

1. Надплинність в рідкому гелії та електронній рідині металів –загальний опис.
2. **Макроскопічна квантова когерентність в He-II та надпровідниках**
3. Дворідинна модель для надплинного He-II та надпровідників.
4. Бозе-конденсація . Температура Бозе-конденсації ідеального газу
5. Критерій надплинності Ландау.
6. Критична швидкість надплинного конденсату
7. Куперівське спарювання електронів в надпровідниках
8. Надпровідність – основні експериментальні факти: ефект Мейсснера-Оксенфельда
9. Макроскопічна квантова когерентність в надпровідному стані: квантування магнітного потоку
10. Макроскопічна квантова когерентність в надпровідному стані: ефекти Джозефсона
11. Магнітні властивості надпровідників: надпровідники I-го та II-го роду
12. Термодинаміка надпровідників: критичне магнітне поле
13. Термодинаміка переходу нормального металу в надпровідний стан
14. Лінійна електродинаміка надпровідників: рівняння Лондонів
15. Лінійна електродинаміка надпровідників: Лондоновська глибина проникнення слабкого магнітного поля
16. Квантування магнітного потоку в отворі всередині надпровідника
17. Лінійна електродинаміка надпровідників: комплексна провідність надпровідника
18. Лінійна електродинаміка надпровідників: скін-ефект на змінному струмі
19. Параметр порядку і функціонал вільної енергії в теорії Гінзбурга –Ландау
20. Рівняння Гінзбурга –Ландау
21. Два характерних параметри довжини в теорії Гінзбурга –Ландау
22. Ефект близькості (S-N границя)
23. **Критичний струм розпарювання Гінзбурга-Ландау**
24. Вихорі Абрикосова у надпровідниках II роду. Власна енергія вихору.
25. Взаємодія вихорів Абрикосова. Вихрова решітка у змішаному стані надпровідника.
26. Критичні магнітні поля надпровідника:  $H_{c1}$ ,  $H_{c2}$ ,  $H_c$
27. Сила Лоренца для вихорів Абрикосова у надпровіднику із струмом.
28. Пінінг вихорів. Критичний струм депінінгу
29. Резистивний стан надпровідника, пов'язаний із рухом вихорів Абрикосова
30. Модель критичного стану надпровідника із сильним пінінгом вихорів.
31. Протікання струму крізь S-N-S контакт: ефект Джозефсона.
32. Протікання струму крізь S-c-S контакт: ефект Джозефсона.
33. Слабкий зв'язок надпровідників - ефект Джозефсона (загальна теорія).
34. Нестационарний ефект Джозефсона. Джозефсонівська генерація.
35. Резистивна модель джозефсонівського контакту. Вольт-амперна характеристика
36. Джозефсонівський контакт в НВЧ полі. Сходинки Шاپіро.
37. Принцип дії СКВІДу: одноконтактний та двохконтактний СКВІД.
- 38.

## 1.

**Надплинність** — стан речовини, в якому вона втрачає в'язкість. Спостерігається винятково в рідких гелію-4 й гелію-3.

Фазу рідкого гелію, в якій спостерігається надплинність, називають гелієм II.

Надплинність відкрита в 1937 році Петром Капіцею, Джоном Аленом і Доном Мізенером.

