній формах.

Ст. 42, п.2.1.1.

3. Симетрична форма запису рівнянь Максвелла. Дуальність електромагнітного поля.

Ст. 44, п. 2.1.2.

4. Векторні та скалярні поля в електродинаміці. Класифікація електромагнітних явищ. Джерела електромагнітного поля.

Векторні та скалярні поля в електродинаміці – ст. 47, п.2.2.

Класифікація електромагнітних явищ– ст. 49, п.2.3.

Джерела електромагнітного поля– ст. 52, п.2.4.

5. Матеріальні рівняння. Частотна та просторова дисперсія середовища.

Ст.55, п.2.5.1 – ст. 58 п.2.5.2.

6. Електродинамічні граничні умови. Провідники, діелектрики та магнетики на НВЧ. Умови електричної та магнітної стінки.

Електродинамічні граничні умови. Умови електричної та магнітної стінки – ст. 62-67.

Провідники, діелектрики та магнетики на НВЧ – ст.61, п. 2.5.4.

7. Енергетичні характеристики електромагнітного поля.

Ст. 68, п. 2.7

8. Хвильове рівняння. Умови зведення рівнянь Максвелла до скалярних хвильових рівнянь.

Ст. 71 п. 2.8

9. Метод комплексних амплітуд у мікрохвильовій електродинаміці.

Ст. 75, п. 2.9

10.Електродинамічні потенціали.

Ст. 86, п. 2.10.

11.Загальні властивості плоских електромагнітних хвиль.

Ст. 97, п. 3.1.

12.Поляризація електромагнітних хвиль.

Ст. 104, п. 3.2.

13.Узагальнені плоскі хвилі. Стоячі хвилі.

Стоячі хвилі ст. 107 п. 3.3

Узагальнені плоскі хвилі ст. 114, п. 3.5

14. Похиле падіння плоскої хвилі на плоску границю розділу двох середовищ. Формули Френеля. Кут повного внутрішнього відбиття. Кут Брюстера.

Похиле падіння плоскої хвилі на плоску границю розділу двох середовищ – ст. 118, п. 3.6., формули Френеля – ст. 113, кут повного внутрішнього відбиття – ст. 125, кут Брюстера – ст. 124.

15.Класифікація ліній передач НВЧ. Скалярні рівняння Гельмгольца для регулярної лінії передачі НВЧ та їх розв'язок.

Лінія передачі НВЧ або направляюча система НВЧ – це пристрій, що дозволяє передавати електромагнітну енергію в певному визначеному напрямку. Такі системи називають каналізуючими, а процес передачі електромагнітної енергії – процесом каналізації енергії. В сучасній техніці й електроніці НВЧ застосовуються лінії передачі різних типів.

Регулярними називають лінії передачі, властивості яких вздовж напрямку переносу енергії є незмінними або змінюються по періодичному закону. В першому випадку регулярну лінію передачі називають поздовжньо-однорідною (див. рис. 4.1.1а–к,м,н), а в іншому випадку – періодичною (див. рис. 4.1.1л). Якщо властивості лінії передачі вздовж напрямку каналізації енергії змінюються по іншому довільному закону, таку лінію передачі називають нерегулярною (поздовжньо-неоднорідною).

Всі лінії передачі НВЧ можна умовно поділити на відкриті та за криті. Електромагнітне поле в закритих лініях передачі існує лише всередині замкненої металевої оболонки (екрану), а у відкритих лініях передачі воно необмежене в поперечному перерізі лінії. Таким чином, у закритих лініях передачі (див. рис. 4.1.1б,г,д,е) електромагнітна енергія не випромінюється назовні від металевого екрану, а у відкритих лініях передачі відбувається випромінювання електромагнітної енергії з лінії передачі в оточуючий простір. Це, однак, не означає, що внаслідок відсутності випромінювання, закриті лінії передачі завжди кращі ніж відкриті. В закритих лініях передачі відбуваються втрати електромагнітної енергії за рахунок її розсіювання в металевому екрані, що оточує канал передачі енергії. При певних умовах ці втрати можуть суттєво перевищувати втрати на випромінювання у відкритих лініях передачі.

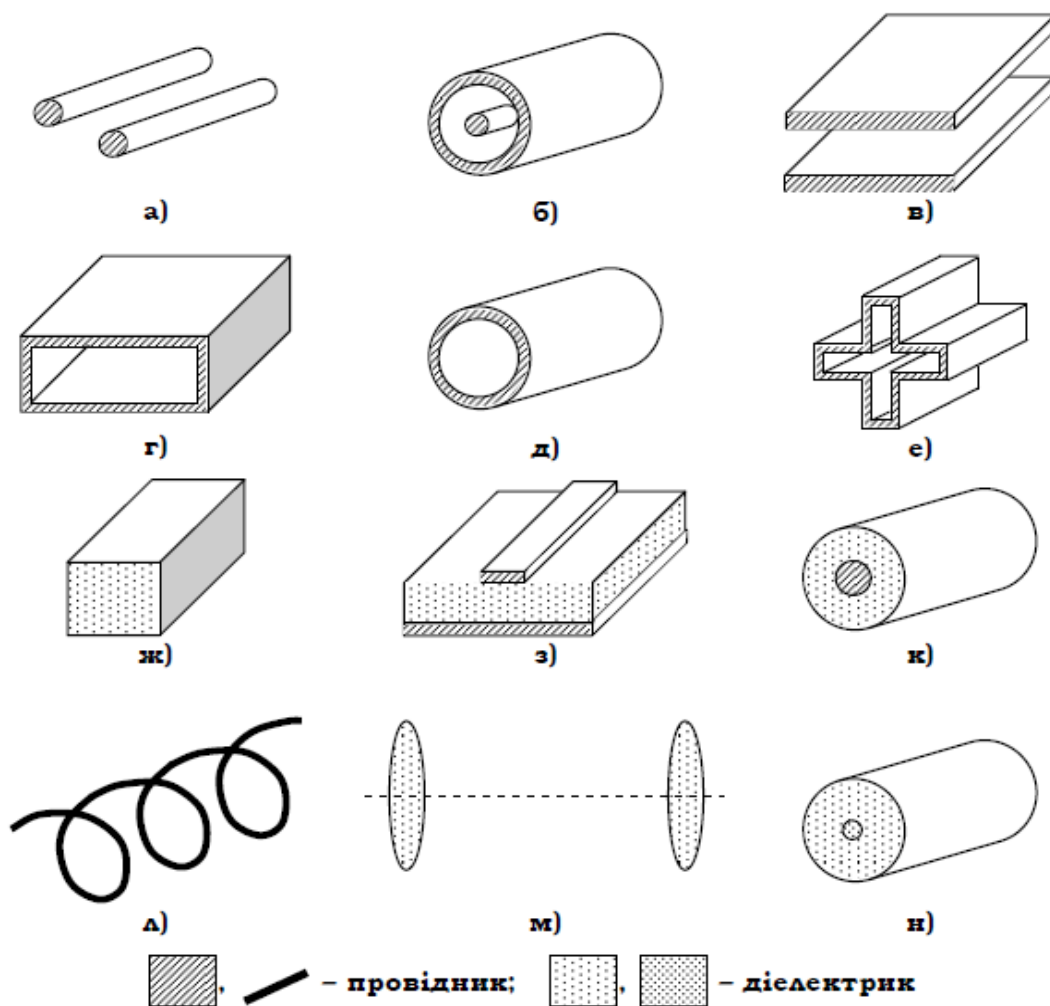


Рис. 4.1.1. Різні типи ліній передачі НВЧ: а) двопровідна лінія; б) коаксіальний кабель; в) плоскопаралельний металевий хвильовід; г) прямокутний металевий хвильовід; д) круглий металевий хвильовід; е) металевий хвильовід складної форми (Х-подібний); ж) діелектричний хвильовід; з) мікросмужкова лінія; к) лінія передачі на поверхневих хвилях; л) спіральний хвильовід; м) лінзовий хвильовід; н) світловод (оптоволоконна лінія)

В залежності від того з якого матеріалу виготовлені лінії передачі НВЧ їх називають металевими (див. рис. 4.1.1а–е, л), діелектричними (див. рис. 4.1.1ж, м, н) або металодіелектричними (див. рис. 4.1.1з, к). Властивості електромагнітних хвиль в лінії передачі суттєво залежать від її зв'язності. Якщо в поперечному перерізі лінії передачі можна виділити N ізольованих один від одного провідників будемо називати таку лінію передачі N -зв'язною. Наприклад, лінії передачі г, д, е, ж, к–н на рис. 4.1.1 є однозв'язними, а лінії передачі а, б, в, з є двозв'язними.

Також хвилі поділяють за електродинамічними властивостями на 2 групи. *Перша група* – це лінії, в яких можуть поширюватися Т-хвилі або хвилі,

властивості яких близькі до властивостей Т-хвиль. Друга група – лінії передач, у яких поширюються дисперсні хвилі.

Також лінії передач можна класифікувати за робочим діапазоном частот. Будь-яка лінія передачі повинна задовольняти двом основним критеріям: вона повинна вносити якомога менші спотворення в той сигнал, який передається за її допомогою, а також повинна забезпечити такий режим каналізації енергії, при якому втрати енергії будуть мінімальні. В практичних конструкціях ліній передачі НВЧ обидві ці вимоги вдається задовольнити лише в певному діапазоні частот, який називається робочим діапазоном частот лінії передачі.

4.4. Скалярні рівняння Гельмгольца для регулярної лінії передачі

При розгляді електромагнітних хвиль, що можуть поширюватись в лініях передачі НВЧ, особливий інтерес викликають так звані власні або вільні хвилі, які існують в лініях передачі за відсутності сторонніх струмів та зарядів. Інтерес до таких хвиль пов'язаний з тим, що будь-яке електромагнітне поле в лінії передачі може бути представлене у

вигляді суперпозиції полів власних хвиль¹. Теоретичний аналіз властивостей таких хвиль є значно простішим, ніж задача про поширення в лінії передачі хвилі з довільним розподілом поля. З математичної точки зору ця простота виражається в тому, що електричне і магнітне поля власних хвиль є розв'язками однорідних рівнянь Гельмгольца

$$\Delta \vec{E} + K^2 \vec{E} = 0, \quad \Delta \vec{H} + K^2 \vec{H} = 0,$$

де $K = k_0 \sqrt{\epsilon \mu}$ – хвильове число плоскої хвилі в середовищі.

В будь-якій лінії передачі, заповненій лінійним однорідним ізотропним середовищем, завжди є виділений напрямок, що відповідає напрямку поширення хвилі. Припустимо, що лінія передачі заповнена саме таким середовищем і введемо узагальнену циліндричну систему координат x_1, x_2, z таким чином, щоб напрямок поширення власних хвиль співпадав з напрямком осі z (рис. 4.4.1).

Аналіз електромагнітного поля власних хвиль в лініях передачі НВЧ доцільно провести таким чином, щоб кількість невідомих функцій, які необхідні для визначення електромагнітного поля, була якомога меншою. Певні переваги при цьому мають вектори Герца, введені в § 2.8, тому при розгляді властивостей власних електромагнітних хвиль в лінії передачі НВЧ будемо виходити з однорідних рівнянь Гельмгольца для векторів Герца $\vec{\Pi}$ та $\vec{\Psi}$. Ці рівняння ідентичні, тому далі для зменшення кількості математичних викладок введемо новий вектор $\vec{\Phi}$, який в залежності від обставин будемо ототожнювати або з електричним вектором Герца $\vec{\Pi}$ або магнітним вектором Герца $\vec{\Psi}$.

Вектор $\vec{\Phi}$ задовольняє векторне однорідне рівняння Гельмгольца

$$\Delta \vec{\Phi} + K^2 \vec{\Phi} = 0. \quad (4.4.1)$$

В § 2.9 було показано, що при виконанні умов (2.9.4) це векторне рівняння може бути зведене до скалярного рівняння Гельмгольца для однієї з проекцій вектора $\vec{\Phi}$ на осі системи координат x_1, x_2, z . В уза-

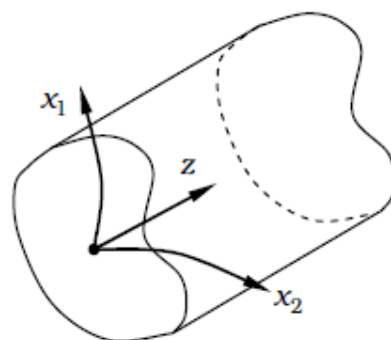


Рис. 4.4.1. Узагальнена циліндрична система координат x_1, x_2, z

гальненій циліндричній системі координат умова (2.9.4) задовольняється в загальному випадку лише для повздовжньої координати z . Тому рівняння (4.4.1) можна завжди звести до скалярного рівняння для повздовжньої z -складової вектора Φ

$$\Delta\Phi_z + K^2\Phi_z = 0. \quad (4.4.2)$$

В такій формі запису це рівняння ідентичне рівнянням (2.9.5) для потенціалів U та V .

Розв'язок рівняння (4.4.2) легко одержати використовуючи метод розділення змінних Фур'є. Для цього представимо $\Phi_z(x_1, x_2, z)$ у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від повздовжньої координати z , а інша – від поперечних координат x_1, x_2 :

$$\Phi_z(x_1, x_2, z) = \varphi(x_1, x_2)\zeta(z). \quad (4.4.3)$$

Підставимо вираз для $\Phi_z(x_1, x_2, z)$ у (4.4.2) і врахуємо, що скалярний оператор Лапласа в узагальненій циліндричній системі координат має вигляд

$$\Delta = \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

де Δ_{\perp} – поперечений оператор Лапласа, який діє лише на функції поперечних координат x_1, x_2 . Одержимо рівняння

$$\zeta(z)\Delta_{\perp}\varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_1, x_2)\frac{d^2\zeta(z)}{dz^2} + K^2\varphi(x_1, x_2)\zeta(z) = 0.$$

Поділимо його на добуток (4.4.3), певна річ вважаючи, що цей добуток тотожно не дорівнює нулю (це є тривіальним розв'язком рівняння (4.4.2), який нас не цікавить). Після ділення одержане рівняння можна записати як два рівняння

$$\frac{1}{\varphi(x_1, x_2)}\Delta_{\perp}\varphi(x_1, x_2) + K_{\perp}^2 = 0, \quad \frac{1}{\zeta(z)}\frac{d^2\zeta(z)}{dz^2} + \beta^2 = 0, \quad (4.4.4)$$

в яких константи розділення змінних K_{\perp} та β пов'язані між собою співвідношенням

$$K^2 = K_{\perp}^2 + \beta^2, \quad (4.4.5)$$

яке називається *характеристичним рівнянням* лінії передачі.

Друге рівняння (4.4.4) ідентичне рівнянню для лінійного гармонічного осцилятора і, отже, розв'язок цього рівняння – функція $\zeta(z)$ – має вигляд

$$\zeta(z) = Ae^{i\beta z} + Be^{-i\beta z}. \quad (4.4.6)$$

З виразу для $\zeta(z)$ очевидно, що хвильове число β визначає зміну поля

в напрямку поширення хвилі, тому величину β називають *повздовжнім хвильовим числом* або *сталю поширення хвилі в лінії передачі*. Відповідно хвильове число

$$K_{\perp} = \sqrt{K^2 - \beta^2} \quad (4.4.7)$$

природно назвати *критичним* або *поперечним хвильовим числом* хвилі в лінії передачі. Зміст цього поняття буде з'ясований далі.

Враховуючи (4.4.6), функція $\Phi_z(x_1, x_2, z)$ приймає вигляд

$$\Phi_z(x_1, x_2, z) = A\phi(x_1, x_2)e^{i\beta z} + B\phi(x_1, x_2)e^{-i\beta z}. \quad (4.4.8)$$

З цього виразу випливає, що електромагнітне поле в лінії передачі НВЧ, в загальному випадку, є суперпозицією полів прямих та зворотних вільних хвиль. Щоб показати це, достатньо підставити узагальнений вектор Герца $\vec{\Phi} = \{0, 0, \Phi_z\}$, де Φ_z визначається формулою (4.4.8), у (2.8.20), ототожнюючи по черзі вектор $\vec{\Phi}$ то з електричним, то з магнітним векторами Герца.

Функція $\phi(x_1, x_2)$ називається мембранною функцією і задовольняє рівнянню мембрани – двовимірному рівнянню Гельмгольца

$$\Delta_{\perp}\phi(x_1, x_2) + K_{\perp}^2\phi(x_1, x_2) = 0. \quad (4.4.9)$$

Згідно (4.4.8) ця функція визначає розподіл поля в поперечному перерізі лінії передачі при $z = \text{const}$.

Відповідно до концепції парціальних хвиль, електромагнітне поле власних хвиль в лінії передачі НВЧ утворюється суперпозицією полів однорідних плоских хвиль, які поширюються під кутом $\pi/2 - \phi$ до повздовжньої осі z лінії передачі (див. рис. 4.3.1). Парціальні хвилі можуть мати як електричну так і магнітну поляризацію і при $0 < \phi < \pi/2$ їх поля відповідно утворюють поле власних ТМ- та ТЕ-хвиль. При $\phi = 0$ поширення цих хвиль в лінії передачі припиняється (див. § 4.3). Якщо ж парціальні хвилі поширюються під кутом $\phi = \pi/2$, відповідне електромагнітне поле є полем однорідної плоскої хвилі. Таким чином, в загальному випадку електромагнітне поле в лінії передачі НВЧ є суперпозицією полів власних Т-, ТМ- та ТЕ-хвиль (в курсі загальної електродинаміки це доводиться математично строго).

Для Т-хвиль $\beta = K$ і, отже, мембранна функція для такої хвилі є розв'язком рівняння Лапласа

$$\Delta_{\perp}\phi(x_1, x_2) = 0. \quad (4.4.10)$$

Для ТЕ- та ТМ-хвиль $\beta \neq K$ і мембранна функція $\phi(x_1, x_2)$ є розв'язком більш складного рівняння Гельмгольца (4.4.9).

16.Характеристичне рівняння лінії передачі НВЧ. Дисперсія та явище відсічки в лініях передачі НВЧ.

узагальненій циліндричній системі координат умова (2.9.4) задовольняється в загальному випадку лише для повздовжньої координати z . Тому рівняння (4.4.1) можна завжди звести до скалярного рівняння для повздовжньої z -складової вектора $\vec{\Phi}$

$$\Delta \Phi_z + K^2 \Phi_z = 0. \quad (4.4.2)$$

В такій формі запису це рівняння ідентичне рівнянням (2.9.5) для потенціалів U та V .

Розв'язок рівняння (4.4.2) легко одержати використовуючи метод розділення змінних Фур'є. Для цього представимо $\Phi_z(x_1, x_2, z)$ у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від повздовжньої координати z , а інша – від поперечних координат x_1, x_2 :

$$\Phi_z(x_1, x_2, z) = \varphi(x_1, x_2) \zeta(z). \quad (4.4.3)$$

Підставимо вираз для $\Phi_z(x_1, x_2, z)$ у (4.4.2) і врахуємо, що скалярний оператор Лапласа в узагальненій циліндричній системі координат має вигляд

$$\Delta = \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

де Δ_{\perp} – поперечений оператор Лапласа, який діє лише на функції поперечних координат x_1, x_2 . Одержимо рівняння

$$\zeta(z) \Delta_{\perp} \varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_1, x_2) \frac{d^2 \zeta(z)}{dz^2} + K^2 \varphi(x_1, x_2) \zeta(z) = 0.$$

Поділимо його на добуток (4.4.3), певна річ вважаючи, що цей добуток тотожно не дорівнює нулю (це є тривіальним розв'язком рівняння (4.4.2), який нас не цікавить). Після ділення одержане рівняння можна записати як два рівняння

$$\frac{1}{\varphi(x_1, x_2)} \Delta_{\perp} \varphi(x_1, x_2) + K_{\perp}^2 = 0, \quad \frac{1}{\zeta(z)} \frac{d^2 \zeta(z)}{dz^2} + \beta^2 = 0, \quad (4.4.4)$$

в яких константи розділення змінних K_{\perp} та β пов'язані між собою співвідношенням

$$K^2 = K_{\perp}^2 + \beta^2, \quad (4.4.5)$$

яке називається *характеристичним рівнянням* лінії передачі.

Друге рівняння (4.4.4) ідентичне рівнянню для лінійного гармонічного осцилятора і, отже, розв'язок цього рівняння – функція $\zeta(z)$ – має вигляд

$$\zeta(z) = A e^{i\beta z} + B e^{-i\beta z}. \quad (4.4.6)$$

З виразу для $\zeta(z)$ очевидно, що хвильове число β визначає зміну поля

4.7. Дисперсія та явище відсічки в мікрохвильових лініях передачі

Існування в лініях передачі дисперсії та явища відсічки було показано в § 4.3 на прикладі хвиль, що поширюються між ідеально провідними паралельними площинами. В цьому параграфі розглянемо ці явища, виходячи із більш загальних міркувань, але припускаючи, для спрощення, що в лінії передачі НВЧ немає втрат (про дисипацію енергії в лініях передачі НВЧ див. § 4.8).

Для визначення фазової та групової швидкості хвиль в лініях передачі НВЧ скористаємось формулами § 3.1, в яких слід лише замінити сталу поширення Т-хвилі K на сталу поширення хвилі в лінії передачі β :

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta}, \quad v_{gp} = \frac{d\omega}{d\beta}. \quad (4.7.1)$$

Виразимо сталу поширення β з (4.4.5) та підставимо одержаний вираз у (4.7.1):

$$\begin{aligned} v_{\phi} &= \frac{\omega}{\sqrt{K^2 - K_{\perp}^2}} = \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\frac{K_{\perp}}{K}\right)^2}}, \quad v_{gp} = \left[\frac{d}{d\omega} \sqrt{K^2 - K_{\perp}^2} \right]^{-1} = \\ &= \left[\frac{K \frac{dK}{d\omega} - K_{\perp} \frac{dK_{\perp}}{d\omega}}{\sqrt{K^2 - K_{\perp}^2}} \right]^{-1} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{K_{\perp}}{K}\right)^2}}{\frac{dK}{d\omega} - \frac{K_{\perp}}{K} \frac{dK_{\perp}}{d\omega}} = \frac{u^2}{v_{\phi} \left(1 + uk_0 \frac{dn_{сер}}{d\omega} - u \frac{K_{\perp}}{K} \frac{dK_{\perp}}{d\omega} \right)}, \quad (4.7.2) \end{aligned}$$

де $u = \omega / K = c / n_{сер}$ – фазова швидкість Т-хвилі в середовищі з показником заломлення $n_{сер} = K / k_0$.

Таким чином, відоме співвідношення $v_{\phi} v_{gp} = u^2$ буде виконуватись для хвиль в лінії передачі НВЧ тільки при умові, що величини $n_{сер}$ та K_{\perp} є сталими (не залежать від колової частоти ω). В протилежному випадку, тобто при умові, що $dn_{сер} / d\omega \neq 0$ або $dK_{\perp} / d\omega \neq 0$, в лінії передачі НВЧ можливе існування дисперсних хвиль. Дуже рідкісний випадок, коли обидві ці похідні відмінні від нуля, але $k_0 \frac{dn}{d\omega} - \frac{K_{\perp}}{K} \frac{dK_{\perp}}{d\omega} = 0$ розглядати не будемо.

В більшості випадків дисперсія показника заломлення середовища $n_{сер}$ в межах робочого діапазону частот лінії передачі є слабкою, тому

основною причиною появи дисперсії в лініях передачі НВЧ, як правило, є скінченність поперечного хвильового числа K_{\perp} та його залежність від частоти ω . Враховуючи це, в подальшому, для спрощення, будемо вважати показник заломлення середовища $n_{\text{сєр}}$ сталою величиною і розглянемо властивості хвиль в лініях передачі при $K_{\perp}^2 = 0$ та $K_{\perp}^2 \neq 0$.

При $K_{\perp}^2 = 0$ та $n_{\text{сєр}} = \text{const}$ дисперсія в лінії передачі відсутня і $v_{\phi} = v_{\text{гр}} = u$. В цьому випадку в лінії передачі поширюються Т-хвилі.

В лініях передачі НВЧ, в яких $K_{\perp}^2 \neq 0$, поняття довжини хвилі λ , що було раніше введене для плоских хвиль в нескінченному однорідному ізотропному середовищі (див. (3.1.16)), потребує певного уточнення. Якщо раніше для плоских електромагнітних хвиль довжина хвилі у вакуумі визначалась як $\lambda_0 = 2\pi / k_0$, а у середовищі з показником заломлення $n_{\text{сєр}}$ як $\lambda = \lambda_0 / n$, то в лінії передачі з дисперсією замість λ_0 або λ необхідно ввести поняття *довжини хвилі в лінії передачі*

$$\lambda_{\text{ЛП}} = \lambda_{\parallel} = \frac{2\pi v_{\phi}}{\omega} = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (4.7.3)$$

З характеристичного рівняння (4.4.5) випливає вираз для довжини хвилі в лінії передачі

$$\lambda_{\parallel} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{n_{\text{сєр}}^2 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\perp}}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\perp}}\right)^2}}, \quad (4.7.4)$$

де

$$\lambda_{\perp} = \frac{2\pi}{K_{\perp}} \quad (4.7.5)$$

– критична або поперечна довжина хвилі, пов'язана з критичною (поперечною) частотою співвідношенням

$$\omega_{\perp} = \frac{c}{n_{\text{сєр}}} K_{\perp}, \quad v_{\text{кр}} = v_{\perp} = \frac{c}{n_{\text{сєр}}} \frac{K_{\perp}}{2\pi}, \quad (4.7.6)$$

де $n_{\text{сєр}}$ – коефіцієнт заломлення середовища, яке заповнює лінію передачі. В багатьох лініях передачі НВЧ, наприклад, в металевих хвильоводах, величина K_{\perp} (і відповідно λ_{\perp}) для кожної власної хвилі є сталою величиною і залежить лише від геометрії поперечного перерізу лінії передачі. При цьому виявляється, що довжина хвилі в лінії передачі є функцією тільки λ_0 чи λ і може бути легко обчислена за формулою (4.7.4).

З'ясуємо фізичний зміст величин λ_{\perp} та ν_{\perp} . З (4.7.4) випливає, що при $\lambda_{\perp} = \lambda_0 / n = \lambda$ довжина хвилі в лінії передачі НВЧ λ_{\parallel} обертається на нескінченність, тобто поширення хвилі в лінії передачі припиняється (стала поширення $\beta = 2\pi / \lambda_{\parallel}$ стає рівною нулю). Отже, при довжині хвилі $\lambda = \lambda_0 / n \geq \lambda_{\perp}$ (або при частоті $\nu = \nu_0 n \leq \nu_{\perp}$, де $\nu_0 = c / \lambda_0$), хвиля в лінії передачі поширюватись не може. Відбувається так зване явище *відсічки*, а режим роботи при якому це явище спостерігається називається *поза межним режимом роботи* лінії передачі. Діапазон довжин хвиль (або частот), для якого $\lambda < \lambda_{\perp}$ ($\nu > \nu_{\perp}$) і згасання хвилі є достатньо малим, називається *робочим діапазоном* довжин хвиль (частот) лінії передачі, а режим роботи при якому реалізуються ці умови – *робочим режимом* роботи лінії передачі.

Розглянемо хвилю в лінії передачі, для якої $K_{\perp}^2 > 0$. В цьому випадку при $K_{\perp} < K$ (в робочому режимі роботи лінії передачі) фазова швидкість хвилі v_{ϕ} виявляється більшою за фазову швидкість світла (Т-хвилі) u , оскільки підкореневий вираз в (4.7.2) є меншим за одиницю. Такі хвилі, для яких виконується співвідношення $v_{\phi} > u$, називаються *швидкими*.

В поза межному режимі роботи лінії передачі, навпаки, $K_{\perp} > K$ і, виходячи з (4.4.5), стала поширення хвилі стає чисто уявною

$$\beta = 1|\beta'| = 1\left|\sqrt{K_{\perp}^2 - K^2}\right|. \quad (4.7.7)$$

За таких умов в лінії передачі НВЧ існують не хвилі, а згасаючі коливання, амплітуда яких різко зменшується при збільшенні координати z . Відмітимо, що згасання амплітуди коливань в даному випадку можливе і за відсутності втрат в середовищі, яке заповнює лінію передачі, або в металевих елементах конструкції лінії передачі. В цьому випадку амплітуда хвилі зменшується за рахунок її інтенсивного відбиття – при зміні в просторі поля падаючої хвилі виникає відбита хвиля, яка виносить з лінії передачі значну частину енергії. Таким чином, в поза межному режимі роботи лінії передачі падаюча хвиля постійно віддає свою енергію відбитій хвилі, що й призводить до суттєвого зменшення амплітуди. Електромагнітне явище набуває коливальний, а не хвильовий характер.

При наближенні частоти хвилі ν до критичної частоти ν_{\perp} відбуваються суттєві зміни усіх характеристик хвилі. Наприклад, при $\nu \rightarrow \nu_{\perp}$ групова швидкість прямує до нуля, а фазова – у нескінченність (рис. 4.7.1). Щоб пояснити це явище скористаємось методом пар-

ціальних хвиль. Електромагнітне поле власних хвиль в лінії передачі представимо у вигляді суперпозиції полів однорідних плоских хвиль, що поширюються в лінії передачі під різними напрямками до її осі. Розглянемо властивості однієї з плоских хвиль, що поширюється під кутом γ до осі z (рис. 4.7.2). Фазова швидкість такої хвилі визначається формулою (3.5.11), а швидкість переносу енергії – формулою (3.5.15). При збільшенні кута γ проекція хвильового вектора плоскої хвилі \vec{K} на вісь z зменшується за законом косинуса – відповідно зменшується і швидкість переносу енергії. Навпаки, проекція фазової швидкості на вісь z зростає при збільшенні кута γ і при $\gamma = \pi/2$ стає нескінченною. Отже, при $\nu \rightarrow \nu_{\perp}$ кут між напрямком поширення парціальних хвиль в лінії передачі та віссю z асимптотично прямує до $\pi/2$, що призводить до різких змін властивостей власних хвиль в лінії передачі. На рис. 4.7.3 показано напрямки поширення парціальних хвиль в лінії передачі НВЧ для різних частот ν . На високих частотах ($\nu \gg \nu_{\perp}$) довжина z -складової хвильового вектора $K_z = K \cos \gamma$ парціальних хвиль майже дорівнює хвильовому числу хвилі K , отже, фазова та групова швидкість власних хвиль при $\nu \gg \nu_{\perp}$ асимптотично набли-

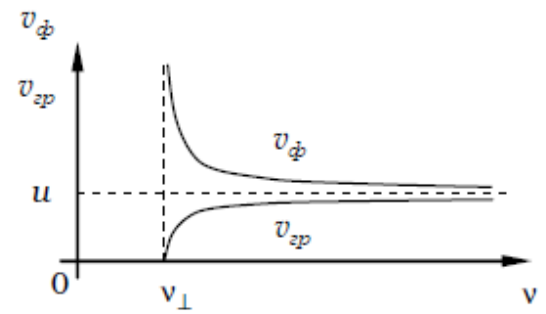


Рис. 4.7.1. Залежність фазової v_{ϕ} та групової v_{gp} швидкостей хвиль в лінії передачі НВЧ від частоти ν при $K_{\perp}^2 = \text{const} > 0$

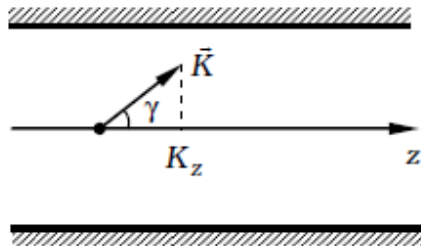


Рис. 4.7.2. Поширення парціальної плоскої хвилі під кутом γ до поздовжньої осі лінії передачі

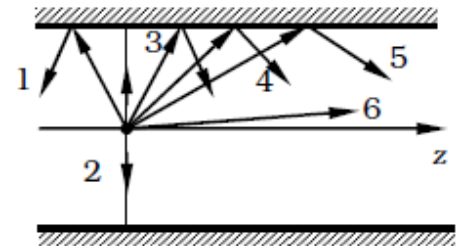


Рис. 4.7.3. Залежність напрямку поширення парціальних плоских хвиль в лінії передачі від частоти ν : 1 – $\nu_1 < \nu_{\perp}$; 2 – $\nu_2 = \nu_{\perp}$; 3 – $\nu_3 > \nu_{\perp}$; 4 – $\nu_4 > \nu_3$; 5 – $\nu_5 > \nu_4$; 6 – $\nu_6 \gg \nu_{\perp}$

жаються до фазової швидкості світла u , причому $v_\phi > u$, $v_{gp} < u$.

Зовсім інші властивості мають електромагнітні хвилі в лініях передачі при $K_\perp^2 < 0$. Такі критичні хвильові числа в певному діапазоні частот мають поверхневі хвилі, властивості яких розглядалися в § 3.6. В цьому випадку критичне хвильове число є чисто уявним: $K_\perp = i\kappa$, де $\kappa = \sqrt{|K_\perp^2|}$, що призводить до зміни виразу (4.7.2) для фазової швидкості

$$v_\phi = \frac{u}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{K}\right)^2}}. \quad (4.7.8)$$

З виразу (4.7.8) випливає, що $v_\phi < u$. Отже, при $K_\perp^2 < 0$ в лініях передачі поширюються *повільні* хвилі, фазова швидкість яких менша за швидкість світла. Такі хвилі можуть поширюватись в лініях передачі і без дисперсії. Дійсно, поклавши $\kappa = aK$, де $a = \text{const}$, з (4.7.2), (4.7.8) одержимо

$$v_\phi = v_{gp} = \frac{u}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad (4.7.9)$$

тобто при $u = \text{const}$ дисперсії немає.

На рис. 4.7.4 показані дисперсійні залежності в координатах β, K для всіх трьох розглянутих випадків ($K_\perp^2 = 0$, $K_\perp^2 > 0$, $K_\perp^2 < 0$).

Використовуючи скалярні граничні умови Шукина-Леонтовича (3.9.10) та вирази (4.5.1) для поперечних компонент поля ТЕ- та ТМ-

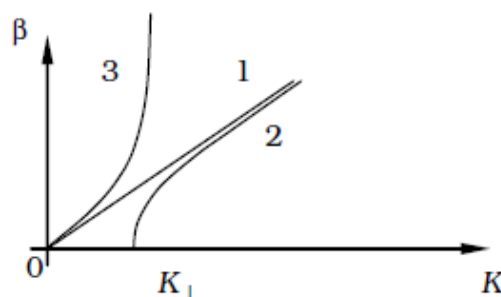


Рис. 4.7.4. Дисперсійні залежності $\beta = f(K)$ для випадку: 1 - Т-хвиля ($K_\perp^2 = 0$); 2 - швидка хвиля ($K_\perp^2 > 0$); 3 - повільна хвиля ($K_\perp^2 < 0$)

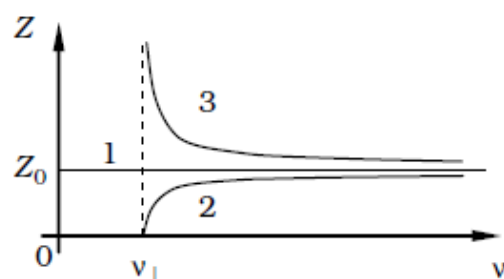


Рис. 4.7.5. Залежність хвильового опору Z лінії передачі НВЧ від частоти ν для випадку: 1 - Т-хвиля; 2 - ТМ-хвиля; 3 - ТЕ-хвиля

хвиль, можна одержати вирази для хвильового опору лінії передачі НВЧ:

для електричних хвиль

$$Z_{\Delta\Gamma}^{TM} = \left| \frac{E_x}{H_y} \right| = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = Z_0 \frac{\beta}{K}, \quad (4.7.10)$$

для магнітних хвиль

$$Z_{\Delta\Gamma}^{TE} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\beta} = Z_0 \frac{K}{\beta}, \quad (4.7.11)$$

де Z_0 – хвильовий опір середовища. Враховуючи, що Т-хвиля може бути описана електричним вектором Герца (див. § 4.4), з (4.7.10) одержуємо, що хвильовий опір Т-хвилі в лінії передачі співпадає з хвильовим опором середовища, що заповнює цю лінію:

$$Z_{\Delta\Gamma}^T = Z_0. \quad (4.7.12)$$

На рис. 4.7.5 показані залежності Z_{TM} , Z_{TE} , Z_T від частоти ν для випадку однакового поперечного хвильового числа для електричних, магнітних та плоских хвиль.

17. Система хвиль прямокутного хвилеводу.

Мелков с.179

18. Система хвиль круглого хвилеводу.

Мелков с.195

19. Повільні та поверхневі електромагнітні хвилі. Хвиля Ценнека.

Для ліній передач виконується дисперсійне співвідношення: $k^2 = k_{\perp}^2 + \beta^2$. З нього видно, що при $k_{\perp}^2 < 0$ поздовжнє хвильове число β стає більшим за k , а отже фазова швидкість хвилі у лп стає меншою за швидкість поширення світла у середовищі. $v_{\phi} < u$. Хвилі для яких це справедливо отримали назву повільних. Для них $v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k_0 \sqrt{\varepsilon\mu - (\frac{k_{\perp}}{k_0})^2}}$, а $\Lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon\mu - (\frac{\lambda_0}{\lambda_{\perp}})^2}}$. Одразу видно, що хвилю можна уповільнити у скільки завгодно разів.

Умова $k_{\perp}^2 < 0$ виконується для так званих поверхневих хвиль у певних діапазонах частот.

Поверхностные волны впервые были обнаружены Ценнеком в 1907 г. при решении задачи о распространении радиоволн вдоль проводящей плоской поверхности земли.

Поверхностные волны представляют собой электромагнитные колебания, которые распространяются без излучения вдоль границы раздела между двумя средами с различными физическими свойствами.

$$\phi > \phi_{ПВВ} \quad (3.6.21)$$

можливе поширення так званих поверхневих хвиль. Дійсно, за умови (3.6.21) другий закон Снелліуса (3.6.8) приймає вигляд

$$\cos \phi'' = \pm i\alpha, \quad (3.6.22)$$

де $\alpha = \sqrt{\frac{n_{сеп1}^2}{n_{сеп2}^2} \sin^2 \phi - 1}$. Підставляючи значення $\cos \phi''$ з (3.6.22) у вираз

для магнітного поля хвилі, що пройшла, одержуємо

$$H_y'' \sim \exp(-K_2 \alpha |z|). \quad (3.6.23)$$

Внаслідок (3.6.7) заломлена хвиля вільно поширюється вздовж осі x , але амплітуда цієї хвилі спадає за експоненціальним законом при віддаленні від поверхні $z = 0$. Така хвиля називається *поверхневою хвилею*, оскільки поле такої хвилі нібито прилипає до поверхні вздовж якої вона поширюється.

Вектор Умова-Пойнтинга поверхневої хвилі згідно (3.6.9), (3.6.23)

$$|\vec{\xi}| = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*] \sim \exp(-2K_2 \alpha |z|). \quad (3.6.24)$$

З цього виразу випливає, що основна частина енергії поверхневої хвилі локалізована в тонкій області простору, поблизу від поверхні $z = 0$.

20.Хвилі в діелектричних хвильоводах. Уповільнюючі системи.

Діелектричними хвильоводами називають різноманітної форми лінії передачі, що виготовлені з одного чи багатьох шарів діелектрику з різними значеннями діелектричної проникності. Для того щоб отримати розподіл поля та інші характеристики хвилі у таких хвильоводах потрібно розв'язати рівняння Гельмгольца для мембранної функції, але потрібно використовувати специфічні граничні умови. А саме умови магнітної стінки (відсутність тангенціальних компонент магнітного поля). Для таких хвильоводів можна виокремити деякі специфічні відмінності:

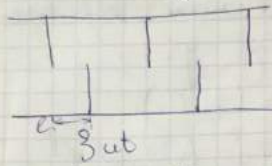
- Багатомодовий режим.
- Існування одночасно E та H хвиль, окремо можуть існувати лише хвилі типу E_{0n} та H_{0n} (для круглого хвильоводу)
- Яскраво виражена дисперсія
- Для основної моди типу EH_{11} критична частота відсічки дорівнює нулю
- Фазова швидкість хвилі у діелектричному хвильоводі більша від швидкості світла у матеріалі хвильовода, але менша ніж у середовищі навколо хвильоводу
- Поле не екранується і енергія хвилі поширюється як зсередини так і ззовні хвильоводу. (поза хвильоводом хвиля експоненційно затухає)
- Чим більша діелектрична проникність матеріалу хвильовода, тим більша енергія хвиля поширюється всередині його.

Уповільнюючі системи:

Інколи, наприклад для створення генераторів НВЧ, потрібно уповільнювати хвилі. Для уповільнення хвиль використовують:

1. Матеріали з діелектричними та/або магнітними проникностями відмінними від одиниці
Це дозволяє зменшити фазову швидкість хвилі адже $v_\phi = \frac{\omega}{\beta}$, а $\beta \sim \sqrt{\epsilon\mu}$
Або поверхневі хвилі для яких $k_\perp^2 < 0, \beta > k$
2. Системи непрямого розповсюдження хвилі
Різнманітні спіралі, хвилевід з перегинами і тд.
За рахунок збільшення шляху, зменшується ефективна швидкість розповсюдження вздовж головної осі
3. Гребінчасті або гофровані системи

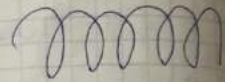
Finger to finger system (взапроминання пальців)



напр. унаблюдення



A simple velocity
or $\xi = \frac{p}{k_0}$, no
 $\frac{u}{s} t$



Продовження: Силажно знайти розв'язок
доку.

1. Розв'язки, базисно відомі елементи
→ кожен елемент переміщення енергії
елемента (відомі і про фактичні) та про
інше базисно, що невідомі процесу
відомі, то відомі і про елементи
навіть одну частоту.

→ Інваріантний стан елементу (невідомі
базисно) і збудити просторові
характеристики

j - номер гармоніки

$$\beta_j = \beta_0 + j \frac{2\pi}{e}, \quad j \in (-\infty; +\infty)$$

$$U_{\perp}(\xi, \eta, z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} U_{\perp j}(\xi, \eta) e^{i \beta_j z}$$

належить до описується суперпозицією
у всіх просторових гармонік. Замість
всього $U_{\perp j} = U_{\perp}'$ (гармоніки), але про
розв'язки.

лино врахувати врати, то з'являється
одна можливість | можна стала границя
відомим кинот | яка однакова для
у всіх гармонік.

Гориз
0
-a
z
e
стало віно
тотому розглянемо основну моду (j=0), це
коректно, коли модою фазу ліній фазна
масштабам (l) в малим.

Робота < 1, то ліній прямо позад по
поверхні (немає відбитки) => не правдо

$$E_z = -p^2 A e^{-p^2 x} e^{i p z}$$

$$H_y = i k_0 z_0 (-p) A e^{-p^2 x} e^{i p z} \quad \text{— в великій області}$$

$$E_z = k_z^2 B \sin(k_z (x+a)) e^{i p z} \quad \text{— в області металу}$$

$$H_y = i k_0 z_0 B \cos(k_z (x+a)) e^{i p z}$$

10.05.16 | Метод узгодження поперечного імпедансу

(завдання функціональних ірраціональних умов можна

зписати умови для відношення (імпедансу))

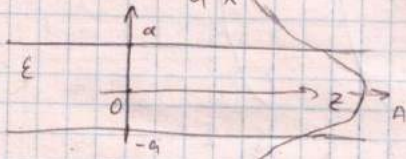
$$\frac{E_z}{H_y} = \frac{E_z}{H_y} \Rightarrow \frac{-p^2 A e^{-p^2 x} e^{i p z}}{i k_0 z_0 (-p) A e^{-p^2 x} e^{i p z}} = \frac{k_z^2 B \sin(k_z a) e^{i p z}}{i k_0 z_0 B \cos(k_z a) e^{i p z}}$$

$$p = k_z \tan(k_z a) \quad \text{— дисперсійне рівняння}$$

(Хвост в генераторной машине)

Хвост в генераторной машине

$$E_x = -i\beta \frac{dU_L}{dx} e^{i\beta z}, \quad E_z = k_L^2 U_L e^{i\beta z}, \quad H_y = i\omega\epsilon\epsilon_0 \frac{dU_L}{dx} e^{i\beta z}$$



Возмущение хвост E_{mo}, H_{mo}
(нема генераторной big конденсатору)

$$\Delta_L U_L + k_L^2 U_L = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} U_L + k_L^2 U_L = 0$$

$$U_L = B \begin{cases} \sinh(k_L x) & \text{на правой стороне} \\ \cosh(k_L x) & \text{на левой стороне} \end{cases}$$

нале стороны

глав β граничных условий, конек β них добывает забегания интуиция.

Условии $E_x = -i\beta p A e^{-p x} e^{i\beta z}$

$$E_z = -p^2 A e^{-p x} e^{i\beta z}$$

$$H_y = -i\omega\epsilon_0 p A e^{-p x} e^{i\beta z}$$

Граничные условия:

где непрерывности компонент на $x=a$

$$\begin{cases} E_z = k_L^2 B \cosh(k_L a) e^{i\beta z} = -p^2 A e^{-p a} e^{i\beta z} \\ H_y: i\omega\epsilon\epsilon_0 B k_L \sinh(k_L a) e^{i\beta z} = -i\omega\epsilon_0 p A e^{-p a} e^{i\beta z} \end{cases}$$

Делимо одна на одну:

$$\frac{k_L}{\epsilon} \tanh(k_L a) = p$$

Характеристическое уравнение: $k_0^2 = -p^2 + \beta^2$

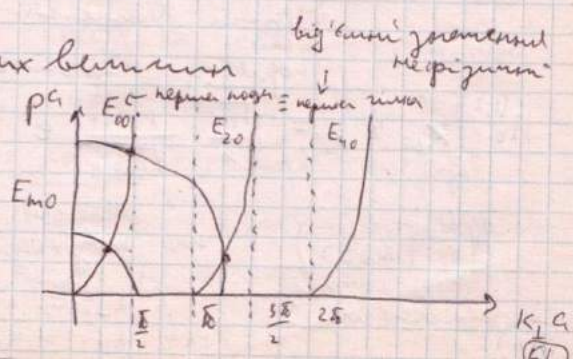
Вспогательная машина: $k_0^2 \epsilon = k_L^2 + p^2$

Из уравнения выведемо первое: $(k_0^2 (\epsilon - 1) = k_L^2 + p^2)$

$$k_L a = \frac{2\pi a}{\lambda_L}$$

Переведем го безразмерных величин

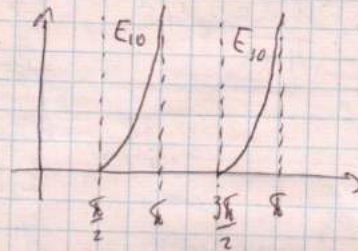
$$\begin{cases} \frac{k_L a}{\epsilon} \tanh(k_L a) = p a \\ k_0^2 a^2 (\epsilon - 1) = k_L^2 a^2 + p^2 a^2 \end{cases}$$



миж може бути, бо розв'язки J_0 , а там
похитки по $\sin(k_\perp x)$, а вона має $\cos(k_\perp x)$ — парна.
Для неперервних маємо:

$$\begin{cases} -\frac{k_\perp a}{\epsilon} J_0'(k_\perp a) = \rho a \\ a^2 k_\perp^2 (\epsilon - 1) = k_\perp^2 a^2 + \rho^2 a^2 \end{cases}$$

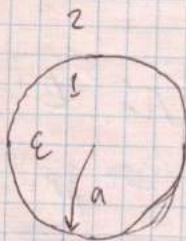
↑
універсальна умова
для даного зразка



Умова існування E_{10} : $k_\perp a > m \frac{\epsilon_0}{2}$

U — хвиля неможливої для E — хвиля, і тому
навіть за $\omega \rightarrow 0$, значення електричного
хвильового ϵ гомогенним.

Круглий діелектричний хвильовод



$$\Delta_\perp E_{1z} + k_\perp^2 E_{1z} = 0 \quad \leftarrow \text{для області 1}$$

$$\Delta_\perp E_{2z} - \rho^2 E_{2z} = 0 \quad \leftarrow \text{для області 2}$$

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Для отримання розв'язку однорідної
маємо $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = 0$

$$\Delta_\perp U_{11} + k_\perp^2 U_{11} = 0$$

→ виходить ρ -ий
Бессель

$$\Delta_\perp U_{12} - k_\perp^2 U_{12} = 0$$

$$U_{11} = A J_0(k_{11} r) \quad \rho\text{-ий Бессель 1-го роду нульового порядку}$$

$$U_{12} = B H_0^{(1)}(k_{12} r) + C H_0^{(2)}(k_{12} r)$$

↑
 ρ -ий Ханселя (або Бессель 3-го роду) нульового
порядку першого і другого типів.

$$H_0^{(1,2)}(k_{12} r) = \sqrt{\frac{2i}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{k_{12} r}} e^{\pm i k_{12} r} = \sqrt{\frac{2i}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{i \rho r}} e^{\pm \rho r}$$

$$H_0^{(1)}(k_{12} r)$$

не підходить до фізичних випадків.

Заміняємо: $\begin{pmatrix} k_{12} = i \rho \\ k_{11} = k_\perp \end{pmatrix}$

(52)

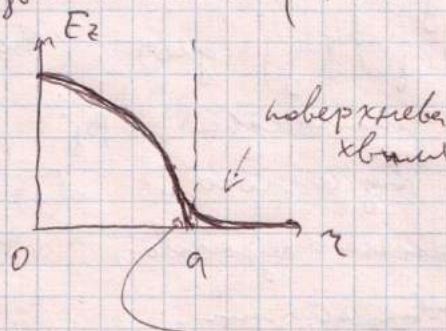
$$\left. \begin{aligned} k_{\perp}^2 A J_0(k_{\perp} a) &= -p^2 C H_0^{(2)'}(pa) \\ \text{и } \epsilon A \frac{dJ_0(k_{\perp} a)}{dz} &= C \frac{dH_0^{(2)}(pa)}{dz} \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{k_{\perp}^2 J_0(k_{\perp} a)}{\epsilon J_0'(k_{\perp} a)} &= \frac{-p^2 H_0^{(2)'}(pa)}{H_0^{(2)'}(pa)} \\ a^2 k_0^2 (\epsilon - 1) &= k_{\perp}^2 a^2 + p^2 a^2 \end{aligned} \right.$$

← мы сейчас графическо
решаем

28.04.16

Помогите найти частоту основного режима (TM)
и где основной (TM и TE)

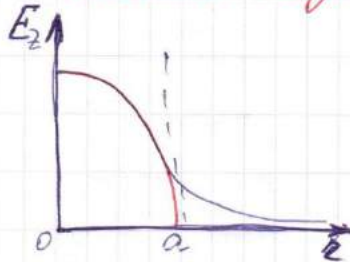


Аналогично
но для TE
мода максимум
поля находится
снаружи →
внутри с
гиперболикой
(она не выходит)

То мы имеем дело с частотой основного режима
волновод, где нет потерь, так как гиперболика р-на
минимум.

28.04.2016

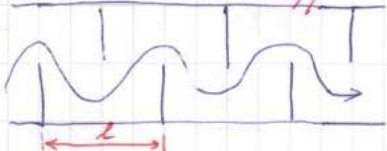
Размеры поле основной массы курного хвелеводу



На мнѣ же. хвеле-
буху похвал. в
рождѣ (писанна)

if земли. прописан греч. для поля НВУ/посевов
дубов. мам. (откуда) поле выдана не было, при рож. —

Дифрактований хвилевір



в-ли де } — коэф. збільшення

Из метал. пластины на двух
 тех метал. пластинах, где произошло
 выветривание, выветривание в таком
 выветривании. По "sin" \Rightarrow шв. в такт
 шв. прогнать в сторону $\{ \frac{U}{t}, \frac{U}{t} \}$

$\gamma = \frac{B}{K_0}$ - коэф. уповільнення

Таким образом, можно утверждать, что в теории с-мат с ред особенностями:

- 1) x_b , u_b пошир. прикладів, має дві частини
своєї поширення
 $x_b + u_b = \text{середній час розв'язання}$
1) дивіться x_b (то, що прийшло)
2) u_b $x_b - (u_b, \text{ що вийшло})$

Хвиле що, пройшли трічі підняття, дорганову
переміну; п-о знову нові.
і, хвиле; нескінченний то вгору. нескін. к-ста дидраго-
ванних вгору хвиле.

Косинуси елементи періодично повторюються як і гармонічні хвилі. Це буде неспівпадіння к-сти прямих і зворотних хвиль. Вони будуть однакою частотою, а амплітуда буде змінюватись. К-ста окремих хвиль, що з'являються в такій ферматорі - неспівпадіння - просторові гармоніки. Просторовий період в ліній ферматорі теж неспівпадає.

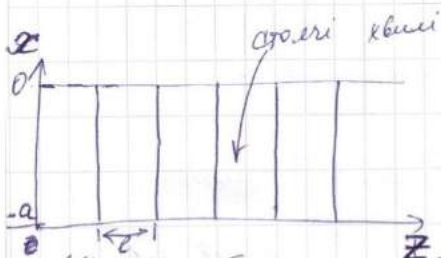
$$\beta_j = \beta_0 + j \frac{\pi}{L} \quad j \in [-\infty, \infty] \quad \beta_j - \text{стає номер}$$

Заг. вираження для з'являючихся на певній к-сті в характерна вираження для з'являючихся в певній к-сті в. Замінивши заг. вираження для з'являючихся в певній к-сті в.

$$U_z(\xi, \eta, z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j(\xi, \eta) e^{i\beta_j z}$$

повне поле ліній ферматорі для довільної хвилі

Всі гармоніки мають однакову стагу расання, але номер вони з різним β_j .



Між з'являючимся зворотними хвилями поєднання поверхневих хвиль. Таке між зворотними хвилями.

Ниска робота метал. плоского ферматора. Металевий на кутках і поверхня хвилі в такій ферматорі або з'являється. Таке з'являється неметал. поверхня хвиль. Це з'являється між зворотними хвилями, але треба з'являється з

$$E_z = -p^2 A e^{-p^2 x} e^{i\beta_0 z}$$

Розглянемо основну моду ліній ферматора ($j=0$), це припуск. Прямий, якщо небагато ферматор при проходженні періоду L в малій частоті $\beta_0 L \ll 1$. Отже малий частотний поблизу частоти з'являється.

$$M_y = i k_0 z_0 (-p) A e^{-p^2 x} e^{i\beta_0 z}$$

Всередині з'являється. Компонент E_z автоматично обертається в 0.

$$E_z = k_1^2 B \sin(k_1(x+a)) e^{i\beta_0 z}$$

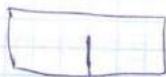
$$M_y = i k_0 z_0 B \cos(k_1(x+a)) k_1 e^{i\beta_0 z}$$

Щоб з'являється поле повним металом

21. Неоднорідності в лініях передачі НВЧ. Діафрагми та штирі в прямокутному хвилеводі.

Основний хвилевод працює в єдиномодовому режимі, то розв'язати можна задачу по відношенню λ та λ_g (довжина проходу) таку ж.

Але з'являються небажані неоднорідності:

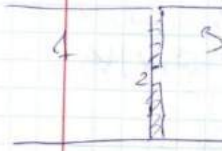


штир



діафрагма

Суть розв'язання задачі проста



$$1. -H_0^+ + \sum H_i^-$$

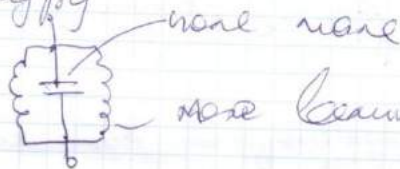
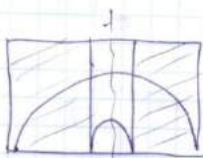
$$2. \sum H_0^+ + H_i^-$$

λ - довжина штиря

$$3. \sum H_0^+ +$$

для тонкої діафрагми все просто, а для товстої - ні.

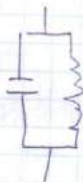
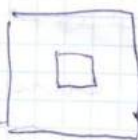
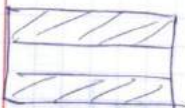
Неоднорідність - зміна ефективного поперечного кошику



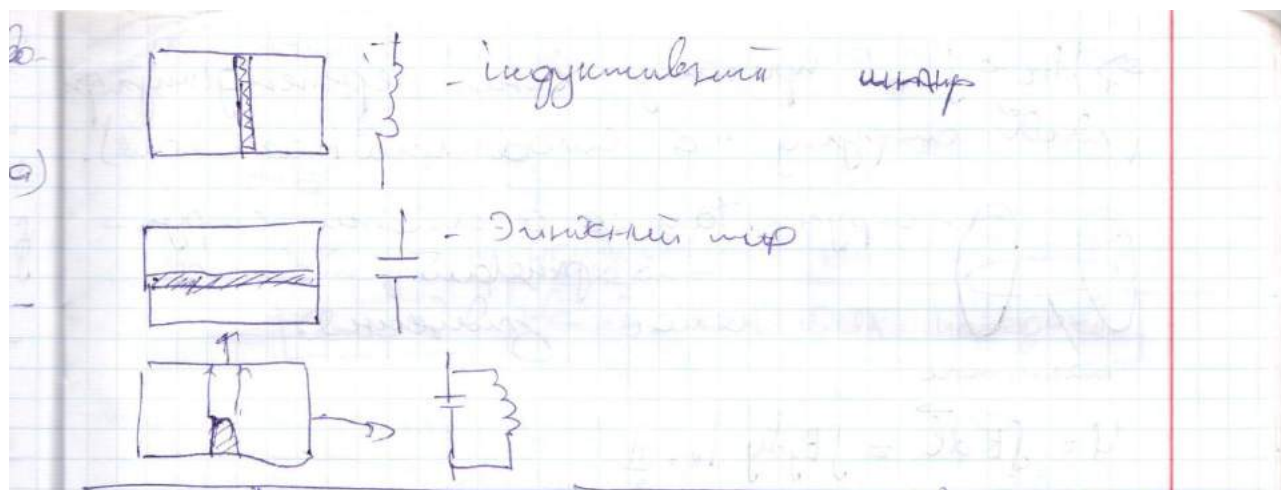
поле поле

поле вакууму

напруженість не змінюється



резонанс
для
вакуума



В § 13.1 рассматривались неоднородности в поперечном сечении линий передачи, однако в продольном направлении эти линии оставались регулярными. Существуют, однако, неоднородности, нарушающие регулярность, т. е. продольную однородность линий передачи (рис. 13.3).

Пусть в линии передачи возбуждена волна определенного типа единичной амплитуды, распространяющаяся в сторону положительных значений оси z . Назовем ее падающей волной и обозначим индексом p . В материале неоднородности поле этой волны возбуждает объемный ток плотностью $\mathbf{J}_0(\mathbf{r})$. Этот ток, в свою очередь, возбуждает в линии передачи бесконечное число типов волн, распространяющихся влево и вправо от неоднородности. Если начало координат расположено в месте нахождения неоднородности, то электромагнитное поле слева от нее ($z < 0$) представляет собой суперпозицию падающей и отраженных (возбужденных током плотностью $\mathbf{J}_0(\mathbf{r})$) волн:

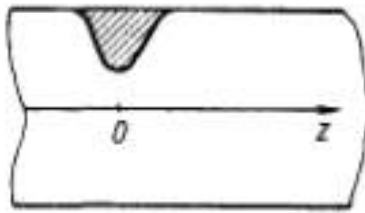


Рис. 13.3. Линия передачи с неоднородностью

$$\vec{E}^{(a)} = \vec{A}_0 \vec{E}_p e^{-i\beta_p z} + \sum_{m=1}^{\infty} \vec{A}_{-m} \vec{E}_{-m} e^{-i\beta_{-m} z}; \quad (13.18)$$

$$\vec{H}^{(a)} = \vec{A}_0 \vec{H}_p e^{-i\beta_p z} + \sum_{m=1}^{\infty} \vec{A}_{-m} \vec{H}_{-m} e^{-i\beta_{-m} z} \quad (13.19)$$

(активными потерями в линии передачи пренебрегаем).

Справа от неоднородности ($z > 0$) электромагнитное поле представляет собой суперпозицию волн, распространяющихся в положительном направлении оси z :

$$\vec{E}^{(np)} = \sum_{m=1}^{\infty} \vec{A}_m \vec{E}_m e^{-i\beta_m z}; \quad (13.20)$$

$$\vec{H}^{(np)} = \sum_{m=1}^{\infty} \vec{A}_m \vec{H}_m e^{-i\beta_m z}. \quad (13.21)$$

Коэффициенты возбуждения A_m, A_{-m} определяются в соответствии с формулами (12.6), (12.7), распределением плотности возбуждающего тока, т. е. размерами, формой и электрофизическими параметрами неоднородностей. Поэтому для расчета коэффициентов возбуждения используются граничные условия на поверхности неоднородности и условия непрерывности составляющих электромагнитного поля в свободной части поперечного сечения линии передачи. В результате подстановки в эти условия выражений (13.18)—(13.21) получают систему уравнений относительно коэффициентов возбуждения. Редукция (усечение) рядов в выражениях (13.18)—(13.19) и соответствующее ограничение числа уравнений позволяет получить в качестве решения редуцированной системы приближенные значения коэффициентов возбуждения.

Другой подход к вычислению электромагнитного поля нерегулярной системы состоит в задании функции распределения касательной к поперечному сечению линии передачи S , расположенному в области неоднородности, составляющей напряженности электрического поля $\vec{E}_\perp(x_1, x_2)$. Используя эту функцию, с помощью выражений (12.8), (12.9) определяют коэффициенты возбуждения A_m, A_{-m} в разложениях (13.18)—(13.21). При этом поперечная составляющая электрического поля оказывается непрерывной функцией от z вблизи сечения S , так как ее предельные значения при $z \rightarrow 0$ слева и справа от неоднородности равны $\vec{E}_\perp(x_1, x_2)$.

Напряженность магнитного поля также должна быть непрерывна в свободной части сечения S . Приравняв выражения (13.9), (13.19) при $z = z_0$, где z_0 — координата сечения S , получим интегральное уравнение относительно функции $\vec{E}_\perp(x_1, x_2)$, так как она входит в выражения для коэффициентов возбуждения под знаком интеграла. Решение интегрального уравнения дает возможность определить вид функции $\vec{E}_\perp(x_1, x_2)$ и, следовательно,

найти напряженность электромагнитного поля нерегулярной системы. Расчет осуществляют, как правило, с помощью ЭВМ.

Если линия передачи работает в одномодовом режиме, т. е. если на частоте возбуждения в ней распространяется только один (рабочий) тип волны с индексом p , то вдали от неоднородности существуют только падающая, отраженная и прошедшая волны этого типа. Следовательно, вдали от неоднородности ее свойства характеризуются коэффициентами отражения Γ и прохождения T , причем

$$\Gamma = \dot{A}_{-p}/\dot{A}_0; \quad T = \dot{A}_p/\dot{A}_0. \quad (13.22)$$

Для недиссипативных неоднородностей по закону сохранения энергии

$$|\Gamma|^2 + |T|^2 = 1. \quad (13.23)$$

При расчете электромагнитного поля вблизи неоднородности необходимо учитывать нераспространяющиеся типы волн, в поле которых запасается электромагнитная энергия. Поэтому недиссипативная неоднородность эквивалентна некоторой реактивности, включенной в линию передачи.

Для иллюстрации изложенных методов рассчитаем электромагнитное поле некоторых неоднородностей в прямоугольном волноводе. Выбор этого типа линии передачи обусловлен его широким применением, а также тем обстоятельством, что электромагнитные поля различных типов волн в прямоугольном волноводе описываются простыми аналитическими выражениями. В ряде случаев это позволяет получить решение, не прибегая к помощи ЭВМ.

1. Рассмотрим *металлический штырь* в прямоугольном волноводе, ось которого параллельна узкой стенке и имеет координаты $x = x_0$, $z = 0$ (рис. 13.4). Радиус штыря обозначим через r_0 . Пусть в волноводе возбуждена волна типа H_{10} , распространяющаяся в сторону положительных значений оси z . Поперечные составляющие поля волны E_{0y} , H_{0x} определяются выражениями (7.20), (7.21):

$$\dot{E}_{0y} = \dot{A}_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_1 z}; \quad (13.24)$$

$$\dot{H}_{0x} = -\dot{A}_0 \frac{\beta_1}{k Z_0} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_1 z}, \quad (13.25)$$

где $A_0 = -ik Z_0 \pi B/a$ (затухание, обусловленное активными потерями, не учитываем).

Это поле возбуждает в штыре поверхностный ток, который при малом радиусе штыря ($r_0 \ll a$) можно приближенно заменить линейным током, текущим по его оси. Так как амплитуда поля падающей волны и свойства штыря не зависят от y , наведенный в штыре ток также не зависит от этой координаты. Таким образом, в данном приближении плотность возбуждающего тока

$$\mathbf{J}^{\text{ст}}(x, y, z) = \dot{I}_0 \delta(x - x_0) \delta(z) \mathbf{e}_y. \quad (13.26)$$

Ток возбуждает волны, распространяющиеся вправо и влево от штыря, так что поле в волноводе определяется формулами (13.18) — (13.21). Поскольку $\mathbf{J}^{\text{ст}}$ не зависит от y , интегралы возбуждения для

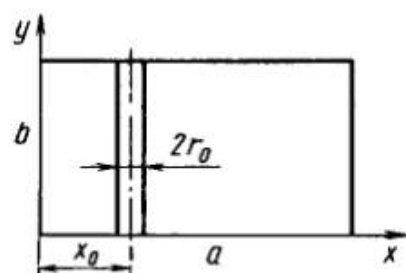


Рис. 13.4. Штырь в прямоугольном волноводе

всех типов волн, имеющих вариации поля по оси y , обращаются в нуль. Следовательно, штырь возбуждает в волноводе только волны типов H_{m0} , электромагнитное поле которых определяется выражениями

$$\begin{aligned}\dot{E}_{my} &= \dot{A}_m \sin \frac{m\pi x}{a} e^{-ik_{zm}z}; \\ \dot{H}_{mx} &= -\dot{A}_m \frac{k_{zm}}{kZ_0} \sin \frac{m\pi x}{a} e^{-ik_{zm}z},\end{aligned}$$

где $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. При отсутствии потерь в рабочем диапазоне частот волновода $k_{z1} = \beta_1 = (k^2 - \pi^2/a^2)^{1/2}$; $k_{zm} = -i\alpha_m = -i(m^2\pi^2/a^2 - k^2)^{1/2}$.

Рассчитаем коэффициенты возбуждения волн \dot{A}_m с помощью формул (12.6), (12.7), предварительно вычислив обобщенную норму (6.58). Учитывая, что $\sin(-m\pi x/a) = -\sin(m\pi x/a)$, получим

$$\begin{aligned}N_{em} &= \int_S \{[\dot{E}_m, \dot{H}_{-m}] - [\dot{E}_{-m}, \dot{H}_m]\} \mathbf{e}_z dS = - \int_S \dot{E}_{my} \dot{H}_{-mx} dx + \int_S \dot{E}_{-my} \dot{H}_{mx} dx = \\ &= \left(-\frac{k_{z,-m}}{kZ_0} + \frac{k_{z,m}}{kZ_0} \right) \frac{ab}{2} = \frac{k_{z,m}}{kZ_0} ab.\end{aligned}\quad (13.27)$$

Определим интегралы возбуждения, используя (13.26):

$$\int_V \mathbf{J}^{\text{ст}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_m dV = \int_0^b I_0 \dot{E}_{my}(x_0, 0) dy = I_0 b \sin \frac{m\pi x_0}{a}.\quad (13.28)$$

Подставив выражения (13.27) и (13.28) в (12.6) и (12.7), найдем

$$\dot{A}_m = \frac{I_0 Z_0 k}{k_{zm} a} \sin \frac{m\pi x_0}{a}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким образом, для электрического поля слева от штыря

$$\begin{aligned}\dot{E}_y &= \dot{E}_{0y} + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{A}_{-m} \dot{E}_{-my} = \dot{A}_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_1 z} - \\ &- I_0 Z_0 k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a}}{k_{zm} a} \sin \frac{m\pi x}{a} e^{ik_{zm} z}.\end{aligned}\quad (13.29)$$

На поверхности идеально проводящего штыря касательная составляющая напряженности электрического поля \dot{E}_y должна обращаться в нуль. Выбрав некоторую линию на этой поверхности, например прямую $x = x_0 + r_0$, $z = 0$, и записав для нее указанное граничное условие, получим уравнение относительно тока стержня I_0 :

$$\dot{A}_0 \sin \frac{\pi x_0}{a} - I_0 Z_0 k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x_0/a)}{k_{zm} a} \sin \frac{m\pi(x_0 + r_0)}{a} = 0.$$

Учитывая, что

$$\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{m\pi(x_0 + r_0)}{a} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{m\pi r_0}{a} - \cos \frac{m\pi(2x_0 + r_0)}{a} \right] \approx \frac{1}{2} \left(\cos \frac{m\pi r_0}{a} - \cos \frac{2m\pi x_0}{a} \right),$$

найдем

$$I_0 = \frac{2\dot{A}_0 \sin(\pi x_0/a)}{kZ_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_{zm} a} \left(\cos \frac{m\pi r_0}{a} - \cos \frac{2m\pi x_0}{a} \right)}.\quad (13.30)$$

Приравнивание нулю касательной составляющей напряженности электрического поля на любой другой линии, лежащей на поверхности стержня, приводит к аналогичному выражению, отличающемуся от (13.30) малыми величинами, зависящими от r_0 . Это различие обусловлено непостоянством суммарного поля на поверхности штыря. Оно уменьшается при уменьшении радиуса r_0 .

Первый член ряда (13.29) соответствует отраженной волне типа H_{10} . Поэтому коэффициент отражения от стержня

$$\Gamma = \frac{A_{-1}}{A_0} = \frac{Z_0 k}{\beta_1 a A_0} \dot{I}_0 \sin \frac{\pi x_0}{a} = \frac{2 \sin^2(\pi x_0/a)}{\beta_1 a \sum_{m=1}^{\infty} (k_{zm} a)^{-1} (\cos m\pi r_0/a - \cos 2m\pi x_0/a)}.$$

Волна, излучаемая штырем в положительном направлении оси z , имеет такую же амплитуду, которая складывается с амплитудой падающей волны. Следовательно, коэффициент передачи $T=1+\Gamma$. Эквивалентные параметры штыря в волновомоду приведены в гл. 13.

2. Рассмотрим диафрагму в прямоугольном волновомоду, края отверстия которой параллельны узкой стенке волновода (рис. 13.5). Поле падающей волны типа H_{10} , определяемое выражениями (13.24), (13.25), возбуждает отраженные и проходящие волны типа H_{m0} (коэффициенты возбуждения волн других типов равны нулю по тем же причинам, что и в предыдущем случае). При этом в отверстии диафрагмы образуется электрическое поле напряженностью \dot{E}_d , амплитуда которой зависит от координаты x :

$$\dot{E}_d = \begin{cases} \dot{E}_0(x) e_y, & c < x < d, \\ 0, & x < c, x > d. \end{cases} \quad (13.31)$$

Используя (13.18) — (13.21), а также (13.22), (13.24), (13.25), запишем выражения для поперечных составляющих напряженности электромагнитного поля слева и справа от диафрагмы:

$$\dot{E}_y^- = \dot{A}_0 \sin \frac{\pi x}{a} (e^{-i\beta_1 z} + \Gamma e^{i\beta_1 z}) + \sum_{m=2}^{\infty} \dot{A}_{-m} \sin \frac{m\pi x}{a} e^{-ik_{zm} z}; \quad (13.32)$$

$$\dot{H}_x^- = -\dot{A}_0 \frac{\beta_1}{kZ_0} \sin \frac{\pi x}{a} (e^{-i\beta_1 z} - \Gamma e^{i\beta_1 z}) + \sum_{m=2}^{\infty} \dot{A}_{-m} \frac{k_{zm}}{kZ_0} \sin \frac{m\pi x}{a} e^{ik_{zm} z} \quad (13.33)$$

при $z < 0$ и

$$\dot{E}_y^+ = \dot{A}_0 T \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_1 z} + \sum_{m=2}^{\infty} \dot{A}_m \sin \frac{m\pi x}{a} e^{-ik_{zm} z}, \quad (13.34)$$

$$\dot{H}_x^+ = -\dot{A}_0 \frac{\beta_1}{kZ_0} T \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_1 z} + \sum_{m=2}^{\infty} \dot{A}_m \frac{k_{zm}}{kZ_0} \sin \frac{m\pi x}{a} e^{-ik_{zm} z} \quad (13.35)$$

при $z > 0$.

В этих выражениях Γ и T — коэффициенты отражения и прохождения волны типа H_{10} в волновомоду с диафрагмой.

При $z=0$ электрическое поле волновода совпадает с полем диафрагмы:

$$\dot{E}_y^-(x, 0) = \dot{E}_y^+(x, 0) = \dot{E}_d(x). \quad (13.36)$$

Положим в выражении (13.32) $z=0$, помножим левую и правую части на $\sin(\pi x/a)$ и проинтегрируем полученное равенство по x в пределах от 0 до a . В соответствии с (13.36) получим

$$\int_c^d \dot{E}_0(t) \sin \frac{\pi t}{a} dt = \dot{A}_0 \frac{a}{2} (1 + \Gamma). \quad (13.37)$$

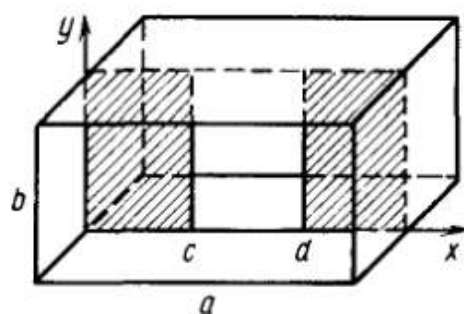


Рис. 13.5. Диафрагма в волновомоду

Аналогично, помножив обе части (13.32) на $\sin\{m\pi x/a\}$, найдем

$$\int_c^d \dot{E}_0(t) \sin \frac{m\pi t}{a} dt = -\frac{a}{2} \dot{A}_{-m}. \quad (13.38)$$

Из выражения (13.34) таким же образом определим

$$\int_c^d \dot{E}_0(t) \sin \frac{\pi t}{a} dt = \dot{A}_0 \frac{a}{2} T; \quad (13.39)$$

$$\int_c^d \dot{E}_0(t) \sin \frac{m\pi t}{a} dt = \frac{a}{2} \dot{A}_m. \quad (13.40)$$

В отверстии диафрагмы напряженность магнитного поля должна быть непрерывной. Положив в соотношениях (13.33) и (13.35) $z=0$ и приравняв их, получим

$$-\dot{A}_0(1-\Gamma) \sin \frac{\pi x}{a} + \sum_{m=2}^{\infty} \dot{A}_{-m} \frac{k_{zm}}{\beta_1} \sin \frac{m\pi x}{a} = -\dot{A}_0 T \sin \frac{\pi x}{a} + \sum_{m=2}^{\infty} \dot{A}_m \frac{k_{zm}}{\beta_1} \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Это равенство справедливо при $c \leq x \leq d$.

Упростим данное выражение, сгруппировав подобные члены:

$$\dot{A}_0(\Gamma + T - 1) \sin \frac{\pi x}{a} = \sum_{m=2}^{\infty} (\dot{A}_m - \dot{A}_{-m}) \frac{k_{zm}}{\beta_1} \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Подставив в это равенство формулы (13.37) — (13.40), найдем

$$\frac{\Gamma}{1+\Gamma} \sin \frac{\pi x}{a} \int_c^d \dot{E}_0(t) \sin \frac{\pi t}{a} dt = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{k_{zm}}{\beta_1} \sin \frac{m\pi x}{a} \int_c^d \dot{E}_0(t) \sin \frac{m\pi t}{a} dt. \quad (13.41)$$

Полученное соотношение есть интегральное уравнение относительно напряженности электрического поля в отверстии диафрагмы, возбуждаемого падающей волной единичной амплитуды. Приближенный аналитический метод решения этого уравнения (метод Швингера) изложен в [2]. Оно может быть решено также численными методами. Найденная в результате решения функция $\dot{E}_0(x)$ позволяет определить коэффициенты возбуждения различных типов волн в волноводе с диафрагмой (см. § 17.2).

Діафрагми та штирі

Тип замедляющей системы определяется в основном способом реализации импедансной поверхности. В соответствии с этим различают гребенчатые, спиральные, стержневые, резонаторные и некоторые другие типы ЗС [7].

В гребенчатых системах импедансная поверхность образуется с помощью пазов, прорезанных в проводниках ЗС перпендикулярно направлению распространения волны. Некоторые разновидности ЗС гребенчатого типа показаны на рис. 10.8. Это плоская гребенка (рис. 10.8, а), экранированная плоская гребенка (рис. 10.8, б), двусторонняя плоская гребенка

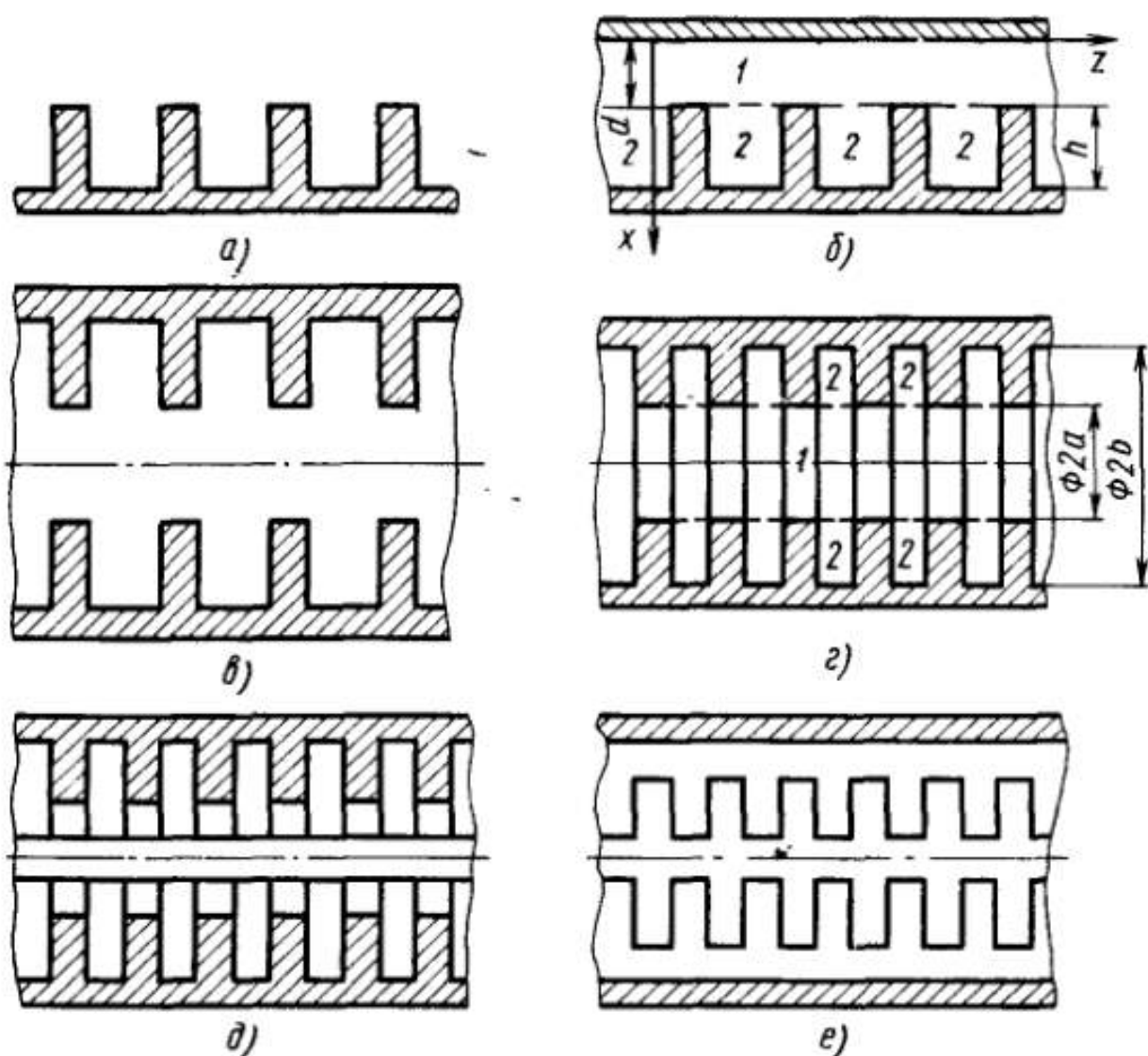


Рис. 10.8. Типы гребенчатых ЗС

(рис. 10.8, *е*). К гребенчатым ЗС с осевой симметрией относятся круглый диафрагмированный волновод (КДВ), изображенный на рис. 10.8, *г*; коаксиальный диафрагмированный волновод с диафрагмами на внешнем (рис. 10.8, *д*) и внутреннем (рис. 10.8, *е*) проводниках, а также ряд других конструкций. Плоские гребенчатые ЗС могут быть не ограничены в направлении оси y (открытые) или ограничены проводящими плоскостями $y = \text{const}$, отстоящими друг от друга на расстоянии l (закрытые). В первом случае такие параметры ЗС, как волновое сопротивление и сопротивление связи, рассчитываются на единицу ее ширины.

Импедансная поверхность *стержневых* ЗС образована тонкими (по сравнению с длиной волны) металлическими стержнями (штырями), расположенными перпендикулярно направлению распространения медленной волны (рис. 10.14, *а—в*). Анализ таких систем часто проводится приближенным *методом многопроводных*

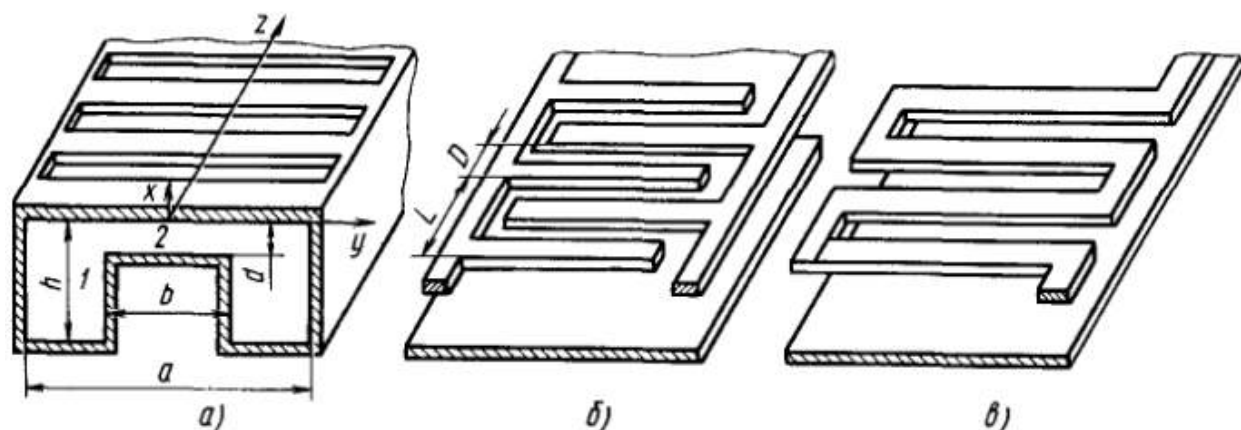


Рис. 10.14. Типы стержневых ЗС:
а — лестничная; *б* — встречно-штыревая; *в* — меандровая

линий [7], основанным на предположении о том, что вдоль стержней (в направлении оси *y*, рис. 10.14, *а*) распространяются Т-волны. Такое предположение справедливо, если период системы $L \ll \lambda$ и замедление $n_\phi \gg 1$. Оно позволяет рассматривать стержневую ЗС как многопроводную линию передачи (см. § 8.1). Действительно, при больших замедлениях, как показано в § 10.1, электрическое поле распространяющихся вдоль оси *z* Е-волн в плоскости *xOz* близко к квазистатическому, т. е. к полю Т-волн в поперечном сечении многопроводной линии передачи.

22. Струми і напруги в техніці НВЧ.

12.05.16

Струми та напруги в
техніці НВЧ

Для перевірки на експерименті ~~та~~ вводять
деякі еквівалентні струми та напруги.

$$P = \frac{1}{2} UI = \frac{1}{2} \frac{U^2}{R} = \frac{1}{2} I^2 R - \text{в радіотехніці}$$

Для НВЧ: $P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ UI^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{|U|^2}{Z} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ |I|^2 Z \}$

$$Z_{pi} = \frac{|U|^2}{2P} - \text{дійсний опір} \quad \text{хвістовий опір}$$

визначений
через U та P

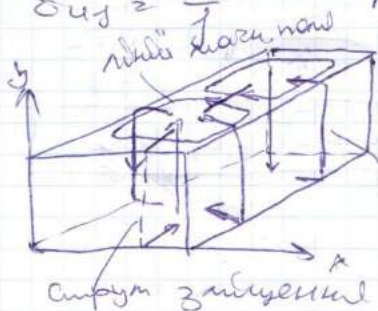
$$Z_{pi} = \frac{2P}{|I|^2}$$

Взагалі потужі $Z_{pi} \neq Z_{pi} \neq Z_{ci}$

$$Z_{ci} = \frac{|U|}{|I|} - \text{Діалі користувача.}$$

коли порівнюємо з експериментом, то беремо
модуль, а в інших випадках — комплексне.

$$Z_{ci} = \frac{U}{I} \quad \text{Але як визначити U та I !}$$



$$[\vec{H} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] = \vec{J}_{\text{пов}}$$

струм на поверхні ідеального металу
не має змісту електричного поля
 \Rightarrow не може бути і магнітного
(змінного)

2) H_z — поле в плоскости волны перпендикулярно (идет) направлению на концах линий магнитного поля).



магн. поле

— сургу там q с сдвинут сургу —
— поверхность, там q
конец — змученный.

$$U = \int \vec{E} d\vec{l} = \int E_y dy \Big|_{x=\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

— до поле там максимум

$$H_z = k_z^2 K_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{i\beta z}$$

$$E_y = +i k_0 z_0 \frac{\pi}{a} K_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{i\beta z}$$

$$H_x = -\epsilon_0 \beta \frac{\pi}{a} K_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{i\beta z}$$

$$U = i k_0 z_0 \frac{\pi}{a} K_0 e^{i\beta z} \int_0^a dy = i k_0 z_0 \frac{\pi}{a} b K_0 e^{i\beta z} = U_0 e^{i\beta z}$$

$$J = - \int_0^a H_x dx = \epsilon_0 \beta \frac{\pi}{a} K_0 e^{i\beta z} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \frac{a}{\pi} \right) \Big|_0^a$$

$$\text{до } z = - \frac{E_y}{H_x} = \epsilon_0 \beta K_0 e^{i\beta z} (1+1) = 2\epsilon_0 \beta K_0 e^{i\beta z} = J_0 e^{i\beta z}$$

2) В каждой точке линии передачи с напряжением сургу.

$$z = \frac{U}{J} = \frac{i k_0 z_0 \frac{\pi}{a} b K_0 e^{i\beta z}}{2\epsilon_0 \beta K_0 e^{i\beta z}} = \frac{\pi k_0 z_0 b}{2\beta a}$$

не зависит от z !

$$P = \frac{1}{2} U J^* = \frac{1}{2} i k_0 z_0 \frac{\pi}{a} b K_0 e^{i\beta z} \cdot (-2\epsilon_0 \beta K_0) e^{-i\beta z}$$

$$= k_0 \beta z_0 \frac{\pi}{a} b K_0^2 = \frac{2\pi}{\lambda} z_0 \pi \frac{b}{a} K_0^2 \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2}$$

Корреляция електрического сургу
на напряжении

Нормируем силу ее нормованная нагрузка
 $P = \frac{1}{2} |a|^2$
 $a = \sqrt{\frac{2}{Z_0}}$ сдв $\frac{U}{\sqrt{2}}$
 При таком представлении аргумента ≈ 1 .

Рассмотрим эквивалентную схему линии передачи, представленную на рис. 1.8.

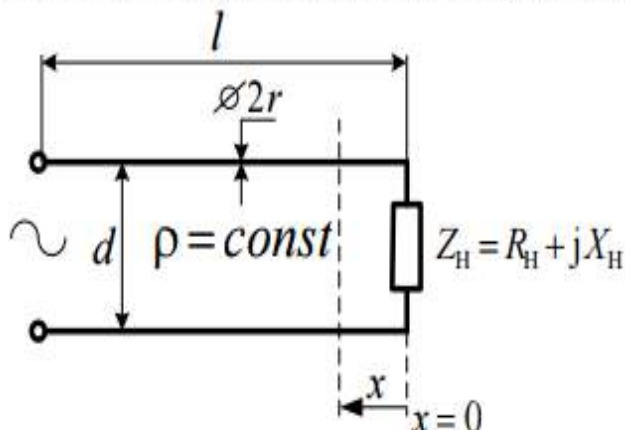


Рис. 1.8 — Модель двухпроводной линии передачи

Распределение напряжения в сечениях линии и тока вдоль проводников определяется в общем виде на основе системы уравнений:

$$\begin{cases} u(x) = U_H \operatorname{ch}(\gamma x) + I_H \rho \operatorname{sh}(\gamma x); \\ i(x) = I_H \operatorname{ch}(\gamma x) + \frac{U_H}{\rho} \operatorname{sh}(\gamma x), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $U_H = I_H Z_H$ — граничное условие.

Рассмотрим двухпроводную линию без потерь. В этом случае погонные параметры $R_l = 0$ и $G_l = 0$, тогда коэффициент распространения γ и волновое сопротивление ρ определяются выражениями:

$$\gamma = j\omega\sqrt{L_l C_l};$$

$$\alpha = 0, \quad k = \omega\sqrt{L_l C_l} = \frac{2\pi}{\lambda_d}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}.$$

Тогда система уравнений (2.1) может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} u(x) = U_H \cos(kx) + j I_H \rho \sin(kx); \\ i(x) = I_H \cos(kx) + j \frac{U_H}{\rho} \sin(kx). \end{cases} \quad (1.2)$$

Значение сопротивления нагрузки $Z_H = \infty$, при этом $I_H = 0$ — холостой ход. Распределения амплитуды напряжения и тока представлены на рис. 1.9, а. Распределение фазы напряжения и тока представлены на рис. 1.9, б.

Значение сопротивления нагрузки $Z_H = jX_H$, имеющей чисто реактивный характер. Распределения амплитуды напряжения и тока представлены на рис. 1.11, когда $Z_H = j\rho$.

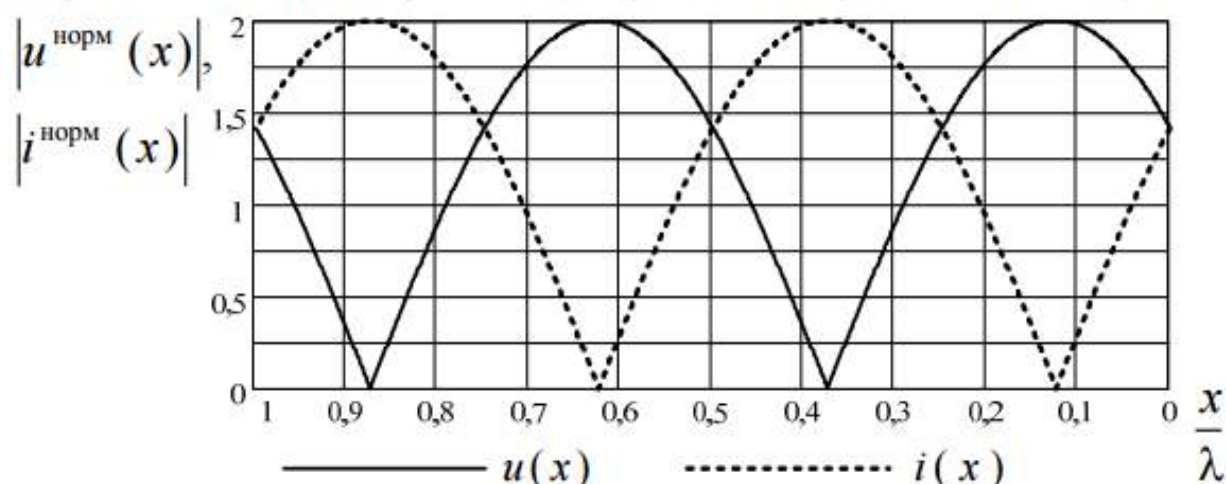


Рис. 1.11 — Распределение нормированной амплитуды напряжения и тока вдоль линии передачи

Значение сопротивления нагрузки $Z_H = R_H$, имеющей чисто активный характер. При этом нормированное распределение напряжения определяется из (1.2) по формуле

$$|u^{\text{норм}}(x)| = \sqrt{\cos^2(kx) + \left(\frac{\rho}{R_H}\right)^2 \sin^2(kx)}.$$

Распределения амплитуды напряжения и тока представлены на рис. 1.12 для случая, когда $Z_H = 2\rho$.

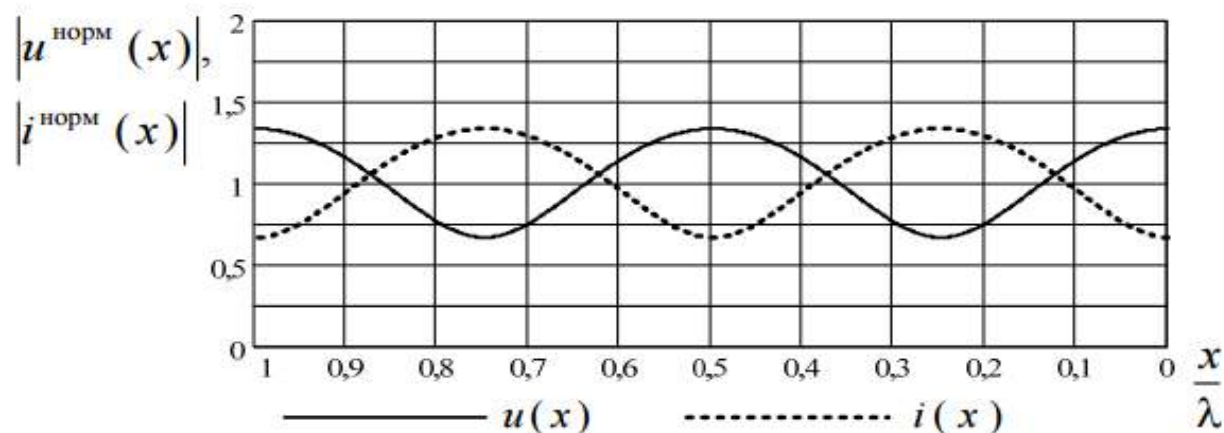


Рис. 1.12 — Распределение нормированной амплитуды напряжения и тока вдоль линии передачи

При активной нагрузке $Z_H > \rho$ максимум амплитуды напряжения находится в месте подключения нагрузки, минимум смещен на расстояние равное четверти длины волны. При $Z_H < \rho$ в месте подключения нагрузки находится минимум напряжения, а максимум — на расстоянии четверти длины волны от него.