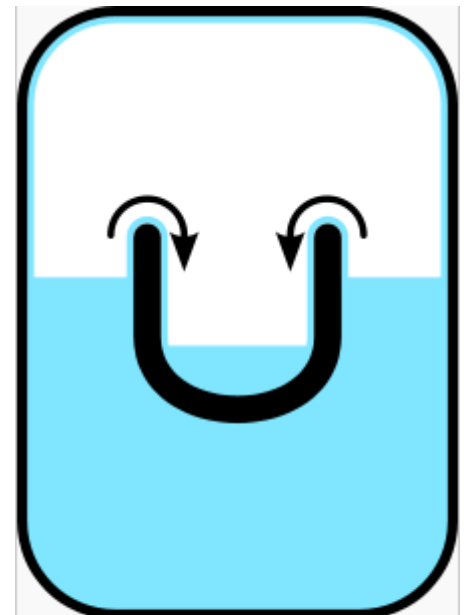
Гелій-4 частково переходить у надплинну фазу при температурі 2.17 К. Температуру переходу гелію до надплинного стану називають лямбда-точкою, оскільки графік залежності питомої теплоємності від температури в цій точці нагадує грецьку літеру  $\lambda$ . Температура переходу до надплинної фази гелію-3 набагато нижча.

Надплинна фаза має цілу низку дивовижних властивостей. У ній не лише в'язкість, а й ентропія дорівнює нулю. А теплопровідність при нульовій температурі нескінченна. В надплинному гелії неможливо встановити градієнт температур. При скінченних температурах рідкий гелій проводить тепло зі скінченною, хоча й великою, швидкістю, однак тепло розповсюджується в ньому не за звичайним рівнянням теплопровідності, а у вигляді хвилі, яку називають другим звуком.

Надплинний гелій має властивість вкривати тонкою плівкою будь-яку поверхню, переповзаючи по стінці вгору, незважаючи на силу тяжіння. У відкритій посудині його втримати неможливо.

Механізми виникнення надплинності в гелії-3 і гелії-4 різні, оскільки гелій-4 складається з бозонів, а гелій-3 з ферміонів.

Великий вклад у теорію надплинності зробили Лев Давидович Ландау і Микола Миколайович Боголюбов.



Переповзання гелію II через стінки посудини. Плівка рідини вкриває також стінки контейнера.



### 3.

Для пояснення незвичних особливостей надплинного гелію-4 Лондон, ґрунтуючись на близькості температури  $\lambda$ -точки та температури конденсації ідеального бозе-газу, а також на інтуїтивних міркуваннях про макроскопічну квантову когерентність, висунув гіпотезу, що й за наявності взаємодії між атомами гелію в ньому є бозе-конденсат, який зумовлює надплинність. Тісса спробував побудувати на основі цих ідей теорію надплинності, важливою частиною якої була дворідинна модель. В основу цієї моделі була покладена ідея про те, що надплинна рідина складається з двох взаємопроникних рідин (компонент): «нормальної рідини», яка поводить себе як класична рідина, та «надрідини» (надплинної компоненти) з нульовою в'язкістю, яка протікає по тонких капілярах без тертя. Надплинна компонента ототожнювалась з бозе-айнштайнівським конденсатом, який має рухатись когерентно, оскільки усі атоми конденсату знаходяться в одному квантовому стані. Дворідинна модель Тісси змогла якісно пояснити деякі екзотичні властивості надплинного гелію-4. Вона також передбачала, що в  $^4\text{He-II}$  можуть поширюватись так звані температурні хвилі.

Однак теорія Тісси некоректно описувала експеримент і була піддана критиці Левом Ландау.

Для обчислення властивостей надплинного гелію-4 Ландау побудував дворідинну гідродинаміку, яка зберігала уявлення про наявність двох типів руху, як і в теорії Тісси, але мала суттєві відмінності.

#### 4.

**Конденсація Бозе - Ейнштейна** - агрегатний стан матерії, основу якої складають бозони, охолоджені до температур, близьких до абсолютного нуля. У такому сильно охолодженому стані досить велике число атомів виявляється в своїх мінімально можливих квантових станах і квантові ефекти починають проявлятися на макроскопічному рівні.