Значение сопротивления нагрузки $Z_H = R_H = \rho$, равное волновому сопротивлению

линии передачи. Распределения амплитуды напряжения и тока представлены на рис. 1.13. Этот режим работы линии передачи называется режимом бегущих волн и характеризуется постоянным значением амплитуды напряжения и тока вдоль линии передачи. При этом фаза тока и напряжения изменяется по линейному закону.

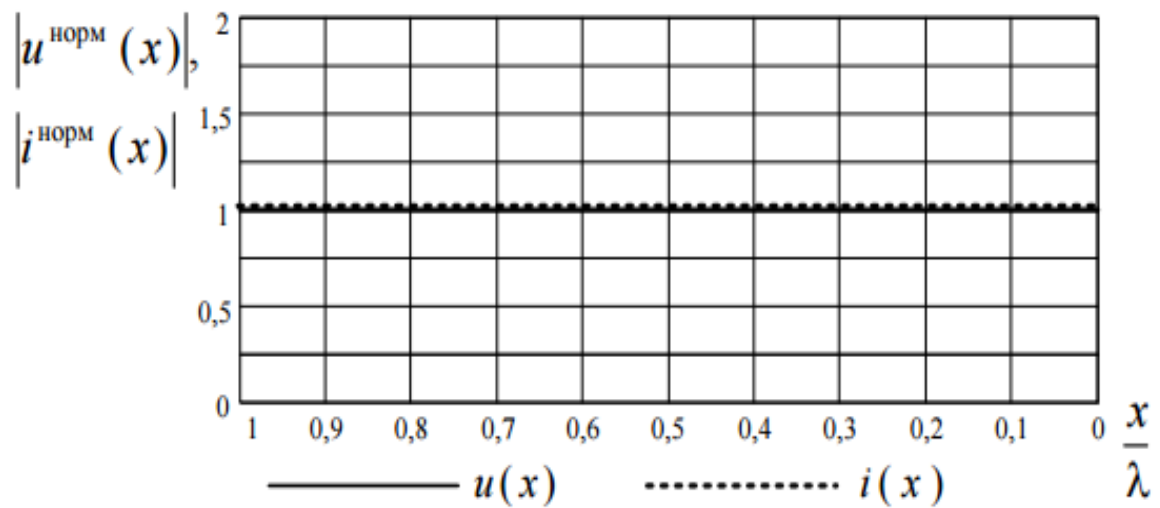


Рис. 1.13 — Распределение нормированной амплитуды напряжения и тока вдоль линии передачи

23. Стоячі хвилі в лініях передачі НВЧ. Узгодження в лініях передачі.

Нормований струм є нормована напруга

$$P = \frac{1}{2} |a|^2$$

$$a = \sqrt{\frac{2P}{Z_0}} \text{ або } \frac{U}{\sqrt{Z_0}}$$

При такому представленні амп'єсисти = 1.

Стандарт хвилі в лінійках передачі

$Z_{\text{ЛП}}$

$$U_z = U_1 e^{i\beta z} + U_2 e^{-i\beta z}$$

характеристики напруги та змінюються
(то вона визначена через електричне поле)

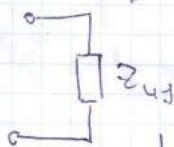
$$I_z = I_1 e^{i\beta z} - I_2 e^{-i\beta z}$$

$$Z_z = \frac{U_z}{I_z} = \frac{U_1 e^{i\beta z} + U_2 e^{-i\beta z}}{I_1 e^{i\beta z} - I_2 e^{-i\beta z}} = \frac{\frac{U_1}{Z_{\text{ЛП}}} e^{i\beta z} + \frac{U_2}{Z_{\text{ЛП}}} e^{-i\beta z}}{\frac{U_1}{Z_{\text{ЛП}}} e^{i\beta z} - \frac{U_2}{Z_{\text{ЛП}}} e^{-i\beta z}} =$$

характеристика $Z_{\text{ЛП}}$
амп'єсисти в граничному випадку

17.05.16

лінійка передачі



$$Z_z = Z_{\text{ЛП}} \frac{U_1 e^{i\beta z} + U_2 e^{-i\beta z}}{U_1 e^{i\beta z} - U_2 e^{-i\beta z}} = Z_{\text{ЛП}} \frac{1 + \frac{U_2}{U_1} e^{-2i\beta z}}{1 - \frac{U_2}{U_1} e^{-2i\beta z}} = \Gamma$$

$$\begin{aligned} U_1 &= |U_1| e^{i\varphi_1} \\ U_2 &= |U_2| e^{i\varphi_2} \end{aligned}$$

$$\Gamma = \frac{|U_2| e^{i\varphi_2}}{|U_1| e^{i\varphi_1}} = \frac{|U_2|}{|U_1|} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Отже може змінюватись амплітуда,
а може - фаза

на експериментально
визначено Γ

$$Z_z = Z_{\text{ЛП}} \frac{1 + \Gamma e^{-2i\beta z}}{1 - \Gamma e^{-2i\beta z}}$$

Але знайти (універсально)?

Якщо ми знаємо Z_e при $z=0$

$$\frac{Z_e}{Z_{\text{ЛП}}} = \frac{1 + \Gamma e^{-2i\beta \cdot 0}}{1 - \Gamma e^{-2i\beta \cdot 0}} = k$$

$$1 + \Gamma e^{-2i\beta z} = k - \Gamma k e^{-2i\beta z}$$

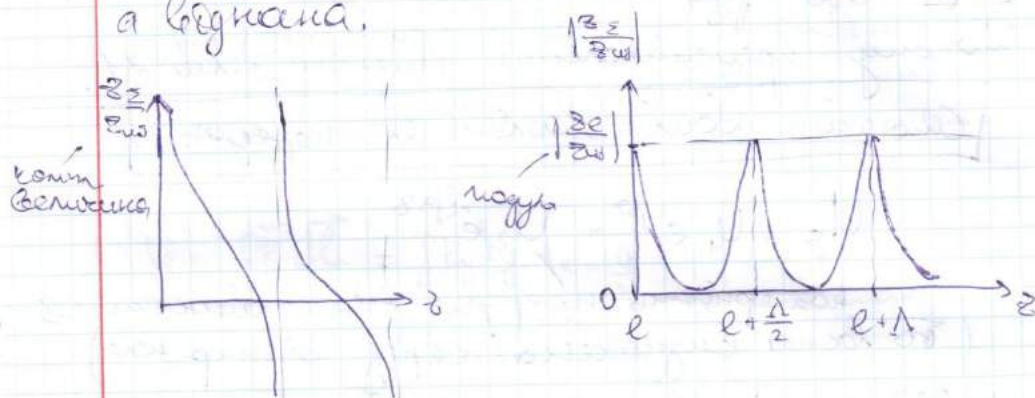
$$\Gamma (e^{-2i\beta z} + k e^{-2i\beta z}) = k - 1$$

$$\Gamma = \frac{k-1}{1+k} e^{2i\beta z}$$

$$\frac{Z_z}{Z_{\text{ЛП}}} = \frac{1 + \frac{k-1}{1+k} e^{2i\beta z} e^{-2i\beta z}}{1 - \frac{k-1}{1+k} e^{2i\beta z} e^{-2i\beta z}} = 1 +$$

$$\S \quad z_{\Sigma}(z) = z_{u0} \frac{ze + i z_{u1} \operatorname{tg}(\beta(l-z))}{ze + i z_{e0} \operatorname{tg}(\beta(l-z))}$$

Как указывали не абсолютно гладкая ось, а бегущая.



$$|\Gamma| = \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \right|$$

Imho $z_2 = ze$, а $z_1 = z_{u0}$

$$\Gamma = \frac{ze - z_{u0}}{ze + z_{u0}} e^{i\beta l}$$

$$z_{\Sigma} = \frac{1 + \Gamma e^{-2i\beta z}}{1 - \Gamma e^{-2i\beta z}}$$

$z_{\Sigma} \max$! когда $z=l$

$$z_{\Sigma} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} ze - \text{КСХН за напряжением}$$

$z_{\Sigma} \min$! когда $|\Gamma| = 0$

$z_{\Sigma} \max = \infty$ когда $|\Gamma| = 1$

$z_{\Sigma} \min$!

$$z_{\Sigma} = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} ze$$

при $z=0$, $z_{\Sigma}=0$

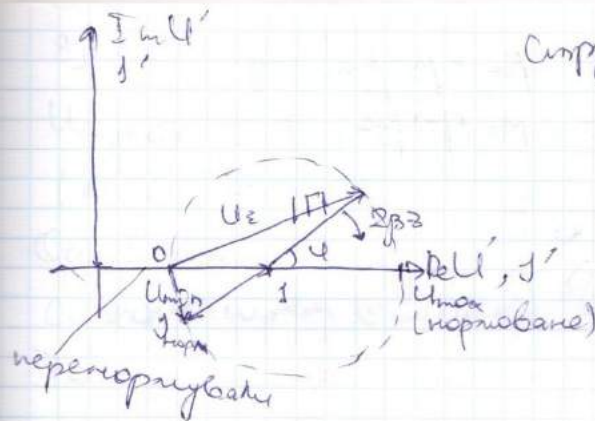
В зависимости от КСХН z_{Σ} может увеличиваться
от 0 до ze .

$$|\Gamma| = \frac{z-1}{z+1}$$

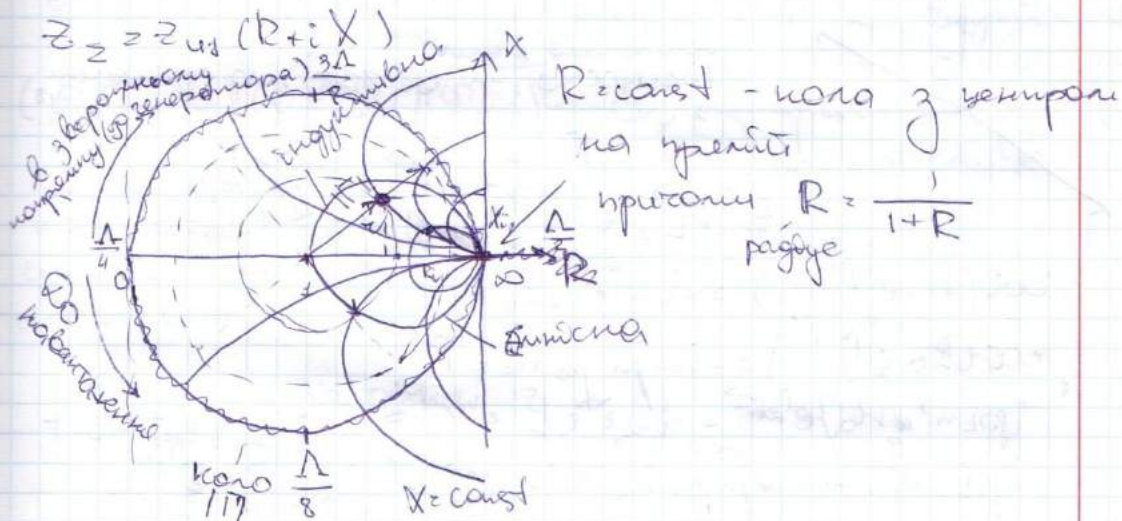
$$u = u_1 e^{i\beta z} (1 + |\Gamma| e^{i4\beta z})$$

$$d = \frac{u_1}{z_{u0}} e^{i\beta z} (1 - |\Gamma| e^{i4\beta z})$$

Струм і напруга не синфазні



Комплексна Волтерта - Стейнса
(повний комплексний хвильовий амп



Електрична довжина довільних ЛП - кабіл фазні!
 $\frac{2\pi z}{\lambda}$
 $p = | \Gamma |$, K - КСНН

19.05.16 Посид хвиль в гиротронному середовищі

Гиротронне сер. - анізотропне середовище з
анісметричними компонентами в
тензорах характеристик.

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & i\mu_{12} & 0 \\ -i\mu_{12} & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix}, \quad \vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & i\epsilon_a & 0 \\ -i\epsilon_a & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{||} \end{pmatrix}$$

Затримує
анісмет. складових
визначеного роду
складові позитив *

§ 7.5. СОГЛАСОВАНИЕ ПЕРЕДАЮЩИХ ЛИНИЙ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

В теории обычных длинных линий под режимом *согласования* понимают случай, когда сопротивление нагрузки, включенное на конце линии, в точности равно характеристическому сопротивлению данной линии, т. е. $Z_n = Z_c$. При этом отраженная волна отсутствует. Коэффициент отражения Γ оказывается равным нулю; коэффициент стоячей волны равен единице. Такое понятие согласования полностью используется и при работе с любыми передающими линиями сверхвысоких частот.

Нетрудно показать (см. ниже), что мощность, поступающая в нагрузку от *согласованного генератора*, в режиме согласования имеет наибольшую величину. Однако в случае, когда генератор не согласован с передающей линией, т. е. внутреннее сопротивление генератора не равно характеристическому сопротивлению линии, максимум передаваемой мощности достигается при иной величине сопротивления нагрузки. Этот особый режим получил название *сопряженного согласования**. Сопряженное согласование встречается не только в цепях сверхвысоких частот, но и в обычных электрических цепях переменного тока с сосредоточенными постоянными [1].

Таким образом, возможны два способа передачи максимальной мощности от генератора к нагрузке:

1) в режиме чисто бегущей волны, когда генератор и нагрузка согласованы с передающей линией;

2) в режиме стоячей волны, при котором выход генератора и вход нагрузки рассогласованы с линией.

В технике сверхвысоких частот главный интерес представляет лишь первый случай. Сопряженное согласование следует иметь в виду в основном как нежелательное явление, приводящее, например, в измерительной технике СВЧ к появлению серьезных погрешностей. Сам термин «согласование» применяется обычно как синоним режима работы линии при отсутствии отраженной волны.

Рассмотрим причины, в силу которых обычно стремятся достичь возможно лучшего согласования, т. е. приблизить КСВ к идеальной величине, равной единице.

В сечении, где находится максимум стоячей волны напряжения, имеется минимум тока и $\psi=0$. Поэтому

$$P = \frac{1}{2} |U|_{\text{макс}} |I|_{\text{мин}}. \quad (7.33)$$

Напряжение в максимуме стоячей волны и ток в том же сечении равны:

$$|U|_{\text{макс}} = |U_{\text{пад}}| (1 + |\Gamma|); \quad (7.34)$$

$$|I|_{\text{мин}} = \frac{|\dot{U}_{\text{пад}}|}{Z_c} (1 - |\Gamma|). \quad (7.35)$$

Подставляя выражения (7.34) и (7.35) в (7.33), получаем:

$$P = \frac{1}{2} \frac{|U_{\text{пад}}|^2}{Z_c} (1 - |\Gamma|^2). \quad (7.36)$$

В случае согласования нагрузки с линией $\Gamma=0$. Тогда мощность имеет максимальную величину

$$P_{\text{макс}} = \frac{1}{2} \frac{|\dot{U}_{\text{пад}}|^2}{Z_c}. \quad (7.37)$$

Следовательно, при рассогласовании нагрузки с линией в случае согласованного генератора мощность, поступающая в нагрузку, меньше, чем при согласовании нагрузки, и равна

$$P = P_{\text{макс}} (1 - |\Gamma|^2). \quad (7.38)$$

Полученные соотношения можно наглядно интерпретировать следующим образом. Мощность P , поступающая в нагрузку, по закону сохранения энергии равна разности между мощностью падающей волны $P_{\text{пад}}$ и мощностью отраженной волны $P_{\text{отр}}$, причем

$$P_{\text{пад}} = \frac{1}{2} \frac{|\dot{U}_{\text{пад}}|^2}{Z_c}; \quad P_{\text{отр}} = \frac{1}{2} \frac{|\dot{U}_{\text{отр}}|^2}{Z_c} = \frac{1}{2} \frac{|\dot{U}_{\text{пад}}|^2}{Z_c} |\Gamma|^2.$$

Таким образом, мощность отраженной волны

$$P_{\text{отр}} = P_{\text{пад}} |\Gamma|^2. \quad (7.39)$$

Отсюда получаем мощность, поступающую в нагрузку:

$$P = P_{\text{пад}} - P_{\text{отр}} = P_{\text{пад}} (1 - |\Gamma|^2), \quad (7.40)$$

Для количественной оценки влияния рассогласования необходимо учесть, что пробой возникает в режиме, когда напряженность электрического поля в максимуме стоячей волны становится равной пробивной напряженности. Для эквивалентной длинной линии условие пробоя записывается через напряжения:

$$|\dot{U}|_{\text{макс}} = U_{\text{проб}}, \quad (7.42)$$

где $U_{\text{проб}}$ — пробивное напряжение линии при данных условиях.

Обозначим через $|\dot{U}_{\text{пад}}|_{\text{проб}}$ амплитуду напряжения падающей волны, при которой в линии начинается электрический пробой. В соответствии с выражениями (7.34) и (7.42) получаем:

$$|\dot{U}_{\text{пад}}|_{\text{проб}} = \frac{U_{\text{проб}}}{1 + |\Gamma|}. \quad (7.43)$$

Мощность $P_{\text{проб}}$, при которой происходит пробой, является пределом передаваемой в нагрузку мощности. По соотношению (7.36)

$$P_{\text{проб}} = \frac{1}{2} \frac{|\dot{U}_{\text{пад}}|_{\text{проб}}^2}{Z_c} (1 - |\Gamma|^2).$$

Подставляя сюда выражение (7.43), имеем:

$$P_{\text{проб}} = \frac{1}{2} \frac{U_{\text{проб}}^2}{Z_c} \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = \frac{1}{2} \frac{U_{\text{проб}}^2}{Z_c} \frac{1}{\rho}, \quad (7.44)$$

где ρ — коэффициент стоячей волны в рассматриваемой линии.

При согласовании нагрузки с линией КСВ равен единице и пробивная мощность имеет наибольшую величину:

$$P_{\text{проб. макс}} = \frac{1}{2} \frac{U_{\text{проб}}^2}{Z_c}. \quad (7.45)$$

В случае рассогласования пробивная мощность с учетом выражений (7.44) и (7.45) оказывается равной

$$P_{\text{проб}} = P_{\text{проб. макс}} \frac{1}{\rho}. \quad (7.46)$$

Таким образом, электрическая прочность передающей линии при рассогласованной нагрузке снижается в ρ раз по сравнению с электрической прочностью согласованной линии*.

Уравнение (7.46) следует рассматривать как поправку к уравнениям (5.8) — (5.13), определяющим теоретическую величину

$P_{\text{проб. макс}}$ для однородных передающих линий СВЧ в режиме чисто бегущей волны ($\rho = 1$).

Для предотвращения пробоев в высокочастотном тракте желательно уменьшать величину КСВ нагрузки. При передаче больших мощностей обычно стремятся обеспечить КСВ не более 1,5.

і складові

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Нормовані струми та напруги

$$P = \frac{1}{2} |a|^2$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{U}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Сталі хвилі в ліній передачі

Z_m - хвильовий опір ліній передачі

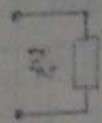
$$U_2 = U_1 e^{i\beta z} + U_2 e^{-i\beta z}$$

$$I_2 = I_1 e^{i\beta z} - I_2 e^{-i\beta z}$$

$$Z_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1 e^{i\beta z} + U_2 e^{-i\beta z}}{I_1 e^{i\beta z} - I_2 e^{-i\beta z}}$$

17.05.18

Переконуються свідомі зображення виведено
зак. висхідної стоячої хвилі



$$U_2 = U_0 e^{i\beta z} + U_1 e^{-i\beta z}$$

Напружені з'являються, бо при відбитті
в хвилі, як поле не змінює напрямку
в пр-ті \Rightarrow напружені не змінює напрямку

Струм змінює напрямку $I = I_0 e^{i\beta z} - I_1 e^{-i\beta z}$

$$\text{Повний хв. опір } Z_2 = \frac{U}{I} = \frac{U_0 e^{i\beta z} + U_1 e^{-i\beta z}}{I_0 e^{i\beta z} - I_1 e^{-i\beta z}} =$$

$$= \frac{\frac{U_0}{I_0} e^{i\beta z} + \frac{U_1}{I_1} e^{-i\beta z}}{\frac{U_0}{I_0} e^{i\beta z} - \frac{U_1}{I_1} e^{-i\beta z}} = Z_{\text{вт}} \frac{1 + \frac{U_1}{U_0} e^{-i\beta z}}{1 - \frac{U_1}{U_0} e^{-i\beta z}}$$

U_1 та I_1 - комплексні величини
 $U_1 = |U_1| e^{i\varphi}$
 $I_1 = |I_1| e^{i\psi}$

Стоячі хвилі характериз. коэф. відбиття

$$\Gamma = \frac{|U_1|}{|U_0|} e^{i(\varphi - \psi)} - \text{мале комплексна величина}$$

$$\Gamma = |\Gamma| e^{i\theta} \quad 0 < \theta < \pi$$

$|\Gamma|$ - його в першу першу велич. на екстр.

При відбитті, може змін. амплітуду
відбитої хвилі або її фазу

Враховуючи ці обидва фактори

$$Z_2 = Z_{\text{вт}} \frac{1 + \Gamma e^{-i\beta z}}{1 - \Gamma e^{-i\beta z}}$$

Повний хв. опір в вт. лінії
при відбитті характер.
опору і коэф. відбиття

Нехай відомий опір в деякій точці $z=1$
і позначимо його $Z_1 = Z_2(1)$
Визначимо опір в іншій точці лінії
передачі

$$\frac{Z_2}{Z_{\text{вт}}} = \frac{Z_1}{Z_{\text{вт}}} - \text{всі опори в лінії передачі}$$

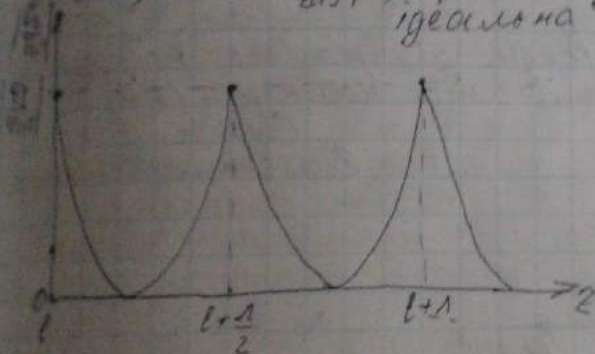
визнач. через $Z_{\text{вт}}$

$$\xi_1(z) = \xi_{02} \frac{z_1 + i z_{02} \operatorname{tg}(\beta(l-z))}{z_{02} + i z_1 \operatorname{tg}(\beta(l-z))} \quad (*)$$

Графік зображено в оприс (а) fig 2



Припустимо, що відомі або. Величина опору. Якщо задана величина в норм. опору) T , то $\frac{1}{\xi_{02}}$ при тому $l=0$, ξ в ідеальної стовпа об'єкта



Щоб визначити T через опору

$$|T| = \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \right|$$

$z_1 = z_1$, $z_2 = z_{02}$, тоді для кошта T

$$T = \frac{z_1 - z_{02}}{z_1 + z_{02}} e^{i\beta l}$$

$$\xi_s = \frac{1 + T e^{i\beta z}}{1 - T e^{i\beta z}}$$

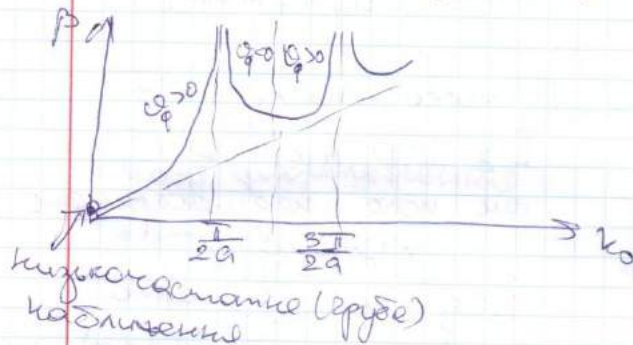
Визначимо min та max значення ξ_s у даній передат.

24. НВЧ резонаторы.

Связки $\beta_0 l \ll 1$

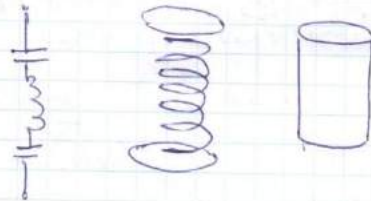
$$\alpha \quad \beta_0^2 = k_0^2 - k_z^2 \Rightarrow k_0^2 \approx k_z^2$$

$$\beta_0^2 = k_0^2 (1 + tg^2(k_0 a))$$



НВЧ резонаторы

че пример в этих волноводных системах рассчитать коэффициент невязки частоты.



$$H_z = k_z^2 A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\beta z}$$

$$\beta = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}, \quad k_z^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) k^2$$

$$H_z = k_z^2 A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) [e^{i\beta z} + R e^{-i\beta z}]$$

нормировка

Для резонатора $R = -1$!

$$H_z = k_z^2 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(\beta z) \quad \text{или} \quad \sin(\beta z) \quad \text{или} \quad \cos(\beta z)$$

$$\Rightarrow k_0 k_z^2 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(\beta z)$$

$$\beta^2 = k_0^2 - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = \frac{\pi^2}{4} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\beta l = p\pi$$

$$\frac{(\vec{v} + \vec{f})^2}{c^2} \epsilon \mu = k^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2} \right)$$

$$f = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}} \Rightarrow H_{\text{нпр}}$$

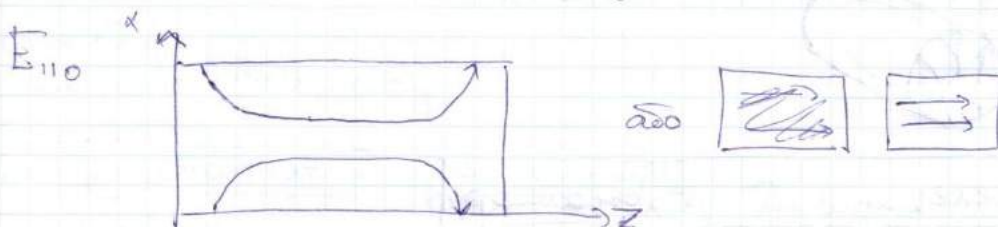
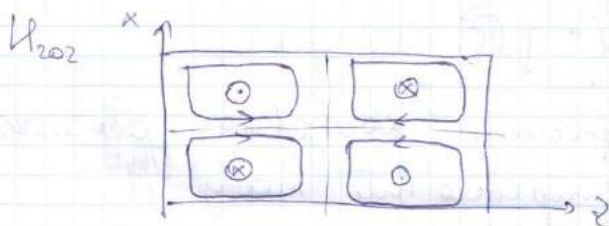
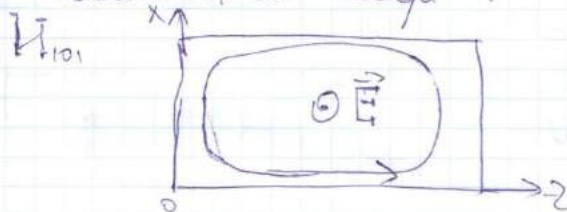
частота колебаний для моды $H_{\text{нпр}}$

$$H_{\text{нпр}} E_z = K_1^2 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) E_0 \cos(pz)$$

Для $H_{\text{нпр}} p \geq 1$

Для $E_{\text{нпр}} p \geq 0$

Моды с наименьшим резонансным частотой - наименьшие моды:



Рассчитаем Q (покажем, что запас энергии за один период колебаний до потерь вытратен)

$$Q = \omega \frac{W}{P} \quad \text{потери за один период}$$

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{\omega W} \sum P = \frac{1}{\omega W} (P_m + P_{g/e} + P_r)$$

Владея потерями $\frac{1}{Q_0}$ $\frac{1}{Q_0}$ $\frac{1}{Q_0}$


$$\frac{1}{Q_0} = \sum \frac{1}{Q_{0i}}$$

$$\frac{1}{Q_H} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\Sigma 0}} \Rightarrow Q_H = \frac{Q_0 Q_{\Sigma 0}}{Q_0 + Q_{\Sigma 0}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{забываем про} \\ \text{напряжение} \\ \text{границы} \end{array} \right)$$

исключаем напряжение
границы

$$P_n = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_1} [\vec{E} \times \vec{H}] \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_1} \vec{E}_T \times \vec{H}_T^* \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \int_{S_1} \operatorname{Re} \{ \vec{E}_T \cdot \vec{H}_T^* \} dS$$

напряженность
тока (по вектору
через единицу)



$\frac{E_T}{H_T} = Z_S$

пробное
поле Re
задано Z_S

Омическая ветвь: $\rho = j\vec{E} = \sigma \vec{E}^2$

$$\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 \omega \varepsilon'' = \varepsilon_0' \omega \operatorname{tg} \delta \varepsilon'$$

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \operatorname{tg} \delta \varepsilon'$$

$$\Rightarrow P_{g/e} = \varepsilon_0' \omega \operatorname{tg} \delta \varepsilon' \int E^2 dV$$

Радиация, вправо!

$$P_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_j \int [\vec{E}_j \times \vec{H}_j^*] \cdot d\vec{S}_j$$

Если взять цилиндрический волновод длиной $\lambda/2$, то можно считать поле H_{11} .



Диэлектрический резонатор

Если $\varepsilon \gg 1$, то длина волны $\lambda \rightarrow 0$

У диэлектрических резонаторов частота не зависит от их размеров. И при их изменении растет.

$$f \propto \frac{c}{\sqrt{\varepsilon} a}, \quad \frac{1}{a} \text{ - растет}$$

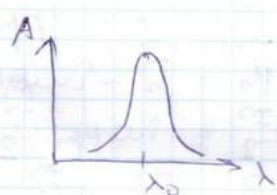
То есть можно сделать малый резонатор.

5) Все резонаторы стоячих волн, а \exists
 4) 3 резонатора односторонних волн (волны идут только в одну сторону)

1.2.10

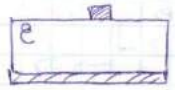


$$2\pi z = n\lambda$$

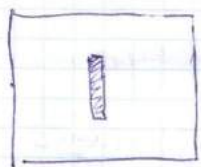


Микрополосный резонатор

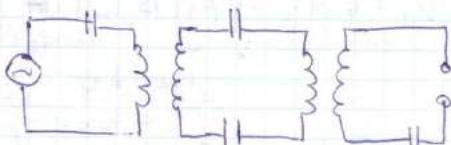
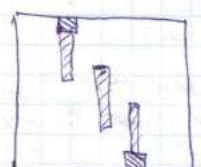
до λ_{max} Т до λ_{min} - Т волны



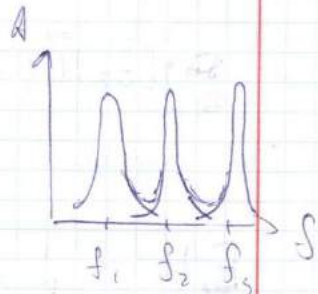
при $\epsilon \rightarrow \frac{2\pi f_0}{c} \sqrt{\epsilon_{eff}} = \frac{p}{l}$



$$f_0 \approx \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_{eff}} l}$$



эквивалентная схема



дешевый фильтр на основе СВЧ резонаторов

Квадратный резонатор




зеркала (металлический слой)

Вынужденные колебания в линиях передачи на резонаторах

$$\frac{1}{Q_{\text{н}}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{г}}} \Rightarrow Q_{\text{н}} = \frac{Q_0 Q_{\text{г}}}{Q_0 + Q_{\text{г}}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{зависит от} \\ \text{параметров} \\ \text{используемых} \\ \text{гетеродинов} \end{array} \right)$$

$$P_{\text{н}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_1} [\vec{E} \times \vec{H}] \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_1} E_z \times H_z^* dS = \frac{1}{2} \int_{S_1} E_z H_z^* dS$$

поверхность
антен (по которой
течет ток)



$\frac{E_z}{H_z} = Z_{\text{с}}$ прямая
связь между
E и H

Омическая нагрузка: $\rho = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2$

$$\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 \omega \varepsilon'' = \varepsilon_0 \omega \tan \delta$$

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \tan \delta$$

$$\Rightarrow P_{\text{г/с}} = \varepsilon_0 \omega \tan \delta \int E^2 dV$$

Радиационная нагрузка!

$$P_{\text{р}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_j \int [\vec{E}_j \times \vec{H}_j^*] \cdot d\vec{S}_j$$

Если взять суммирующую поверхность S поверхность
 $\frac{1}{2}$, то можно считать, что $H_{\text{н}} = 0$



Дielekтрический резонатор

Если $\varepsilon \gg 1$, то длина волны $\lambda \rightarrow 0$

У диелектрических резонаторов частота ω зависит от
 не зависит от размеров. И при их изменении изменяется
 не меняется.

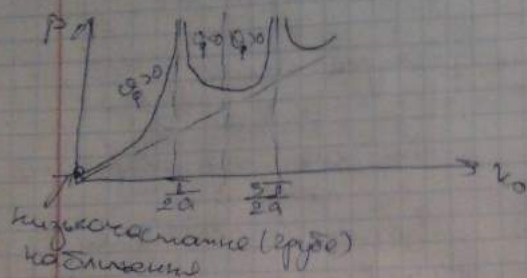
$$f \approx \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon} \cdot a} \quad \text{— формула}$$

То есть можно резонанс настраивать.

Одним $\rho_0 \ll c$

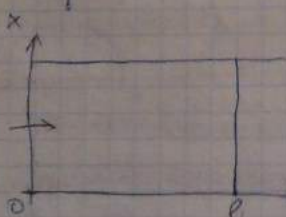
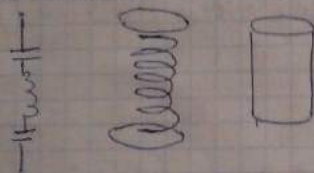
$$\alpha: \rho_0^2 = k_0^2 - k_1^2 \Rightarrow k_0^2 \approx k_1^2$$

$$\rho^2 = k_0^2 (1 + \lg(k_0 a))$$



НВЧ резонаторы

не приоткрыты в обеих продольных плоскостях
колебания поперечной частоты.



$$H_z = k_1^2 A \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$\rho = \sqrt{k_0^2 - k_1^2}; \quad k_1^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$

$$H_z = k_1^2 \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$[e^{i\rho z} + R e^{-i\rho z}]$$

Для резонатора $R = -1$

$$H_z = k_1^2 \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin(\rho z) \quad \text{или} \quad \sin(\rho z) \quad \text{или} \quad \cos(\rho z)$$

$$\textcircled{2} k_0^2 \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin(\rho z)$$

$$\rho^2 = k_0^2 - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = \frac{\rho^2}{e^2}$$

$$\rho l = p\pi$$

$$\frac{(\cos \theta)^2}{c^2} \approx \frac{1}{c^2} \approx \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$f = \frac{c}{2\pi \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{\cos^2 \theta} + c^2}} \Rightarrow H_{\text{нр}}$$

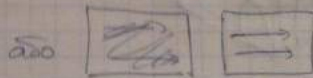
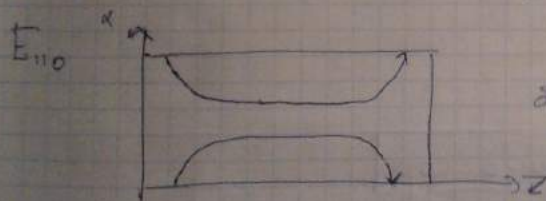
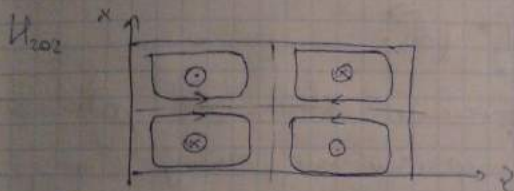
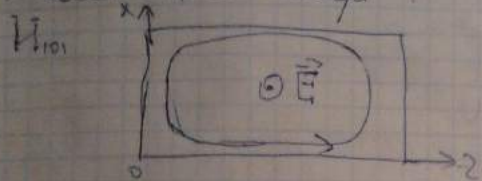
расстояние посылается где магн. $H_{\text{нр}}$

$$H_{\text{нр}} E_z = k_1^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) E_0 \cos(pz)$$

Для $H_{\text{нр}} p \geq 1$

Для $E_{\text{нр}} p \geq 0$

Магн. в кабели резонансная частота - коэффициент магн.



Добротность Q (показывает, что запас энергии за один период посылается до внешней среды)

$$Q = \omega \frac{W}{P} \quad \text{показатель добротности}$$

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{\sum P}{\omega W} = \frac{1}{\omega W} (P_m + P_{\text{г/с}} + P_r)$$

сдвиг радиация

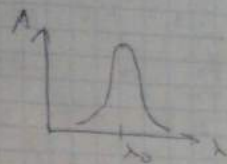
Видно добротность

$$\frac{1}{Q_0} = \sum \frac{1}{Q_{0i}}$$

Уже все резонаторы смонтированы, а в 3 резонаторах обнаружены хвосты (хвосты излучения сами себе)

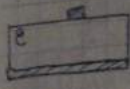


$$2\pi\omega = \omega$$



Микрополосный резонатор

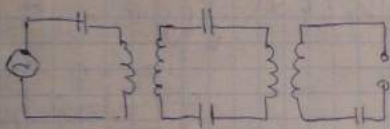
до max T до xвосты - T хвосты



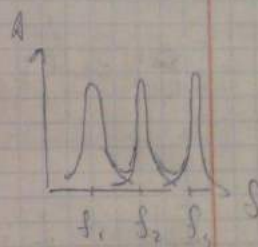
$$\beta \approx k_0 \approx \frac{2\pi f_0}{c} \sqrt{\epsilon_{eff}} = \frac{p\pi}{l}$$



$$f_0 \approx \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_{eff}} l}$$

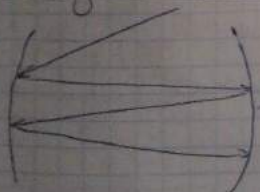


эквивалентная схема



длинный фильтр на основе КВЧ резонаторов

Квадратный резонатор



зеркала (металлические или диэлектрические)

Вынужденные колебания в линиях передачи на резонаторах

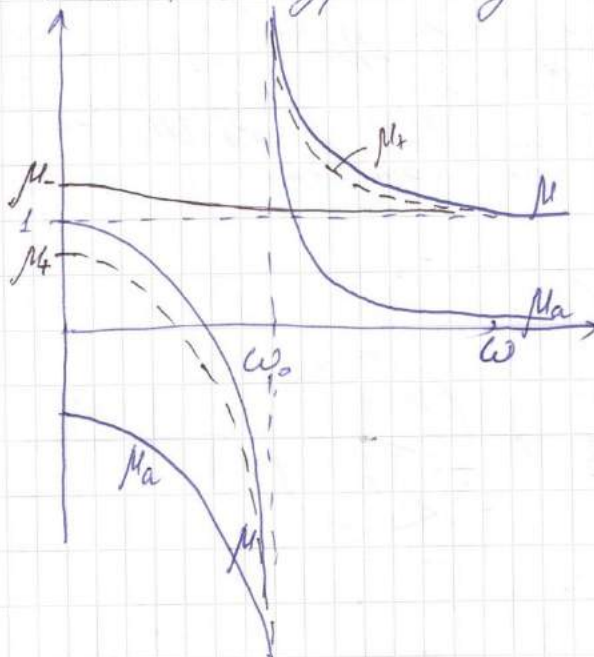
25. Плоскі хвилі в гіротропному середовищі. Феритові прилади НВЧ.

Середовище, в якому поширюються плоскі хвилі, може бути анізотропним. Гіротропне середовище — анізотропне середовище з антисиметричними компонентами в тензорі характеристик. 19.05.2016

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{||} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & i\epsilon_a & 0 \\ -i\epsilon_a & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{||} \end{pmatrix}$$

Ми розглядаємо випадок плоскої хвилі в гіротропному середовищі при певних параметрах. Особливістю гіротропного середовища є наявність антисиметричних компонентів в тензорі характеристик, які виникають внаслідок гіротропності середовища. При цьому в гіротропному середовищі є додатковий член в тензорі характеристик, який залежить від частоти. ω_0 — резонансна частота.



Введемо зручні величини:

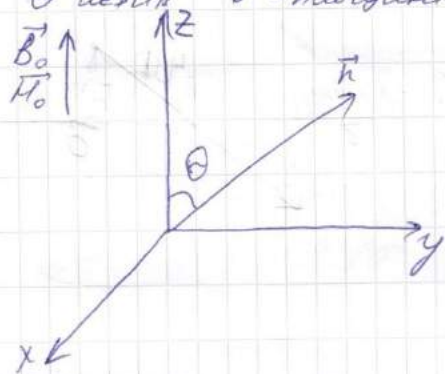
$$\mu_- = \mu - \mu_a \quad (1)$$

$$\mu_+ = \mu + \mu_a \quad (1)$$

При $\omega \rightarrow \infty$ $\mu \rightarrow 1$ $\mu_a \rightarrow 0$
 $\mu_- \rightarrow 1$

Запишемо для Максвелла, використовуючи величини (1), тоді не вважатимемо μ_- а просто μ .

Нехай хвиля розповсюджується уздовж z-вісі, а вектор \vec{h} лежить в площині yz. \vec{h} — вектор, направлений по хвилі.



$$\vec{h} = \{0, \sin\theta, \cos\theta\}$$

Ми розглядаємо хвилю, що розповсюджується по осі z, тому

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{h} \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i\vec{h} \cdot \vec{r}}$$

E_0, H_0 - не обов'язково лежать в площині, що і вектор. Вони можуть бути сферичними

Запишемо р-м. Максвелла:

$$\text{rot}(\vec{H}_0 e^{i\vec{B}\vec{r}}) = -i\omega\epsilon\epsilon_0\vec{E}_0 e^{i\vec{B}\vec{r}}$$

$$\text{rot}(\vec{E}_0 e^{i\vec{B}\vec{r}}) = i\omega\mu\mu_0\vec{H}_0 e^{i\vec{B}\vec{r}}$$

$$i\vec{B}[\vec{B} \times \vec{H}_0] e^{i\vec{B}\vec{r}} = -i\omega\epsilon\epsilon_0\vec{E}_0 e^{i\vec{B}\vec{r}} = -i\omega\epsilon_0\mu_0\sqrt{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \vec{\xi} \vec{E}_0$$

$$i\vec{B}[\vec{B} \times \vec{E}_0] = +i\omega\mu\mu_0\vec{H}_0 = i\omega\mu\mu_0\vec{H}_0 = i k_0 z_0 \mu \vec{H}_0$$

$\xi = \frac{\rho}{k_0}$ - коэф. упрощення

$$\left\{ \begin{aligned} \xi[\vec{B} \times \vec{H}_0] &= -\vec{\xi} \vec{E}_0 \frac{1}{z_0} \\ \xi[\vec{B} \times \vec{E}_0] &= \mu \vec{H}_0 z_0 \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \text{с-ма р-м, яку треба розв'язати} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \left(\frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{||}} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon} \right) \left(\frac{\sin^2 \theta}{\mu_{||}} + \frac{\cos^2 \theta}{\mu} \right) - \xi^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{||}} + \frac{\mu_{\perp}}{\mu_{||}} \right) + 2 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{\mu \epsilon \epsilon_0}{\mu \epsilon} \right) \right\} + \mu_1 \epsilon_1 = 0 \quad (2)$$

$$\epsilon_1 = \epsilon - \frac{\epsilon_{\perp}^2}{\epsilon_{||}}; \quad \mu_1 = \mu - \frac{\mu_{\perp}^2}{\mu}$$

В уривковій с-мі можливе пошир. 2-х типів хвиль: пряму та звор. напрямку. Одна хвиля є прямо бізпідсвіт. р-ною, а інша не бізпідсвіт. в напрям. влі. мож. оберт. тільки навколо. С-мі по собі не оберт. навр. (як право-ком. в середстві)

Нехай хвиля пошир. вздовж напрямку найбільш р-ної поперечної феритові с-ми. В результаті (2):

$$\xi^2 \frac{1}{\epsilon \mu} - 2 \xi^2 \left(1 + \frac{\mu \epsilon \epsilon_0}{\mu \epsilon} \right) + \mu_1 \epsilon_1 = 0$$

$$\beta = \pm k_0 \sqrt{(\epsilon \pm \epsilon_0)(\mu \pm \mu_0)}$$

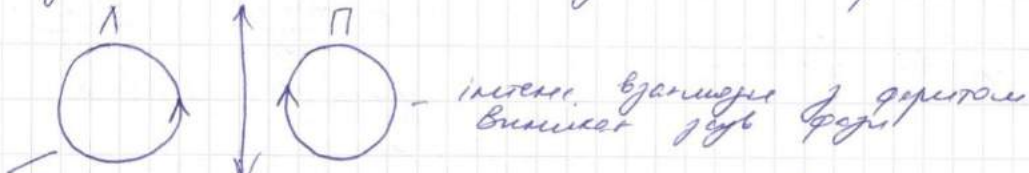
прямі і зворотні хвилі; с-ма бізпідсвіт. хвилі з р-ною

'+' - права кругова поляриз.
'-' - ліва хвильова поляриз.

Сфера Фарадея. Оскільки в маг. крії має дві хвилі з різною поляризацією, то $\mu \pm \mu_0$ може бути досить великим. $\mu - \mu_0 \sim 1$ - стали пом. малі, суттєво різні величини \Rightarrow фарби лів. та прав. світла будуть різними.

if хвиля пройде у прямому і звор. напрямку у фериті то виникне набір фаз $\Delta\varphi = \frac{|\beta_{пр} - \beta_{зв}|}{2} l$
 можна створити пристрій, що здійснюватиме фазу хвилі

- Нехай в пог. хвилі E_0 у фериті це лінійна поляризація хвилі фазу, тоді 2 хвилі з лівую і правою поляризацією.

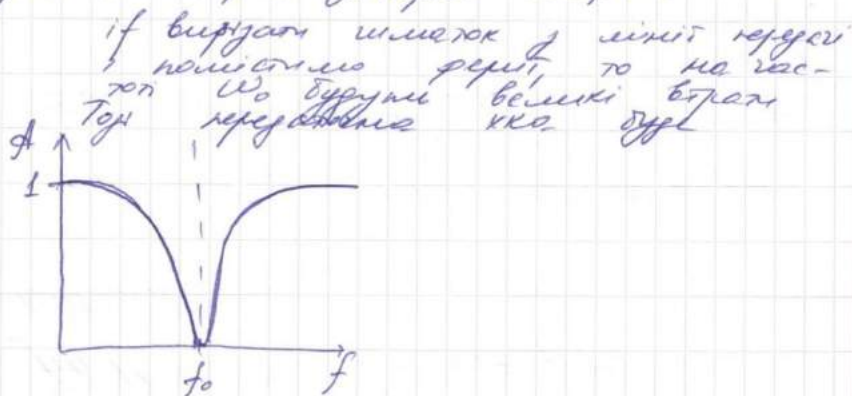
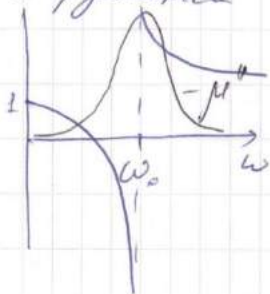


у вращении з феритом. мала β , β_0 більше.