Уповільнення атомів з використанням охолоджувальної апаратури дозволяє отримати сингулярне квантовий стан, відоме як конденсат Бозе, або Бозе - Ейнштейна. Це явище було передбачене в 1925 році А. Ейнштейном, як результат узагальнення роботи Ш. Бозе, де будувалася статистична механіка для частинок, починаючи від безмасових фотонів до мають масу атомів. Результатом зусиль Бозе і Ейнштейна стала концепція Бозе газу, що підкоряється статистиці Бозе - Ейнштейна, яка описує статистичний розподіл тотожних частинок з цілим спіном, званих бозонами. Бозони, якими є, наприклад, окремі елементарні частинки - фотони, і цілі атоми, можуть перебувати один з одним в однакових квантових станах. Ейнштейн припустив, що охолодження атомів - бозонів до дуже низьких температур змусить їх перейти (або, по-іншому, сконденсуватися) в найнижчий можливий квантовий стан. Результатом такої конденсації стане виникнення нової форми речовини.

Цей перехід виникає нижче критичної температури, яка для однорідного тривимірного газу, що складається з незалежних частинок без будь-яких внутрішніх ступенів свободи, визначається формулою

$$T_c = \left( \frac{n}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m k_B},$$

де  $T_c$  — критична температура,  $n$  — концентрація частинок,  $m$  — маса,  $h$  — постійна Планка,  $k_B$  — постійна Больцмана,  $\zeta$  — Дзета-функція Рімана  $[\zeta(3/2) = 2,6124...]$ .

---

**11.4. Оценить температуру конденсации Бозе — Эйнштейна для идеального газа бозонов с молекулярным весом 4 и плотностью  $0,15 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$  (плотность жидкого гелия) при постоянном объеме.**

#### Решение

Температура перехода определяется соотношениями (10.2.16) и (11.2.3):

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m k} \left( \frac{\rho}{2,61m} \right)^{2/3}, \quad (11.4.1)$$

где  $\rho$  — плотность. Иначе можно написать

$$T_c = 115 \rho^{2/3} M^{-5/3}, \quad (11.4.2)$$

где  $\rho$  — плотность, выраженная в  $\text{г}\cdot\text{см}^{-3}$ ;  $M$  — молекулярный вес; температура  $T_c$  выражена в кельвинах.

Подставляя значения  $\rho$  и  $M$ , указанные в условиях задачи, находим

$$T_c = 3,2 \text{ К}. \quad (11.4.3)$$

Это значение достаточно близко к  $\lambda$ -точке — температуре, при которой  $^4\text{He I}$  переходит в  $^4\text{He II}$ ; поэтому широко распространено предположение о том, что  $\lambda$ -переход в жидком гелии  $^4\text{He}$  по своей природе действительно связан с конденсацией Бозе — Эйнштейна. Помимо других фактов, эксперимент расходится с этой простой теорией в том, что теплоемкость идеального газа бозонов остается конечной при температуре  $T_c$  (см. задачу 11.6), в то время как теплоемкость жидкого гелия в  $\lambda$ -точке становится бесконечной <sup>1)</sup>.

## 5.

**Критерій надплинності Ландау** - співвідношення між енергіями і імпульсами елементарних збуджень системи ( фононів ) , що обумовлює можливість її знаходження в надплинному стані .

### формулювання критерія:

Квантова рідина може перебувати в надплинному стані , якщо для енергетичного спектра її елементарних збуджень  $\epsilon(p)$  мінімальне значення відношення енергії квазічастинки до її імпульсу  $\epsilon(p)/p$  більше нуля.

### Вивід критерія:

Розглянемо рідину , що рухається по капіляру зі швидкістю  $v = \text{const}$  . При наявності в'язкості відбуватиметься дисипація кінетичної енергії всередині самої рідини і в місці її зустрічі з капіляром і , як наслідок , уповільнення швидкості потоку . Дисипація відбувається за рахунок виникнення елементарних збуджень .

Перейдемо в систему координат, в якій рідина спочиває, а капіляр рухається зі швидкістю  $-v$ . Розглянемо одне елементарне збудження з імпульсом  $p$  і енергією  $\epsilon(p)$ . Тоді енергія  $E_0$  рідини (в системі координат, в якій вона спочатку лежала), стане дорівнює енергії цього збудження  $\epsilon$ , а її імпульс  $P_0$  — імпульсу  $p$ . Перейдемо тепер назад в систему координат, в якій покоїться капіляр. Відповідно до законів перетворення енергії і імпульсу при переході від однієї інерційної системи відліку в іншу (в нерелятивістському випадку), нові значення енергії і імпульсу мають вигляд:

$$E = E_0 + P_0 v + \frac{Mv^2}{2},$$

$$P = P_0 + Mv,$$

где  $M$  — маса жидкости. Подставляем сюда известные значения  $E_0$  и  $P_0$ , получаем:

$$E = \epsilon + pv + \frac{Mv^2}{2}.$$

Вираз  $\epsilon + pv$  є зміна енергії рідини завдяки появі збудження . Ця зміна має бути негативною , оскільки діють дисипативні сили . Звідси отримуємо вираз для швидкості потоку при наявності тертя

$$v > \frac{\epsilon}{p}.$$

Ця нерівність має виконуватися хоча б для деяких значень імпульсу  $p$  елементарного порушення . Відповідно , при відсутності тертя , при спостереженні надплинності , при будь-яких значеннях імпульсу елементарних збуджень  $p$  , повинна виконуватись нерівність

$$v \leq \frac{\epsilon}{p}.$$

Ця умова відповідає неможливості виникнення квазічастинки а , отже , це означає неможливість дисипації . Таким чином , для можливості спостереження надплинності в такій системі досить , щоб мінімальне значення відношення  $\epsilon(p)/p$  було більше нуля .

## 6.

Згідно теорії Ландау, рідина перестає бути надплинною і у разі, коли швидкість її потоку перевищує критичне значення, при якому починається спонтанне утворення ротонів. При цьому надплинна компонента втрачає імпульс, рівний імпульсу ротонів, що випускаються, і, отже, гальмується. Проте експериментальне значення критичної швидкості істотно менше тієї, яка потрібна по теорії Ландау для руйнування С.

**Ротон**- квазічастинки, елементарні збудження в надплинному гелії-4.

За своєю природою ротони схожі на фонони, проте характеризуються мінімумом в законі дисперсії при ненульових квазі-імпульсах в середині зони Брілюена. Ротони були запропоновані Левом Давидовичем Ландау для пояснення особливостей поведінки надплинного гелію при обертанні в ньому ротора.

В наведеному на рисунку законі дисперсії збуджень в надплинному гелії, лінійна ділянка при малих квазі-імпульсах відповідає фононам, а ділянка поблизу мінімуму відповідає ротонам.

Припущення про існування ротонів дало змогу пояснити існування в'язкості в певних експериментах з обертання ротора в надплинному гелії в рамках дворідинної моделі.



## 7.

**Куперівська пара** - пов'язане стан двох взаємодіючих через фонон електронів. Володіє нульовим спіном і зарядом, рівним подвоєному заряду електрона. Вперше подібний стан було описано Леоном Купером в 1956 році, роздивившись лише спрощену двочасткову задачу. Корельовані пари електронів відповідають за явище надпровідності.

### Модель поляризаційного електрон-електронного тяжіння

Для простоти розглянемо просту кубічну кристалічну решітку з періодом  $a$ , складається з позитивно заряджених одновалентних іонів з масою  $M$  і електрон, що рухається зі швидкістю Фермі  $\vec{V}_F$  уздовж якої-небудь осі симетрії (рис. 1). Більше того, будемо розглядати взаємодію при  $T = 0$ . Коли електрон пролітає між найближчими до нього іонами, ті, в свою чергу, набувають імпульс в напрямі,

$$\Delta p \simeq \frac{e^2}{av_F}.$$

перпендикулярному руху електрона:

Під дією цього імпульсу іони зміщуються так, як показано на рис. 1. При цьому кінетична енергія, яку набуває іон за час взаємодії, переходить у потенційну. Таким чином, за рухомим електроном слід область надлишкового позитивного заряду, який створює негативний (притягає) потенціал для іншого електрона (рис. 2а). Коли в утворену потенційну яму потрапляє інший електрон, то його потенційна енергія знижується і між парою електронів виникають сили притягання. При цьому тяжіння виникає тільки тоді, коли електрони рухаються в різні боки (рис. 2б). Крім того, для утворення куперівської пари спини електронів повинні бути протилежними (антипаралельними).

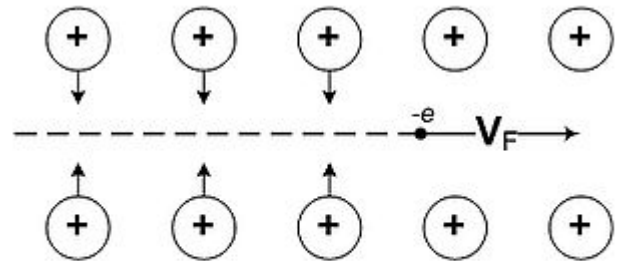


Рис. 1. Рух електрона в ґратах позитивно заряджених іонів

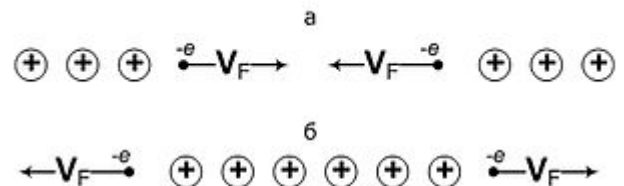


Рис. 2. Схема взаємодії двох рухомих назустріч один одному електронів

Розглянуте взаємодія носить одновимірний характер. З квантової механіки відомо, що в одновимірному (а також в двовимірному) випадку в потенційній ямі завжди утворюється зв'язаний стан (в тривимірному випадку для освіти зв'язаного стану потенційна яма повинна бути досить глибокою). Тому взаємодія електрон-іони (електрон-фононне взаємодію) завжди призводить до утворення корельовані стану пари електронів, що отримав назву **куперівської пари**. Оскільки спин у кожної пари дорівнює нулю, пари наближено можна вважати бозе-частинками, здатними утворювати бозе-конденсат. При цьому для розриву однієї куперівської пари необхідно затратити досить значну енергію, оскільки такий розрив супроводжується зміною енергій всіх інших пар, кількість яких макроскопічно велика. Дана обставина обумовлена дією принципу Паулі для електронів, складових пари: два електрони, що належали розірваної парі, блокують два стани в просторі імпульсів, які більш не дають свого внеску у формування інших пар. З цієї причини існує щілина в спектрі збуджень системи, що і веде до явища надпровідності.



## 8.

**Ефект Мейсснера-Оксенфельда** - повне витіснення магнітного поля з об'єму провідника при його переході в надпровідний стан. Вперше явище спостерігалось в 1933 році німецькими фізиками В. Мейсснером і Р. Оксенфельдом.

При охолодженні надпровідника, що знаходиться в зовнішньому постійному магнітному полі, в момент переходу в надпровідний стан магнітне поле повністю витісняється з його обсягу. Цим надпровідник відрізняється від ідеального провідника, у якого при падінні опору до нуля індукція магнітного поля в об'ємі повинна зберігатися без зміни.

Відсутність магнітного поля в об'ємі провідника дозволяє зробити висновок із загальних законів магнітного поля, що в ньому існує тільки поверхневий струм. Він фізично реальний і тому займає деякий тонкий шар поблизу поверхні. Магнітне поле струму знищує всередині надпровідника зовнішнє магнітне поле. В цьому відношенні надпровідник поводить себе формально як ідеальний діамagnetик. Однак він не є діамagnetиком, так як всередині нього намагніченість дорівнює нулю.