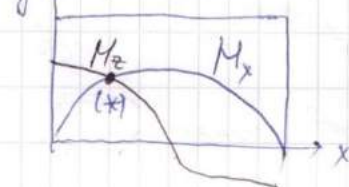
- Лінійна хвиля у фериті поперечно намагнічений ферит $\cos = 0$, $\sin = 1$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \pm \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \approx \pm \sqrt{\epsilon} & \text{— хвиля хвилі} \\ \xi_2 &= \pm \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \approx \pm \sqrt{\mu_1} & \text{— медвигна хвилі} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \xi_1 \\ \xi_2 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{ефект Каттона-} \\ \text{Муттона} \end{array}$$

Резонансні прилади
 if є вращ, то μ'' схоже на Гауссман. доброту єр
 7. резонанса вращ ↑ ферит забирає енергію

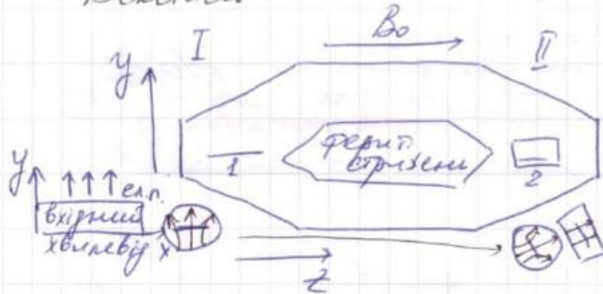


Прилади на лінійному полі
 у прямом. хвильоводі хвиля з коин. E_y, H_x, H_z



В (*) H_z, H_x мають однакові фази і амплітуди
 if там буде феритовий коин., то поле буде поводити себе як одна хвиля
 Валівмо в у напрямку звор. напрямку
 ку буде оберт в ліву або в право

Великий і дзеркальний не основі ефекту Рардеса
Великий



- 1-металева пластинка
- 2-метал. пластинка на виході

Запуск хвилі в I.
Хвиля H_{10} не зупиняє поле
у напрямку хвилі хвилі

перетвор. на хвилі в круглому хвилі. H_{11}
 H_{11} пошир. ут. на виході II синами з невеликими
втратами.

if запуск у II коли хвиля пошир. у \leftarrow , то вихід
розриву хвиля майже не проходить.

На I буде H_{01} . Великі втрати.

Цей прилад - Рардесівський великий.

24.05.2016

Циркулятор - пристрій, що хвилює собою послідовно парам. д'я-
вляючи величину.
Найпошир. у-циркулятор.



Взаємний маг. напруж. ферит.
поверхнею намагніченість.
Повинні давати ефект передачі сигналів
з одного входу на інший.

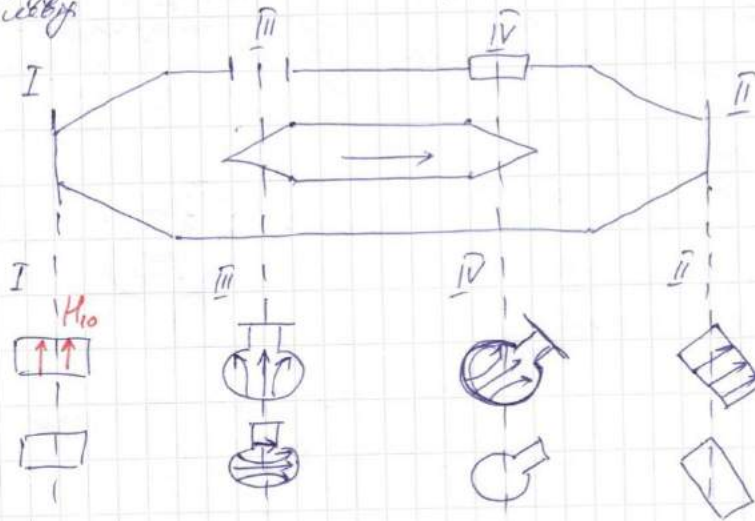
1→2 2→3 3→1
Всі інші варіанти мають бути

заборонені.

На практиці:
а) - хв. зупиняє в I і розбив. на 2-хв. на 2-хв.
іст. коли хвиля одержується вихід прав. преломлення.
хв. сповільн. і приходить до 2. А симетрично (але прот.
умови) ⇒ утвор. вихідних хвиль, що вих. з 2 і мають
сигнали з великою амплітудою.
а) б) буде. т. В будуть в профізі і сигналу в 3 не

Підприємство розвинути радіусом та напругою, фазу, потім можна піти. умови широкості і профузності хвиль.

Циклопелор на основі ефекту Рудер
розривно-напруги. фазу поліпшення у круглий хви-
лову



В круглому хвильову фазу, на протікати. Усі вирази в бугор-фазу, що вимірюється до кінця. хви-
лову.

Переходу шовни-
I → II
IV ← III

В обл. між I і III фазу мають бугорний, фазу, що по-
тима не повернувся і фазу, бугор як в круглому
хвильову, а в перехід не бугор, до шовни. Скалон.
Вимірю, напругу IV до III визначає.
З II данусь, сиплю, що має перехід не бугор III і
поверніть на 45°. А на I хвиль не бугор.

Особливості міліметрових та субміліметрових хвиль
Значно менш, структуру, але якщо густота напруги до
1714, то у фазу, структуру великі виміри.
Тому слід використовувати такі хвильову, як к-ся не
та фазу, мінімуми. Тому використати хвильову.
Між, конфокальні резонатори.
На, високій частоті хвиль потім, у вигляді пра-
ма, але розширено.

Мікроелектронні пристрої МВЧ
Усі пристрої МВЧ → активні
пристрої МВЧ → пасивні.

Пасивні пристрої - ефектні елементами, індуктивності та
опори.

1. Стаціонарні та ергодичні випадкові процеси.

Шиховцев. Ст.19-21, 30-31

1.5. Стационарные случайные процессы

Случайный процесс называется стационарным, если одномерная плотность распределения вероятности и, следовательно, среднее значение и дисперсия случайного процесса не зависят от времени, а двумерная плотность распределения вероятности и корреляционная функция зависят только от разности временных аргументов.

Если многомерный закон распределения вероятностей распределения мгновенных значений, взятых в разные моменты времени, не зависят от принятого начала отсчёта, а зависят только от интервалов между выбранными моментами

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau),$$

то такой процесс стационарен в *узком смысле*.

Если независимость от начала отсчёта выполняется только до второго (корреляционного) момента (включая первый), то такой процесс называют стационарным в *широком смысле*. Его среднее значение не зависит от времени, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$.

Все строго стационарные процессы – стационарны и в широком смысле, но не все процессы, стационарные в широком смысле, строго стационарны.

Свойства стационарных СП [1]:

1. Характеристики стационарного СП зависят только от интервалов между временными сечениями:

$$\tau_1 = t_1 - t_2, \quad \tau_2 = t_3 - t_2, \quad \dots, \quad \tau_{n-1} = t_n - t_{n-1}.$$

Для стационарного в широком смысле СП имеет место зависимость только от разности времен $\tau = t_2 - t_1$.

$$K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1) = K(\tau)$$

2. Одномерные характеристики СП не зависят от времени:

$$\langle \xi(t) \rangle = \text{const}, \quad \sigma^2(t) = \text{const}, \quad \tau_0 = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau = \text{const}.$$

3. Корреляционная функция является четной:

$$K(\tau) = K(-\tau).$$

4. Максимальное значение КФ имеет при $\tau = 0$.

$$K(0) = \sigma^2.$$

5. Для многих стационарных случайных процессов выполняется равенство:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = 0$$

Физически этот результат объясняется тем, что устойчиво работающие системы обычно имеют конечное время затухания (конечное время «памяти»). Поэтому для СП, наблюдаемых в стационарно и устойчиво работающих системах, последующее значение процесса оказывается практически независимым и некоррелированным с предыдущим значением, если они разделены достаточно большим интервалом времени.

Функция корреляции между значениями одного случайного процесса в два разных момента времени называется *автокорреляционной функцией*. Общее определение автокорреляционной функции дается соотношением (1.2), а применительно к стационарным процессам – формулой:

$$K(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle - m_1^2$$

Если имеется два стационарных случайных процесса $\xi(t_1)$ и $\eta(t_2)$ и функция корреляции зависит лишь от разности $\tau = t_2 - t_1$, то процессы называются *стационарно связанными*.

Функция корреляции между значениями разных процессов называется *взаимной корреляционной функцией*.

Для выяснения физического смысла корреляционной функции рассмотрим два частных случая, когда две стационарные случайные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ независимы или, наоборот, «жестко» связаны [2].

Взаимная функция корреляции:

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \langle \delta\xi(t_1)\delta\eta(t_2) \rangle = \iint \delta\xi(t_1)\delta\eta(t_2)f(\xi, \eta, t_1, t_2)d\xi d\eta$$

Если случайные функции независимы, то двумерная плотность вероятности равна произведению одномерных:

$$f(\xi, \eta, t_1, t_2) = f(\xi, t_1)f(\eta, t_2)$$

Тогда интеграл распадается на два независимых:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\xi(t_1)f(\xi, t_1)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \delta\eta(t_2)f(\eta, t_2)d\eta = 0.$$

Интегралы равны нулю, так как они представляют собой первые центральные моменты, которые всегда равны нулю.

Пусть случайные функции связаны детерминированной линейной зависимостью $\xi(t) = \pm a\eta(t) + b$, где a и b – постоянные величины. В данном случае центрированный процесс $\xi(t)$ и его дисперсия равны:

$$\begin{aligned}\delta\xi(t) &= \xi(t) - \langle \xi(t) \rangle = \pm a\delta\eta, \\ \sigma_{\xi}^2 &= \langle (\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle)^2 \rangle = a^2\sigma_{\eta}^2.\end{aligned}$$

Тогда для функции взаимной корреляции получим

$$K_{\xi\eta}(t, t) = \langle \delta\xi(t)\delta\eta(t) \rangle = \pm a\sigma_{\eta}^2 = \pm\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}.$$

Таким образом, если стационарные случайные функции независимы, то функция корреляции между ними равна нулю. Функция взаимной корреляции для линейно связанных случайных функций равна произведению их среднеквадратичных значений, взятому с соответствующим знаком. Поэтому можно сказать, что корреляционная функция дает качественное представление о линейной зависимости между значениями одной или двух случайных функций в выбранные моменты времени.

1.10. Эргодическое свойство случайных процессов

До сих пор характеристики случайного процесса (плотность вероятности, моментные функции и др.) были определены через соответствующие статистические средние значения, т.е. средние значения большого числа реализаций в ансамбле идентичных систем [3]. В большинстве практических случаев исследователь не имеет в наличии статистического ансамбля реализаций СП с определенной на нем плотностью вероятности. Для большинства СП, являющимися стационарными, указанные характеристики можно получить путем усреднения соответствующих величин для одной реализации за достаточно большой промежуток времени. Такая возможность физически может быть оправдана тем, что стационарный СП протекает однородно во времени. Поэтому одна реализация достаточно большой продолжительности может содержать все сведения о свойствах СП. Про такие стационарные СП говорят, что они обладают *эргодическим* свойством. Соотношение между различными видами случайных процессов показано на рис.10 [2].

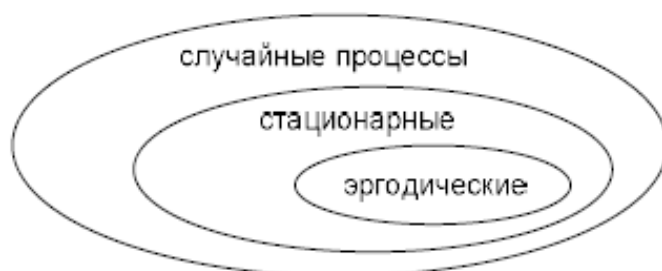


Рис.10. Соотношение между различными видами случайных процессов

Не касаясь здесь строгих математических обоснований эргодичности процесса, укажем, что необходимое и достаточное условие эргодичности стационарного процесса $\xi(t)$ состоит в том, что КФ функция удовлетворяла предельному соотношению

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = 0.$$

Временное среднее и функция временной корреляции определяются как

$$\bar{\xi}_T(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t+t') dt',$$

$$K_T(t, \tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta \xi(t+t') \delta \xi(t+t'+\tau) dt'.$$

Если иметь в виду, что интегрирование здесь проводится внутри каждой реализации, то в общем случае возникающий процесс также является случайным. Однако интуитивно понятно, что временное среднее при большом времени усреднения должно стремиться к среднему по ансамблю реализаций [1].

Случайный процесс называется *эргодическим*, если среднее по времени при достаточно большом интервале усреднения с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, стремится к среднему по ансамблю реализаций. Записывается это условие как

$$P\left\{\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\xi}_T(t) = \langle \xi(t) \rangle\right\} = 1.$$

Очевидно, что необходимым условием эргодичности СП является его стационарность. Однако это условие не является достаточным. Например, рассмотрим стационарный СП вида:

$$\xi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где A_0 и φ – являются случайными величинами, не зависящими от времени, причем величина φ – распределена равномерно в интервале $|\varphi| \leq \pi$. Очевидно, что наличие реализаций с различными значениями амплитуды A не позволяет оценить параметры данного СП по произвольно выбранной реализации, так что процесс $\xi(t)$ эргодическим не является.

Строгая эргодичность означает, что множество реализаций данного случайного процесса на некотором конечном отрезке времени характеризуется теми же многомерными законами распределения любого порядка, что и множество отрезков этого процесса той же длительности, «нарезанных» из одной бесконечно длинной реализации. Наряду с понятием строгой эргодичности по отношению ко всем возможным вероятностным характеристикам случайного процесса могут использоваться частные определения эргодичности, относящиеся к отдельным характеристикам (эргодичность относительно среднего значения, корреляционной функции, дисперсии и т.д.).

В общем случае трудно, если только вообще возможно, доказать, что эргодичность – обоснованное допущение для какого-либо физического процесса, так как может наблюдаться только одна реализация этого процесса. Тем не менее, обычно имеет смысл предположить эргодичность процесса, если только отсутствуют веские доводы физического характера, препятствующие этому.

2. Нормальный випадковий процес.

Шиховцев. Ст. 36-38, 41-42.

$\xi(t)$ – випадкова функція.

2.1. Нормальные процессы

Самый распространенный и самый универсальный тип шумов, которые нас окружают – это нормальные (гауссовские) шумы. В случае, если шумы все-таки не нормальные, то прохождение их через радиоэлектронные системы часто приводит к их нормализации. Поэтому начнем рассмотрение с нормальных случайных процессов.

2.1.1. Характеристическая функция и плотность распределения

СП называется *нормальным*, если в его кумулянтном разложении содержатся только два первых члена [2]:

$$\varphi(u; t) = \exp \left\{ i u \kappa_1(t) - \frac{1}{2} u^2 \kappa_2(t) \right\}.$$

Это означает, что нормальный СП имеет ХФ вида

$$\varphi(u; t) = \exp \left\{ i u \langle \xi(t) \rangle - \frac{1}{2} u^2 \sigma^2(t) \right\}.$$

Плотность распределения имеет вид:

$$f(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i u \left[\langle \xi(t) \rangle - x \right] - \frac{1}{2} u^2 \sigma^2(t) \right\} du.$$

Вычисляется этот интеграл путем использования замены переменной интегрирования

$$v = u\sigma + i \frac{x - \langle \xi(t) \rangle}{\sigma},$$

так что

$$f(x; t) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp \left\{ - \frac{[x - \langle \xi(t) \rangle]^2}{2\sigma^2(t)} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \frac{1}{2} v^2 \right\} dv.$$

$$\text{Интеграл } \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\} dv = \sqrt{2\pi}$$

Окончательно плотность распределения имеет вид:

$$f(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{[x - \langle \xi(t) \rangle]^2}{2\sigma^2(t)}\right\}.$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x;t) = \int_{-\infty}^x f(x;t) dx.$$

На рис. 11 представлен вид этих функций.

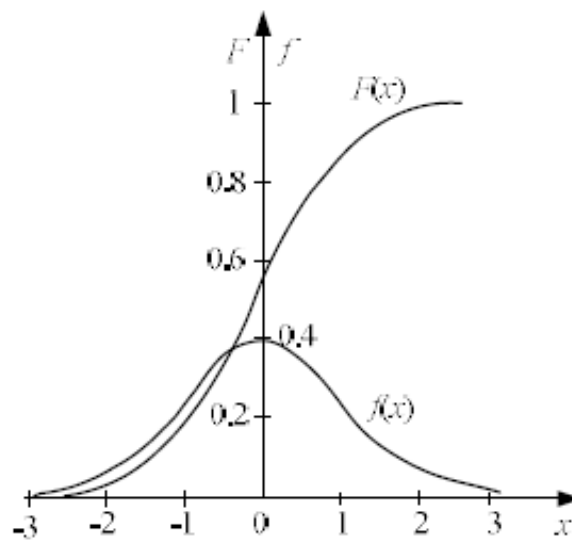


Рис. 11. Нормальная плотность вероятности и функция распределения

Ширина нормальной плотности вероятностей прямо пропорциональна среднему квадратическому (стандартному) отклонению σ . На уровне 0,607 от максимального значения функции $f(x)$ она равна 2σ . В этих точках абсолютная величина производной $f(x)/dx$ достигает своего максимального значения.

В радиофизических системах многие случайные процессы имеют тенденцию приближаться к нормальному СП. Степень близости реального процесса к нормальному обычно характеризуют близостью к нулю нормированных кумулянтов третьего и четвертого порядков

$$\gamma_1(t) = \frac{\kappa_3}{\sigma^3} = \frac{M_3}{\sigma^3}, \quad \gamma_2(t) = \frac{\kappa_4}{\sigma^4} = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3,$$

называемых соответственно коэффициентом асимметрии и коэффициентом эксцесса.

Сделаем два замечания:

1. При $\sigma \rightarrow 0$ нормальный закон распределения переходит в дельта-функцию

$$f(x; t) = \delta(x - \langle \xi(t) \rangle)$$

и описывает детерминированный процесс.

2. Не существует СП, для которого кумулянтное разложение содержало бы другое конечное число членов, большее двух.

Выражение для многомерных плотности распределения и характеристической функции нормального СП:

$$f(\underline{x}; t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \underline{\underline{K}}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\underline{x} - \langle \underline{\xi} \rangle]^T \underline{\underline{K}}^{-1} [\underline{x} - \langle \underline{\xi} \rangle] \right\};$$

$$\varphi(\underline{u}; t) = \exp \left\{ i \underline{u} \langle \underline{\xi} \rangle - \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{\underline{K}} \underline{u} \right\}. \quad (2.1)$$

Здесь $\underline{\underline{K}}$ – корреляционная матрица, составленная из всевозможных корреляционных функций:

$$K_{n,m} = \langle \delta \xi(t_n) \delta \xi(t_m) \rangle, \quad n, m \in 1, 2, \dots, N.$$

$\underline{\underline{K}}^{-1}$ – матрица, обратная $\underline{\underline{K}}$, символ T обозначает транспонированную матрицу и $\underline{u}^T = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ – вектор строка, $\det \underline{\underline{K}}$ – определитель корреляционной матрицы.

2.1.3. Свойства нормального случайного процесса

Рассмотрим основные свойства нормальных случайных процессов [2].

1. Некоррелированные СП – статистически независимы. Действительно, если процессы некоррелированные, то соответствующая матрица корреляции является диагональной:

$$K_{n,m} = \langle \delta \xi(t_n) \delta \xi(t_m) \rangle = \sigma_n^2(t_n) \cdot \delta_{n,m}, \quad n, m \in 1, 2, \dots, N,$$

где $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера. В результате характеристическая функция факторизуется:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{u}; \underline{t}) &= \exp \left\{ i \underline{u} \langle \underline{\xi} \rangle - \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{K} \underline{u} \right\} = \\ &= \prod_{n=1}^N \varphi_n(u_n; t_n), \quad \varphi_n(u_n; t_n) = \exp \left\{ i u_n \langle \xi_n \rangle - \frac{1}{2} u_n^2 \sigma_n^2(t_n) \right\}. \end{aligned}$$

Это и означает независимость.

2. Все статистические моменты выражаются через первые два момента.

Доказательство этого следует из вида ХФ (2.1), поскольку в эту формулу не входят другие моменты, кроме первых двух.

В качестве примера можно непосредственно по формуле

$$\langle \xi(t_1) \xi(t_2) \dots \xi(t_m) \rangle = \frac{1}{i^m} \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial u_2} \dots \frac{\partial}{\partial u_m} \bigg|_{\underline{u}=0} \varphi(\underline{u}; \underline{t}).$$

вычислить несколько первых моментов.

Так, полагая, что СП – центрированный, получаем

$$\varphi(\underline{u}; \underline{t}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k \sum_p u_k K_{k,p} u_p \right\}$$

$$\langle \xi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \xi_1 \xi_2 \rangle = K_{1,2}$$

$$\langle \xi_1 \xi_2 \xi_3 \rangle = 0$$

$$\langle \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \rangle = K_{1,3} K_{2,4} + K_{2,3} K_{1,4} + K_{1,2} K_{3,4}$$

Все нечетные моменты центрированного нормального СП оказываются равны нулю.

Следствием этого свойства является вывод, что корреляционная теория дает полное описание нормальных СП.

3. Сумма нормальных СП – нормальный процесс. Без доказательства.

В качестве примера рассмотрим процесс, получающийся как разность нормальных СП: $\eta = \xi_1 - \xi_2$. Очевидно, закон его распределения нормальный, а его параметры определяются как

$$\langle \eta \rangle = \langle \xi_1 \rangle - \langle \xi_2 \rangle, \quad \sigma_\eta^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2K_{1,2}.$$

Обобщением этого свойства является утверждение, что любая линейная комбинация нормальных СП есть нормальный СП.

3. Коефіцієнт кореляції та його властивості.

Шиховцев, ст. 17-19.

1.4. Корреляционная функция

Задание одномерной плотности распределения вероятности не дает возможность определить характер изменения случайного процесса во времени и не характеризует взаимосвязь случайного процесса в различные моменты времени. Для этого вводят понятие двумерной плотности распределения вероятности $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$, описывающей связь двух значений $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ в произвольные моменты времени t_1 и t_2 . С помощью двумерной плотности распределения вероятности можно определить *корреляционную функцию* (КФ), которая является вторым смешанным центральным моментом [1]:

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &\equiv M_{1,1}(t_1, t_2) = \langle \delta\xi(t_1)\delta\xi(t_2) \rangle = \\ &= \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle - \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle = m_{1,1}(t_1, t_2) - m_1(t_1)m_1(t_2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для количественной характеристики зависимости случайных функций вводится нормированная корреляционная функция, которая называется коэффициентом корреляции

$$R(t_1, t_2) \equiv \frac{K(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}.$$

Если случайные функции связаны детерминированной линейной зависимостью, то коэффициент корреляции между ними в любой момент времени равен ± 1 . Если независимы – равен нулю. Пример будет представлен в следующем параграфе.

В большинстве радиотехнических задач встречаются коэффициенты корреляции в виде монотонно убывающих функций или в виде осциллирующих затухающих функций [2]. Время затухания или время корреляции определяется как

$$\tau_0(t_1) = \int_0^{\infty} R(t_1, t_2) dt_2.$$

Геометрически время корреляции равно основанию прямоугольника с высотой $R(t_1 = t_2) = 1$, имеющему ту же площадь, что и площадь, заключенная между кривой $R(t_1, t_2)$ при $t > 0$ и осью абсцисс (рис.6). Величина τ_0 дает ориентировочное представление о том, на каком интервале времени в среднем имеет место коррелированность между значениями случайного процесса.

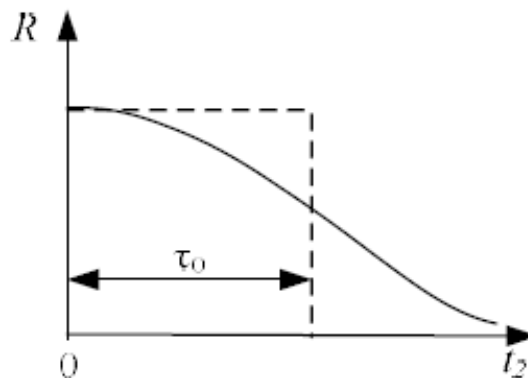


Рис.6. Определение времени корреляции

Основные свойства КФ [1]:

1. Равенство нулю для статистически независимых значений случайного процесса. Это следует из того, что

$$m_{1,1}(t_1, t_2) = m_1(t_1)m_1(t_2)$$

2. Симметричность КФ относительно своих аргументов:

$$K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1)$$

3. Ограниченность КФ:

$$|R(t_1, t_2)| \leq 1.$$

Для доказательства достаточно рассмотреть следующую заведомо положительную величину:

$$\left\langle \left[\frac{\delta \xi(t_1)}{\sigma(t_1)} \pm \frac{\delta \xi(t_2)}{\sigma(t_2)} \right]^2 \right\rangle = 2(1 \pm R(t_1, t_2)) \geq 0.$$

4. Положительная определенность. Для КФ она заключается в том, что для любой детерминированной вещественной функции $g(t)$ имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1) g(t_2) K(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \geq 0.$$

Это неравенство является прямым следствием усреднения следующей заведомо положительной величины:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \left[\int_{-T}^T g(t) \delta \xi(t) dt \right]^2 \right\rangle \geq 0.$$

4. Аналітичний сигнал, його означення та властивості.

5.2. Аналитический сигнал

Представление квазигармонического процесса $\xi(t)$ в форме (5.3) неоднозначно, так как при заданных вероятностных характеристиках имеется произвол в определении характеристик $A(t)$ и $\varphi(t)$, а также в выборе частоты ω_0 . Если, например, при выбранной частоте ω_0 за некоторое время произошло изменение $\xi(t)$, то невозможно однозначно различить, произошло оно за счет $A(t)$ или $\varphi(t)$. К тому же, на практике часто бывает, что выделить доминирующую частоту в случайном процессе либо затруднительно, либо вообще невозможно.

Огибающую $A(t)$ и случайную фазу $\varphi(t)$ можно доопределить разными способами. Один из них базируется на преобразовании Гильберта и введении аналитического сигнала [9].

Напомним, что две функции (детерминированные или случайные) связаны преобразованиями Гильберта, если

$$\eta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad \xi(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

где интегралы берутся в смысле главного значения Коши. Если рассматривать $\xi(t)$ как входной сигнал, то $\eta(t)$ есть выходной сигнал линейной системы с импульсной характеристикой $h(t) = 1/\pi t$ и комплексной частотной характеристикой

$$H(i\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} \exp(-i\omega t) dt = -i \operatorname{sgn} \omega = \begin{cases} -i, & \omega > 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ i, & \omega < 0. \end{cases}$$

Линейный фильтр с такой комплексной характеристикой часто называют *квадратурным фильтром*. Он сдвигает фазы спектральных составляющих входного сигнала на $-\pi/2$: при входном колебании $\cos \omega t$ выходной сигнал будет $\sin \omega t$.

Перейдем от вещественного случайного процесса $\xi(t)$ к комплексному СП, который называют *аналитическим процессом*

$$\zeta(t) = A(t) \exp[i(\omega_0 t + \varphi(t))] = \xi(t) + i\eta(t)$$

и потребуем, чтобы его мнимая часть

$$\eta(t) = A(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad A(t) \geq 0, \quad |\varphi| \leq \pi$$

представляла собой преобразование Гильберта от вещественной части $\xi(t)$. Главное удобство от использования такого представления заключается в простом и однозначном переходе к амплитуде (огibaющей) и фазе сигнала:

$$A(t) = |\xi(t) + i\eta(t)|, \quad \omega_0 t + \varphi(t) = \arctg \frac{\eta(t)}{\xi(t)}.$$

Если ввести комплексную амплитуду

$$Z(t) = A(t) \exp[i\varphi(t)] = A_c(t) + iA_s(t),$$

где

$$A_c(t) = A(t) \cos \varphi(t); \quad A_s(t) = A(t) \sin \varphi(t); \quad A(t) \geq 0, \quad |\varphi| \leq \pi,$$

то аналитический процесс, огibaющую и фазу можно записать в виде

$$\zeta(t) = Z(t) \exp(i\omega_0 t),$$

$$A(t) = [A_c^2(t) + A_s^2(t)]^{1/2}, \quad \omega_0 t + \varphi(t) = \arctg \frac{A_s(t)}{A_c(t)}.$$

Случайные функции $A_c(t)$ и $A_s(t)$ есть проекции вектора длины $A(t)$ на оси прямоугольной системы координат, они называются косинусной (или синфазной) и синусной квадратурными составляющими. Вектор вращается со случайной угловой скоростью $\varphi'(t)$, конец вектора блуждает по плоскости (рис. 45).

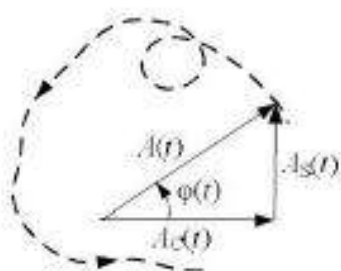


Рис. 45. Геометрическое представление узкополосного процесса

5. Співвідношення невизначеностей для випадкових процесів.

3. Характерна ширина $\Delta\omega$ енергетичного спектра $S_{\xi}(\omega)$ пов'язана з характерним часом $\Delta\tau$ зміни автокореляційної функції $B_{\xi}(\tau)$ деяким співвідношенням, яке часто називають „співвідношенням невизначеностей“.

$$\Delta\omega \Delta\tau = \text{Const.} \quad (6.14)$$

Із цієї формули зокрема випливає, що чим „ширший“ спектр $S_{\xi}(\omega)$, тим „лужча“ автокореляційна функція $B_{\xi}(\tau)$, і навпаки. Таке твердження легко пояснюється за допомогою рис. 6.1 і наступних простих міркувань. Аналогічно до формули (5.33 а) визначимо характерну ширину $B_{\xi}(\tau)$ як

$$\Delta\tau = \frac{1}{B_{\xi}(0)} \int_0^{\infty} B_{\xi}(\tau) d\tau = \frac{\pi S_{\xi}(0)}{B_{\xi}(0)}. \quad (6.15 а)$$

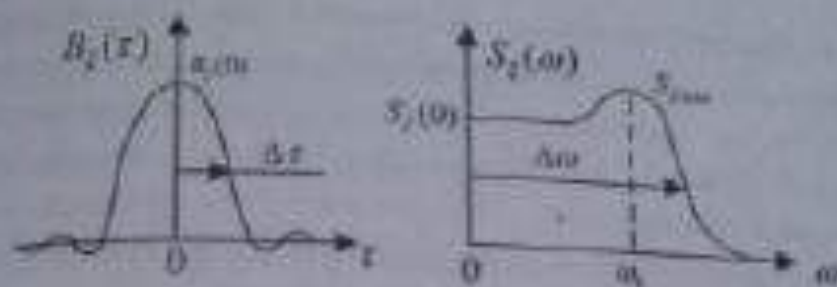


Рис. 6.1

Подібним чином можна ввести і поняття характерної ширини $\Delta\omega$ енергетичного спектра $S_z(\omega)$:

$$\Delta\omega = \frac{1}{S_{z \max}(\omega_0)} \int_0^{\infty} S_z(\omega) d\omega = \frac{B_z(0)}{2S_{z \max}(\omega_0)} \quad (6.15 \text{ б})$$

Через $S_{z \max}(\omega_0)$ тут позначено максимальне значення енергетичного спектра $S_z(\omega)$, що досягається на деякій частоті ω_0 (див. рис. 6.1). При написанні формул (6.15) ми врахували співвідношення (6.11).

Помноживши тепер (6.15 а) і (6.15 б), отримаємо

$$\Delta\omega \Delta\tau = \frac{\pi}{2} \frac{S_z(0)}{S_{z \max}(\omega_0)} = \text{Const.} \quad (6.16)$$

Величина Const у (6.16) залежить від виду спектра $S_z(\omega)$ і від способу визначення характерної ширини $\Delta\tau$ і $\Delta\omega$. Наприклад, для повнократотних спектрів $S_{z \max}(\omega_0) \approx S_z(0)$ і $\text{Const} \approx \pi/2 \approx 1$. З іншого боку, як $\Delta\tau$ можна вважати раніше введений час кореляції процесу τ_0 тощо.

Підсумовуючи викладене, зауважимо, що „співвідношення невизначеностей” є наслідком загальної теорії перетворення Фур’є, а не якоюсь специфічними властивостями автокореляційної функції $B_z(\tau)$ або енергетичного спектра $S_z(\omega)$ випадкового процесу. **Дальше можна не писати!!!**

6. Реакція лінійної системи на випадкові впливи. Кореляційна функція випадкового процесу на виході лінійної системи.

Перетворення випадкових процесів лінійними системами

60

на вхід кристалою подається сигнал $u(t)$:



бі приміряє що перетворює сигнал надя на
з групи: лінійні та нелінійні.

Лінійна система:

на входи сигнал u на виході v .

коштів q u на входи u ставитиме у від-
повідності q v , такі перетворення наз операторами.

$$v(t) = \hat{L} u(t) \quad \xrightarrow{\text{оператор}} \quad \boxed{\hat{L}} \quad \xrightarrow{u(t)} \quad v(t)$$

на фактично вимагає, коли на входи випадковий процес:

$$\{u(t)\} \xrightarrow{\hat{L}} \{v(t)\}$$

Задачі:

$$1. P_u(u; t) \xrightarrow{\hat{L}} P_v^*(v, t)$$

2. кореляційно мережі випадкових процесів

$$\langle u(t) \rangle, G_u^2(t), G_u(t, t_1) \xrightarrow{\hat{L}} \langle v(t) \rangle, G_v^2(t), G_v(t, t_1)$$

Лінійне перетворення - це перетворення, яке має
лінійним оператором.

$$\text{Оператор наз лінійним якщо } \hat{L}(a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)) = a_1 \hat{L} u_1(t) + a_2 \hat{L} u_2(t)$$

і зображений принцип де того вище записане
 співвідношення не розбивається на дві частини:



Де мінімальна операція виконується з задогою
 і найменше класи і виконуються ^(випадки ми розглянемо далі) нуль, а
 це мінімум - нуль.

Формалізовано дані оператора \hat{L} :

Працюємо, що можемо деякий довільний набір
 ф-цій $\{\varphi_i(t)\}$ і кожна реалізація може бути
 представлена як $v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(t)$, тоді можна
 записати $v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \hat{L} \varphi_i(t)$ але як правильно розг.

$$v(t) \approx \sum_{i=1}^N a_i \hat{L} \varphi_i(t)$$

Не треба розг. протв. влого сигналу, доста-
 тньо розглянути протв. деяких виданих
 ф-цій. Тоді як вибрати ці набір ф-?

і має бути повним.

розглянемо приклад: $\hat{L} = \frac{d}{dt}$

$\varphi_i(t)$ такі що мають похідну, то тоді такі
 протв. не можна описувати сигналами, що не мають
 похідну.

теорема відбиття:

можна мати сигнал, що має обмежену ширину частот, тоді будь який сигнал в цій частотній зоні може бути представлений як цю функцію $\frac{\sin t}{t}$

Як висловити $u(t)$:

можливо 3 способи:

1) Найбільш зручний для аналогових сигналів.

Запишемо $u(t)$ як: $u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t') \delta(t-t') dt'$ з перет-

вореною лінійкою, це зрозуміло з формули:

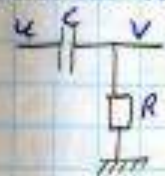
$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$$

$$\hat{L} u(t) = \alpha_1 \hat{L} (u_1(t)) + \alpha_2 \hat{L} (u_2(t))$$

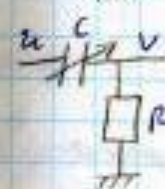
$$v(t) = \hat{L} u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t') \underbrace{\hat{L} \delta(t-t')}_{h(t,t')} dt' \equiv$$



Системи з постійними параметрами - системи
в яких параметри не залежать від часу. приклад:



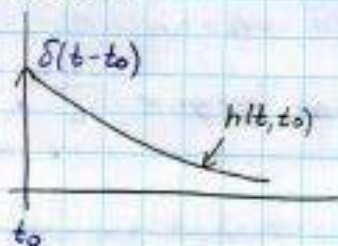
- пристрій з постійними параметрами.



- пристрій з змінними параметрами.

Для С-м з постійними параметрами $h(t,t') = h(t-t')$

h наз интегрируемой функцией либо measurable α -ного
матрицы.



$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t'-t_0) h(t, t') dt' = h(t, t_0)$$

2) Тогда нужно показать через контр

Лемма сводит, что мы хотим представить \hat{L} че-
рез более сложную вращательной области.

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\nu) e^{-i\nu t} d\nu$$

интеграл по более малому элементу модно $u(t)$

по более малому преобразованию Фурье. У нас есть

что $u(t)$ квадратично интегрируемо и мал инте

$$\text{р-мб } \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{u}(\nu)|^2 d\nu \text{ Парсеваля.}$$

$$v(t) = \hat{L} u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\nu) \int_{t_0}^{\infty} e^{-i\nu \nu t} K(\nu, t) d\nu =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\nu) K(\nu, t) d\nu$$

$K(\nu, t)$ наз являясь переопределенным ядром.

Для того чтоб отменить \hat{L} на будущее

сигнал заданного уровня $K(V, t)$.

Если \hat{L} не зависит от частоты, то $K(V, t) = H(V) e^{-i\hat{L} V t}$,
 H - передаточная ф-ция.

Для системы с постоянными параметрами найдем
ф-цу $H(V) \leftrightarrow h(t, t')$

3) $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ таковы, что будут реализацией модели
будет представима у входа $u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi_n(t)$ может
существовать. Это можно с-мо ф-ций.

$$L_2(T) = \{u(t)\}$$

$\int_{-T/2}^{T/2} |u(t)|^2 dt < \infty$ можно квадратично интегрировать

- $T/2$ в такой с-мо ф-ций существует такая с-мо

Это означает, что выходной сигнал $V(t) = \hat{L} u(t) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n \underbrace{\hat{L} \varphi_n(t)}_{\psi_n(t)}, \text{ где } \varphi_n - \text{с-мо ф-ций.}$$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \psi_n(t)$, Небольшой набор коэффициентов u_n

$V(t) \Rightarrow \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, можно также мы знаем набор

коэф u_n то (после $\varphi_n(t)$ мы знаем) мы можем

выразить сигнал на выходе. u_n - дискретны.

Этот подход широко применяется.

Як функція $\varphi_n(t)$ треба вибрати. Доведемо, що всі $\varphi_n(t)$ - ортонормовані, бо це раціонально.

Ортонормовані:
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi_n^*(t) \varphi_m(t) dt = \delta_{nm}$$

Як вибрати коеф. коі. виході?

$$V(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \varphi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \hat{L} \varphi_n(t) / \int \varphi_n^* dt$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi_m^*(t) \hat{L} \varphi_n(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi_m^* \varphi_n dt}_{\delta_{nm}}$$

$$V_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n L_{mn}, \text{ де } L_{mn} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi_m^*(t) \hat{L} \varphi_n(t) dt$$

$\{L_{mn}\} = \hat{L}$ - матриця на предметів трансформації аналізу.

$$\vec{V} = \hat{L} \vec{u}$$

Д/з: як \hat{L} вибрати щоб інверсія вийшла?

Кореляційна функція випадкового процесу на виході лінійної системи:

В певних кореляц. теорії спробуємо зобразити кореляц. функцію на виході виразом через імпульсний відгук h :

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, t') u(t') dt'$$

$$G_V(t_1, t_2) = \langle V^*(t_1) V(t_2) \rangle_{\{V\}} =$$

усереднення по ансамблю V

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \underbrace{h^*(t_1, t_1) h(t_2, t'')}_{\text{відомі функції}} \underbrace{\langle u^*(t') | u(t'') \rangle}_{G_u(t', t'')}$$

як розкласти вираз у цього співвідношення розв.
для стаціонарного с-х на вигляд: будемо вважати,
що с-х має постійні параметри

$$G_v(t_1, t_2) = \langle v^*(t_1) v(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' h^*(t_1 - t') h(t_2 - t'') G_v(t' - t'') \quad \textcircled{1}$$

чи буде сигнал стаціонарним на виході?

Введемо змінні інтегрування: $\tau' = t_1 - t'$, $\tau'' = t_2 - t''$

$$\textcircled{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' d\tau'' h^*(\tau') h(\tau'') G_v(t_2 - t_1 + \tau' - \tau'') = G_v(t_1 - t_1)$$

переходимо до неперервного Фур'є - перетворення

$$S_v(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} G_v(\tau) e^{i2\pi\nu\tau} d\tau = \int d\tau e^{i2\pi\nu\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' d\tau'' h^*(\tau') h(\tau'') \cdot \\ \cdot G(\tau - \tau' - \tau'') \quad \textcircled{3}$$

Введемо змінну: $\tau - \tau' - \tau'' = x \Rightarrow \tau = x - \tau' + \tau''$

$$\textcircled{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i2\pi\nu(x - \tau' + \tau'')} G(x) h^*(\tau') h(\tau'') = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{i2\pi\nu x} \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\tau') e^{-i2\pi\nu\tau'} d\tau' \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau'') e^{i2\pi\nu\tau''} d\tau''}_{H(\nu)} = \\ = |H(\nu)|^2 S_u(\nu) = S_v(\nu)$$

Лінійна с-х з постійними параметрами
на виході не містить нових частот, а

мине зрівнює амплітуду.

Приймаємо, що на вході є сигнал з постійним параметром для даної мережі

Спектральна густина вхідного сигналу постійна

$$S_u(\nu) = S_0$$

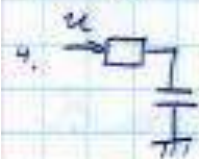
$$S_v(\nu) = S_0 |H(\nu)|^2$$



Возьмемо для сигналу постійного параметра, наприклад наступним чином.

1. $\hat{L} = \frac{d}{dt}$

2. $\hat{L} = \int dt$



Знайти прикладний ф-ці, шукати на виході мережі на виході для заданого мережі: $G_v(\nu) = e^{-\frac{\nu^2}{\nu_0^2}}$

7. Спектр інтенсивності випадкового сигналу на виході лінійної системи з постійними параметрами.

Лінійна система з постійними параметрами не вносить нових гармонік в спектр сигналу, а лише змінює амплітуду. Варіант з книги, нижче - конспект

§ 7. Лінійні перетворення випадкових процесів

навіть у тому випадку, коли на вхід подається стаціонарний процес. З іншого боку, при незмінних параметрах системи згідно з (7.7) легко показати, що при надходженні на вхід стаціонарного процесу другий момент на виході залежатиме тільки від різниці часу $t_1 - t_2$:

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \int_0^\infty h(t') dt' \int_0^\infty h(t'') < x(t_1 - t') x(t_2 - t'') > dt'' = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' h(t') h(t'') R_x(t_1 - t_2 - t' + t'') = R_y(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Таким чином, сталість середнього значення ($\bar{y}(t) = \text{Const}$) і залежність другого моменту тільки від різниці часу ($R_y(t_1, t_2) = R_y(t_1 - t_2)$) свідчить про те, що при подачі на вхід лінійної системи зі сталими параметрами стаціонарного процесу на виході спостерігатиметься стаціонарний процес. Зазначимо, що це твердження справджується тільки без урахування у системі перехідних процесів. Справді, на основі виразу (7.9) легко показати, що врахування моменту включення сигналу на вході системи призводить до його нестационарності на виході. Проте, як буде показано у §9, нестационарність $y(t)$, як правило, спостерігається тільки у межах часу, що не перевищує характерного часу τ_0 релаксації системи ($0 \leq t < \tau_0$). При $t \gg \tau_0$ момент увімкнення сигналу на вході системою „забувається”, і вихідний сигнал $y(t)$ перетворюється на стаціонарний.

7.3. Спектральний аналіз лінійних систем з постійними параметрами

Далі ми не зупинятимемося окремо на вивченні перехідних процесів, а розглядатимемо тільки фізично реалізовані системи зі сталими параметрами, для яких зв'язок між виходом і входом визначається за формулою (7.7). Простота опису і дослідження

систем зі сталими параметрами зумовлена тим, що вони дуже просто реагують на гармонійні зовнішні впливи. Так, поклавши у (7.7) $x(t) = e^{i\omega t}$, маємо

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t') e^{i\omega(t-t')} dt' = K(i\omega) e^{i\omega t}, \quad (7.17)$$

де введено передавальну функцію $K(i\omega)$:

$$K(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t') e^{-i\omega t'} dt', \quad h(t') \equiv 0 \text{ при } t' < 0. \quad (7.18)$$

Таким чином, при проходженні гармонійного сигналу $x(t) = e^{i\omega t}$ через лінійну систему зі сталими параметрами на її виході спостерігається також гармонійне коливання $y(t) = K(i\omega) e^{i\omega t}$, амплітуда і фаза якого визначаються значенням модуля і аргументу передавальної функції системи $K(i\omega)$: $K(i\omega) = |K(i\omega)| \exp\{i \arg K(i\omega)\}$. $|K(i\omega)|$ називають амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) системи, а $\arg K(i\omega)$ – фазочастотною характеристикою (ФЧХ).

Перейдемо тепер від сигналів $x(t)$ і $y(t)$ до їх перетворень Фур'є:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (7.19)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_y(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (7.20)$$

Підставляючи (7.19) у (7.7), отримуємо:

§ 7. Лінійні перетворення випадкових процесів

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega \int_0^{\infty} h(t') e^{-i\omega t'} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} C_x(\omega) K(i\omega) d\omega. \quad (7.21)$$

Порівнюючи (7.21) з (7.20), отримаємо формулу

$$C_y(\omega) = K(i\omega) C_x(\omega), \quad (7.22)$$

з якої випливає, що передавальна функція $K(i\omega)$ лінійної системи зі сталими параметрами може бути визначена як відношення Фур'є-перетворень сигналу на виході і на вході системи:

$$K(i\omega) = \frac{C_y(\omega)}{C_x(\omega)}. \quad (7.23)$$

Нехай на вхід системи надходить стаціонарний випадковий процес $x(t)$ з відомим енергетичним спектром $S_x(\omega)$. Ставиться питання: який процес спостерігатиметься на виході системи? Користуючись (7.22), обчислимо корелятор Фур'є-компонент вихідного сигналу:

$$\langle C_y(\omega) C_y^*(\omega') \rangle = K(i\omega) K^*(i\omega') \langle C_x(\omega) C_x^*(\omega') \rangle =$$

$$= K(i\omega) K^*(i\omega') \delta(\omega - \omega') S_x(\omega) = \delta(\omega - \omega') S_y(\omega). \quad (7.24)$$

Дельта-кореляція Фур'є-компонент вихідного процесу $\delta(\omega - \omega')$ свідчить про його стаціонарність, а коефіцієнт при $\delta(\omega - \omega')$ у (7.24) — його енергетичний спектр (подібно до (6.8)):

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (7.25)$$

§ 7. Лінійні перетворення випадкових процесів

Таким чином, при дії стаціонарного випадкового процесу на лінійну систему зі сталими параметрами енергетичний спектр вихідного сигналу одержується зі спектра вхідного сигналу шляхом його множення на квадрат амплітудно-частотної характеристики. Слід ще раз нагадати, що це твердження справджується тільки для фізично реалізованих систем при нехтуванні перехідними процесами.

7.4. Приклади найпростіших лінійних перетворень

Як найпростіші лінійні перетворення докладно розглянемо диференціювання та інтегрування випадкового процесу.

Диференціювання випадкового процесу. Нехай $y(t)$ – результат проходження випадкового процесу $x(t)$ через диференціюючий пристрій:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (7.26)$$

Провівши усереднення обох частин рівності (7.26), отримуємо:

$$\langle y(t) \rangle = \left\langle \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle x(t) \rangle. \quad (7.27)$$

Для стаціонарних процесів $\langle x(t) \rangle = \text{Const}$, так що $\langle y(t) \rangle = 0$.

Визначимо автокореляційну функцію $B_y(t_1, t_2)$ вихідного процесу, припускаючи для простоти, що $\langle x(t) \rangle = 0$:

$$\begin{aligned} B_y(t_1, t_2) &\equiv \langle y(t_1)y(t_2) \rangle = \left\langle \frac{dx(t_1)}{dt_1} \frac{dx(t_2)}{dt_2} \right\rangle = \\ &= \frac{d}{dt_1} \frac{d}{dt_2} \langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} B_x(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Враховуючи, що для стаціонарного процесу $B_x(t_1, t_2) = B_x(t_1 - t_2)$, після введення нової змінної — $\tau = t_1 - t_2$, отримуємо

Вих. сум. \rightarrow Кореляційна ф. сумарна на ^{вигляд} ~~маси~~

$$V(t) = \int h(t, t') U(t') dt' - \text{вх. сумарна}$$

\rightarrow інтеграл ~~вигляд~~ ^{вигляд}

$$G_v(t_1, t_2) = \langle V^*(t_1) V(t_2) \rangle = \int dt' \int dt'' h^*(t_1, t') h(t_2, t'') \cdot$$

зберігаємо невідоме U

$$\langle U^*(t') U(t'') \rangle \stackrel{G_u(t', t'')}{=} \quad \text{вигляд}$$

Д. Вигляд сум. зр. ігнорувати сумарна на ~~маси~~
 лінійною зберігаємо ігнорувати ~~маси~~
 функція ~~маси~~

Розмінемо зр. ^{зміна. вигляду процесу} ~~маси~~ ^{вигляд} ~~маси~~ на ~~маси~~

$$= \int dt' \int dt'' h^*(t_1 - t') h(t_2 - t'') G_u(t'' - t') \quad \text{вигляд}$$

\rightarrow ~~маси~~ $t' = t_1 - t'$; $t'' = t_2 - t''$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' d\tau'' h^*(\tau') h(\tau'') G_v(t_2 - t_1 + \tau' + \tau'') = G_v(t_2 - t_1)$$

Указ на брзи, системички магнетизам по
на брзи табела магнетизам где 'сист.'ност
интер, што перемешање

Појмио $\tau \approx t_2 - t_1$

репрезентација φ .

$$G_v(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' d\tau'' h^*(\tau') h(\tau'') G(\tau - \tau'' + \tau')$$

интер \rightarrow бр. регулација Винера

$$\uparrow S_v(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} G_v(\tau) e^{i2\pi\nu\tau} d\tau =$$

$$\text{који } \tau + \tau' = \tau'' \Rightarrow \tau = \tau'' - \tau'$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' d\tau'' h^*(\tau') h(\tau'') G(\tau + \tau' - \tau'') =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau'' \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i2\pi\nu(x - \tau' + \tau'')} G(x) h^*(\tau') h(\tau'') =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G_v(x) e^{i2\pi\nu x} dx \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h^*(\tau') e^{-i2\pi\nu\tau'} d\tau'}_{H^*(\nu)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau'') e^{i2\pi\nu\tau''} d\tau''}_{H(\nu)} =$$

$$S_v(\nu) = |H(\nu)|^2 S_u(\nu)$$

-Омне магнетизам, проц. регулација

не интер на брзи Нови регулација

интер регулација магнетизам

8. Нелінійні перетворення нормальних флуктуацій. Теорема Прайса.

§ 10. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

Если $\xi(t)$ нормальный процесс, то в формулы (5.9.4) нужно подставить выражения одномерной (3.15.7) и двумерной (3.15.9) характеристических функций. Например, для нормального стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним значением ($m = 0$) с учетом формулы (3.15.20) можем написать

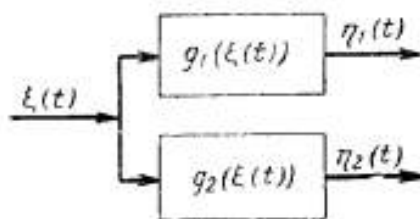
$$m_{11}(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_L \int_L F(ju_1) F(ju_2) \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} [u_1^2 + 2R(\tau) u_1 u_2 + u_2^2] \right\} du_1 du_2. \quad (5.10.1)$$

Когда последний интеграл вычислить не удастся, целесообразно воспользоваться разложением

$$e^{-\sigma^2 R u_1 u_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\sigma^2 R u_1 u_2)^n.$$

Тогда получим

$$m_{11}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n^2}{n!} \sigma^{2n} R^n(\tau), \quad d_n = \frac{j^n}{2\pi} \int u^n F(ju) e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 u^2} du. \quad (5.10.2)$$



Так как $m_1 = d_0$, то отсюда получаем формулу для функции корреляции

$$k_1(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{n!} \sigma^{2n} R^n(\tau). \quad (5.10.3)$$

Рис. 5.22. К вычислению взаимного момента на выходе двух нелинейных элементов.

В некоторых случаях вычисления интегралов (5.9.4) для нормальных процессов упрощаются, если воспользоваться формулой (5.10.7), доказательство которой приводится ниже.

Пусть требуется найти взаимный момент $\tilde{m}_{11}(t_1, t_2) = \langle \eta_1(t_1) \eta_2(t_2) \rangle$ для процессов на выходе двух нелинейных элементов (рис. 5.22), на вход которых воздействует нормальный случайный процесс $\xi(t)$.

По аналогии с формулой (5.9.4) можем написать

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{11}(t, t + \tau) &= \tilde{m}_{11}(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_L \int_L F_1(ju_1) F_2(ju_2) \times \\ &\times \langle \exp j(u_1 \xi + u_2 \xi_\tau) \rangle du_1 du_2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_L \int_L F_1(ju_1) F_2(ju_2) \Theta_2(u_1, u_2) du_1 du_2,\end{aligned}\quad (5.10.4)$$

где $\Theta_2(u_1, u_2)$ — характеристическая функция (3.15.9).

Заметим, что для характеристической функции нормального процесса справедливо равенство

$$\frac{\partial^k \Theta_2}{\partial R^k} = (-1)^k (\sigma_1 \sigma_2 u_1 u_2)^k \Theta_2(u_1, u_2). \quad (5.10.5)$$

Из (5.10.4) и (5.10.5) следует, что

$$\frac{\partial^k \tilde{m}_{11}(\tau)}{\partial R^k} = \frac{(\sigma_1 \sigma_2)^k}{4\pi^2} \int_L (ju_1)^k F_1(ju_1) du_1 \int_L (ju_2)^k F_2(ju_2) \Theta_2(u_1, u_2) du_2.$$

Подставив сюда исходное определение характеристической функции

$$\Theta_2(u_1, u_2) = \langle \exp j(u_1 \xi + u_2 \xi_\tau) \rangle$$

и изменив порядок интегрирования и статистического усреднения, можем написать

$$\frac{\partial^k \tilde{m}_{11}(\tau)}{\partial R^k} = \frac{(\sigma_1 \sigma_2)^k}{4\pi^2} \left\langle \int_L (ju_1)^k F_1(ju_1) e^{ju_1 \xi} du_1 \int_L (ju_2)^k F_2(ju_2) e^{ju_2 \xi_\tau} du_2 \right\rangle.$$

Из формулы (5.9.1) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_L (ju)^k F(ju) e^{ju\xi} du = g^{(k)}(\xi) = \frac{d^k g(\xi)}{d\xi^k}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k \tilde{m}_{11}(\tau)}{\partial R^k} &= (\sigma_1 \sigma_2)^k \langle g_1^{(k)}(\xi) g_2^{(k)}(\xi_\tau) \rangle = \\ &= (\sigma_1 \sigma_2)^k \int_{-\infty}^{\infty} g_1^{(k)}(\xi) g_2^{(k)}(\xi_\tau) \omega_2(\xi, \xi_\tau) d\xi d\xi_\tau,\end{aligned}\quad (5.10.6)$$

где $\omega_2(\xi, \xi_\tau)$ — нормальная плотность вероятности (3.15.8).

Формула (5.10.6) устанавливает связь между производными от взаимного момента по коэффициенту корреляции входного процесса и средним значением соответствующих производных от нелинейных

характеристик. Эта формула может быть обобщена и на моменты более высокого порядка. Однако нас пока интересуют, наоборот, частные результаты, следующие из (5.10.6).

Если нормальный процесс $\xi(t)$ стационарен и рассматривается одно нелинейное преобразование, то в (5.10.6) нужно положить $g_1(\xi) = g_2(\xi) = g(\xi)$. При этом получим

$$\frac{\partial^k m_{11}(\tau)}{\partial R^k(\tau)} = \sigma^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} g^{(k)}(\xi) g^{(k)}(\xi_\tau) w_2(\xi, \xi_\tau) d\xi d\xi_\tau, \quad (5.10.7)$$

где $w_2(\xi, \xi_\tau)$ — двумерная нормальная плотность вероятности (3.15.19).

Полагая в (5.10.6) $g_1(\xi) = g(\xi)$, $g_2(\xi_\tau) = \xi_\tau$ и $k = 1$, получаем формулу, устанавливающую статистическую зависимость между входным и выходным процессами:

$$\frac{\partial \tilde{m}_{11}(\tau)}{\partial R(\tau)} = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} g'(\xi) w_1(\xi) d\xi = \text{const.} \quad (5.10.8)$$

Следовательно,

$$\tilde{m}_{11}(\tau) = \text{const} \cdot R(\tau) + C_0.$$

Но из физических соображений ясно, что при $R(\tau) = 0$, $\tilde{m}_{11}(\tau) = C_0 = m_\xi m_\eta$. Поэтому

$$k_{\xi\eta}(\tau) = \langle (\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta) \rangle = \text{const} \cdot R(\tau), \quad (5.10.9)$$

т. е. взаимная корреляционная функция между входным нормальным процессом и процессом на выходе безынерционного нелинейного элемента по форме совпадает с автокорреляционной функцией входного процесса.

При вычислении по формуле (5.10.7) функции корреляции процесса на выходе нелинейных элементов с кусочно-разрывными характеристиками, как и в прямом методе [10], нужно брать такое значение k , при котором $g^{(k)}(\xi)$ представляет сумму дельта-функций [21]. Тогда интеграл в правой части всегда вычисляется и, следовательно, находится производная $\partial^k m_{11}/\partial R^k$. Что касается последующего интегрирования по коэффициенту корреляции R с целью определения $m_{11}(\tau)$, то оно легко выполняется лишь в частных случаях, например, когда воздействующий нормальный стационарный процесс $\xi(t)$ имеет нулевое среднее значение и характеристика имеет разрыв в нуле, т. е. $g^{(k)}(\xi) = \pm \delta(\xi)$ [22].

Формулу (5.10.6) можно обобщить на нелинейные безынерционные преобразования более общего типа [23]

$$\eta_{12}(t_1, t_2) = g_{12}(\xi_1(t_1), \xi_2(t_2)), \quad (5.10.10)$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — нормальные случайные процессы с нулевыми средними значениями. В данном случае она принимает вид:

$$\frac{\partial^k \tilde{m}_{11}}{\partial R^k} = (\sigma_1 \sigma_2)^k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{2k} g_{12}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1^k \partial \xi_2^k} \right\} w_2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (5.10.11)$$

где $\tilde{m}_{11} = \langle \eta_{12}(t_1, t_2) \rangle$.

В том частном случае, когда

$$\eta_{12}(t_1, t_2) = \eta_1(t_1) \eta_2(t_2) = g_1(\xi_1(t_1)) g_2(\xi_2(t_2)),$$

формула (5.10.11) переходит в (5.10.6).

Рассмотрим два примера.

1. Частотная модуляция гармонического колебания нормальным шумом. Различные виды модуляции гармонического колебания случайными сообщениями подробно рассмотрены в работах [11, 18]. Приведем здесь один частный пример [11], результаты решения которого будут использованы в дальнейшем.

Пусть имеется стохастический сигнал

$$\xi(t) = A(t) \cos [\omega t + \varphi(t) - \theta], \quad (5.10.12)$$

в котором $A(t)$ и $\varphi(t)$ — действительные стационарные случайные функции, θ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$.

Функция корреляции такого сигнала равна

$$\begin{aligned} k_{\xi}(\tau) &= \langle A(t) A(t+\tau) \cos [\omega t + \varphi(t) - \theta] \cos [\omega(t+\tau) + \varphi(t+\tau) - \theta] \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle A(t) A(t+\tau) \{ \cos [\omega \tau + \varphi(t+\tau) - \varphi(t)] + \\ &\quad + \cos [\omega(2t+\tau) + \varphi(t+\tau) + \varphi(t) - 2\theta] \} \rangle. \end{aligned}$$

В этом выражении необходимо выполнять усреднение по ансамблю реализаций $A(t)$ и $\varphi(t)$, а также по случайной фазе θ . Если значения θ не зависят от $A(t)$ и $\varphi(t)$, то в результате усреднения по θ последнее слагаемое в фигурных скобках обратится в нуль и, следовательно,

$$k_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2} \langle A(t) A(t+\tau) \cos [\omega \tau + \varphi(t+\tau) - \varphi(t)] \rangle.$$

Эту формулу можно записать иначе:

$$k_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \langle A(t) A(t+\tau) \exp j [\omega \tau + \varphi(t+\tau) - \varphi(t)] \rangle. \quad (5.10.13)$$

Применим формулу (5.10.13) к частному виду сигнала, модулированного по частоте нормальным стационарным шумом $\xi(t)$ с нулевым средним значением, дисперсией σ^2 и коэффициентом корреляции $R(\tau)$:

$$\zeta(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad \varphi(t) = \chi \int_0^t \xi(x) dx. \quad (5.10.14)$$

Имеем

$$k_\zeta(\tau) = \frac{1}{2} A_0^2 \operatorname{Re} \langle \exp [j\chi\eta(\tau)] \rangle \cos \omega_0 \tau, \quad (5.10.15)$$

где

$$\eta(\tau) = \left\{ \int_0^{t+\tau} \xi(x) dx - \int_0^t \xi(x) dx \right\} = \int_t^{t+\tau} \xi(x) dx = \int_0^\tau \xi(x) dx.$$

Если $\xi(t)$ — нормальный шум, то $\eta(\tau)$ будет также нормальным процессом, причем дисперсия его равна:

$$\sigma_\eta^2(\tau) = \sigma^2 \int_0^\tau \int_0^\tau R(x-y) dx dy. \quad (5.10.16)$$

Одномерная характеристическая функция для η определяется формулой (3.15.18):

$$\Theta_1(u) = \langle \exp(ju\eta) \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_\eta^2 u^2\right). \quad (5.10.17)$$

Из сравнения формул (5.10.15) и (5.10.17) следует, что

$$k_\zeta(\tau) = \frac{1}{2} A_0^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad \rho(\tau) = \exp\left[-\frac{1}{2} \chi^2 \sigma_\eta^2(\tau)\right]. \quad (5.10.18)$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2 &= 2\sigma^2 \alpha^{-2} (\alpha|\tau| + e^{-\alpha|\tau|} - 1) \quad \text{при } R(\tau) = R_1(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|), \\ \sigma_\eta^2 &= \sigma^2 \alpha^{-2} \{e^{-\alpha^2 \tau^2} + \alpha\tau \sqrt{\pi} [2\Phi(\sqrt{2}\alpha\tau) - 1] - 1\} \\ &\quad \text{при } R(\tau) = R_2(\tau) = \exp(-\alpha^2 \tau^2). \end{aligned}$$

Соответственно для $\rho(\tau)$ получим формулы

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(s) &= \exp[-\beta(s + e^{-s} - 1)], \\ \rho_2(s) &= \exp\left\{-\beta\left[\frac{1}{2}(e^{-s^2} - 1) + s\sqrt{\pi}\left(\Phi(\sqrt{2}s) - \frac{1}{2}\right)\right]\right\}, \end{aligned} \right\} \quad (5.10.19)$$

где

$$s = \alpha|\tau|, \quad \beta = \chi^2 \sigma^2 \alpha^{-2}. \quad (5.10.20)$$

Графики функций $\rho_1(s)$ и $\rho_2(s)$ для двух значений $\beta = 1$ и 10 приведены на рис. 5.23. Пунктиром показаны те же функции, вычисленные приближенным методом (см. § 6 гл. 8).

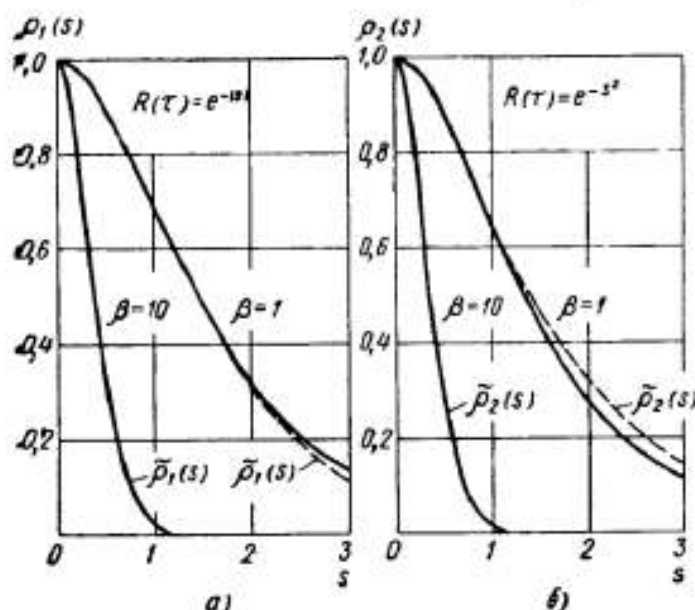


Рис. 5.23. Нормированные корреляционные функции для ЧМ стохастических сигналов.

2. Воздействие нормального шума на сглаженный ограничитель. Пусть нормальный стационарный шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$ воздействует на нелинейный элемент (сглаженный ограничитель) с характеристикой [24]

$$\eta(\xi) = a + \frac{2a}{\gamma \sqrt{2\pi}} \int_0^\xi e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} dx, \quad (5.10.21)$$

где a и γ — постоянные величины.

Нужно найти функцию корреляции шума $\eta(t)$, получающуюся на выходе такого ограничителя.

Характеристика рассматриваемого ограничителя изображена на рис. 5.24. Из (5.10.21) следует, что $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \eta(\xi) = 0$; $\eta(0) = a$ и $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \eta(\xi) = 2a$. Поэтому величина a характеризует уровень ограничения. Величина γ характе-

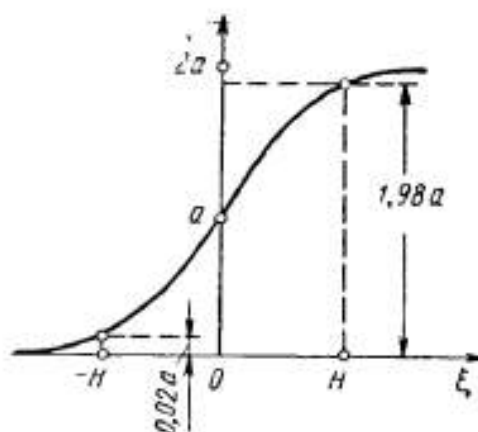


Рис. 5.24. Характеристика сглаженного ограничителя.

ризует наклон характеристики ограничителя (точнее, значение производной при $\xi = 0$). Чем больше γ , тем меньше наклон. При $\gamma \rightarrow 0$ сглаженный ограничитель переходит в идеальный.

Написав формулу (5.10.7) при $k = 1$ и подставив производную

$$\eta'(\xi) = \frac{2a}{\gamma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\gamma^2}\right),$$

после преобразований получим

$$\frac{\partial m_{11}(\tau)}{\partial R(\tau)} = \frac{2a^2}{\pi\gamma^2} \sqrt{\frac{b^2 - d^2}{1 - R^2}} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \sqrt{b^2 - d^2}} \exp\left[-\frac{b\xi^2 - 2d\xi\xi_\tau + b\xi_\tau^2}{2(b^2 - d^2)}\right] d\xi d\xi_\tau, \quad (5.10.22)$$

где

$$d = \frac{R\gamma^2 b}{\gamma^2 + \sigma^2(1 - R^2)}, \quad b = \frac{\sigma^2 \gamma^2 [\gamma^2 + \sigma^2(1 - R^2)]}{(\gamma^2 + \sigma^2) - \sigma^4 R^2}.$$

Двукратный интеграл в правой части (5.10.22) есть интеграл от двумерной нормальной плотности вероятности по всей области изменения переменных, и поэтому он равен единице. Следовательно,

$$\frac{\partial m_{11}(\tau)}{\partial R(\tau)} = \frac{2a^2}{\pi\gamma^2} \sqrt{\frac{b^2 - d^2}{1 - R^2}} = \frac{2a^2}{\left(1 + \frac{\gamma^2}{\sigma^2}\right)} \left[1 - \left(\frac{\sigma^2}{\gamma^2 + \sigma^2} R\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда находим

$$m_{11}(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \int_0^{\frac{\sigma^2}{\gamma^2 + \sigma^2} R(\tau)} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + C = \frac{2a^2}{\pi} \arcsin \left[\frac{R(\tau)}{1 + \left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)^2} \right] + C, \quad (5.10.23)$$

где C — произвольная постоянная интегрирования. Она определяется из условия $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} m_{11}(\tau) = C = m_{11}^2 = a^2$. Поэтому функция корреляции шума на выходе сглаженного ограничителя равна

$$k_{\eta}(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \arcsin \left[\frac{R(\tau)}{1 + (\gamma/\sigma)^2} \right]. \quad (5.10.24)$$

Если воспользоваться разложением $\arcsin z$ в ряд Тейлора, то по формулам (3.10.1) или (3.10.10) можно вычислить спектр шума $\eta(t)$ [25].

$$G(u, u_2) = \iint \frac{1}{2\pi} \int e^{-isu} F(s) ds \int e^{isu} P(u) du$$

$$\langle e^{isu} \rangle = \int p(u) e^{isu} = \chi(s)$$

$$G_v(u, u_2) = \left[\iint dS, dS_2 \chi_v(S, S_2) \tilde{F}(S_1) \tilde{F}(S_2) \right] \cdot \frac{1}{4\pi^2}$$

Мелкий прибор. Купи др. не входи
математический вид. n-су Теорема
Траубса

У мелкого с-м
if ма вк. мор. n-с корр. ф-т, то
ма вк. гаров. стбвном.

$$\frac{\partial^k G_v}{\partial G_u^k} = \left\langle \frac{\partial^k F(u_1)}{\partial u_1^k} \frac{\partial^k F(u_2)}{\partial u_2^k} \right\rangle_{u_1, u_2}$$

З.б. $K=1$

$$\frac{\partial G_V}{\partial G_U} = 4a^2 \langle U_1 U_2 \rangle = 4a^2 G_U$$

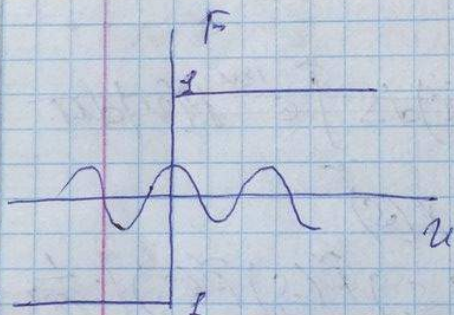
$$G_V^2 = 2a^2 G_U^2 + C = 2a^2 G_U^2 + a^2 \mathcal{O}^4$$

т.е. $\begin{matrix} T \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty \end{matrix} \quad \begin{matrix} C = G \\ C = G_V \end{matrix}$

$$C_{T \rightarrow \infty} = G_V(T)$$

$$G_V = \langle U_1^2 U_2^2 \rangle a^2 = a^2 \langle U_1^2 \rangle \langle U_2^2 \rangle = \mathcal{O}^4 a^2$$

$$a^2 \mathcal{O}^4 = C$$



$$\frac{\partial G_V^k}{\partial G_U^k} = \left\langle \frac{\partial^k F(u_1)}{\partial u_1^k} \frac{\partial^k F(u_2)}{\partial u_2^k} \right\rangle$$

З.б. $F = u^2$

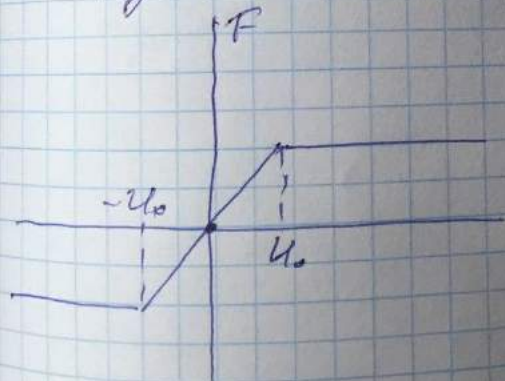
т.е. считаем берем \vec{T} горизонт.

$$\begin{aligned} \langle \delta(u_1) \delta(u_2) \rangle &= \int \int_{-\infty}^{\infty} p(u_1, u_2) \delta(u_1) \delta(u_2) du_1 du_2 \\ &= p(0, 0) \end{aligned}$$

$p(u, u_2) = A e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k A_j u_j u_j}$ - при розрахунок
 при u_0 значення. Покли нормального
 розподілу

$$\frac{\partial G_k}{\partial G_k} = 4 \frac{1}{4\pi (G^2 - G_k^2)}$$

Знаходимо об'єм



Тут $k=2$

2 похилі частини функції

9. Перетворення нормального випадкового процесу квадратичним детектором.

(Шиховцев – с. 112)

(тут из книги и конспект)

4.7.2. Двусторонний квадратичний детектор

Двусторонний квадратичний детектор описується преобразованием

$$y = g(x) = ax^2.$$

Ему соответствует неоднозначное обратное преобразование. В этом случае следует говорить о нескольких (в нашем случае двух) ветвях обратной функции $x_j = g_j^{-1}(y)$:

$$f_\eta(\eta) = \sum_j f_\xi(\xi_j) \cdot \left| \frac{d\xi_j}{d\eta} \right|.$$

Для двустороннего квадратичного детектора соответствующими ветвями обратного преобразования являются функции

$$x_1 = \sqrt{\frac{y}{a}} \quad \text{и} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{y}{a}}.$$

Так что распределение выходного процесса задается формулой

$$f_\eta(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a\eta}} \left[f_\xi\left(\sqrt{\frac{\eta}{a}}\right) + f_\xi\left(-\sqrt{\frac{\eta}{a}}\right) \right] & \text{при } \eta \geq 0, \\ 0 & \text{при } \eta < 0. \end{cases}$$

Если записать это распределение для централизованного нормального случайного процесса на входе, то на выходе мы имеем плотность распределения вида

$$f_\eta(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi a\eta}} \exp\left\{-\frac{\eta}{2a\sigma^2}\right\} & \text{при } \eta \geq 0, \\ 0 & \text{при } \eta < 0. \end{cases}$$

Плотности вероятности на входе и на выходе представлены на рис.39.

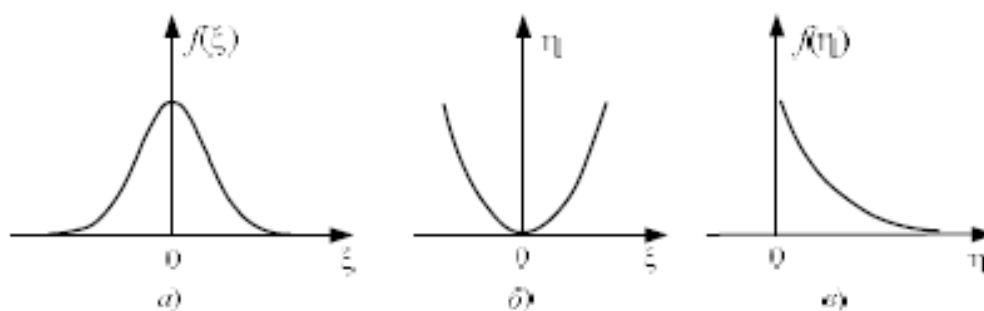


Рис.39. Нормальная плотность вероятности входных флуктуаций (а), нелинейная характеристика элемента (б), плотность вероятности флуктуаций на выходе (в)

4.7.3. Односторонний квадратичный детектор

Односторонний квадратичный детектор описывается преобразованием вида

$$y = g(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Все отрицательные значения входного процесса соответствуют одному значению выходного процесса – нулю. Причем это значение не случайное, а вполне детерминированное, правда, возникающее с определенной вероятностью

$$P(\eta = 0) = P(\xi \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f(\xi) d\xi.$$

В целом выходной процесс является состоящим из суммы непрерывно и дискретно распределенных процессов. Его распределение устанавливается формулой

$$f_{\eta}(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{a\eta}} f_{\xi}\left(\sqrt{\frac{\eta}{a}}\right) \chi(\eta) + P(\eta = 0)\delta(\eta).$$

Если записать её для центрированного нормального случайного процесса на входе, то на выходе мы имеем плотность распределения вида

$$f_{\eta}(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi a\eta}} \exp\left\{-\frac{\eta}{2a\sigma^2}\right\} + \frac{1}{2}\delta(\eta) & \text{при } \eta \geq 0, \\ 0 & \text{при } \eta < 0. \end{cases}$$

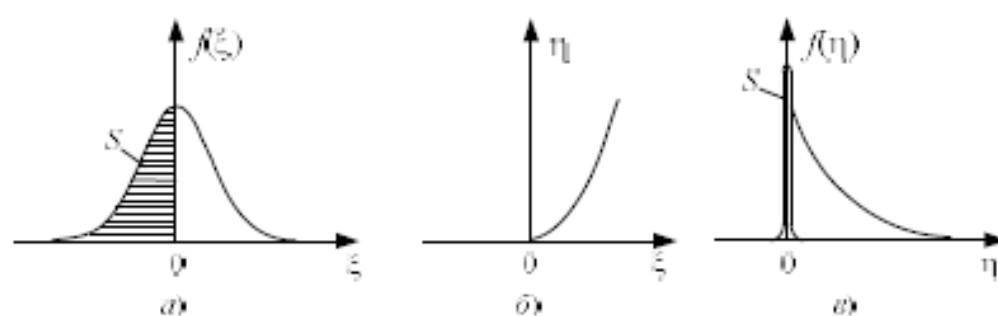


Рис.40. Нормальная плотность вероятности входных флуктуаций (а), нелинейная характеристика элемента (б), плотность вероятности флуктуаций на выходе (в)

Обобщение на случай составных процессов с множеством дискретных выходных значений дается суммированием соответствующих δ -функций. Например, распределение СП на выходе АЦП с N различными дискретными уровнями $\{y_n\}$ задается формулой

$$f_\eta(\eta) = \sum_{n=1}^N P_n \delta(\eta - y_n),$$

где вероятности получения соответствующих уровней сигнала

$$P_n = P(y_{n-1} \leq \xi \leq y_n) = \int_{y_{n-1}}^{y_n} f(\xi) d\xi.$$

нелин. квадр. детектор

$$r = F(u) = au^2$$

$u = F^{-1}(V)$ - обратная ф.з

F_1^{-1}, F_2^{-1} - корни уравнения

$$p(V)dV = p(u)du$$

$$p(V) = p(u) \left| \frac{du}{dV} \right| =$$

$$= p(F_1^{-1}(V)) \left| \frac{dF_1^{-1}(V)}{dV} \right|$$

$V = \sin u$

$$p(V) = \sum_k p_k(F_k^{-1}(V)) \left| \frac{dF_k^{-1}}{dV} \right|$$

$p(V, V_2), V = F(u)$

задача:

На входе u - нормальный Гауссовский процесс
 с нулевым средним, заданного корр. ф.з

Найти коррелят. ф.з. сигнала на выходе
 квадр. детектора.

$$V = au^2$$

$$\langle V \rangle = \int V p_V(V) dV$$

$$G(t_1, t_2) = \langle V(t_1) V(t_2) \rangle_{(u)} = \langle F(u(t_1)) F(u(t_2)) \rangle_{(u)}$$

$p_V(V, V_2)$

10. Перетворення нормального випадкового процесу ідеальним обмежувачем.

Рассмотрим так называемые выбросы случайного процесса $x(t)$, т. е. превышение этим процессом некоторого уровня C (рис. 1.11, а). Математически выбросы определяются выражением

$$x_+(t) = (x - C) I(x - C), \quad (1.5.1)$$

где $I(x)$ — функция, описывающая единичную ступеньку:

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dx} I(x) = \delta(x), \quad \frac{d}{dt} I(x) = \delta(x) \dot{x}. \quad (1.5.3)$$

Преобразование $x \rightarrow x_+$ может осуществляться в нелинейном устройстве типа детектора, характеристики которого показаны на рис. 1.12, а. Нелинейное преобразование $x \rightarrow I(x - C)$ реализует идеальный ограничитель (рис. 1.12, б).

Как функция времени процесс $I(x - C)$ представляет собой случайную последовательность прямоугольных импульсов единичной амплитуды (рис. 1.11, в). Они синхронны с переходами функции x через уровень C , т. е. имеют ту же длительность, что и импульсы неправильной формы на рис. 1.11, б, из которых состоит процесс $x_+(t)$.

Напишем выражения для некоторых характеристик выбросов на интервале времени $(0, T)$.

Длительность выбросов. Под длительностью i -го выброса понимается величина интервала $\Delta\theta_i = t_{i+1} - t_i$ между последовательными пересечениями кривой

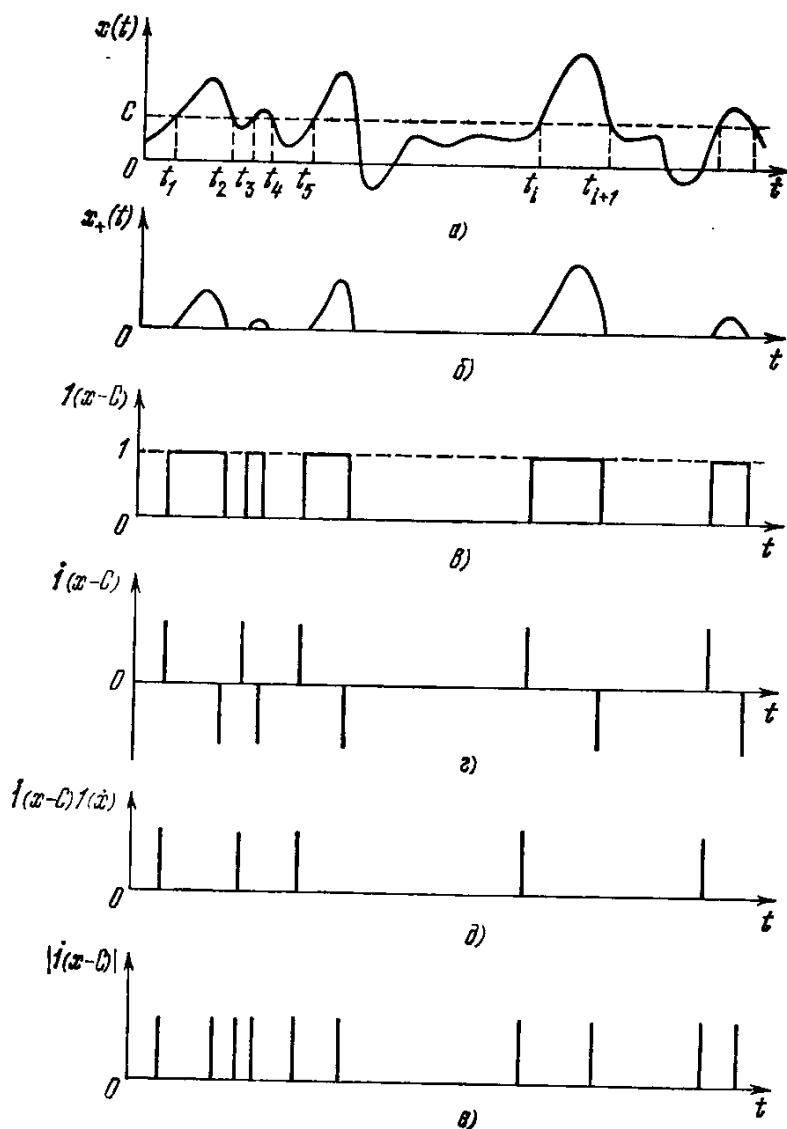


Рис. 1.11. Выбросы случайного процесса $x(t)$ над уровнем C :

а) реализация процесса $x(t)$, пересекающая уровень C ; б) участки реализации $x(t)$, лежащие выше уровня C ; в) прямоугольные импульсы той же длительности, что и выбросы; г) импульсы, отмечающие переход через уровень C с положительной или отрицательной производной; д) импульсы, соответствующие переходу через уровень C с положительной производной; е) импульсы, соответствующие пересечению уровня C с производной любого знака.

$x(t)$ уровня C с положительной и отрицательной производной. Суммарная длительность всех выбросов на интервале $(0, T)$, равная $\theta = \sum_i \Delta\theta_i$, совпадает с временем пребывания процесса $x(t)$ в области $x > C$. Ту же суммарную длительность θ имеют, очевидно, и импульсы $1(x-C)$ (рис. 1.11, в), причем она равна просто их площади, поскольку эти импульсы неотрицательны и

имеют единичные амплитуды. Таким образом, длительность выбросов определяется выражением

$$\theta = \int_0^T I(x-C) dt. \quad (1.5.4)$$

Число выбросов. Дифференцирование по времени функции $I(x-C)$ дает ряд δ -импульсов, положительных при $\dot{x} > 0$ и отрицательных при $\dot{x} < 0$ (рис. 1.11, з). Введя фактор $I(\dot{x})$, отсекающий отрицательные δ -импульсы, получим функцию $\dot{I}(x-C) I(\dot{x})$, которая представляет собой последовательность положительных δ -импульсов, число которых совпадает с числом выбросов (рис. 1.11, д). Полное число выбросов за время T равно, таким образом,

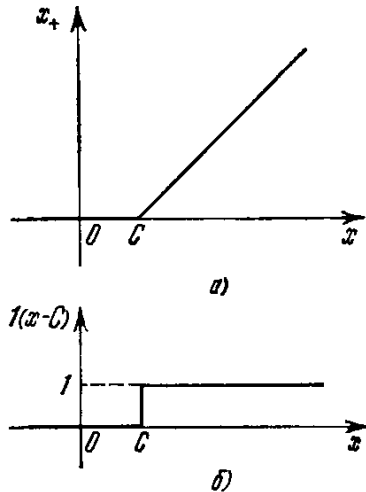


Рис. 1.12. Нелинейные характеристики, соответствующие переходу от процесса x к $x_+ = (x-C) \times I(x-C)$ (а) и от x к $I(x-C)$ (б).

$$n = \int_0^T \dot{I}(x-C) I(\dot{x}) dt = \int_0^T \delta(x-C) \dot{x} I(\dot{x}) dt. \quad (1.5.5)$$

Энергия выбросов. При наблюдении выбросов могут использоваться приборы типа калориметров, регистрирующие энергию. Энергия Q выбросов определяется интегралом

$$Q = \int_0^T [x_+(t)]^2 dt = \int_0^T (x-C)^2 I^2(x-C) dt. \quad (1.5.6)$$

Число пересечений порога. Функция

$$|\dot{I}(x-C)| = |\delta(x-C) \dot{x}| = \delta(x-C) |\dot{x}|$$

представляет собой временную последовательность положительных δ -импульсов, каждый из которых совпадает по времени с пересечением уровня C (рис. 1.11, е) т. е. интеграл

$$N = \int_0^T \delta(x-C) |\dot{x}| dt \quad (1.5.7)$$

определяет полное число пересечений как с положительной, так и с отрицательной производной. Это выражение очевидным образом обобщается на случай переменного порога $C(t)$:

$$N = \int_0^T \delta(x-C) |\dot{x} - \dot{C}| dt. \quad (1.5.8)$$

Формула (8) определяет, таким образом, число пересечений двух произвольных функций времени $x(t)$ и $C(t)$ за время T .

4.3. Корреляционная функция на выходе предельного ограничителя

Рассмотрим интересный с точки зрения теории и важный с точки зрения практики вид нелинейности, называемой предельным ограничителем. Предельным ограничителем называется нелинейное устройство, реализующее преобразование вида

$$y = a \cdot \operatorname{sgn}(x) = a(2\chi(x) - 1),$$

где $\chi(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда и a – константа. При таком преобразовании фактически сохраняется только знак входного сигнала.

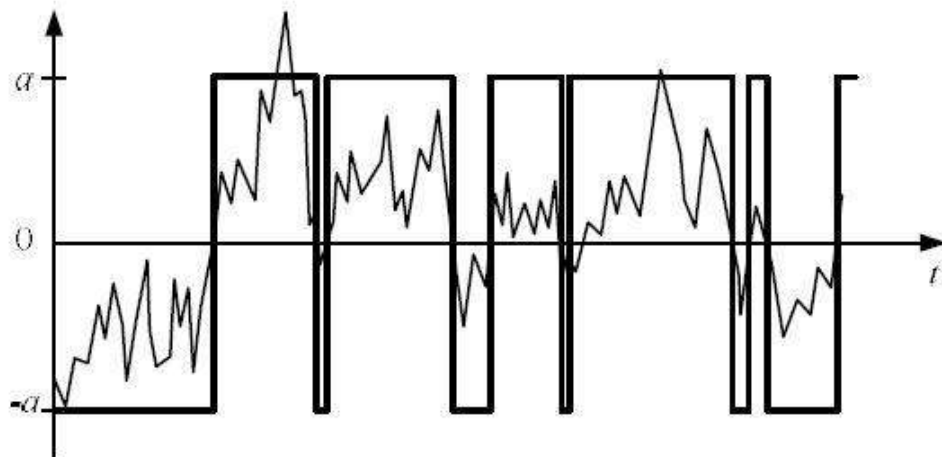


Рис. 36. Преобразование сигнала предельным ограничителем

Реализуется эта операция, если сигнал сначала подвергается очень большому усилению и затем ограничивается по амплитуде величиной a . Такой же результат получается на выходе двухразрядного АЦП. В зарубежной литературе это преобразование известно как операция клиппирования сигнала и широко используется в канадской системе радионтерферометрии со сверхдлинной базой (РСДБ).

Будем считать, что на вход нелинейного устройства вида подается **центрированный нормальный СП** с известной КФ $K_x(\tau)$. Задача состоит в нахождении КФ на выходе предельного ограничителя. Для решения задачи воспользуемся дифференциальным уравнением (4.5) и начальными условиями (4.6). Предварительно проведем дифференциальный анализ нелинейности

$$y' = 2a \cdot \delta(x).$$

Появление $\delta(x)$ -функции здесь существенно для вычисления правой части в (4.5). В результате, ограничившись значением $n = 1$, имеем

$$\frac{d}{dK_{\xi}} K_{\zeta}(\tau) = (2a)^2 \langle \delta(\xi(t_1)) \delta(\xi(t_2)) \rangle = (2a)^2 f(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0; \tau).$$

Вид двумерной плотности нормального распределения приводился ранее. С учетом его можно записать, что

$$\frac{d}{dK_{\xi}} K_{\zeta}(\tau) = \frac{(2a)^2}{2\pi\sqrt{\sigma^4 - K_{\xi}^2}}.$$

В качестве начального условия возьмем $K_{\zeta}(\tau) = 0$ при $K_{\xi}(\tau) = 0$. Интегрирование полученного уравнения приводит корреляционной функции

$$K_{\zeta}(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \arcsin\left(\frac{K_{\xi}(\tau)}{\sigma^2}\right).$$

Видно, что, несмотря на существенное упрощение выходного сигнала, его корреляционная функция сохранила всю информацию о корреляционных связях входного процесса. Дисперсия выходного процесса равна $\sigma_{\zeta}^2 = a^2$.

Обратная связь имеет вид

$$K_{\xi}(\tau) = \sigma^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{K_{\zeta}(\tau)}{a^2}\right).$$

Эта формула известна как *формула Ван-Флека* и позволяет восстановить вид корреляционной функции входного процесса на основе анализа клипированного сигнала. Эта формула показывает, что все корреляционные связи нормальных случайных процессов содержатся в их переходах через среднее значение, в нашем случае – через нуль.

11. Власна ширина лінії випромінювання атома. Гальмування у власному полі.

Естественная ширина линии излучения, испускаемого атомом

Применим полученные выше результаты для оценки ширины линии излучения свободно (т. е. не вынужденно) высвечивающегося возбужденного атома. Рассмотрим для этого простую классическую модель атома.

Пусть атом состоит из электрона с зарядом e и массой m , который связан с тяжелым ядром пружиной с жесткостью $k = m\omega_0^2$, где ω_0 — собственная частота колебаний осциллятора (на которой атом излучает).

Электрон совершает гармонические колебания и излучает электромагнитную энергию. В результате энергия электрона экспоненциально уменьшается со временем

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-t/\tau}. \quad (27)$$

Величина $1/\tau$, обратная времени жизни атома в возбужденном состоянии, равна относительному уменьшению энергии в единицу времени

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \mathcal{E}_0 e^{-t/\tau} = -\frac{1}{\tau} \mathcal{E}, \quad (28)$$

т. е.

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{\dot{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}}. \quad (29)$$

Энергия осциллятора равна

$$\mathcal{E} = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2(t) + \frac{m}{2} \dot{x}^2(t). \quad (30)$$

Ее среднее значение за период

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{m\omega_0^2}{2} \langle x^2 \rangle + \frac{m\omega_0^2}{2} \langle x^2 \rangle = m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle. \quad (31)$$

С другой стороны, средняя за период скорость изменения энергии осциллятора равна взятому со знаком минус среднему значению излучаемой осциллятором мощности

$$|\dot{\mathcal{E}}| = \langle I \rangle = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^4}{c^3} \langle x^2 \rangle. \quad (32)$$

Таким образом, разделив одно на другое получим

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\dot{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}} = \frac{(2/3) \frac{e^2 \omega_0^4}{c^3} \langle x^2 \rangle}{m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle}. \quad (33)$$

В итоге обратное время жизни возбужденного состояния осциллятора равно

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}}. \quad (34)$$

Теперь, что такое ширина линии излучения. Это тот диапазон частот $\Delta\omega$ вокруг частоты ω_0 , в который атом излучает. Если бы осциллятор не испытывал затухания,

$$x = x_0 \cos \omega_0 t, \quad (35)$$

то излучаемая им мощность $I(\omega)$ как функция частоты ω имела бы форму бесконечно высокого δ -пика с нулевой шириной — рис.2а, а в случае

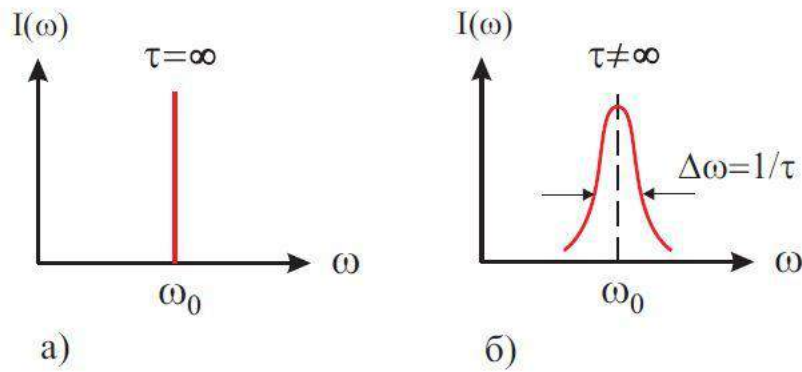


Рис. 2: Излучение гармонического осциллятора.

затухающего колебания

$$x = x_0 e^{-t/2\tau} \cos \omega_0 t \quad (36)$$

линия излучения представляет собой линию конечной высоты и конечной ширины — рис.2б.