Ефект Мейсснера не може бути пояснений тільки нескінченною провідністю. Вперше його природу пояснили брати Фріц і Хайнц Лондони за допомогою рівняння Лондонів. Вони показали, що в надпровіднику поле проникає на фіксовану глибину від поверхні - лондонівську глибину проникнення магнітного поля  $\lambda$ . Для металів  $\lambda \sim 10^{-2}$  мкм.

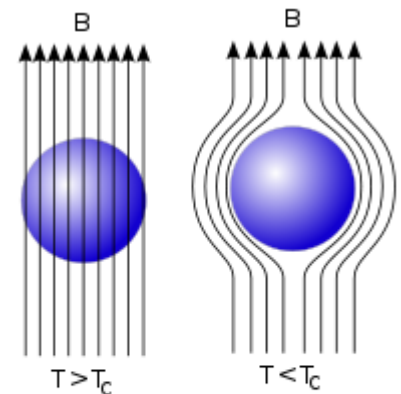


Схема Эффекта Мейсснера. Показаны линии магнитного поля и их вытеснение из сверхпроводника, находящегося ниже своей критической температуры.

## 9.

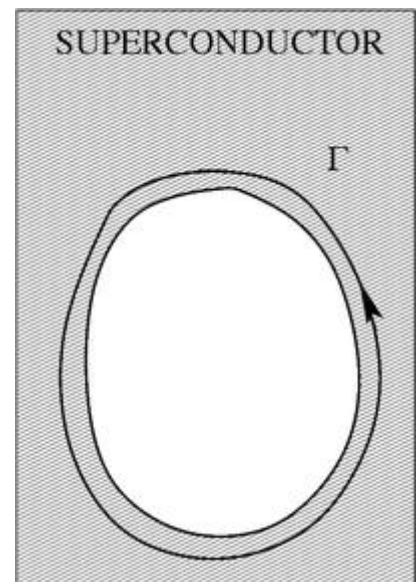
**Квантування магнітного потоку**, макроскопічне квантове явище, що полягає в тому, що магнітний потік через кільце з надпровідника із струмом може набувати лише дискретних значень (див. Надпровідність ).

$$\Phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{|e|} = 2.067833636 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$$

Мінімальне значення потоку (квант потоку) , де  $c$  — швидкість світла,  $\hbar$  — Планка постійна,  $e$  — заряд електрона. Магнітний потік в надпровіднику може бути рівний лише цілому числу квантів потоку. Експерименти (1961) дали для кванта потоку удвічі менше значення. Це з'явилося прекрасним підтвердженням створеній на той час мікроскопічній теорії надпровідності, згідно якої надпровідний струм обумовлений рухом пар електронів.

Електричний струм в надпровідному колі протікає без втрат і не загасає. Проте квантова природа надпровідного стану вимагає, щоб при обході кола хвильова функція надпровідника змінювала свою фазу на число кратне . Ця вимога призводить до квантування струму в колі. Квантується також і магнітне поле, яке створене цим струмом. Якщо дискретні значення струму залежать від довжини кола, то магнітний потік завжди пропорційний певній сталій, яка отримала назву кванту магнітного потоку.

Нехай надпровідник з отвором знаходиться при температурі вищій за критичну, тобто він знаходиться в нормальному а не в надпровідному стані. Якщо до нього прикласти зовнішнє магнітне поле перпендикулярно до площини отвору, а потім знизити температуру нижче критичної, то магнітне поле виштовхнеться із тіла надпровідника й лише в отворі залишиться деякий потік магнітного поля.



## 10.

**Ефект Джозефсона** - явище протікання надпровідного струму через тонкий шар діелектрика, що розділяє два надпровідника. Такий струм називають джозефсонівським струмом, а таке поєднання надпровідників - джозефсонівським контактом. У початковій роботі Джозефсона передбачалося, що товщина діелектричного шару багато менше довжини надпровідної когерентності, але подальші дослідження показали, що ефект зберігається і на набагато більших товщинах.