Это следует из простого математического анализа. Для этого достаточно вычислить компоненту Фурье от смещения осциллятора. В случае отсутствия затухания

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} x_0 \cos \omega_0 t dt = \quad (37)$$

$$= \frac{x_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\omega t + i\omega_0 t} + e^{i\omega t - i\omega_0 t}) dt = \quad (38)$$

$$= \frac{x_0}{2} \cdot 2\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] = \pi x_0 \delta(\omega - \omega_0). \quad (39)$$

При наличии затухания

$$x(t) = x_0 e^{-t/2\tau} \cos \omega_0 t, \quad (t > 0). \quad (40)$$

Тогда

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} x(t) = \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} x_0 e^{-t/2\tau} \cos \omega_0 t = \quad (41)$$

$$= \frac{x_0}{2} \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} e^{-t/2\tau} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) = \quad (42)$$

$$= \frac{x_0}{2} \left[-\frac{1}{i\omega + i\omega_0 - \frac{1}{2\tau}} - \frac{1}{i\omega - i\omega_0 - \frac{1}{2\tau}} \right] \quad (43)$$

(то, что $x(t) = 0$ при $t < 0$ означает, что осциллятор был возбужден в момент $t = 0$).

Основной вклад в спектр излучаемой мощности дает второе слагаемое и для

$$x(\omega) x^*(\omega) \sim \frac{x_0^2}{4} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (1/2\tau)^2}, \quad (44)$$

что и требовалось доказать. Вблизи резонанса интенсивность излучения равна

$$I(\omega) = I(0) \frac{(1/2\tau)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (1/2\tau)^2}. \quad (45)$$

Такой вид зависимости излучения от частоты называется **дисперсионным**. Полушириной резонансной кривой называют значение $|\Delta\omega|$, при котором величина $I(\omega)$ уменьшается вдвое по сравнению с ее максимальным значением при $\Delta\omega = 0$. Из формулы для $I(\omega)$ видно, что в данном случае эта ширина совпадает с обратным временем жизни возбужденного состояния осциллятора $1/\tau$

$$\Delta\omega \simeq 1/\tau. \quad (46)$$

Таким образом, полуширина линии излучения осциллятора совпадает с его обратным временем жизни

$$\Delta\omega \simeq 1/\tau = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}. \quad (47)$$

Рассмотрим для оценки пример, когда атом испускает видимый свет с длиной волны $\lambda = 6000 \text{ \AA} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ см}$. Тогда частота излучения

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 2\pi \frac{c}{\lambda_0} \approx \frac{6 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{6 \cdot 10^{-5}} = 3 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}. \quad (48)$$

А ширина линии излучения

$$\Delta\omega \simeq \frac{e^2\omega_0^2}{mc^3} \approx \frac{(5 \cdot 10^{-10})^2 \cdot (3 \cdot 10^{15})^2}{10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^{10})^3} \simeq 10^8 \text{ сек}^{-1}. \quad (49)$$

И время жизни атома в возбужденном состоянии

$$\tau \simeq 10^{-8} \text{ сек}. \quad (50)$$

0,20.

13.6. Ширина спектральных линий

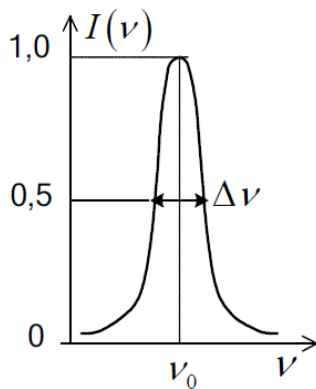


Рис.13.4. Контур спектральной линии.

Ширина спектральных линий (точніше „напівширина”) визначається інтервалом частот $\Delta\nu$ (або $\Delta\omega$) на половині висоти контуру спектральної лінії – залежності інтенсивності випромінювання $I(\nu)$ від частоти рис.13.4. Вона характеризує ступінь немонохроматичності спектральної лінії. Розширення спектральної лінії визначається трьома основними факторами:

- 1) *радіаційним затуханням,*
- 2) *розширенням енергетичних рівнів,*
- 3) *ефектом Доплера.*

1) Радіаційне затухання притаманне всім системам, що випромінюють. Власні коливання системи, що випромінює, повинні бу-

ти затухаючими, бо система втрачає енергію. Затухаюче коливання не монохроматичне. До його складу входять коливання із набору частот або навіть із неперервним спектром коливань. Розподіл інтенсивності в контурі лінії, що визначається радіаційним затуханням, описується дисперсійною формулою Лоренца

$$\frac{I_\nu}{I_0} = \frac{(\gamma/2)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2}, \quad (13.30)$$

де ω_0 - власна частота системи, що випромінює, γ - радіаційна ширина лінії. Величина $\Delta\omega = 0,5\gamma$ називається **природною шириною („напівшириною“) спектральної лінії**.

Поняття природної ширини спектральної лінії існує в класичній електродинаміці. Знайдемо її відповідність із шириною спектральної лінії в квантовій механіці. Для цього розглянемо випромінювання гармонічного осцилятора, котрий коливається з частотою ω . Згідно формули (13.18) зменшення енергії осцилятора за час dt визначається за формулою $d\omega/\omega = \gamma_0 dt$, яке після інтегрування має вигляд

$$\omega = \omega_0 \exp\{-\gamma_0 t\} \quad (13.31)$$

де γ_0 - коефіцієнт затухання коливань осцилятора або величина, обернено пропорційна середньому часу життя τ

$$\gamma_0 = \tau^{-1} = 2e^2\omega^2/3m_0c^3. \quad (13.32)$$

Середній час життя гармонічного осцилятора τ залежить лише від частоти (довжини хвилі) і становить для видимого діапазону частот **10^{-8} с.**

Енергія осцилятора ω пропорційна амплітуді його коливань $\omega \sim a^2$, тому

$$a = a_0 \exp\{-\gamma_0 t/2\}. \quad (13.33)$$

Затухаючі коливання не є гармонічними коливаннями. Їх можна представити у вигляді інтеграла Фур'є із безлічі гармонічних коливань

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (13.34)$$

$$\text{де} \quad a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Амплітуда гармонічного осцилятора змінюється в часі таким чином

$$F(t) = 0 \quad \text{при } t < 0$$

$$F(t) = a_0 \exp\{-\gamma_0 t/2\} \exp\{i\omega_0 t\} \quad \text{при } t \geq 0. \quad (13.35)$$

Підставивши $F(t)$ із (13.34) у формулу для амплітуди, отримаємо

$$a(\omega) = \int_0^{\infty} a_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t} \exp\{i(\omega_0 - \omega)t\} dt = \frac{a_0}{\gamma_0/2 - i(\omega_0 - \omega)}. \quad (13.36)$$

Якщо позначити інтенсивність I_ν , віднесену до одиничного інтервалу частот, то $I_\nu \approx dE/d\nu \approx a^* a$ й для інтенсивності випромінювання отримаємо

$$\frac{I_\nu}{I_0} = \frac{(\gamma_0/2)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma_0/2)^2}, \quad (13.37)$$

де $I_0 = I_{\max} = a_0^2 / (\gamma_0/2)^2$. Максимальна інтенсивність має місце, коли $\omega = \omega_0$, а при $I_\nu/I_0 = 1/2$, із (13.37) знаходимо напівширину спектрального контуру гармонічного осцилятора

$$\omega = \omega_0 \pm 0,5\gamma_0 \quad (13.38)$$

або

$$\Delta\omega = 0,5\gamma_0 = \frac{e^2 \omega^2}{3m_0 c^3} \quad (13.38^*)$$

Величина $\Delta\omega$ називається **природною шириною спектральної лінії в класичній електродинаміці (або природною шириною лінії класичного осцилятора із зарядом e і масою m_0)**. Підстановка e та m_0 електрона дає $\Delta\omega = 0,44/\lambda^2$. Для видимого світла з $\lambda = 5 \times 10^{-5}$ см $\Delta\omega = 1,76 \times 10^8$ с⁻¹ або $\Delta\lambda \cong 1,17 \times 10^{-12}$ см. Експериментальні ширини ліній більші за ті, яку дає формула (13.57).

=====

=====

У квантової механіці ширина спектральних ліній залежить від невизначеності стаціонарних рівнів атомів

$$\begin{aligned} \Delta E \Delta t &= \Delta(\hbar\omega) \Delta t = \hbar \Delta\omega \tau > \hbar \\ \Delta\omega &\geq 2\pi/\tau \end{aligned} \quad (13.39)$$

де $\Delta t \approx \tau$ - середній час життя атома у збудженому стані. Чим більший середній час життя τ у збудженому стані, тим менше ширина спектральної лінії.

Інтенсивність спонтанних переходів залежить від коефіцієнта Ейнштейна $A_{1,2}$ - імовірності спонтанного переходу. За допомогою $A_{1,2}$ запишемо зменшення кількості збуджених станів у дворівневій системі:

$$-dN_2 = A_{2,1} N_2 dt, \quad (13.40)$$

яке легко інтегрується

$$N_2 = N_{2,0} e^{-A_{2,1}t}. \quad (13.41)$$

Тоді середній час життя перебування у збудженому стані τ

$$\langle t \rangle \equiv \tau = \frac{\int_0^{\infty} t \cdot N_2 e^{-A_{2,1}t} dt}{\int_0^{\infty} N_{2,0} e^{-A_{2,1}t} dt} = \frac{1}{A_{2,1}} \quad (13.42)$$

виявляється обернено пропорційний коефіцієнту спонтанного випромінювання Ейнштейна

$$\frac{1}{\tau} = A_{2,1} \quad (13.43)$$

Підставимо τ із (13.39) у (13.43), тоді

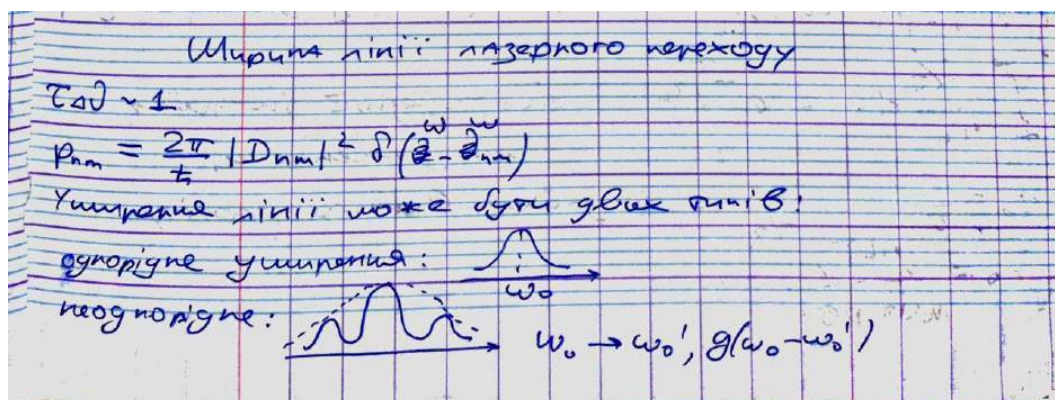
$$\Delta\nu > \tau^{-1} = A_{2,1}. \quad (13.43^*)$$

Таким чином, **чим більше коефіцієнт спонтанного переходу Ейнштейна, тим менше час життя електрона в збудженому стані, і тим більша ширина спектральних рівнів**. Для затухаючого осцилятора коефіцієнт затухання рівний

$$\frac{1}{\tau_{\text{осцилятора}}} = \frac{2e^2 \omega^2}{3m_0 c^3}, \quad (13.44)$$

а для реального терму він залежить від **сили осцилятора** $f_{2,1}$

$$\gamma = \frac{1}{\tau} = A_{1,2} = \gamma_0 f_{1,2} \left(\frac{g_2}{g_1} \right) = \frac{g_2}{g_1} \frac{2e^2 \omega_{21}^2}{m_0 c^3} f_{1,2}. \quad (13.45)$$



Замовний розподіл випромінювання по частотам

$$g(\omega_0 - \omega) = \int_0^\infty g(\omega_0 - \omega_0') g(\omega_0' - \omega) d\omega_0'$$

$$\ddot{x} = \omega_0^2 x + \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^2} \ddot{x}$$

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x - \frac{2}{3} \ddot{x} = 0$$

$$\delta = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 \omega^2}{c^2 m}$$

$$\gamma \sim \frac{1}{\tau}$$

$$\Delta U \sim \delta \quad \Delta U \sim 10^5 \text{ ГВ}$$

$$E(t) = E_0 e^{-i(\omega_0 + \frac{1}{2} \frac{d\varphi(t)}{dt})t}$$

висока зйменшення

- пошук гармонічних
осциляторів

Р. 17

$\varphi(t)$ - випадковий процес

$$P(\tau, \tau) = e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \quad \tau = \frac{1}{\gamma_0}$$

$$\Delta\varphi = \varphi(t+\tau) - \varphi(t)$$

Кореляційна функція:

$$G(t, t+\tau) = |E_0|^2 e^{-i\omega_0 \tau} \langle e^{-i\varphi(t)} e^{i\varphi(t+\tau)} \rangle$$

$$\langle e^{i\Delta\varphi} \rangle$$

$$\langle e^{i(\varphi(t+\tau) - \varphi(t))} \rangle$$

$$\Delta\varphi$$

Для інваріантності того, що з'являється десь не інваріант

$$\int P(\tau) d\tau \int e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \cdot \frac{d\tau}{\tau_0} \quad \text{інваріантності, того, що з'являється не інваріант}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau/\tau_0}}{\tau_0} d\tau = e^{-\tau/\tau_0}$$

τ_0 - середній інтервал
між зйменшеннями

$$\tau_0 = \frac{c}{v}$$

c - довжина світлового променя

$$\tau_0 = \frac{(m c^2)}{16 \sqrt{\pi} p \sigma^2}^{1/2}$$

$$g(r) = \sqrt{\frac{2\pi}{m}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Одним $\Delta U \sim 10^7$

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 \pm \frac{v}{c}}$$

Закон Беккера-Мюллера

$$dP = B \cos \theta dS d\Omega$$

→ закон Беккера-Мюллера

Одним из результатов, что $dP = 100 \text{ мВт}$, не-не мэт
 • Основным фактором мэт, одним из факторов:
 Норматив, что может изменять пинзала системы на
 живое пространство.

12. Однорідне уширення спектральних ліній.

Лекция вторая. ШИРИНА ЛИНИИ

Соотношение неопределенностей «энергия — время», естественное время жизни, ширина спектра спонтанного излучения. Лоренцева форма линии. Вероятность индуцированных переходов при монохроматическом излучении. Однородное и неоднородное уширения. Гауссова форма линии при доплеровском уширении.

Рассмотрим вопрос о ширине линии излучения (поглощения).

До сих пор мы говорили о двух уровнях энергии, замалчивая то обстоятельство, что уровни имеют конечную ширину. Дело в том, что любые процессы, сокращающие время жизни частиц на уровнях, приводят к уширению линий соответствующих перехо-

дов. Действительно, определение энергии состояния должно проводиться за время, не превышающее время жизни в этом состоянии τ . А тогда неточность определения энергии в соответствии с соотношением неопределенностей «энергия — время»

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \quad (2.1)$$

не может быть меньше \hbar/τ . Неопределенность энергии состояния приводит к неопределенности частоты перехода, равной $1/2\pi\tau$. Постоянная времени τ является мерой времени, необходимого для того, чтобы возбужденная система отдала свою энергию. Значение τ определяется скоростями спонтанного излучения и безызлучательных релаксационных переходов.

В отсутствие внешних воздействий спонтанное излучение определяет время жизни состояния. Поэтому наименьшая возможная, так называемая естественная ширина линии $\Delta\nu_0$, определяется вероятностью спонтанного перехода A_{21} :

$$\Delta\nu_0 = A_{21}/2\pi. \quad (2.2)$$

Естественная ширина, как правило, существенна только на очень высоких частотах ($A_{21} \sim \nu^3$) и для хорошо разрешенных переходов. Обычно влиянием спонтанного излучения на ширину линии можно пренебречь, так как в реальных условиях релаксационные переходы более эффективно сокращают время жизни.

Как уже говорилось, в системах с дискретными уровнями энергии, кроме индуцированных и спонтанных переходов, существенную роль играют релаксационные безызлучательные переходы. Эти переходы возникают в результате взаимодействий квантовой частицы с ее окружением. Механизм процессов этих взаимодействий сильно зависит от вида конкретной системы. Это может быть взаимодействие между ионом и решеткой кристалла; это могут быть соударения между молекулами газа или жидкости и т. д. В конечном счете результатом действия релаксационных процессов является обмен энергией между подсистемой рассматриваемых частиц и тепловыми движениями во всей системе в целом, приводящий к термодинамическому равновесию между ними.

Обычно время установления равновесия, время жизни частицы на уровне, обозначается T_1 и называется продольным временем релаксации. Такая терминология отвечает традиции, установившейся при исследовании явлений ядерного магнитного резонанса (ЯМР) и электронного парамагнитного резонанса (ЭПР). Продольная релаксация соответствует движению вектора высокочастотной намагниченности системы частиц вдоль направления внешнего постоянного магнитного поля. Существует еще поперечное время релаксации T_2 , которое соответствует движению вектора намагниченности в плоскости, перпендикулярной направлению внешнего постоянного поля.

Как правило, нас интересует поведение большой совокупности частиц, электрический или магнитный дипольный момент этой совокупности. Полный момент определяется фазовыми соотношениями между моментами индивидуальных частиц. Пусть в начальный момент времени все частицы имеют дипольные моменты, осциллирующие синфазно. С течением времени эта синфазность будет нарушаться. Время T_2 является мерой того отрезка времени, в течение которого частицы приобретут случайные по отношению друг к другу фазы.

Любой процесс, вносящий вклад во время релаксации T_1 , т. е. любой процесс потери энергии частицами, приводит к потере фазы. Следовательно,

$$T_2 \leq T_1. \quad (2.3)$$

Но существуют взаимодействия, которые, хотя и не меняют энергию ансамбля частиц, увеличивают степень беспорядка, разрушая фазовые соотношения между составляющими ансамбль частицами. Например, при газокINETических соударениях одна молекула газа совершает переход $2 \rightarrow 1$, а другая $1 \rightarrow 2$. Система в целом не меняет своей энергии. Но фазовая информация при этом теряется, фазовая память нарушается. Можно считать, что время T_2 — это время фазовой памяти или время передачи энергии от частицы к частице по уровню.

Во всех системах, где существенны взаимодействия частиц друг с другом (спин-спиновые взаимодействия, вообще диполь-дипольные взаимодействия, упругие соударения), $T_2 < T_1$, зачастую $T_2 \ll T_1$. В молекулярных пучках, т. е. когда частицы летят, не соударяясь друг с другом, $T_2 = T_1$, равному, в свою очередь, времени пролета через область взаимодействия с полем излучения. Последнее верно, очевидно, только в случае относительно длинного естественного времени жизни ($T_1 \ll 1/A_{21}$).

Так как время T_2 является самым коротким временем релаксации, то именно оно и определяет ширину линии перехода $\Delta\nu_L$:

$$\Delta\nu_L = 1/2\pi T_2. \quad (2.4)$$

В дальнейшем изложении для нас будет более удобным пользоваться обозначением τ для времени жизни частицы на уровне и выделять индексом «0» естественное время жизни (время жизни по отношению к спонтанному излучению) τ_0 . Время релаксации, определяющее в том или ином процессе ширину линии перехода, будет обозначаться как $1/2\pi\Delta\nu_L = 1/\Delta\omega_L$.

Итак, конечность времени жизни частицы в возбужденном энергетическом состоянии ведет к уширению уровней энергии. Излучение с уширенных уровней приобретает спектральную ширину. Наиболее общим, фундаментальным механизмом, ограничивающим сверху время жизни частицы на возбужденном уровне,

является спонтанное излучение, которое должно, таким образом, иметь спектральную ширину, соответствующую скорости актов спонтанного распада.

Квантовая электродинамика позволяет вычислить спектральное распределение квантов спонтанного излучения, исходящих с уровня шириной

$$\Delta E = \hbar/\tau_0. \quad (2.5)$$

Контур линии спонтанного излучения оказывается имеющим так называемую лоренцеву форму с шириной

$$\Delta \nu_L = \Delta E/\hbar = 1/2\pi\tau_0. \quad (2.6)$$

Лоренцева форма линии определяется форм-фактором

$$q(\nu) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta \nu_L}{(\nu - \nu_0)^2 + \Delta \nu_L^2/4} \quad (2.7)$$

и имеет вид резонансной кривой с максимумом на частоте $\nu = \nu_0$, спадающей до уровня половины пиковой величины при частотах $\nu = \nu_0 \pm \Delta \nu_L/2$. Очевидно, что полная ширина кривой на половине максимальной величины составляет $\Delta \nu_L$.

Если принимать во внимание возможность спонтанного распада не только верхнего из двух рассматриваемых уровней энергии, но и нижнего, когда нижний уровень не является основным, то под $\Delta \nu_L$, входящей в формулу (2.7), следует понимать величину, определяемую суммой скоростей распада этих уровней $1/\tau_{02}$ и $1/\tau_{01}$:

$$\Delta \nu_L = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau_{02}} + \frac{1}{\tau_{01}} \right). \quad (2.8)$$

Выражение (2.7) может быть легко получено в классическом приближении.

Уравнение движения осциллирующего диполя с радиационным затуханием сводится к уравнению гармонического осциллятора с вязким трением:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_{01}x = 0, \quad (2.9)$$

где ω_{01} — круговая частота колеблющегося электрона в диполе, состоящем из электрона и ядра, а γ — классический коэффициент затухания его излучения. Решение этого уравнения хорошо известно:

$$x = Ce^{-\gamma t/2} e^{i\omega_1 t}, \quad (2.10)$$

где $\omega_1^2 = \omega_{01}^2 - (\gamma/2)^2$, а C — произвольная амплитуда. Так как интенсивность излучения, испускаемого рассматриваемым лоренцевским осциллятором, пропорциональна квадрату амплитуды колебаний электрона в осцилляторе, то видно, что интенсивность излучения экспоненциально падает во времени с характерным

временем

$$\tau = 1/\gamma. \quad (2.11)$$

Это время представляет собой среднее время жизни возбужденного состояния.

Временной зависимости (2.10) соответствует спектральное распределение $g(\omega)$, которое легко получается фурье-преобразованием $x(t)$:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{jC/\sqrt{2\pi}}{\omega_1 - \omega + j\gamma/2}. \quad (2.12)$$

При вычислении (2.12) учтено, что (2.10) получено для $t \geq 0$. Формула (2.12) даст спектральное распределение амплитуд. Спектральное распределение интенсивности есть квадрат модуля распределения амплитуды. Следовательно,

$$G(\omega) = g(\omega) g^*(\omega) = \frac{C^2/2\pi}{(\omega_1 - \omega)^2 + \gamma^2/4}. \quad (2.13)$$

Вводя обозначения $\gamma = 2\pi\Delta\nu_L$, $\omega_1 = 2\pi\nu_0$, $\omega = 2\pi\nu$ и приняв значение константы $C^2 = 4\pi\Delta\nu_L$, мы получаем выражение (2.7) для форм-фактора $q(\nu)$.

Итак, таковы спектральные свойства спонтанного излучения. Его интенсивность частотно зависима. Следовательно, его вероятность зависит от частоты, имеет некоторую спектральную плотность:

$$W_{\nu}^{\text{спонт}} = q(\nu) W^{\text{спонт}} = A_{21}q(\nu). \quad (2.14)$$

При этом необходимо, чтобы

$$\int_{\nu} W_{\nu}^{\text{спонт}} d\nu = W^{\text{спонт}}. \quad (2.15)$$

Отсюда вытекает требование нормировки форм-фактора $q(\nu)$:

$$\int_0^{\infty} q(\nu) d\nu = 1, \quad (2.16)$$

что уже выполнено в записи (2.7) в предположении $\nu_0 \gg \Delta\nu_L/2$.

Далее. Мы уже выяснили, что вероятности спонтанного и индуцированного излучений связаны друг с другом. Это было доказано с помощью весьма общих термодинамических соображений. Следовательно, вероятность индуцированного испускания также частотно зависима и имеет спектральную плотность

$$W_{\nu}^{\text{инд}} = q(\nu) W^{\text{инд}} = q(\nu) B_{21}\rho_{\nu}. \quad (2.17)$$

При этом

$$W^{\text{инд}} = \int_{\nu} q(\nu) \rho_{\nu} B_{21} d\nu. \quad (2.18)$$

Если индуцирующее излучение монохроматично, то

$$\rho_\nu = \rho \delta(\nu - \nu_0), \quad (2.19)$$

где ρ — объемная плотность этого излучения, а $\delta(x)$ — пинцетная дельта-функция Дирака. Тогда интеграл (2.18) легко берется, и

$$W^{\text{инд}} = q(\nu_0) B_{21} \rho = 2 B_{21} \rho / \pi \Delta \nu_{\text{л}}. \quad (2.20)$$

Сокращение времени жизни, приводящее к появлению конечной ширины линии $\Delta \nu_{\text{л}}$, уменьшает вероятность индуцированных переходов, вызываемых монохроматическим полем излучения, обратно пропорционально ширине линии.

Уширение линии, обусловленное конечностью времени жизни состояний, связанных рассматриваемым переходом, называется однородным. Каждый атом, находящийся в соответствующем состоянии, излучает при переходе сверху вниз линию с полной шириной $\Delta \nu_{\text{л}}$ и спектральной формой $q(\nu)$. Аналогично каждый атом, находящийся в соответствующем нижнем состоянии, поглощает при переходе снизу вверх излучение в спектре с полной шириной $\Delta \nu_{\text{л}}$ и в соответствии со спектральной зависимостью $q(\nu)$. Невозможно приписать какую-либо определенную спектральную компоненту в спектре $q(\nu)$ какому-то определенному атому. При однородном уширении вне зависимости от его природы спектральная зависимость $q(\nu)$ есть единая спектральная характеристика как одного атома, так и всей совокупности атомов. Изменение этой характеристики, в принципе возможное при том или ином воздействии на ансамбль атомов, происходит одновременно и одинаковым образом для всех атомов ансамбля.

Примерами однородного уширения являются естественная ширина линии и столкновительное уширение в газах.

13. Неднорідне уширення спектральних ліній внаслідок ефекту Доплера.

Другое дело — неоднородное уширение. Экспериментально наблюдаемые спектральные линии могут явиться бесструктурной суперпозицией нескольких спектрально неразрешимых однородно уширенных линий. В этих случаях каждая частица излучает или поглощает не в пределах всей экспериментально наблюдаемой линии. Такая спектральная линия называется неоднородно уширенной. Причиной неоднородного уширения может быть любой процесс, приводящий к различию в условиях излучения (поглощения) для части одинаковых атомов исследуемого ансамбля частиц, или наличие в ансамбле атомов с близкими, но различными спектральными свойствами (сверхтонкая структура того или иного вида), однородно уширенные спектральные линии которых перекрываются лишь частично. Термин «неоднородное уширение» возник в спектроскопии ЯМР, в которой уширение этого типа происходило из-за неоднородности внешнего намагничивающего поля в пределах исследуемого образца. Аналогичную природу имеет неоднородное уширение в примесных люминесцентных кристаллах, в которых неоднородность внутрикристаллического электрического поля приводит к различию в величине штарков-

ского сдвига частоты излучения примесными центрами, расположенными в различных местах кристаллического образца.

Классическим примером неоднородного уширения является доплеровское уширение, характерное для газов при малых давлениях и (или) высоких частотах.

Атомы (молекулы, ионы) газа находятся в тепловом движении. Доплер-эффект первого порядка приводит к смещению частоты излучения частиц, летящих на наблюдателя со скоростью u , на величину $v_0 u/c$, где v_0 — частота излучения покоящейся частицы, а c — скорость света. Естественное уширение превращает излучение на частоте ν_0 в спектральную линию, но это уширение однородно, и частотный сдвиг $v_0 u/c$ испытывает вся линия. Так как частицы газа движутся с различными скоростями, то частотные сдвиги их излучения различны, а суммарная форма линии газа в целом определяется распределением частиц по скоростям. Последнее верно, строго говоря, если естественная ширина линии много уже доплеровских сдвигов частоты, что, как правило, имеет место. Тогда, если обозначить через $p(u)$ функцию распределения частиц по скоростям, форм-фактор доплеровской линии $q(\nu)$ оказывается связанным с $p(u)$ простым соотношением:

$$q(\nu) d\nu = p(u) du. \quad (2.21)$$

Далее, наблюдаемая частота равна

$$\nu = \nu_0 (1 + u/c). \quad (2.22)$$

Следовательно, $u = c(\nu - \nu_0)/\nu_0$ и $du = (c/\nu_0) d\nu$. Отсюда

$$q(\nu) = \frac{c}{\nu_0} p\left(c \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}\right). \quad (2.23)$$

При максвелловском распределении частиц по скоростям

$$p(u) = \frac{1}{u_0 \sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{u}{u_0}\right)^2\right], \quad (2.24)$$

где средняя тепловая скорость

$$u_0 = \sqrt{2kT/m}. \quad (2.25)$$

Здесь k — постоянная Больцмана, T — температура газа, m — масса атома (молекулы) газа. Строго говоря, максвелловское распределение справедливо только при тепловом равновесии. Однако отклонение от него обычно незначительно даже для возбужденных (излучающих) частиц. Во всяком случае количественные оценки с помощью максвелловского распределения получаются достаточно надежными. Комбинируя (2.25), (2.24) и (2.23), легко получить $q(\nu)$ в виде

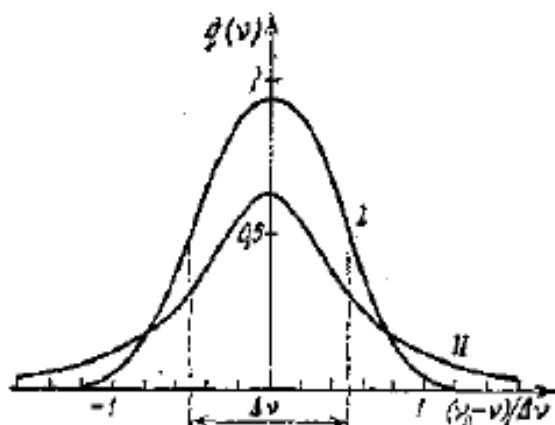
$$q(\nu) = \frac{c}{u_0 \nu_0 \sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{c^2}{u_0^2} \left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}\right)^2\right] = \frac{1}{\Delta\nu_T \sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_T}\right)^2\right], \quad (2.26)$$

где введено обозначение $\Delta\nu_T$ для характерной спектральной ширины, равной доплеровскому сдвигу частоты при средней тепловой скорости движения излучающей частицы:

$$\Delta\nu_T = \nu_0 u_0 / c. \quad (2.27)$$

Линия, форма которой определяется форм-фактором (2.26), называется доплеровски уширенной линией. Ее форма, как видно из (2.26), описывается функцией Гаусса и симметрична относительно центральной частоты ν_0 . Спад кривой $q(\nu)$ (2.26) при сильной отстройке от ν_0 происходит гораздо более круто, чем в случае лоренцева контура линии (2.7). Около центральной частоты гауссова кривая более пологая. Очевидно, что ее ширина определяется параметром $\Delta\nu_T$. При удалении от центра кривой на $\Delta\nu_T$ интенсивность падает в e раз. Если определить, как обычно, ширину линии как расстояние между такими точками отстройки (в нашем случае симметричными) от центральной частоты, в которых

Рис. 2.1. Гауссова (I) и лоренцева (II) формы линии (нормированные на единицу) при одинаковой ширине на половине высоты, показанной отрезком $\Delta\nu$ на оси абсцисс. Масштаб по оси ординат выбран в единицах $1/\Delta\nu$.



интенсивность составляет половину максимальной (так называемая полная ширина на половине высоты), то в случае доплеровского уширения из (2.26) легко получить, что эта ширина равна

$$\Delta\nu_D = \Delta\nu_T 2 \sqrt{\ln 2} = 2\nu_0 \sqrt{\frac{2kT}{mc^2} \ln 2}. \quad (2.28)$$

Подчеркнем, что гауссова форма линии в записи (2.26) нормирована на единицу: $\int_0^\infty q(\nu) d\nu = 1$ в предположении, что $\nu_0 \gg \Delta\nu_T$. На рис. 2.1 показаны формы линий при однородном (2.7) и неоднородном (2.26) уширении для случая $\Delta\nu_D = \Delta\nu_T$.

С увеличением частоты роль доплеровского уширения возрастает. В видимом диапазоне при не слишком высоких температурах (300—600 K) значение $\Delta\nu_D$ составляет величину порядка 0,8—1,5 ГГц. Для справок удобна формула, пересчитанная в длины волн:

$$\Delta\lambda_D/\lambda_0 = 7 \cdot 10^{-7} \sqrt{T/M}, \quad (2.29)$$

где M — относительная молекулярная масса. Так как $d\lambda/\lambda = -dv/v$, то формуле (2.29), очевидно, эквивалентна запись

$$\Delta v_D/v_0 = 7 \cdot 10^{-7} \sqrt{T/M}. \quad (2.30)$$

Подкоренной характер зависимости $\Delta v_D(T, M)$ приводит к тому, что для грубых численных оценок $\Delta v_D/v_0$ (или $\Delta \lambda_D/\lambda_0$) можно считать в условиях, например, тлеющего газового разряда постоянной величиной, равной $(2-3) \cdot 10^{-8}$.

Забегая несколько вперед, приведем два примера.

Для CO_2 -лазера (излучение молекул CO_2 при температуре около 400 К на волне около 10 мкм) Δv_D составляет 60 МГц, для гелий-неонового лазера (излучение атомов неона при температуре около 400 К на волне 0,63 мкм) доплеровская ширина линии достигает 1,35—1,40 ГГц.

Другая книга:

2.3.3.2. Неоднородное уширение

Предположим, что некий механизм уширения распределяет резонансные частоты атомов в некоторой полосе частот с центром в ν_0 и что относительная плотность распределения этих частот равна $g^*(\nu'_0 - \nu_0)$. Согласно этому, $g^*(\nu'_0 - \nu_0) d\nu'_0$ есть вероятность того, что резонансная частота атома попадает в интервал между ν'_0 и $\nu'_0 + d\nu'_0$. Тогда из выражения (2.36а) или, в более общем случае, из (2.47), если действует также какой-либо другой механизм уширения (например, столкновительное уширение), можно получить среднее значение коэффициентов вынужденного излучения или поглощения. Таким образом,

$$\begin{aligned} W &= \frac{2\pi^2}{3n^2\epsilon_0\hbar^2} |\mu|^2 \rho \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(\nu'_0 - \nu_0) g(\nu - \nu'_0) d\nu'_0 = \\ &= \frac{2\pi^2}{3n^2\epsilon_0\hbar^2} |\mu|^2 \rho g_t(\nu - \nu_0); \end{aligned} \quad (2.68)$$

здесь через $g_t(\nu - \nu_0)$ обозначена функция

$$g_t = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(x) g[(\nu - \nu_0) - x] dx, \quad (2.69)$$

причем $x = \nu'_0 - \nu_0$. Отсюда следует, что формула (2.39) остается справедливой и в том случае, когда присутствуют два механизма уширения: один однородный с формой линии g и другой неоднородный с формой линии g^* , причем функция g_t представляет собой свертку этих двух функций. Если однородное уширение, описываемое функцией $g(\nu - \nu'_0)$, много меньше неоднородного уширения $g^*(\nu'_0 - \nu)$, то функцию $g(\nu - \nu'_0)$ можно аппроксимировать δ -функцией Дирака, и тогда

$$W = \frac{2\pi^2}{3n^2 e_0 h^2} |\mu|^2 \rho g^*(\nu - \nu_0). \quad (2.70)$$

Этот случай иногда рассматривают как полностью неоднородное уширение.

В газах типичный механизм неоднородного уширения связан с движением атомов и называется доплеровским уширением. Чтобы проиллюстрировать этот тип уширения, рассмотрим молекулу, которая движется в поле электромагнитного излучения, имеющего частоту ν (причем эта частота измеряется в лаб. системе координат). Обозначим через v составляющую скорости молекулы (измеряемую в той же лаб. системе координат) в направлении распространения электромагнитной волны. Тогда частота волны ν' , измеряемая в системе координат движущегося атома, равна $\nu' = \nu [1 \pm (v/c)]$ (эффект Доплера), причем знак минус или плюс выбирается в зависимости от того, совпадают ли направления движения молекулы и распространения электромагнитной волны, или они направлены в противоположные стороны. Действительно, хорошо известно, что, если молекула движется навстречу волне, частота ν' , наблюдаемая в системе координат атома, всегда больше частоты ν , наблюдаемой в лаб. системе координат. Разумеется, при этом поглощение будет происходить только тогда, когда частота ν' электромагнитной волны в системе координат атома равна частоте атомного перехода ν_0 , т. е. когда

$$\nu [1 \pm (v/c)] = \nu_0. \quad (2.71)$$

Если переписать это выражение в виде

$$\nu = \nu_0 / (1 \pm v/c), \quad (2.72)$$

то мы придем к иной интерпретации процесса. А именно при рассмотрении взаимодействия электромагнитного излучения с

атомом результат будет тем же самым, как если бы атом был неподвижен, но имел резонансную частоту ν'_0 , определяемую выражением

$$\nu'_0 = \nu_0 / (1 \pm v/c), \quad (2.73)$$

где ν_0 — истинная частота атомного перехода. В самом деле, поглощение при такой интерпретации может происходить, когда частота ν электромагнитной волны равна ν'_0 , что согласуется с (2.72), если для ν'_0 использовать выражение (2.73). С этой точки зрения можно сказать, что данный механизм уширения действительно является неоднородным в смысле определения, данного в начале этого раздела. Чтобы вычислить соответствующую форму линии $g^*(\nu'_0 - \nu_0)$, достаточно вспомнить, что в газе, находящемся при температуре T , вероятность $p_v dv$ того, что атом массой M имеет составляющую скорости между v и $v + dv$, дается распределением Максвелла

$$p_v dv = \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{Mv^2}{2kT} \right) dv. \quad (2.74)$$

Поскольку из (2.73) следует, что

$$v = \frac{c(\nu'_0 - \nu_0)}{\nu'_0} \approx \frac{c(\nu'_0 - \nu_0)}{\nu_0}, \quad (2.75)$$

то из выражений (2.74) и (2.75) получается искомое распределение, если мы договоримся, что $g^*(\nu'_0 - \nu_0) d\nu'_0 = p_v dv$. Таким образом, мы получаем соотношение

$$g^*(\nu'_0 - \nu_0) = \frac{1}{\nu_0} \left(\frac{Mc^2}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{Mc^2}{2kT} \frac{(\nu'_0 - \nu_0)^2}{\nu_0^2} \right], \quad (2.76)$$

так что в случае чисто неоднородного уширения в соответствии с (2.70) контур линии запишется в виде

$$g^*(\nu - \nu_0) = \frac{1}{\nu_0} \left(\frac{Mc^2}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{Mc^2}{2kT} \frac{(\nu - \nu_0)^2}{\nu_0^2} \right]. \quad (2.77)$$

На рис. 2.8 изображена функция $g^*(\nu - \nu_0) = g^*(\Delta\nu)$ в зависимости от $\Delta\nu$. Как и в случае лоренцевой кривой, максимум достигается в точке $\Delta\nu = 0$, а ширина контура (доплеровская ширина линии) теперь равна

$$\Delta\nu_0^* = 2\nu_0 \left(\frac{2kT}{Mc^2} \ln 2 \right)^{1/2}. \quad (2.78)$$

Такая кривая называется *гауссовой*. Заметим, что выраженное через ширину линии $\Delta\nu_0^*$ максимальное значение $g^*(0)$ запишется в виде

$$g^*(0) = \frac{2}{\Delta\nu_0^*} \left(\frac{\ln 2}{\pi} \right)^{1/2} = \frac{0,939}{\Delta\nu_0^*}, \quad (2.79)$$

в то время как для лоренцевой кривой максимальное значение равно

$$g(0) = \frac{2}{\pi \Delta\nu_0} = \frac{0,637}{\Delta\nu_0}. \quad (2.80)$$

Следовательно, при данной ширине линии гауссова кривая заострена сильнее лоренцевой.

Другим механизмом неоднородного уширения, приводящим опять-таки к гауссовой форме линии, может быть любое явление, которое вызывает случайное распределение частот атомных переходов. Например, если локальное электрическое поле кристалла случайным образом изменяется от точки к точке вследствие, скажем, дефектов кристаллической решетки, то благодаря эффекту Штарка возникнут локальные сдвиги энергетических уровней, а вместе с ними и частот атомных переходов. Аналогичное явление имеет место также и в резупорядоченных средах (таких, как стекло или жидкость), поскольку окружающие рассматриваемый атом, распределены случайным образом. Что касается ширины линии, то она определяется теперь среднеквадратичным отклонением локального электрического поля.

По формуле (2.78) можно вычислить доплеровскую ширину линии $\Delta\nu_0^* = \Delta\omega_0/2\pi$ атома Ne при $T = 300$ К на длине волны $\lambda = 0,6328$ мкм (одна из линий неона, на которой осуществляется лазерная генерация; см. гл. 6), которая оказывается равной

$$\Delta\nu_0^* = 1,7 \text{ ГГц}. \quad (2.81)$$

Сравнение этой величины с соответствующими значениями, вычисленными для столкновительного [см. (2.66)] и естественного уширений, показывает, что в рассматриваемом примере доплеровское уширение значительно больше естественного, которое в свою очередь существенно больше столкновительного. Это соотношение, впрочем, не всегда справедливо, поскольку при достаточно высоких давлениях газа столкновительное уширение преобладает над доплеровским (например, в CO_2 -лазере при атмосферном давлении; см. гл. 6).

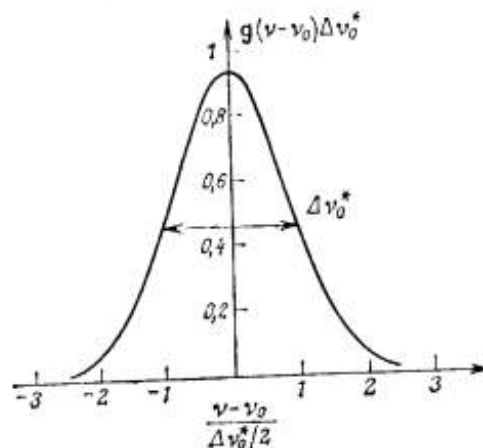


Рис. 2.8. Гауссова линия (нормированная зависимость).

14. Просторова селекція в атомних пучках.

§ 3.2. Селекция продольных мод

Сам по себе лазерный открытый резонатор является средством разрежения спектра по сравнению, например, со спектром равновеликого объемного резонатора. Однако поскольку полоса усиления активных сред, как правило, довольно велика, в эту полосу обычно попадает большое число мод лазерного резонатора, в частности продольных. Поэтому применяются некоторые средства дополнительного разрежения спектра лазерных резонаторов. Такое дополнительное разрежение спектра получило название селекции мод. Все методы селекции мод основаны на увеличении потерь одних мод по сравнению с другими, рабочими. Селекция продольных мод, отличающихся частотой, требует применения узкополосных дисперсионных элементов.

Одним из самых простых средств селекции продольного спектра резонатора является уменьшение по возможности его длины. Дей-

ствительно, расстояние между продольными модами линейного резонатора равно

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L}, \quad (3.10)$$

где L — его длина. При уменьшении длины L расстояние между продольными модами увеличивается. В табл. 3.1 даны частотные расстояния между продольными модами для некоторых длин. При длине

Таблица 3.1

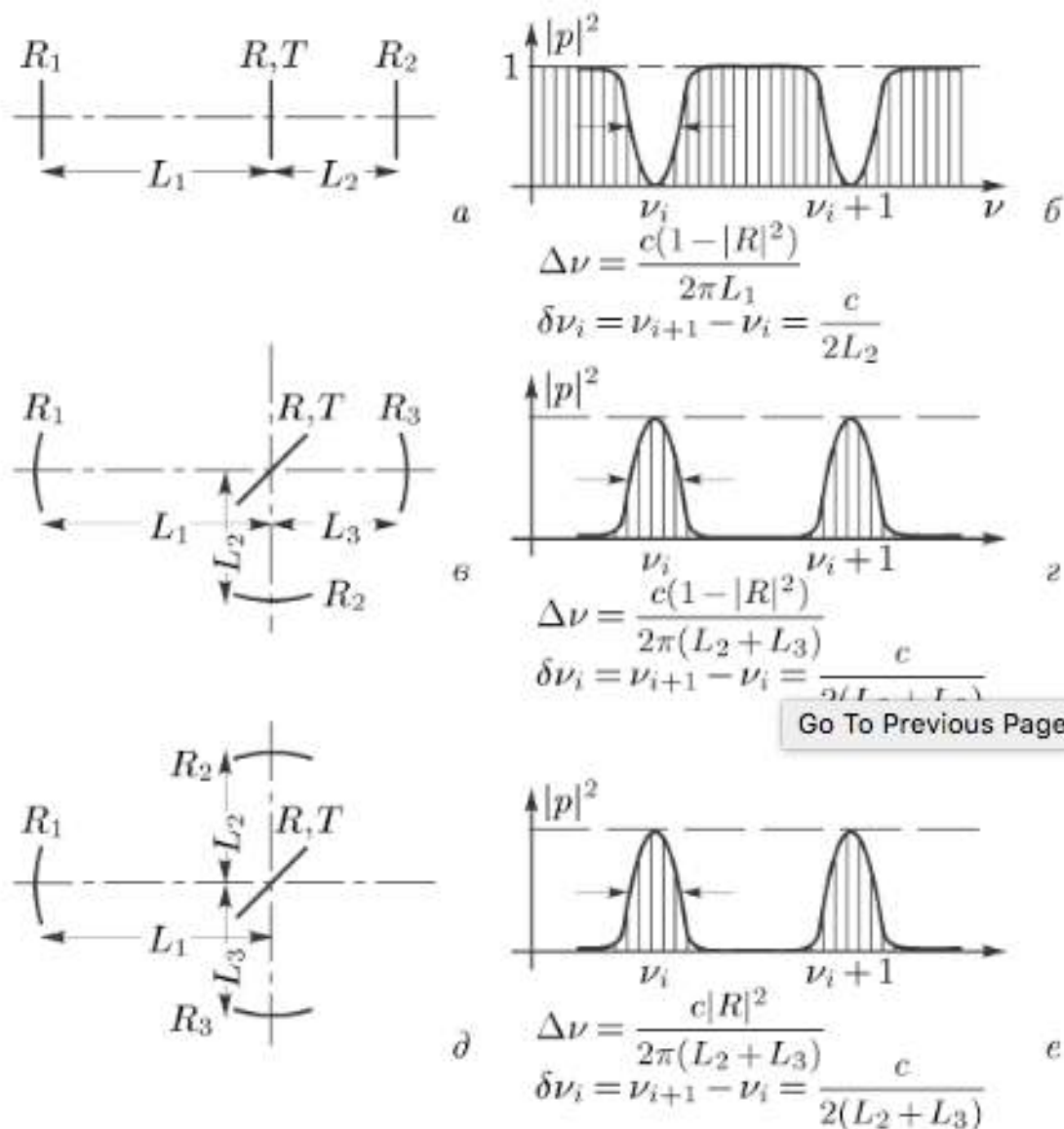
L , см	$\Delta\nu$, МГц
100	150
30	500
10	1500
3	5000

резонатора 10 см или меньше расстояние между продольными модами становится больше полосы усиления некоторых газовых лазеров, т. е. возбуждаться в них будет единственная продольная мода.

Если возможности укорочения резонатора исчерпаны, то можно прибегнуть к дополнительным внешним зеркалам, т. е. к разрежению спектра с помощью системы связанных резонаторов. Само по себе добавление дополнительных резонаторов не приводит к разрежению спектра. Наоборот, спектр становится гуще, так как к резонансам основного резонатора добавляются резонансы дополнительных резонаторов. Разрежение спектра или селекция мод возникает, когда имеются потери на внешних зеркалах, через которые излучение частично выводится из резонатора. В этом случае дополнительные резонаторы играют роль устройств, согласующих большую часть мод основного резонатора со свободным пространством, так что их потери существенно возрастают; лишь некоторые моды основного резонатора остаются высокодобротными. Моды дополнительных резонаторов в той части резонатора, где находится активная среда, имеют малую амплитуду и, как правило, низкодобротны, так что фактически они не возбуждаются.

Исследование системы связанных резонаторов можно провести, если волны, распространяющиеся в отдельных резонаторах, связать друг с другом с помощью коэффициентов отражения и пропускания зеркал, подобно тому, как это делается в § 3.1 для трехзеркального резонатора. Исследуя далее качественно или с помощью ЭВМ характеристическое уравнение полученной системы, можно найти резонансные частоты, потери, отношение амплитуд полей в разных частях резонатора и вообще все характеристики сложного резонатора. Как правило, система дополнительных зеркал не должна занимать много места. В этом случае систему дополнительных зеркал можно рассматривать как единое зеркало с селективными свойствами. Далее без вывода приводятся зависимости коэффициентов отражения таких комбинированных зеркал для четырех наиболее интересных случаев (рис. 3.4).

Коэффициент отражения (по мощности) комбинированного зеркала, состоящего из двух бесконечно тонких (рис. 3.4, а) зеркал, разде-



[Go To Previous Page](#)

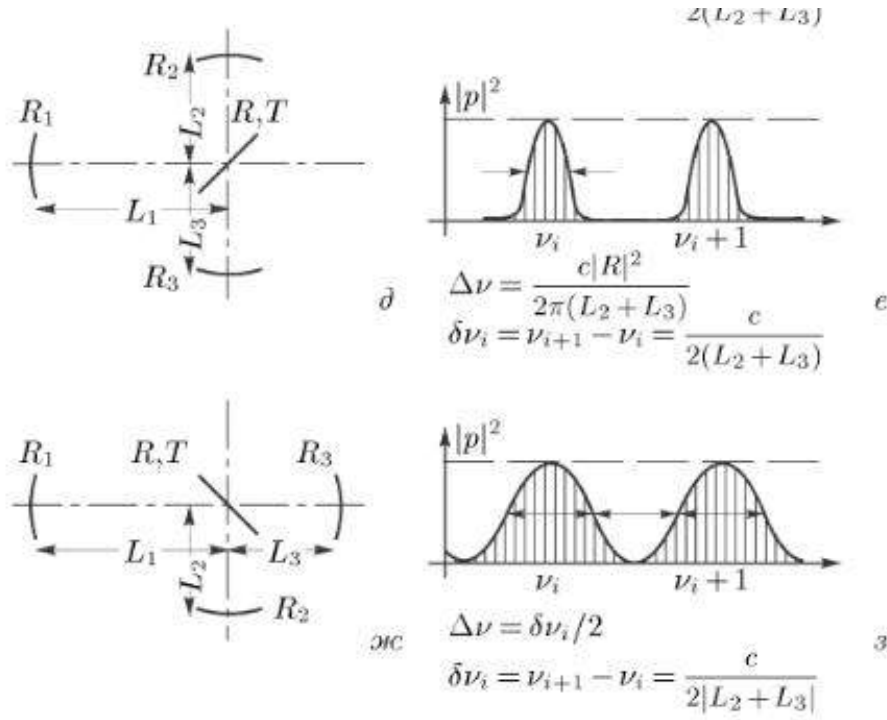


Рис. 3.4. Четыре типа лазерных селекторов продольных мод

ленных расстоянием L_2 , равен

$$|\rho|^2 = \frac{[|R| - |R_2(R^2 - T^2)|]^2 + 4|RR_2(R^2 - T^2)| \sin^2 \left[\frac{2\pi\nu}{c} L_2 + \varphi \right]}{[1 - |RR_2|]^2 + 4|RR_2| \sin^2 \left(\frac{2\pi\nu}{c} L_2 + \varphi' \right)},$$

где ν — частота лазерного излучения, 2φ и $2\varphi'$ — аргументы $RR_2 \times (R^2 - T^2)$ и RR_2 . На рис. 3.4, б эта зависимость представлена графически при $R = R_2 \simeq 1$; учтено также, что для бесконечно тонких зеркал без потерь $|R|^2 + |T|^2 = 1$. Как можно видеть, спектр такого

зеркала состоит из узких полос пропускания и относительно широких полос отражения. Нетрудно убедиться, что ширина отдельной полосы пропускания в спектре равна

$$\Delta\nu = \frac{c(1 - |R|^2)}{2\pi L_2};$$

она может быть сделана порядка межмодового расстояния основного резонатора. Расстояние между полосами пропускания равно

$$\delta\nu = \nu_{i+1} - \nu_i = \frac{c}{2L_2};$$

оно может быть сделано порядка полосы усиления активной среды. Таким образом, характер зависимости коэффициента отражения комбинированного зеркала от частоты таков, что резонатор больше подходит для подавления отдельных мод, чем для выделения в генерации одной моды.

На рис. 3.4, б показана другая система, применяемая на практике, это так называемый резонатор Фокса–Смита. Система зеркал на правом конце резонатора, рассматриваемая как единое зеркало, имеет коэффициент отражения (по мощности)

$$|\rho|^2 = \frac{|T|^4 R_3^2}{(1 - |R|^2 R_2 R_3)^2 + 4|R|^2 R_2 R_3 \sin^2 \left[\frac{2\pi\nu}{c} (L_2 + L_3) + \varphi \right]},$$

где 2φ — аргумент $R^2 R_2 R_3$. Эта зависимость показана на рис. 3.4, г при $R_1 = R_2 = 1$ и $R \simeq 1$. Спектр такого комбинированного зеркала состоит из полос отражения шириной

где 2φ — аргумент $T^2 R_2 R_3$. На рис. 3.4, е эта зависимость показана при условии $|R_2| = |R_3| = 1$ и $|T| \simeq 1$. Ширина полос отражения в этом случае равна

$$\Delta\nu = \frac{c|R|^2}{2\pi(L_2 + L_3)},$$

а расстояние между ними

$$\delta\nu = \frac{c}{[2(L_2 + L_3)]}.$$

Несколько иные свойства имеет резонатор Майкельсона (рис. 3.4, ж), отличающийся от резонатора Фокса–Смита только поворотом промежуточного зеркала на 90°. Коэффициент отражения (по мощности) его комбинированного зеркала равен

$$|\rho|^2 = (|R^2 R_2| + |T^2 R_3|)^2 - 4|R^2 T^2 R_2 R_3| \sin^2 \left[\frac{2\pi\nu}{c} (L_2 - L_3) + \varphi \right],$$

где 2φ — аргумент $R^2 T^2 R_2 R_3^*$. На рис. 3.4, з эта зависимость показана при условии $R_2 = R_3 = 1$ и $|R|^2 = |T|^2 = 1/2$.

Все эти резонаторы подробно исследованы как теоретически, так и экспериментально. В частности, резонаторы Фокса–Смита нашли эффективное применение в мощных ионных лазерах, где они позволили осуществить генерацию на единственной продольной моде. Предложены также различные обобщения таких резонаторов, в частности, подобные схемы предложены для кольцевых резонаторов.

$$\Delta\nu = \frac{c(1 - |R|^2)}{2\pi(L_2 + L_3)}$$

при расстоянии между ними, равном

$$\delta\nu = \frac{c}{[2(L_2 + L_3)]}.$$

При $|R|^2$, достаточно близком к единице, ширина полосы отражения может быть сделана порядка межмодового расстояния для основного резонатора. Если при этом расстояние между полосами порядка полосы усиления активной среды, то в резонаторе будет возбуждаться лишь одна продольная мода.

Аналогичными свойствами обладает T -образный резонатор (см. рис. 3.4, *д*). Коэффициент отражения (по мощности) комбинированного зеркала, составленного из трех зеркал на его правом конце, следующим образом зависит от частоты:

$$|\rho|^2 = \frac{|R^2 R_2|^2}{(1 - |T^2 R_2 R_3|)^2 + 4|T^2 R_2 R_3| \sin^2 \left[\frac{2\pi\nu}{c} (L_2 + L_3) + \varphi \right]},$$

где 2φ — аргумент $T^2 R_2 R_3$. На рис. 3.4, *е* эта зависимость показана при условии $|R_2| = |R_3| = 1$ и $|T| \simeq 1$. Ширина полос отражения в этом случае равна

$$\Delta\nu = \frac{c|R|^2}{2\pi(L_2 + L_3)},$$

а расстояние между ними

$$\delta\nu = \frac{c}{[2(L_2 + L_3)]}.$$

Несколько иные свойства имеет резонатор Майкельсона (рис. 3.4, *ж*), отличающийся от резонатора Фокса–Смита только поворотом промежуточного зеркала на 90°. Коэффициент отражения (по мощности) его комбинированного зеркала равен

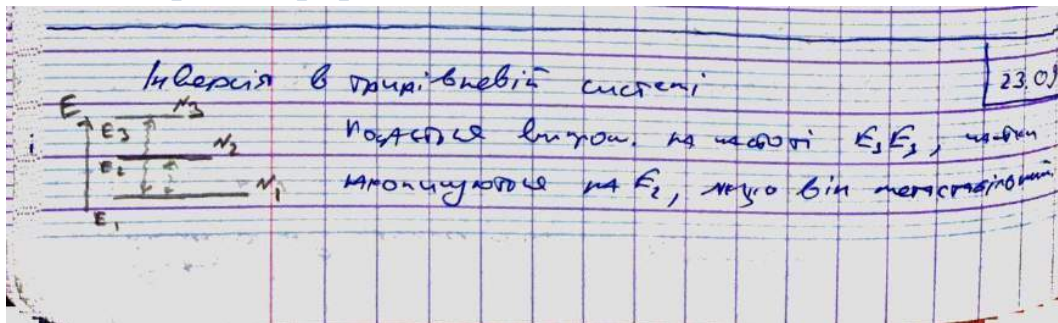
$$|\rho|^2 = (|R^2 R_2| + |T^2 R_3|)^2 - 4|R^2 T^2 R_2 R_3| \sin^2 \left[\frac{2\pi\nu}{c} (L_2 - L_3) + \varphi \right],$$

где 2φ — аргумент $R^2 T^{*2} R_2 R_3^*$. На рис. 3.4, *з* эта зависимость показана при условии $R_2 = R_3 = 1$ и $|R|^2 = |T|^2 = 1/2$.

Все эти резонаторы подробно исследованы как теоретически, так и экспериментально. В частности, резонаторы Фокса–Смита нашли эффективное применение в мощных ионных лазерах, где они позволили осуществить генерацию на единственной продольной моде. Предложены также различные обобщения таких резонаторов, в частности, подобные схемы предложены для кольцевых резонаторов.

Во всех рассмотренных схемах обычно используются сферические зеркала, и поэтому моды резонаторов имеют определенную поперечную структуру (см. гл. 1). Применение изложенных результатов возможно только если поперечные моды отдельных частей резонатора взаимно согласованы. Такое согласование и его условия рассмотрены в § 3.3.

15. Інверсія в трирівневій системі.



Вивисається з р-ля статистичного стану для кожного рівня:

$$0 = \frac{dN_1}{dt} = W(N_2 - N_1) - N_1(p_{12} + p_{13}) + N_2 p_{21} + N_3 p_{31}$$

$$0 = \frac{dN_2}{dt} = -N_2(p_{21} + p_{23}) + N_1 p_{12} + N_3 p_{32}$$

$$0 = \frac{dN_3}{dt} = W(N_3 - N_2) - N_3(p_{31} + p_{32}) + N_1 p_{13} + N_2 p_{23}$$

Інверсія переходу в односторонню систему енергії в резонаторі.

$W_1 = W_3$, $N_1 + N_2 + N_3 = N$

Цікавлять умови досягнення інверсії ($N_3 > N_2$), може бути для будь-яких пар рівнянь.

Для діапазону НВЧ: $h\nu \ll kT$ (в рівноважному стані) тоді $N_1 \approx N_2 \approx N_3$, в цьому випадку різниця між рівняннями буде невеликою, тому інверсія неможлива.

В оптичному діапазоні: $h\nu > kT$, тоді рівноважні переходи мають дорівнювати 0, тобто $p_{21} \approx p_{32}$, перехід з верхніх рівнів дорівнює 0.

$p_{ji} = p_{ij} e^{h\nu_{ji}/kT}$

В НВЧ: $p_{ij} \approx p_{ji} (1 + \frac{h\nu}{kT})$ оскільки $N_1 \approx N_2$

В системі використано $N_3 \approx N_2$

$$N_1 - N_2 \approx N_3 - N_2 = \frac{N_3 h}{kT} \cdot \frac{p_{12} p_{31} - p_{23} p_{32}}{p_{21} + p_{13}}$$

Розглянемо випадки:

1) $p_{12} p_{31} > p_{23} p_{32}$, отже між рівняннями 1 і 2 має місце інверсія ($N_3 > N_2$)

2) $p_{12} p_{31} < p_{23} p_{32}$, отже між рівняннями 1 і 2 не має місце інверсія ($N_3 < N_2$)

3) $p_{12} p_{31} = p_{23} p_{32}$, отже між рівняннями 1 і 2 немає інверсії ($N_3 = N_2$)

12

2) $p_{12}j_{21} < p_{33}j_{32}$, тоді $n_2 > n_1$, тоді має місце інверсія гнз 2 і 1.

Тобто в НВЧ гімназоні в роговому блимзку є інверсія (гнз 3-2, або 2-1).

$\frac{h\nu}{kT} n_1$, але тут $h\nu \ll kT$, тому інверсія не відбувається, тоді $\Delta N \sim \frac{h\nu}{kT} \cdot \frac{N}{3}$, так як $n_3 \approx n_2 \approx n_1$.

В оптичній гімназоні не відбувається неексцитує інверсії гнз 3 і 2, бо p_{12}, p_{21}, p_{33}

$$\text{Розв'язок: } \frac{n_2 - n_1}{N} = \frac{W(\tau_{21} - \tau_{32}) - 1}{1 + W(\tau_{21} + \tau_{32})}$$

$$\tau_{21}, \tau_{32} - \text{часові константи } \tau_{21} = \frac{1}{p_{21}}, \tau_{32} = \frac{1}{p_{32}}$$

середній час життя на відносно повільній

2-рівень метастабільний, тому $\tau_{21} \gg \tau_{32}$ (припущення)

$$\frac{n_2 - n_1}{N} = \frac{W\tau_{21} - 1}{1 + W\tau_{21}}$$

Інверсія тоді, коли $n_2 - n_1 > 0$, тобто $W\tau_{21} > 1$

$$\text{умови: } W\tau_{21} > 1 : W_k \tau_{21} = 1 \leftarrow \text{випадок}$$

16. Основні характеристики гелій-неонового лазера.

10.2.1.1. ГЕЛИЙ-НЕОНОВЫЙ ЛАЗЕР

He-Ne лазер, вне всякого сомнения, является наиболее значимым среди всех лазеров на инертных газах [1, 2]. Генерация здесь осуществляется на переходах атома неона, а гелий добавляется в газовую смесь для повышения эффективности накачки. Данный лазер излучает на многих длинах волн, из которых наиболее известна линия с $\lambda = 633$ нм (красная). Среди других линий — зеленая на длине волны $\lambda = 543$ нм и две линии в ИК-диапазоне с $\lambda = 1,15$ и $3,39$ мкм. Гелий-неоновый лазер, генерирующий на переходе с длиной волны $\lambda = 1,15$ мкм, был самым первым газовым лазером, более того, на нем впервые была продемонстрирована непрерывная лазерная генерация [3].

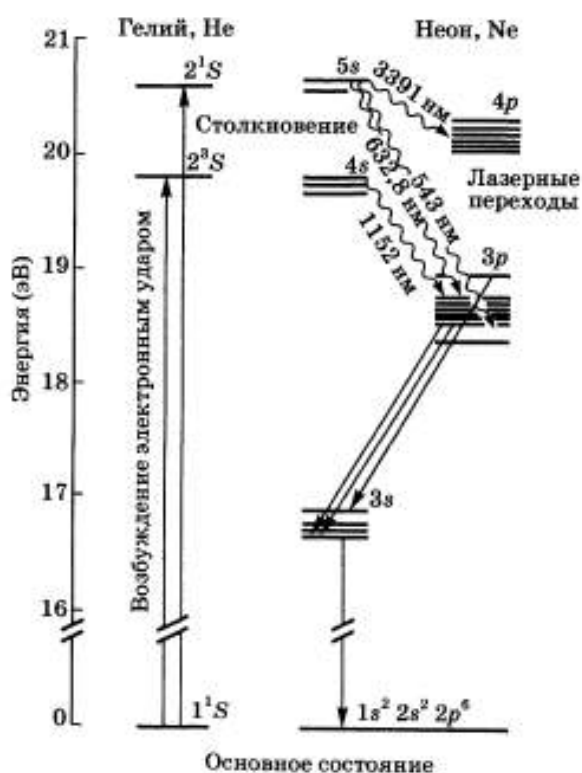


Рис. 10.1
Упрощенная схема энергетических уровней
He-Ne лазера

На рис. 10.1 приведена упрощенная схема энергетических уровней атомов He и Ne. Уровни He обозначены в соответствии с приближением связи Рассела-Сандерса, где первая цифра указывает на главное квантовое число данного уровня. Таким образом, состояние 1^1S отвечает случаю, когда оба электрона атома He находятся в состоянии $1s$ с противоположно направленными спинами. Состояния 2^3S и 2^1S отвечают ситуации, когда один из двух электронов заброшен в состояние $2s$ и его спин соответственно параллелен или антипараллелен спину другого электрона. С другой стороны

атомное число неона равно 10, и для обозначения энергетических уровней здесь используется ряд способов, таких как обозначения Пашена или Рака. Однако для простоты ограничимся лишь обозначением электронной конфигурации для каждого соответствующего уровня. Таким образом, основное состояние неона обозначается как $1s^2 2s^2 2p^6$, в то время как показанные на рисунке возбужденные состояния соответствуют ситуации, когда один $2p$ -электрон заброшен в возбужденное s - ($3s$ -, $4s$ - или $5s$ -) или возбужденное p - ($3p$ - или $4p$ -) состояние. Также следует отметить, что из-за взаимодействия с оставшимися на $2p$ -орбиталях пятью электронами эти s - и p -состояния расщепляются на 4 и 10 подуровней соответственно.

Из рис. 10.1 очевидно, что в атоме Ne уровни 2^3S и 2^1S являются близкими к резонансу с состояниями $4s$ и $5s$ атома Ne. Поскольку уровни 2^3S и 2^1S являются метастабильными (переходы $S \rightarrow S$ запрещены в электродипольном приближении; и, более того, переход $2^3S \rightarrow 2^1S$ запрещен еще и с точки зрения изменения мультиплетности, т. е. по спину), атомы Ne в этих состояниях оказываются весьма эффективным средством для возбуждения $4s$ - и $5s$ -уровней атомов Ne (посредством резонансного переноса энергии). Было установлено, что в He-Ne лазере именно этот механизм возбуждения является доминирующим при получении инверсии населенностей, хотя накачка, помимо этого, может осуществляться и за счет столкновений электронов с атомами Ne. Поскольку $4s$ - и $5s$ -уровни атома Ne могут быть населены достаточно сильно, они хорошо подходят на роль верхних уровней лазерных переходов. Учитывая правила отбора, можно видеть, что возможными переходами здесь являются переходы в p -состояния. Более того, следует отметить, что время релаксации s -состояний ($\tau_s \approx 100$ нс) на порядок превышает время релаксации p -состояний ($\tau_p \approx 10$ нс), таким образом, выполняется условие непрерывной генерации (7.3.1). Наконец, следует заметить, что вероятность возбуждения из основного состояния на уровни $3p$ и $4p$ (за счет электронного удара), вследствие меньших сечений взаимодействия, оказывается значительно меньше, чем соответствующие вероятности возбуждения на уровни $4s$ и $5s$. Тем не менее, как будет видно ниже, прямое возбуждение на уровни $3p$ и $4p$ также оказывает значительное влияние на работу лазера.

Из сказанного выше следует, что генерацию в неоне можно ожидать между $5s$ - или $4s$ -уровнями (играющими роль верхних лазерных уровней) и $3p$ - или $4p$ -уровнями, которые можно рассматривать как нижние лазерные уровни. На рис. 10.1 приведены некоторые наиболее важные лазерные переходы, возникающие между этими состояниями. Для переходов с сильно отличающимися длинами волн ($\Delta\lambda > 0,2\lambda$) каждый конкретный переход, на котором будет осуществляться генерация, определяется той длиной волны, на которую «настроен» максимум коэффициента отражения многослойного диэлектрического зеркала (см. рис. 4.9). Лазерные переходы уширены преимущественно благодаря эффекту Доплера. Так, например, для красного He-Ne-перехода ($\lambda = 633$ нм в вакууме и $\lambda = 632,8$ нм в воздухе) доплеровское уширение приводит к тому, что ширина этой линии составляет порядка $\sim 1,5$ ГГц (см. также пример 2.6). Для сравнения, из выражения (2.5.13) можно оценить величину собственного уширения: $\Delta\nu_{nat} = 1/(2\pi\tau) \approx 19$ МГц, где

Спектроскопические свойства лазерных переходов, а также состав газовой смеси в некоторых наиболее распространенных атомных и ионных газовых лазерах

Тип лазера	He-Ne	На парах меди	Аргоновый	He-Cd
Длина волны [нм]	633	510,5	514,5	441,6
Сечение перехода [10^{-14} см ²]	30	9	52	9
Время жизни верхнего состояния [нс]	150	500	6	700
Время жизни нижнего состояния [нс]	10	$\approx 10^4$	~ 1	1
Ширина линии [ГГц]	1,5	2,5	3,5	1
Парциальное давление газовой смеси [мм рт. ст.]	4 (He)	40 (He)	0,1 (Ar)	10 (He)
	0,8 (Ne)	0,1-1 (Cu)		0,1 (Cd)

$\tau^{-1} = \tau_s^{-1} + \tau_p^{-1}$, а τ_s и τ_p — времена жизни s - и p -состояний соответственно. Уширение, связанное со столкновительными процессами, оказывается еще меньше собственного уширения (например, для чистого Ne имеем $\Delta\nu_c \approx 0,6$ МГц при давлении $p \approx 0,5$ мм рт. ст.; см. пример 2.2). Некоторые спектроскопические свойства лазерного перехода, соответствующего длине волны 633 нм, приведены в табл. 10.1.

На рис. 10.2 показана основная конструкция He-Ne лазера. Разряд происходит между кольцеобразным анодом и большим катодом, имеющим форму трубки. При этом положительные ионы сталкиваются с этим катодом. На большей части длины трубки разряд формируется в капилляре, и только в этой области достигается высокая инверсия населенностей. Большой объем газа, окружающий капилляр, играет роль резервуара для пополнения He-Ne-смеси в капилляре. В случае, когда необходимо получить на выходе лазера поляризованное излучение, внутрь трубки под углом Брюстера устанавливается пластинка. Зеркала лазера непосредственно впаяны в концы трубки. Чаще всего используется конфигурация резонатора, близкая к полусфере

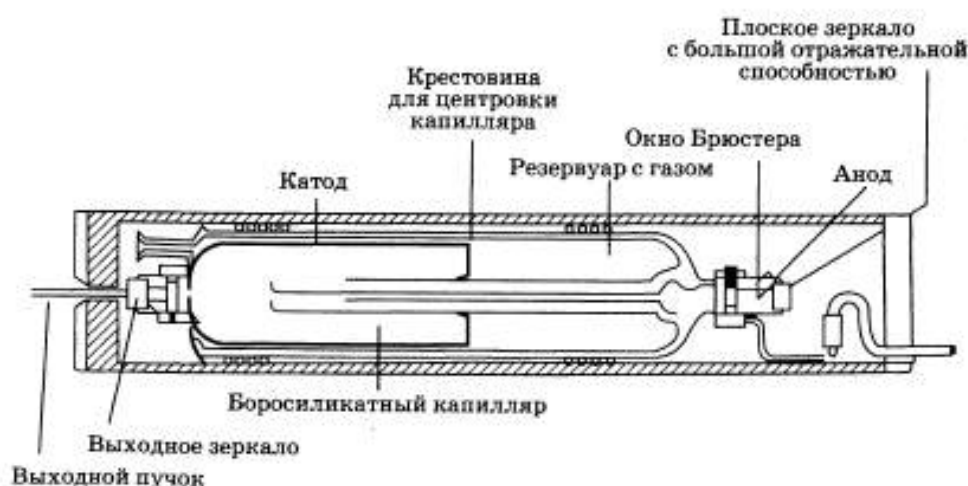


Рис. 10.2
Внутреннее устройство современного отпаянного гелий-неонового лазера (с любезного разрешения Мель Грю)

рической, поскольку она легко юстируется, очень устойчива в плане несоосности и без труда обеспечивает генерацию на моде TEM_{00} . Единственный недостаток такой конфигурации состоит в том, что она не полностью использует объем плазменного разряда, поскольку размер пятна моды на плоском зеркале оказывается значительно меньше, чем на вогнутом. Однако если на рис. 10.2 плоское зеркало расположить слева, то область с меньшим размером пятна для почти полусферической TEM_{00} моды окажется за пределами капилляра, т. е. в области низкой инверсии.

Одна из наиболее характерных особенностей He-Ne лазера состоит в том, что его выходная мощность не увеличивается монотонно с увеличением тока разряда, а достигает максимума и затем уменьшается. Поэтому серийно выпускаемые He-Ne лазеры обеспечиваются источником питания, рассчитанным только на оптимальный ток. Наличие оптимального значения тока, т. е. плотности тока J , протекающего через капилляр, обусловлено (по крайней мере, для переходов $0,633$ и $3,39$ мкм) тем, что при высоких плотностях тока дезактивация метастабильных состояний (2^3S и 2^1S) атома He происходит не только за счет столкновений со стенками, но и при сверхупругих столкновениях, например:



Поскольку скорость этого процесса пропорциональна плотности электронов N_e , а следовательно и J , полную скорость дезактивации можно записать в виде $k_2 + k_3J$. В этом выражении k_2 является константой, характеризующей дезактивацию вследствие столкновений со стенками, а k_3J (где k_3 — тоже постоянное число) представляет собой скорость процессов, связанных со сверхупругими столкновениями (10.2.1). С другой стороны, скорость возбуждения можно записать как k_1J , где k_1 — снова константа. В стационарных условиях можно записать $N_t k_1J = (k_2 + k_3J)N^*$, где N_t — населенность основного состояния атома He, а N^* — населенность возбужденного состояния 2^1S . Равновесное значение населенности уровня 2^1S задается выражением:

$$N^* = N_t \frac{k_1J}{k_2 + k_3J}, \quad (10.2.2)$$



Рис. 10.3
Схематические зависимости населенностей верхнего и нижнего уровней He-Ne лазера от плотности электрического тока

из которого видно, что при высокой плотности тока возникает насыщение населенности. Поскольку равновесная населенность $5s$ -состояния атома He определяется близкорезонансным переносом энергии из 2^1S -состояния, населенность верхнего лазерного уровня $5s$ будет также насыщаться с ростом плотности тока J (рис. 10.3). С другой стороны, экспериментально было обнаружено, что при отсутствии генерации населенность нижнего лазерного уровня ($3p$ или $4p$) продолжает линейно расти с увеличением J (рис. 10.3) вследствие непосредственной накачки атомов He из основного состояния и каскадных излучательных переходов с верхних лазерных уровней.

Таким образом, по мере увеличения плотности тока разряда, разность населенностей, а с ней и выходная мощность, растет до некоторого оптимального значения, а затем уменьшается.

Помимо указанного оптимального значения плотности тока He-Ne лазер обладает и другими оптимальными рабочими параметрами. В частности, к ним относятся:

- оптимальное значение произведения полного давления газа p на величину диаметра трубки D ($pD = 3,6 - 4$ мм рт. ст. · мм). Существование оптимального значения pD указывает на наличие некоторой оптимальной электронной температуры (см. раздел 6.4.5);
- оптимальное отношение парциального давления газа He к давлению газа Ne ($\sim 5:1$ для длины волны $\lambda = 632,8$ нм и $\sim 9:1$ для $\lambda = 1,15$ мкм);
- оптимальное значение диаметра капилляра ($D \approx 2$ мм). Это можно объяснить следующим образом: при постоянном значении pD , т. е. при постоянной электронной температуре, число всех процессов возбуждения (за счет электронного удара) просто сводится к числу атомов, которые могут быть возбуждены; а поскольку как верхний, так и нижний лазерные уровни заселяются, в конечном счете, за счет электронного удара, их населенности, а следовательно и усиление лазера, прямо пропорциональны давлению p , или величине D^{-1} , при постоянном произведении pD . С другой стороны, дифракционные потери лазерного резонатора будут увеличиваться при уменьшении параметра D , и, таким образом, можно получить оптимальное значение диаметра капилляра посредством оптимизации чистого усиления (усиление минус дифракционные потери).

Согласно зависимости, изображенной на рис. 10.3, мощность He-Ne лазера обычно невелика (при оптимизации параметров лазера выходная мощность на длине волны $\lambda = 633$ нм оказывается в пределах 1–10 мВт при длине трубки от 20 до 50 см, тогда как выходная мощность на зеленом переходе обычно на порядок меньше). КПД He-Ne лазера на всех лазерных переходах оказывается очень низким ($< 10^{-3}$). Главной причиной столь низкого КПД является малая величина квантовой эффективности лазера. Действительно, из рис. 10.1 видно, что каждый элементарный процесс накачки требует затраты энергии около 20 эВ, в то время как энергия лазерного фотона не превышает 2 эВ.

С другой стороны, наличие очень узкой линии усиления в таком лазере является очевидным преимуществом при получении генерации в одномодовом режиме. Действительно, если длина резонатора достаточно мала ($L < 15-20$ см), генерацию на одной продольной моде можно с легкостью реализовать путем тонкой подстройки длины резонатора (например, с помощью пьезокерамического устройства), добиваясь, таким образом, совпадения частоты моды с центром контура усиления (см. раздел 7.8.2.1). В одномодовом He-Ne лазере можно обеспечить очень высокую степень стабилизации частоты [$\Delta\nu/\nu = 10^{-11} \div 10^{-12}$] по провалу Лэмба с помощью опорной частоты (например, интерферометра Фабри–Перо с большой величиной резкости), и еще лучшую степень стабилизации можно обеспечить при использовании обращенного провала Лэмба с применением поглощающей ячейки, содержащей элемент $^{129}\text{I}_2$ (для перехода на длине волны 633 нм).

Генерирующие на красном переходе He-Ne лазеры до сих пор находят широкое применение во многих областях, где требуется маломощное когерентное излучение видимого диапазона (например, для юстировки приборов или при считывании штрих-кодов). Большинство супермаркетов и других торговых точек используют красные He-Ne лазеры для считывания информации, содержащейся в штрих-коде каждого продукта. Однако здесь основную конкуренцию He-Ne лазерам оказывают полупроводниковые лазеры, излучающие в красном диапазоне, которые оказываются более компактными и намного более эффективными. Тем не менее, He-Ne лазеры зеленого диапазона, благодаря тому что зеленый свет намного лучше воспринимается глазом, все в большей степени используются при юстировке приборов, а также в клеточной цитометрии. В последнем случае происходит следующее: отделенные клетки (например, эритроциты), окрашенные подходящими флуорохромами, быстро протекают через капилляр, на который сфокусирован пучок He-Ne лазера, после чего окрашенные клетки можно регистрировать по соответствующим сигналам рассеяния или флуоресценции. Кроме того, одностотные He-Ne лазеры часто используются в метрологических приложениях (например, в очень точных интерференционных устройствах измерения расстояний) и в голографии.

9.4. ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ЛАЗЕРЫ

Полупроводниковые лазеры [31, 32] представляют собой один из наиболее важных типов лазеров, использующихся на сегодняшний день, и это связано не только с их широким и разнообразным спектром применения, но и с тем, что они оказались весьма привлекательными в качестве источников накачки для твердотельных лазеров. Поэтому полупроводниковые лазеры будут рассмотрены здесь достаточно подробно.

В качестве активной среды для полупроводниковых лазеров необходимо использовать прямозонные материалы, и, таким образом, обычные одноэлементные полупроводники, например Si или Ge, здесь не подходят. Большинство материалов для полупроводниковых лазеров основано на соединениях элементов III группы периодической таблицы (например, Al, Ga, In) с элементами V группы (такими, как N, P, As, Sb) — так называемые соединения группы $A_{III}B_V$. Один из наиболее известных примеров — материал GaAs, а также тройные (AlGaAs, InGaAs) и четверные (InGaAsP) сплавы. Длина волны непрерывного излучения лазера на соединениях группы $A_{III}B_V$, в основном, лежит в диапазоне 630–1600 нм. Однако в последнее время были разработаны вызывающие большой интерес полупроводниковые лазеры на структуре InGaN, которые обеспечивают непрерывное излучение при комнатной температуре в синей области спектра (~410 нм). Такие лазеры обещают стать наиболее перспективными из имеющихся полупроводниковых лазеров для генерации лазерного излучения в очень важном сине-зеленом диапазоне длин волн. Однако полупроводниковые лазерные материалы не ограничиваются только соединениями группы $A_{III}B_V$. Следует отметить, что для сине-зеленого края спектра также существуют широкозонные полупроводники, в которых используются соединения элементов II группы (такие как Cd и Zn) с элементами VI группы (S, Se), — так называемые соединения группы $A_{II}B_{VI}$. Для другого конца электромагнитного спектра можно отметить полупроводники, основанные на некоторых соединениях группы $A_{IV}B_{VI}$, например свинцовые соли элементов S, Se и Te, позволяющие получить излучение в средней инфракрасной области (4–29 мкм). Однако из-за небольшой ширины запрещенной зоны эти лазеры требуют охлаждения до очень низких температур (криогенные температуры). Следует отметить, что в последнее время для указанного инфракрасного диапазона (средний ИК-диапазон) были разработаны новые *квантово-каскадные лазеры* [56], не требующие для своего охлаждения криогенных температур.

9.4.1. ПРИНЦИП РАБОТЫ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ЛАЗЕРОВ

Принцип действия полупроводниковых лазеров можно достаточно просто объяснить с помощью рис. 9.18, где изображены валентная зона V и зона проводимости C полупроводника, разделенные энергетической щелью E_g (запрещенная зона). Для простоты сначала предположим, что полупроводник находится при температуре $T = 0$ К. Тогда для невырожденного полупроводника валентная зона будет полностью заполнена электронами, в то время как зона проводимости будет совершенно пуста (см. рис. 9.18а, на котором

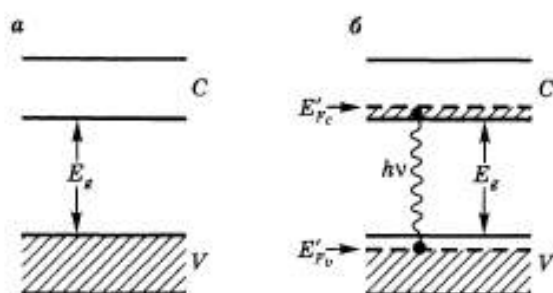


Рис. 9.18
Принцип работы
полупроводникового лазера

энергетические состояния, лежащие в заштрихованной области, полностью заполнены электронами). Предположим теперь, что некоторые электроны из валентной зоны перешли в зону проводимости посредством любого подходящего механизма накачки. Через очень короткое время (~ 1 пс) электроны в зоне проводимости переходят на самые нижние незанятые уровни этой зоны, тогда как электроны, находящиеся в верхней

части валентной зоны, также переходят на самые нижние уровни валентной зоны, оставляя, таким образом, «дырки» в верхней части этой зоны (рис. 9.18б). Эта ситуация может быть описана с помощью введения понятия уровня Ферми E'_{Fc} для зоны проводимости и соответственно E'_{Fv} для валентной зоны (см. раздел 3.2.3). Эти уровни при температуре $T = 0$ определяют для каждой зоны энергию, ниже которой состояния оказываются полностью занятыми электронами и выше которой состояния пусты. Излучение теперь может возникнуть в том случае, когда электрон из зоны проводимости переходит назад в валентную зону, рекомбинируя при этом с дыркой, — так называемый рекомбинационно-излучательный процесс, вследствие которого испускается спонтанное излучение в обычных светоизлучающих диодах (сокращенно СИД, или *LED*). При подходящих условиях может возникнуть процесс вынужденного рекомбинационного излучения, соответственно ведущий к лазерной генерации. В разделе 3.2.5 было показано, что условие того, что фотон в полупроводнике скорее усилится, нежели поглотится, представлено простым соотношением:

$$E_g \leq h\nu \leq E'_{Fc} - E'_{Fv}. \quad (9.4.1)$$

В простейшем случае при $T = 0$ К это условие можно легко объяснить с помощью рис. 9.18б, где незаштрихованная область в валентной зоне соответствует пустым состояниям, и электрон из зоны проводимости может перейти только в пустое состояние валентной зоны. Тем не менее, детальное изучение раздела 3.2.5 показывает, что условие (9.4.1) в действительности сохраняется при любых температурах и означает, что для энергии фотона $h\nu$, определяемой выражением (9.4.1), усиление возникает в случае, когда вы-

нужденное излучение превосходит поглощение. Чтобы выполнялось условие (9.4.1), необходимо иметь $E'_{F_c} - E'_{F_v} \geq E_g$. При этом значения E'_{F_c} и E'_{F_v} зависят от интенсивности накачки, т. е. от концентрации электронов N , которые перешли в зону проводимости под действием накачки (см. рис. 3.15). Действительно, величина $E'_{F_c} = E'_{F_c}(N)$ с ростом N увеличивается, в то время как величина $E'_{F_v} = E'_{F_v}(N)$ уменьшается. Таким образом, для выполнения условия $E'_{F_c} - E'_{F_v} \geq E_g$, т. е. когда усиление превосходит потери на поглощение, необходимо, чтобы концентрация электронов N превышала некоторое критическое значение, удовлетворяющее условию

$$E'_{F_c}(N) - E'_{F_v}(N) = E_g. \quad (9.4.2)$$

Значение концентрации инжектированных носителей, которое удовлетворяет условию (9.4.2), называется *концентрацией прозрачности носителей* N_{tr} .¹ Если теперь концентрация инжектированных носителей станет больше, чем N_{tr} , полупроводник будет характеризоваться полным коэффициентом усиления. Если поместить данную активную среду в подходящий резонатор, может возникнуть лазерная генерация (при условии, что полный коэффициент усиления превышает потери в резонаторе). Таким образом, чтобы получить лазерную генерацию, число инжектированных носителей должно достичь некоторого порогового значения N_{th} , превышающего N_{tr} на разницу, достаточную для того, чтобы полный коэффициент усиления превысил потери в резонаторе.

Накачку полупроводникового лазера можно осуществить несколькими способами, например за счет поперечного или продольного возбуждения в объеме полупроводника пучком другого лазера или с помощью внешнего электронного пучка. Однако наиболее распространенным способом накачки является использование полупроводникового лазера, включенного по схеме диода, с возбуждением электрическим током, протекающим в прямом направлении p - n -перехода [33].

Лазерная генерация в полупроводнике была впервые получена в 1962 г. на диоде с p - n -переходом. Демонстрация генерации проводилась почти одновременно четырьмя группами ученых [34–37], три из которых применяли материал GaAs. Приборы, разработанные на ранней стадии исследований полупроводниковых лазеров, были сделаны с использованием одного и того же материала с обеих сторон p - n -перехода и, таким образом, относились к лазерам на гомопереходах. Лазер на гомопереходе теперь имеет лишь историческое значение, с тех пор как он был заменен лазером на двойном гетеропереходе (ДГ-лазер), в котором активная среда располагается между материалами p - и n -типа, отличающимися от материала активной среды. На самом деле, лазеры на гомопереходах в непрерывном режиме могли работать только при криогенных температурах ($T = 77$ К), тогда как работа полупроводникового лазера при комнатной температуре стала возможна только после открытия полупроводниковых гетероструктур, которое произошло через семь

¹ Условие (9.4.2), таким образом, эквивалентно условию $N_2 = N_1$, при котором невырожденная двухуровневая система становится прозрачной.

лет после изобретения лазера на гомопереходе (1969 г.) [38–40] и позволило в наши дни использовать полупроводниковые лазеры в самых различных областях. Тем не менее для понимания всех преимуществ, свойственных ДГ-лазерам, полупроводниковые лазеры на гомопереходах будут кратко рассмотрены в следующем разделе.

18. Багатомодовий режим генерації.

5.3.5. Одномодовая и многомодовая генерация

Некоторые результаты, полученные в предыдущих разделах, строго выполняются, только если лазер генерирует в одномодовом режиме. Поэтому уместно сейчас рассмотреть те условия, при которых имеет место одномодовая или многомодовая генерация.

5.3.5.1. Причины возникновения многомодовой генерации

Лазеры, как правило, имеют тенденцию генерировать в многомодовом режиме. Это обусловлено главным образом тем, что межмодовое расстояние обычно меньше (а часто и много меньше) ширины контура усиления. Например, если выбрать $L = 1$ м, то разность частот между двумя последовательными продольными модами будет равна $\Delta\nu = c/2L = 150$ МГц. Однако ширина линии лазера может находиться в пределах от ~ 1 ГГц для доплеровски уширенной линии газового лазера, работающего в видимой или ближней ИК-области, до 300 ГГц и выше для перехода ионов в твердом теле (см. табл. 2.1). Таким образом, число мод, лежащих в пределах ширины полосы лазера, в рассматриваемых примерах может составлять приблизительно от 6 до $2 \cdot 10^3$. Разница в усилении между этими модами уже достаточно мала для 6 мод и становится совсем незначительной для $\sim 10^3$ мод. Поэтому на первый взгляд следовало бы ожидать, что при достаточно высокой скорости накачки будет возбуждаться значительная часть этих мод.

Однако приведенное выше на первый взгляд естественное заключение следует изучить более тщательно. Действительно, на раннем этапе развития лазеров считалось, что, если линия усиления лазера уширена однородно, то он в принципе должен ге-

нерировать одну моду. Это соображение можно проиллюстрировать с помощью рис. 5.6, на котором мы предположили, что одна из мод резонатора совпадает с максимумом контура усиления. Ради простоты будем рассматривать лишь моды низшего порядка (TEM_{00}), так что частоты всех мод разделены промежутками $c/2L$ (см. рис. 4.19, 4.29 и 4.36). Коэффициент усиления лазера определяется выражением (2.88), причем сечение для каждой моды необходимо вычислять при соответствующем значении частоты. Генерация начнется на центральной моде, как только инверсия $N = N_2 - N_1$ достигнет крайнего критического значения N_c , при котором усиление будет равно потерям

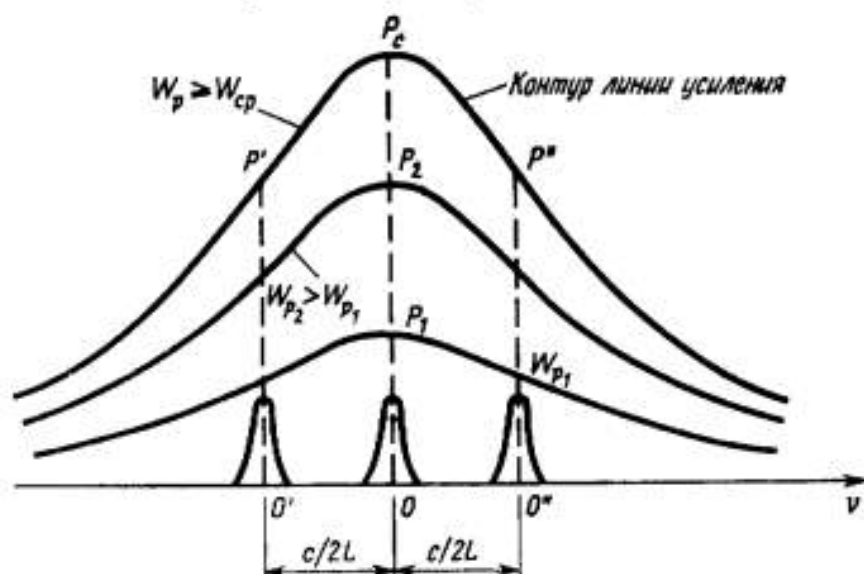


Рис. 5.6. Частотная зависимость усиления лазера от скорости накачки W_p при условии насыщения (однородно уширенная линия).

в резонаторе. Это условие количественно записывается в виде выражения (5.26). Однако даже если скорость накачки W_p сделать выше порогового значения в стационарных условиях, инверсия N зафиксируется при критическом значении N_c . Поэтому максимальное усиление, представленное на рис. 5.6 отрезком OP при $W_p \geq W_{cr}$, имеет фиксированное значение OP_c . Если линия уширена однородно, то ее форма не может измениться и, следовательно, контур линии усиления при $W_p \geq W_{cr}$, как показано на рис. 5.6, останется постоянным. Усиление для других мод, которое соответствует длинам отрезков $O'P'$, $O''P''$ и т. д., всегда меньше усиления центральной моды, соответствующего отрезку OP_c . Если потери для всех мод одинаковы, то в стационарном случае генерация происходит лишь на центральной моде. В случае неоднородно уширенной линии картина оказывается совсем иной (рис. 5.7). Действительно, в этом случае на контуре линии усиления могут «выжигаться дырки» (см.

разд. 2.6.3 и, в частности, рис. 2.19). Таким образом, если W_p больше W_{cp} , то усиление центральной моды равно критическому значению, соответствующему длине отрезка OP_c , а коэффициенты усиления для других мод, определяемые длинами отрезков $O'P'$, $O''P''$ и т. д., будут продолжать увеличиваться до соответ-

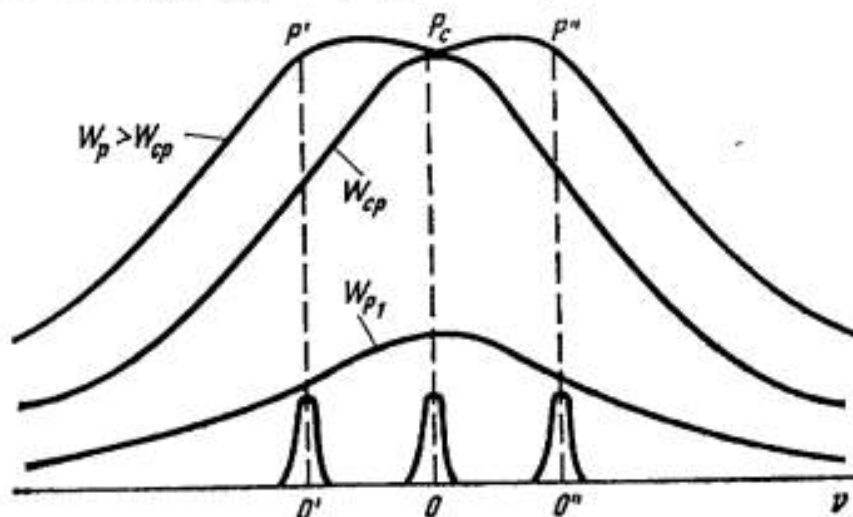


Рис. 5.7. Частотная зависимость усиления лазера от скорости накачки W_p при условии насыщения (неоднородно уширенная линия); эффект частотного выжигания дырки в контуре усиления.

ствующих пороговых значений. В этом случае при работе лазера с накачкой, несколько превышающей пороговое значение, генерация возможна более чем на одной моде.