Розрізняють **стаціонарний** і **нестационарний** ефекти Джозефсона.

### 1) Стаціонарний ефект.

При пропущенні через контакт струму, величина якого не перевищує критичну, падіння [напруги](#) на контакті відсутній (незважаючи на наявність шару діелектрика). Ефект цей викликаний тим, що електрони провідності проходять через діелектрик без опору за рахунок [тунельного ефекту](#). Нетривалість ефекту полягає в тому, що надпровідний струм переноситься корельованими парами електронів ( [куперовськими парами](#)) і, на перший погляд, повинен бути пропорційний квадрату тунельної прозорості контакту і, зважаючи на надзвичайну малість останньої, практично неспостережуваних. Насправді тунелювання куперівської пари - специфічний [когерентний ефект](#), вірогідність якого порядку ймовірності тунелювання одиночного електрона, у зв'язку з чим максимальна величина струму Джозефсона може досягати величини звичайного тунельного струму через контакт при напрузі порядку [щільності в енергетичному спектрі](#) надпровідника. За сучасними уявленнями, мікроскопічним механізмом тунелювання куперівських пар є [андріївське відображення](#) квазічастинок, локалізованих в потенційній ямі в області контакту.

### 2) Нестационарний ефект.

При пропущенні через контакт струму, величина якого перевищує критичну, на контакті виникає падіння напруги  $U$ , і контакт при цьому починає випромінювати електромагнітні хвилі. При цьому частота

$$\omega = \frac{2eU}{\hbar}$$

такого випромінювання визначається як  $\hbar$ , де  $e$  - заряд електрона,  $\hbar$  - постійна Планка.

Виникнення випромінювання пов'язано з тим, що об'єднані в пари електрони, що створюють надпровідний струм, при переході через контакт набувають надлишкову стосовно основного станом надпровідника енергію  $2eU$ . Єдина можливість для пари електронів повернутися в основний стан - це випромінити квант електромагнітної енергії  $\hbar\omega = 2eU$ .

Одразу після відкриття надпровідності у 1911 р. Камерлінг-Оннес спробував отримати сильне магнітне поле у надпровідній котушці, проте з'ясував, що у надпровідному стані матеріал стає дімагнетиком, тобто магнітне поле виштовхується з матеріалу (рис 3).