Вскоре после открытия лазера экспериментально наблюдалась именно многомодовая генерация в случае как неоднород-

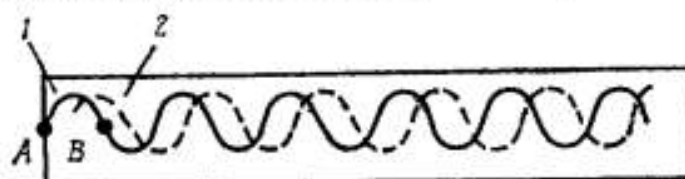


Рис. 5.8. Пространственное выжигание дырки в активной среде лазера.

ной (например, в газовом лазере), так и однородной (например, в рубиновом лазере) линии усиления. Кажется, что последний результат находится в противоречии с приведенным выше соображением. Впоследствии это противоречие было устранено [8] посредством учета того обстоятельства, что в активной среде каждой моде соответствует определенная пространственная картина стоячих волн. Рассмотрим для простоты две моды, картины стоячих волн которых в активной среде сдвинуты друг относительно друга на $\lambda/4$ (рис. 5.8). Пусть мода 1 на рис. 5.8 соот-

ветствует центральной моде на рис. 5.6, так что она первой достигает порога. Однако при установлении генерации на моде 1 инверсия населенностей в точках, в которых электрическое поле равно нулю (точки А, В и т. д.), не уменьшается и может нарастать выше критического значения N_c . Мода 2, первоначально имеющая более низкое усиление, может теперь достичь усиления, которое равно или даже больше, чем усиление моды 1, поскольку в генерацию на этой моде дают вклад те области активной среды, в которых инверсия населенностей не использовалась при генерации моды 1. Поэтому генерация может происходить на моде 2 так же, как и на моде 1. Следовательно, то, что лазер с однородным уширением линии усиления генерирует много мод, объясняется выжиганием дырок не в контуре линии усиления (*частотным выжиганием дырок*), а выжиганием дырок в пространственном распределении инверсии населенностей внутри активной среды (*пространственным выжиганием дырок*).

Таким образом, можно сделать вывод, что лазер всегда имеет тенденцию работать в многомодовом режиме. При однородном уширении линии усиления это является следствием пространственного выжигания дырок, а в случае чисто неоднородной линии — следствием только спектрального выжигания дырок, поскольку моды взаимодействуют с различными наборами атомов и механизм пространственного выжигания дырок не играет никакой роли. Следует, однако, заметить, что в случае однородной линии при генерации нескольких мод с частотами вблизи центра линии усиления явление пространственного выжигания дырок усредняется наличием указанных мод. В этих условиях однородный характер линии не позволяет генерировать модам, находящимся дальше от центра линии усиления. Поэтому в случае однородной линии (по сравнению с неоднородной) допустима генерация для меньшего числа мод, находящихся вблизи максимума контура усиления.

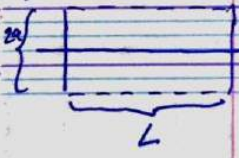
5.3.5.2. Одномодовый режим генерации

Для однородной и неоднородной линии существует несколько способов заставить лазер генерировать на одной моде, которые мы более или менее подробно обсудим в данном разделе.

Обычно нетрудно добиться генерации на какой-либо определенной поперечной моде, т. е. с данными поперечными индексами m и l (см. гл. 4). Например, чтобы получить генерацию на моде TEM_{00} , в некоторой точке на оси резонатора лазера обычно помещают диафрагму соответствующих размеров. Если радиус a этой диафрагмы достаточно мал, то число Френеля $N = a^2/L\lambda$

19. Наближена теорія відкритого резонатора Таунса і Шавлова. Поздовжні і поперечні моди.

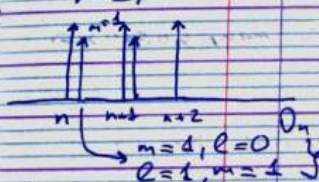
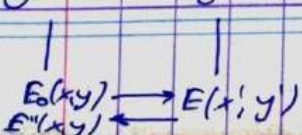
Наближена теорія Таунса і Шавлова
Відкритий резонатор розглядається як замкнений між бічових стінок.



$$E_x = E_0 \cos(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot \sin(k_z z)$$

$$k_x = \frac{\pi}{2a} l, \quad l - \text{ціле число}$$

$$k_y = \frac{\pi}{2a} m; \quad k_z = \frac{\pi}{2L} n$$

Використавши формулу Ейлера:
 $\exp[i(\pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z)]$ - буде така комплексна функція
 (утворюється діюча хвиля з компонентами k_x, k_y, k_z)
 Якщо $k_x, k_y \neq 0$ - основні хвилі.
 Неосновні хвилі затухають, тому їх можна не враховувати, тому будемо розглядати:
 l, m - цілі $(0, 1, 2)$, n - будь-який
 Вважатимемо, що стінки не впливають на основні промені.
 $k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{вн}}} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \approx k_z \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(k_x^2 + k_y^2)}{k_z^2} \right]$
 Крит. поздовжньої моди отрикується поперечні.
 В результаті картинка має вигляд:

 Ці моди відбиваються $m, l = 0$
 При $n \neq \pm$ виникає випромінювання частота
 $\Delta \omega_n = \frac{c}{2L}$
 $\Delta \omega_{me}$ - відстань між двома модами m, l , вони не є еквівалентними
 [Одиним $\Delta \omega_n$, $\Delta \omega_{me}$ для таких параметрів: $(m, l = 0, 1, 2)$
 $\lambda = 0,63 \mu\text{м}$, $L = 1 \text{ м}$, $2a = 0,05 \text{ м}$
 В даній теорії не враховані втрати.
 ДИФРАКЦІЙНА ТЕОРІЯ ОПТИЧНИХ РЕЗОНАТОРІВ
 Основна ідея: якщо маємо деяку резонансну систему

 - через дифракцію

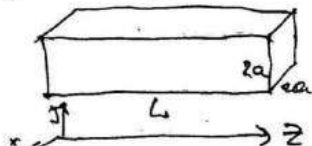
Модель пассивного π -резонатора. Класическа теорія Мейкова-Паунса.

~~Сформулюємо:~~

$$E(\vec{r}, t) = E_0 U(\vec{r}) \exp[-i\omega_0 t]$$

ω_0 - частота моди
формальний запис моди

Теорія М-П: Виведемо закритий резонатор, а потім відкривемо на потр. моди.



$$k_z L = \ell \pi; \ell - \text{індекс моди}$$

$$k_x 2a = \mu \pi$$

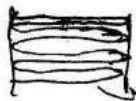
$$k_y 2b = \nu \pi$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\ell \pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\mu \pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\nu \pi}{2b}\right)^2}$$

$$\text{Перейдемо до частот: } k = \frac{2\pi \nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \sqrt{\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\nu}{2b}\right)^2}$$

За доп. цього можна знаходити частоти. Це для закритого резонатора. Якщо ми приберемо бокові стінки, то залиши моди з напрямом $\ell \gg \mu, \nu$



$$(k_z \gg k_x, k_y)$$

при умові $\ell \gg \mu, \nu$ відбивання буде частіше і ми інтерпретуємо це, як ступень зв'язу.

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \frac{\ell}{L} \sqrt{1 + \frac{\mu^2 + \nu^2}{(2a)^2} \left(\frac{L}{\ell}\right)^2} \approx$$

$$\approx \frac{c}{\nu} \frac{\ell}{L} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mu^2 + \nu^2}{(2a)^2} \left(\frac{L}{\ell}\right)^2\right)$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \left(\frac{\ell}{L} + \frac{1}{2} \frac{\mu^2 + \nu^2}{(2a)^2} \frac{L}{\ell}\right)$$

Розв'яжемо $\Delta \ell = 1$; $\Delta \mu = \Delta \nu = 0$, моди

$$\Delta \nu = \frac{c}{2L}; \text{ якщо } L = 1 \text{ м, тоді}$$

$$\Delta \nu = 150 \text{ МГц}$$

$$\Delta \nu = \frac{1}{2L} = 0,005 [\text{см}^{-1}]$$

Вважаємо резонатор п'єзичний (маємо
пох. замкн. $n=1$). Якщо $n \neq 1$, то

$$\Delta \nu_e = \frac{c}{2Ln}$$

Нехай, $\Delta l=0$; $\Delta z=0$; $\Delta \mu=1$

$$\Delta \nu_\mu = \frac{c}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{(2a)^2} \frac{L}{c} ((\mu+1)^2 - \mu^2)$$

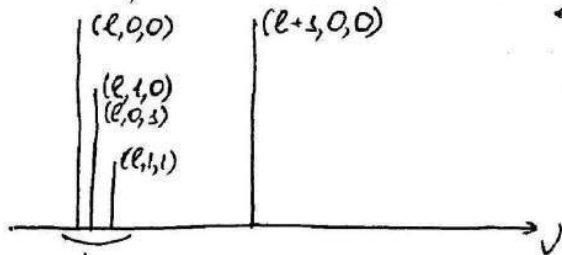
$$\Delta \nu_\mu = \frac{c}{2} \frac{1}{(2a)^2} \frac{L}{c} \left(\mu + \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{L}{c} = \frac{1}{2} ; \Delta \nu_e = \frac{c}{2L} ; N = \frac{Q^2}{dL} \text{ Число Френеля}$$

$$\Delta \nu_\mu = \Delta \nu_e \cdot \frac{1}{8N} \left(\mu + \frac{1}{2} \right)$$

Поміри зрост. індексу μ висота буде зростати.
 Нехай, $L=1\text{ м}$; $\mu=5$; $d=0,5\text{ мм}$; $2a=1\text{ см}$; $N=25$; тоді

$$\Delta \nu_\mu = 4,3\text{ МГц}$$



↓ розрізняти такі моди важко

В резонаторе при обычном режиме образуются стоячие волны. В случае стоячей волны суперпозиция называется *модой*. Изучение лазера соответствующего этим модам колебаний называется излучение лазера. Мода определяется геометрическими размерами резонатора. Пример резонатора с прямоугольными плоскими зеркалами.

Решая частное уравнение: $\vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu; \quad \varepsilon U \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{v^2}; k' = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c} = kn; k' -$
волновое число в среде. k - волновое число в вакууме.

Стоячие волны в каждом из направлений x, y, z возникает из условия циклическостей: $m\lambda_c = 2l$; l - размер резонатора.

После $2x$ последующих отражениях от зеркал и прохождения $2x$ длин резонатора все характеристики волны должны вернуться к исходным значениям. Это значит, что волны должны иметь определённый поляризационный характер, который зависит от резонатора.

$k'_x a = m_x \pi; \quad k'_y b = m_y \pi; \quad k'_z L = m_z \pi;$ a, b -
размеры резонатора в направлении x и y .

Наборы чисел m_x, m_y, m_z характеризуют поперечные и продольные моды колебаний.

Мода с набором чисел $(0, 0, m_z)$ называется главной (*продольной*) *модой*. Она описывает стоячую волну распространённую параллельно оси лазера. Частоты излучения определяются из условия: $k'_z = \frac{\omega_{mz}}{v} \Rightarrow \omega_{mz} = k'_z v; \quad m_z \pi = \frac{m_z \pi c}{L n} = \frac{m_z \pi c}{nL};$

Интервалы между частотами продольных мод:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta m_z \pi c}{nL} = \frac{c\pi}{Ln} \text{ Т.К. } m_z = 1, c = \lambda\sigma;$$

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{c\pi}{2\pi Ln} = \frac{c}{2Ln}; \quad \frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\lambda}{2Ln}; \quad (\text{РИС})$$

Из этого рис видно, что генерация возможна только для частот в пределах ω_1 до ω_2 . Генерация частоты располагается на равных расстояниях. Можно добиться одноподового $2x$ медового режима лазера.

6. Поперечные моды резонатора

В электродинамике поперечную электромагнитную волну обозначают TEM_{mnq} . В плоскости, перпендикулярной направлению распространения лазерного пучка,

введём координаты (x, y) . В направлении оси (y) припишем модам индекс n , а оси x – m .

Из теории интерферометра Фабри – Перо известно, что пучки света выходят из него под разными углами, удовлетворяющими условию интерференционных максимумов, которые и являются угловыми или поперчными модами. Поэтому поперечные моды резонатора характеризуются распределением амплитуд и фаз волн на поверхности зеркал резонатора.

Моды, характеризующиеся одинаковыми числами m и n , но разными q , объединяют под общим названием поперечных мод.

При этом колебания с определённой частотой (определённым значением q) называют продольной модой резонатора, относящейся к данной поперечной моде. Таким образом, продольные моды характеризуют спектр генерации.

Поперечные моды характеризуют распределение интенсивности в поперечном сечении лазерного пучка, т.е. расходимость пучка. Индекс поперечной моды указывает число интерференционных минимумов интенсивности излучения в поперечном сечении пучка.

Применение резонатора Фабри – Перо даёт следующие результаты:

1. Формируется излучение большой интенсивности при использовании лазерной среды малых размеров.
2. Лазерное излучение распространяется в виде пучка в ограниченном телесном угле, с малой расходимостью (величина расходимости пучка и распределение интенсивности в поперечном сечении определяются поперчными модами резонатора).
3. Формируется спектр генерации.
4. Лазерное излучение обладает большой спектральной яркостью по сравнению с не лазерными источниками излучения.

Иными словами, оптический резонатор обуславливает определённую степень пространственной и временной когерентности излучения.

Резонатор характеризуется степенью устойчивости, определяемой параметрами:

$$g_1 = 1 - L/r_1; g_2 = 1 - L/r_2, \quad (32)$$

где r_1, r_2 – радиусы кривизны зеркал резонатора.

Условие устойчивости резонатора

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1$$

означает, что такой резонатор способен удерживать внутри себя излучение.

В устойчивых резонаторах, образованных сферическими зеркалами, формируется световой пучок, для которого характерно быстрое уменьшение амплитуды поля при удалении от оси пучка в соответствии с функцией Гаусса:

$$A = A_0 \exp\left(-\frac{x^2}{\rho^2}\right), \rho - \text{радиус пучка в поперечном сечении.}$$

Выражение $I = A^2 = I_0 \exp\left(-2\frac{x^2}{\rho^2}\right)$, описывает распределение интенсивности в поперечном сечении пучка основной поперечной моды или поперечной моды низшего порядка с поперечными индексами $n = 0, m = 0$, обладающей наименьшей (дифракционной) расходимостью ϑ_{00} .

Для мод более высокого порядка размер поперечного пятна ρ_{nm} и угол расходимости ϑ_{nm} больше значений гауссового пучка моды низшего порядка:

$$\rho_{nm} = M \rho_{00}, \vartheta_{nm} = M \vartheta_{00}, \quad (33)$$

где M – коэффициент (некоторая постоянная). Из уравнений (33) получают величину

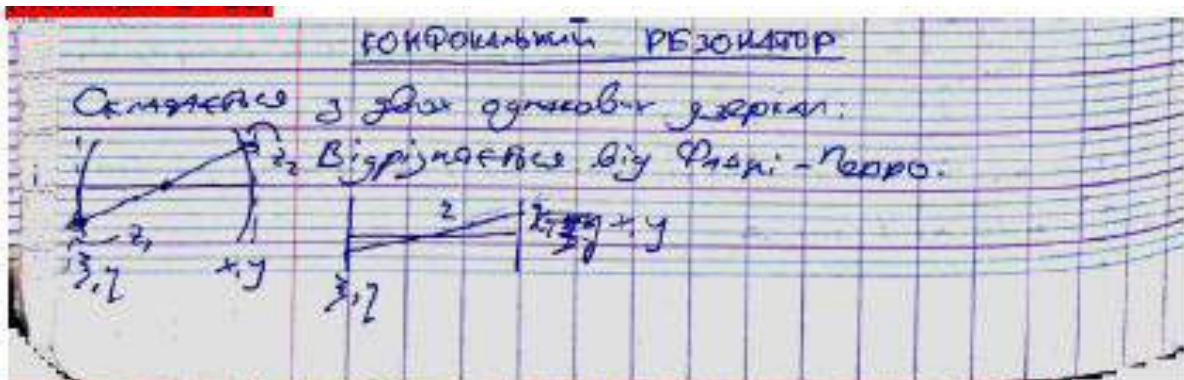
$$M^2 = \frac{\rho_{nm} \cdot \vartheta_{nm}}{\rho_{00} \cdot \vartheta_{00}}.$$

Для гауссового пучка низшей моды $\rho_{00} \cdot \vartheta_{00} = \lambda / \pi$. Тогда выражение для фактора качества M^2 :

$$M^2 = \frac{\rho_{nm} \cdot \vartheta_{nm}}{(\lambda / \pi)}. \quad (34)$$

Для гауссового пучка низшей моды $M^2 = 1$, для мод более высокого порядка $M^2 > 1$.

20. Дифракційна теорія конфокального резонатора.



25

$$\sqrt{(L - z_1 - z_2)^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \approx L - z_1 - z_2 + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2(L - z_1 - z_2)}$$

Звідси

$$z_1 = \frac{L^2}{2R}$$

Для конфокального резонатора довжина в експоненті становить вдвічі

Задача: використавши метод розв'язання рівняння Ейнштейна між дзеркалами знайти розподіл по товщині двох поверхень дзеркал.

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi, \eta) e^{-i\pi(x\xi + y\eta)/a^2} d\xi d\eta$$

перетворення Фур'є в області області

$$\xi' = \frac{\xi}{a}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{a}, \quad \eta' = \frac{\eta}{a}$$

$$u(x') = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' e^{-i\pi x' \xi'} E(\xi')$$

Розглядаємо наслідок, означає, що апертура для двох дзеркал однакова, значить апертура ξ дуже сильно зменшується в порівнянні з товщиною дзеркал, тобто коефіцієнт Фур'є.

Прийдемо до висновку:

$$u(x') = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' e^{-i\pi x' \xi'} E(\xi')$$

$e^{-i\pi x'^2} = \delta(x')$, тобто при перетворенні Фур'є утворюється дельта-функція.

$$E(x) = K_0 \left(\frac{x}{x_0} \right) e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} = \delta(x) \text{ Ерміт-Гаусса}$$

R - кривизна фронта, w - ширина, φ - фазовый
 φ отсчитывается от 0, год обходить по окружности
 (голова + вилы не вращаются у дисков)



$$E_{me}(x,y) = \frac{w_0}{w(z)} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_e\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}$$

$$\times \exp\left[-\frac{ik}{2R(z)}(x^2+y^2) + ikz\right] \times e^{-i(lm\pi + 1)\varphi(z)}$$

власна мода резонатора

$w(z)$ - ширина, $R(z)$ - кривизна волнового фронта
 $\varphi(z)$ - фазовый

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{L}\right)^2}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi}} = \frac{R_0}{\sqrt{2\pi}}$$

L - минимальное значение w_0



$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{L}{z}\right)^2 \right]$$

при $z=0$, $R=\infty$
 при $z \rightarrow \infty$ $R \rightarrow z$

на границе $z=R$, тогда $R(z)=R$

$$\varphi(z) = \arctg \frac{2z}{L} \quad kL = n\pi$$

$$kL + (l+m+1) \left[\varphi\left(\frac{L}{2}\right) - \varphi\left(-\frac{L}{2}\right) \right] = n\pi$$

$$kL + (l+m+1)\pi = n\pi \quad \leftarrow \text{поскольку } \varphi\left(\frac{L}{2}\right) = \arctg \frac{1}{2}$$

$$kL = \left[1 - \frac{(l+m+1)}{2} \right] \pi = \frac{2\pi L}{\lambda}$$

длина

Лекция восьмая. ГАУССОВЫ ПУЧКИ

Конфокальный резонатор. Распределение поля. Гауссовы пучки. Размер пятна. Расходимость излучения. Радиус кривизны волнового фронта. Преобразование гауссовых пучков линзой. Согласование мод резонатора. Фокусирование гауссовых пучков. Продольный и поперечный размеры фокальной области.

Итак, анализ Фокса и Ли показал, что в открытых структурах типа интерферометров Фабри — Перо существуют характерные колебательные моды. К настоящему времени известно большое число модификаций открытых резонаторов, отличающихся друг от друга конфигурацией и взаимным расположением зеркал. Наибольшей простотой и удобством отличается резонатор, образованный двумя сферическими отражателями с равной кривизной, обращенными вогнутыми поверхностями навстречу друг другу и расположенными на расстоянии радиуса кривизны, равного радиусу сфер, друг от друга. Фокусное расстояние сферического зеркала равно половине его радиуса кривизны. Поэтому

Рис. 8.1. Схема конфокального резонатора. Плоскость xy перпендикулярна оси z . Конфокальная точка находится в начале координат O .



фокусы отражателей совпадают, вследствие чего резонатор называется конфокальным (рис. 8.1). Интерес к конфокальному резонатору обусловлен удобством его юстировки, в отличие от плоскопараллельного резонатора Фабри — Перо не требующей строгой параллельности отражателей друг другу. Необходимо лишь, чтобы ось конфокального резонатора пересекала каждый отражатель достаточно далеко от его края. В противном случае дифракционные потери могут быть слишком большими.

Рассмотрим конфокальный резонатор более подробно.

Пусть все размеры резонатора велики по сравнению с длиной волны. Тогда моды резонатора, распределение полей в нем и дифракционные потери можно получить на основе принципа Гюйгенса — Френеля путем решения соответствующего интегрального уравнения. Для сферических зеркал с прямоугольной или круг-

лой апертурой это интегральное уравнение допускает разделение переменных относительно поперечных координат и сводится к одномерным интегральным уравнениям. Если отражатели конфокального резонатора имеют квадратное сечение со стороной $2a$, которая мала по сравнению с расстоянием между зеркалами l ,

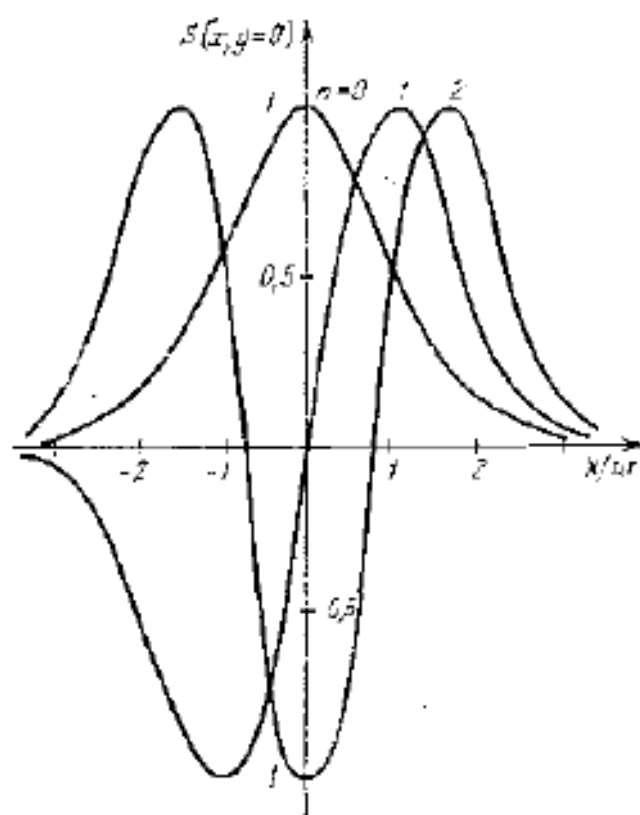


Рис. 8.2. Распределение поля в конфокальном резонаторе по одной из поперечных координат для первых трех мод ($n = 0, 1, 2$). Максимальные значения нормированы на единицу.

чина w является шириной распределения интенсивности. В пятне площадью πw^2 сосредоточена в основном энергия волны, проходящей в направлении z через плоскость xy .

Полиномами Эрмита нескольких первых степеней имеют вид

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \quad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Собственным функциям уравнения, дающим поперечное распределение (8.1), соответствуют собственные частоты, определяемые условием

$$4l/\lambda = 2q + (1 + m + n). \quad (8.3)$$

Так как продольная составляющая собственных функций очень мала, то решения исходного уравнения, а следовательно, и поперечные распределения (8.1) описывают моды TEM_{mnq} . На рис. 8.2

равным их радиусу кривизны R , а числа Френеля велики, то собственные функции интегрального уравнения типа Фокса и Ли аппроксимируются произведениями полиномов Эрмита $H_n(x)$ на гауссову функцию $\exp(-x^2/w^2)$.

В декартовой системе координат, начало которой помещено в центр резонатора, т. е. в конфокальную точку, а ось z совпадает с осью резонатора (рис. 8.1), поперечное распределение поля дается выражением

$$S(x, y) = H_m(x/w) H_n(y/w) \times \times \exp[-(x^2 + y^2)/2w^2], \quad (8.1)$$

где w определяет размер той области поперечного сечения, при выходе из которой интенсивность поля в резонаторе, пропорциональная S^2 , падает в e раз. Другими словами, вели-

графически представлены три первые функции Эрмита — Гаусса для одной из поперечных координат, построенные по формуле (8.1) с учетом (8.2). Эти графики наглядно показывают характер изменения поперечного распределения поля с увеличением поперечного индекса n .

Резонансы в конфокальном резонаторе имеют место только для целых значений $4l/\lambda$. Спектр мод конфокального резонатора вырожден, увеличение $m+n$ на две единицы и уменьшение q на единицу дает то же значение частоты. Индексы m и n в обозначении моды TEM_{mn} относятся к измерениям поля в направлениях x и y и принимают, вообще говоря, значения $0, 1, 2, \dots$, в то время как индекс q равен числу полуволн, укладывающихся на длине резонатора вдоль оси z .

Основной является мода TEM_{00q} , поперечное распределение поля которой определяется простой гауссовой функцией $\exp\{-(x^2 + y^2)/2w^2\}$. Ширина распределения интенсивности меняется вдоль оси z по закону

$$w^2 = w_0^2 + (z/kw_0)^2, \quad (8.4)$$

где $k = 2\pi/\lambda$, а w_0 имеет смысл радиуса пучка в фокальной плоскости резонатора, т. е. при $z = 0$, и обычно называется радиусом перетяжки (или радиусом шейки) каустики. Величина w_0 определяется длиной резонатора и составляет

$$w_0 = \sqrt{l\lambda/4\pi} = \sqrt{l/2k}. \quad (8.5)$$

На поверхности зеркала, т. е. при $z = l/2$, площадь пятна основной моды, как это видно из (8.4) и (8.5), вдвое больше, чем площадь сечения шейки каустики.

Крайне важным является то обстоятельство, что поперечный размер гауссова пучка $2w$ не зависит от поперечного размера зеркал $2a$. Это является следствием предположений о большой величине числа Френеля $N_F = a^2/l\lambda$ и малости значения отношения a^2/l^2 , которые и привели к решению вида (8.1). Так как с учетом (8.5) число Френеля может быть записано в виде $N_F = a^2/4lw_0^2$, то требование большого значения этого числа эквивалентно требованию малости площади пятна моды на зеркале $w^2 = 2w_0^2$ по сравнению с площадью зеркала.

Решение (8.1) получено для поля внутри резонатора. Но когда одно из зеркал частично прозрачно, как это и бывает в случае активных лазерных резонаторов, то выходящая наружу волна является бегущей волной с поперечным распределением (8.1).

По существу, выделение основной моды активного конфокального резонатора — это способ получения гауссова пучка монохроматического света. Учитывая большое значение и интересные свойства гауссовых пучков, рассмотрим их несколько подробнее.

Пусть некоторая плоскость представляет собой поверхность волнового фронта некоторой монохроматической волны при гаус-

совом распределении амплитуды на этом плоском волновом фронте

$$a(x, y) = E_0 \exp \left[- (x^2 + y^2) / 2w_0^2 \right]. \quad (8.6)$$

По принципу Гюйгенса — Френеля исходный волновой фронт создает волну, поле которой определяется интегралом Френеля — Кирхгофа:

$$E(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{a(x', y')}{r} \cos(\omega t - kr) dx' dy', \quad (8.7)$$

где $r^2 = z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2$, а x, y, z — декартовы координаты, введенные ранее (рис. 8.3). Заменим $1/r$ на $1/z$, а в аргументе $\cos(\omega t - kr)$ положим приближенно $r \approx z + [(x - x')^2 + (y - y')^2] / 2z$, т. е. в сильно вытянутом прямоугольном треугольнике заменим гипотенузу катетом там, где идет речь об ослаблении амплитуды поля, и учтем непараллельность z и r там, где

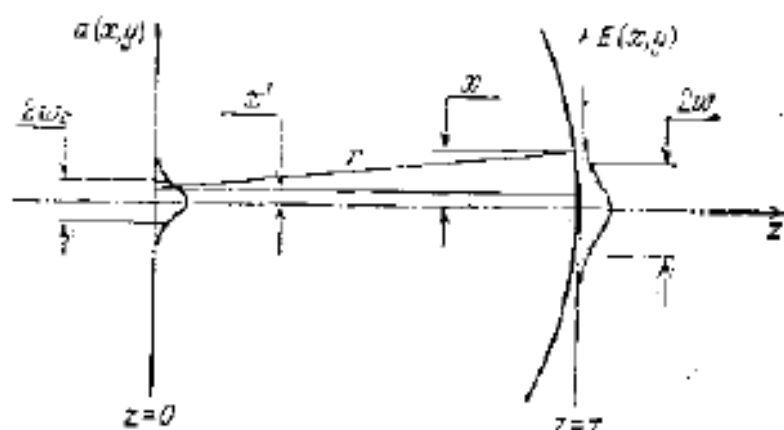


Рис. 8.3. К вычислению волнового фронта, создаваемого на расстоянии z плоской волной с гауссовым распределением поля в плоскости $z = 0$.

речь идет о фазовом набеге волны. Тогда прямое вычисление дает

$$E(x, y) = \frac{2\pi}{k} E_0 w_0^2 \exp \left(- \frac{x^2 + y^2}{2w^2} \right) \left[w_0^4 + \left(\frac{z}{k} \right)^2 \right]^{-1/2} \times \\ \times \cos \left[\omega t - k \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2R} \right) - \alpha \right], \quad (8.8)$$

где $R = z + (kw_0^2)^2 / z$ и $\operatorname{tg} \alpha = kw_0^2 / z$, а w дается формулой (8.4). В свете рассмотрения, проводившегося в этой и предыдущей лекциях, не вызывает удивления то обстоятельство, что решение (8.8) полностью совпадает с основной модой конфокального резонатора TEM_{00q} .

Поверхность постоянной фазы гауссова пучка, если пренебречь слабой зависимостью α от z , дается уравнением

$$z + \frac{x^2 + y^2}{2R} = \text{const.} \quad (8.9)$$

При $x^2/R^2 \ll 1$, $y^2/R^2 \ll 1$ (что в рамках сделанных с самого начала предположений выполняется всегда) это уравнение задает сферу радиуса R с центром в конфокальной точке. Таким образом, мода TEM_{00q} конфокального резонатора — это сферическая волна, идущая из центра и обладающая гауссовым распределением интенсивности в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. При этом радиус кривизны сферического волнового фронта по мере распространения, меняясь по закону

$$R = z + (k\omega_0^2)^2/z, \quad (8.10)$$

на больших расстояниях от начала координат ($z \gg k\omega_0^2 = l/2$) совпадает с расстоянием от резонатора до фронта волны: $R \approx z$.

Это означает, что в дальней зоне волновой фронт гауссова пучка приближается к волновому фронту сферической волны, распространяющейся из точки, расположенной на оси пучка в месте его фокальной перетяжки. При $z = l/2$ радиус $R = l$, т. е., как и следовало ожидать, на поверхности зеркала волновой фронт совпадает со сферической поверхностью зеркала. На рис. 8.4 показана огибающая интенсивности гауссова пучка в резонаторе и волновые фронты.

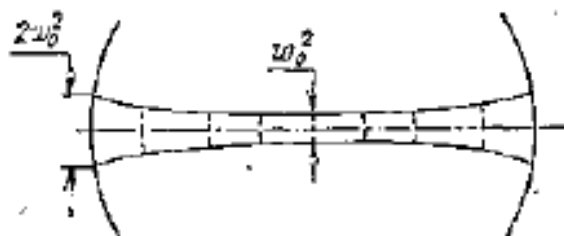


Рис. 8.4. Огибающая интенсивности гауссова пучка в конфокальном резонаторе и волновые фронты.

Вместе с тем очень важно, что при $z \rightarrow 0$ $R \rightarrow \infty$. Плоскость симметрии резонатора или, что то же самое, его фокальная плоскость является поверхностью постоянной фазы. Это означает, что в фокальной перетяжке волна является плоской, но пространственно ограниченной эффективным размером ω_0 . Именно этот размер определяет расходимость моды TEM_{00q} .

Распределение амплитуды по волновому фронту гауссового пучка (8.8) обладает осевой симметрией и шириной w (8.4). На большом расстоянии от резонатора ($z \gg k\omega_0^2 = l/2$) ширина $w = z/k\omega_0$, чему соответствует угловая расходимость

$$\theta = w/z = 1/k\omega_0. \quad (8.11a)$$

В результате основная часть энергии гауссова пучка сосредоточена в телесном угле

$$\Omega = \pi\theta^2 = \lambda/l. \quad (8.11b)$$

Таким образом, расходимость лазерного излучения в основной моде определяется не поперечным, а продольным размером резонатора лазера. Это является следствием того, что наименьшим эффективным отверстием, на котором происходит дифракция излучения свободно распространяющегося гауссова пучка, является фокальное сечение его каустики. Дифракционная расходимость определяется отношением длины волны λ к ширине распределения интенсивности в области перетяжки w_0 . В свою очередь, решение интегральных уравнений самосогласованного поля типа Фокса и Ли приводит в выражению (8.5) для величины w_0 .

По существу, формула (8.8) описывает дифрагированную волну, являющуюся результатом самодифракции гауссова пучка. Дифракционная картина, описываемая формулой (8.8), характеризуется монотонным уменьшением интенсивности при отходе от осевого направления, т. е. полным отсутствием каких-либо осцилляций в яркости дифракционной картины, а также быстрым спаданием интенсивности волны на крыльях распределения. Очевидно, что такой характер имеет дифракция гауссова пучка на любой апертуре, лишь бы размер ее в достаточной мере превышал ширину распределения интенсивности пучка w .

Целесообразно отметить, что монотонному характеру дифракционной картины гауссова пучка в радиодиапазоне соответствуют безтелесные диаграммы направленности приемных и передающих антенн радиолокационных станций или приемных антенн радиотелескопов СВЧ, что достигается спаданием интенсивности облучения на периферийных участках раскрытия антенны, формирующего ее направленность.

Отсутствие осцилляций интенсивности (боковых лепестков) связано с постепенным уменьшением амплитуды поля при удалении от оси пучка, а не с конкретным (в данном случае — гауссовым) законом уменьшения.

Выражение (8.8) для поля гауссова пучка получено при некотором расположении исходной плоскости $z=0$, в которой волновой фронт плоский, а ширина распределения минимальна. Однако вычисления можно повторить, взяв за исходное гауссово распределение в любой иной плоскости, и получить тот же результат. Следовательно, если в каком-то месте пространства некоторый волновой пучок характеризуется сферическим волновым фронтом и гауссовым поперечным распределением амплитуды, то эти свойства сохраняются во всем пространстве. По мере распространения волны изменяется лишь радиус кривизны волнового фронта (8.10) и ширина распределения амплитуды (8.4). Волна этого типа называется гауссовой волной или гауссовым пучком. Ширина пучка w и радиус кривизны фазового фронта R полностью определяют гауссов пучок в заданной точке на оси его распространения. Изменение знака R означает изменение кривизны фазового фронта на обратную, т. е. превращение расходящегося пучка в сходящийся и наоборот.

7.7. Лазерная спекл-картина [6, 7]

После того как мы рассмотрели в предыдущих разделах когерентность первого порядка, упомянем теперь об удивительном явлении, характерном для лазерного излучения и называемом спекл-картиной. Спекл-картину можно увидеть, если наблюдать лазерный свет, рассеянный от стены или рассеивающего транспаранта. Наблюдаемый рассеянный свет состоит из хаотического скопления ярких и темных пятен (или спеклов) (рис. 7.10, а). Несмотря на хаотическое распределение пятен можно различить пятно (или зерно) средних размеров. Из первых же работ стало ясно, что это явление обусловлено интерференцией вторичных волн с усилением и ослаблением, распространяющихся от небольших рассеивающих центров, расположенных на поверхности стены или рассеивающего транспаранта. Поскольку рассматриваемое явление наблюдается только тогда, когда излучение имеет высокую степень когерентности первого порядка, оно представляет собой неотъемлемое свойство лазерного излучения.

Физическую природу наблюдаемой зернистости нетрудно понять как при распространении света в свободном пространстве (рис. 7.10, б), так и при распространении его через систему формирования изображения (рис. 7.10, в), если рассмотреть случай, когда рабочие поверхности рассеивателей имеют очень большую шероховатость в масштабе оптических длин волн. При распространении в свободном пространстве результирующая оптическая волна в любой точке, находящейся на не слишком большом расстоянии от рассеивающей поверхности, состоит из многих когерентных компонент или элементарных волн, каждая из которых испускается со своего микроскопического элемента поверхности. Обратившись к рис. 7.10, б, заметим, что расстояния, пройденные этими различными волнами, могут отличаться на много длин волн. Интерференция сдвинутых по фазе, но когерентных элементарных волн приводит к «зернистому» распределению интенсивности (или спекл-картине, как ее называют). Если оптическое устройство представляет собой систему формирования изображения (рис. 7.10, в), то при объяснении наблю-

даемой картины необходимо учитывать как дифракцию, так и интерференцию. Даже в случае идеально скорректированной системы формирования изображения интенсивность света в данной точке изображения может быть результатом когерентного сложения вкладов световых волн, испущенных из многих независимых участков поверхности. Необходимо только для гарантии суммирования в каждой точке изображений многочисленных сдвинутых по фазе когерентных вкладов, чтобы функция разрешения системы формирования изображения была широкой по сравнению с микроскопическими дефектами поверхности.

Нетрудно получить оценку по порядку величины размера зерна d_g (т. е. средний размер пятен в спекл-картине) для двух рассмотренных выше схем. В первом случае (рис. 7.11, а) рассеянный свет регистрируется на фотопленке, расположенной на расстоянии L от рассеивателя, причем между фотопленкой и рассеивателем никаких линз нет. Предположим, что в плоскости регистрации в некоторой точке P существует светлый спекл. Это означает, что свет, дифрагированный на рассеивателе (например, в точках P_1 , P_2

и 0), будет интерферировать в точке P преимущественно с усилением, давая в результате ненулевое значение амплитуды поля. Подходя эвристически, при этом можно утверждать, что вклады от дифракции в точке P от волн, рассеянных в точках P_1 , P'_1 , P''_1 и т. д., складываются (в среднем) в фазе с волнами, рассеянными в точках P_2 , P'_2 , P''_2 и т. д. Теперь можно спросить, сколь далеко необходимо переместить точку P вдоль оси x в

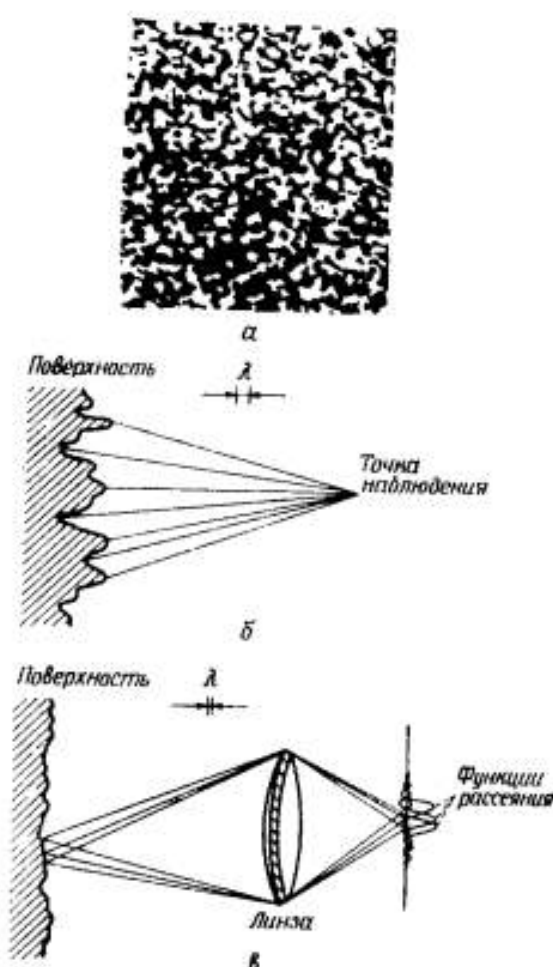


Рис. 7.10. Спекл-картина (а) и ее физическая интерпретация при распространении света в свободном пространстве (б) и через систему, формирующую изображение (в).

плоскости регистрации, чтобы расстроить наблюдаемую интерференцию с усилением. Это произойдет, когда вклады от волн, дифрагированных, например, от точек P_1 и P_2 в новую точку P' , интерферируют с ослаблением, а не с усилением. В этом случае можем показать, что вклады от точек P'_1 , P'_2 будут также интерферировать с ослаблением, как и в случае точек P''_1 , P''_2 и т. д., и полная интенсивность света будет иметь минимальное значение.

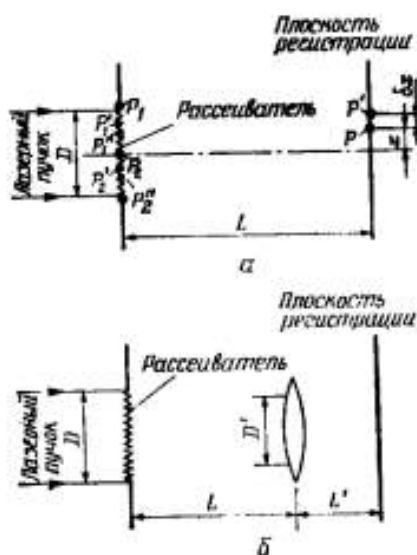


Рис. 7.11. К расчету размера зерна при распространении света в свободном пространстве (а) и через систему, формирующую изображение (б).

Например, выберем точки P_1 и P_2 и потребуем, чтобы изменение δx координаты x точки P было таким, что соответствующее изменение $\delta(P_2P - P_1P)$ разности длин $P_2P - P_1P$ было равно $\lambda/2$. Поскольку расстояние $P_2P = (x^2 + L^2)^{1/2}$ и расстояние $P_1P = \{[(D/2) - x]^2 + L^2\}^{1/2}$, то (для $D \ll L$) получаем $\delta(P_2P - P_1P) \approx (D/2L)\delta x$. Если потребовать, чтобы $\delta(P_2P - P_1P) = \lambda/2$, то находим

$$\delta x = \lambda L / D. \quad (7.56)$$

Аналогичным образом нетрудно показать, что точно такой же результат получается, если рассмотреть точки P'_1 и P'_2 (или точки P''_1 и P''_2 и т. д.), а не точки P_1 и P_2 . Снова все соответствующие вклады от волн (в среднем) будут складываться с ослаблением, а не с усилением. Таким образом, для размера зерна d_g можно написать следующее приближенное выражение:

$$d_g = 2\delta x = 2\lambda L / D. \quad (7.57)$$

Следует заметить, что аналогичный подход можно использовать при расчете диаметра пятна пучка в фокальной плоскости линз. Рассмотрим случай, когда рассеиватель на рис. 7.11, а помещен перед линзой с фокусным расстоянием $f = L$. Тогда максимум интенсивности будет в точке с координатой $x = 0$ (т. е. в центре плоскости регистрации), поскольку линза даст сферический волновой фронт и вклады от волн, дифрагированных в точках P_1 , P'_1 , P''_1 и т. д., складываются в фазе с волнами, исходящими из точек P_2 , P'_2 , P''_2 и т. д. Размер пятна в фокальной плоскости снова приближенно дается выражением (7.57), и для рассматриваемого случая мы имеем $d_g = 2\lambda f / D$. Этот результат

сравним с точным значением $d = 2,44\lambda f/D$, полученным с помощью рис. 7.6. Следовательно, можно теперь понять следующее общее свойство дифрагированной волны: если вся апертура диаметром D дает когерентный вклад при формировании одного или многих пятен дифрагированным светом в плоскости регистрации на расстоянии L , то в любом случае минимальный размер пятна в этой плоскости приближенно равен $2\lambda L/D$ ¹⁾. Заметим, что в случае рассеивателя этот когерентный вклад от всей апертуры D имеет место при условии, что 1) диаметр d_s отдельного рассеивающего центра гораздо меньше диаметра отверстия D и 2) в плоскости регистрации имеется существенное перекрытие между дифрагированными пучками от различных рассеивающих центров. Это означает, что сечение любого из этих пучков в плоскости регистрации ($\sim \lambda L/d_s$) больше, чем среднее расстояние между ними ($\sim D$). Следовательно, длина L должна быть такой, чтобы выполнялось неравенство $L > d_s D/\lambda$. Например, если $d_s = 10$ мкм и $\lambda = 0,5$ мкм, то $L > 20 D$.

Второй случай, который мы рассмотрим, характеризуется тем, что рассеянный свет регистрируется на фотопленке после того, как он прошел через линзу, которая отображает рассеиватель на фотопленку. Перед линзой помещена диафрагма диаметром D' (рис. 7.11, б). Если расстояние L снова является таким, что выполняется неравенство $L > d_s D/\lambda$, то диаметр зерна d_g на линзе будет определяться выражением (7.57). Как и в предыдущем случае, будем считать, что 1) диаметр зерна d_g много меньше диаметра отверстия D' и 2) в плоскости регистрации имеется существенное перекрытие пучков, дифрагированных от различных зерен. Это означает, что сечение любого из данных пучков в плоскости регистрации ($\lambda L'/d_g$) больше, чем среднее расстояние между ними (D'). В соответствии с (7.57) это, очевидно, означает, что $D' < D(L'/L)$. Если оба этих предположения выполняются, то диаметр зерна d'_g в плоскости регистрации дается выражением

$$d'_g = 2\lambda L'/D'. \quad (7.58)$$

В этом случае мы имеем целый пучок диаметром D' , который действует когерентно при формировании каждого отдельного пятна дифрагированным светом. Заметим, что устройство на рис. 7.11, б также соответствует случаю, когда глаз смотрит непосредственно на рассеивающую поверхность. В этом случае

¹⁾ Поскольку $L \gg D$, то распределение поля в плоскости регистрации определяется пространственным фурье-преобразованием распределения во входной плоскости [8]. Это свойство следует из общего характера фурье-преобразования.

линзой служит хрусталик, а плоскостью регистрации — сетчатка глаза. Соответственно величина d'_g , определяемая выражением (7.58), представляет собой диаметр зерна на сетчатке глаза. Заметим, что видимый диаметр зерна на рассеивающей поверхности $d_{ag} = d'_g (L/L') = 2\lambda L/D'$. Он возрастает с увеличением расстояния L , т. е. с увеличением расстояния между наблюдателем и рассеивающей поверхностью. В то же время он уменьшается с увеличением диаметра диафрагмы (например, когда глаз адаптирован в темноте). Оба этих результата действительно подтверждаются в экспериментах.

Спекл-шум часто является нежелательным свойством когерентного света. Пространственное разрешение объектов, освещенных лазерным светом, во многих случаях ограничивается спекл-шумом. Спекл-шум возникает также в реконструированном изображении голограммы и ограничивает пространственное разрешение этого изображения. Поэтому были разработаны методы, которые уменьшают влияние спекл-картины при когерентном освещении объектов [7]. Однако спекл-шум не всегда является вредным эффектом. Действительно, разработаны методы, в которых используются свойства спекл-картины (спекл-интерферометрия), чтобы определять довольно простым способом деформации крупных объектов, вызываемые, например, напряжениями или вибрациями [7].