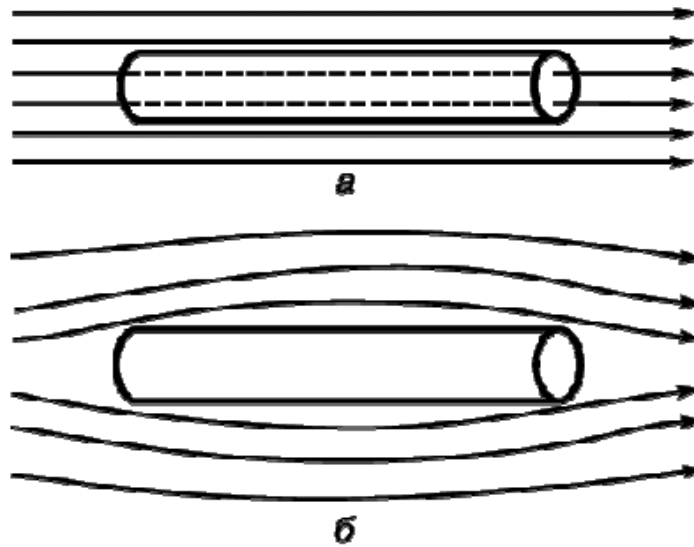


Рис. 3. Взаємодія магнітного поля зі звичайним (а) та надпровідним (б) стержнем

Механізм цього виштовхування відкрив німецький фізик В.Мейснер. Він з'ясував, що у надпровіднику, який вміщений у магнітне поле виникають колові струми. Ці струми створюють власні магнітні поля, що виштовхують зовнішнє поле з надпровідника. Цей ефект вже використовується для створення підшипників та електродвигунів, у яких відсутнє тертя. Проте якщо підвищувати напруженість магнітного поля то надпровідний стан руйнується. Магнітне поле, що знищує надпровідність називається критичним полем. Для різних надпровідників воно змінюється від кількох десятків до кількох сотень тисяч гаусів. При температурі переходу критичне поле дорівнює нулю, а при абсолютному нулі воно максимальне.

Електричний струм певної сили під час проходження крізь надпровідник створить критичне поле. Отже для надпровідника існує критичний (максимальний) струм, що може крізь нього проходити:

$$I_c = H_c \pi d \quad (1)$$

де  $H_c$  – напруженість критичного магнітного поля;  $d$  – діаметр провідника.

Такі властивості характерні для чистих матеріалів – надпровідників першого роду. Критичні поля для таких надпровідників становлять від 20 до 800 Гс.

### **Надпровідники другого роду**

Сплави та матеріали з домішками відхиляються від поведінки чистого надпровідника. Надпровідник складної будови (з домішками) в магнітному полі пронизаний великою кількістю мікроскопічних магнітних трубок, навколо кожної з яких тече коловий струм. Ці вихори (абрикосовські вихори) утворюють решітку з трикутними ячейками. Надпровідні шари витісняють магнітне поле у шари з нормальною провідністю, внаслідок чого матеріал стає проникним для магнітного поля, маючи водночас нульовий електричний опір. За певних умов така структура може виявитися стійкою. Вона отримала назву «надпровідник другого роду». А.А.Абрикосов показав, що насправді у реальній речовині немає виділених шарів. У ній утворюється ниткоподібна структура магнітного поля, що складається з магнітних каналів, які мають нормальну провідність. Магнітний потік заключений всередині цих каналів, у шар надпровідного матеріалу його не випускають колові мейснерівські струми, що оточують кожну нитку – абрикосовські вихори.

Магнітний потік квантований – у кожній нитці міститься один квант магнітного поля. Коли напруженість магнітного поля стає більшою за певну величину  $H_{k2}$  (може сягати 100 кГс) речовина виходить з надпровідного стану. А якщо напруженість магнітного поля менша за певну величину  $H_{k1}$  (до 500 Гс), речовина стає звичайним надпровідником першого роду.

**Критичне магнітне поле в надпровідниках**, характерне значення напруженості магнітного поля  $H_k$ , вище якого відбувається повне або часткове проникнення магнітного поля в надпровідник. При  $H < H_k$  магнітне поле в надпровідник не проникає, його екранує поверхневий надпровідний струм (Мейсснера ефект).

В надпровідниках I роду, до яких належить більшість чистих металів, речовина переходить в нормальний, ненадпровідний стан при  $H > H_k$  (фазовий перехід I роду). Відповідне цьому переходу К. м. п.  $H_k$  пов'язано з різницею вільних енергій нормальною ( $F_n$ ) і надпровідної ( $F_{cp}$ ) фаз співвідношенням  $F_n - F_{cp} = H_k^2 / 8\mu_0$ .

Найбільше значення  $H_k$  у чистих металів досягає сотень Гс. Якщо магнітне поле виявляється рівним  $H_k$  тільки в деяких точках поверхні надпровідника II роду, то в ньому виникає проміжний стан (чергування надпровідної і нормальної фаз).

В надпровідниках II роду (в основному це сплави) проникнення магнітного поля починається з утворення вихрових ниток, в серцевині яких в основному зосереджено магнітне поле. При цьому речовина ще не втрачає надпровідних властивостей, і в ньому течуть струми, частково екранують зовнішнє поле. Відповідне початку проникнення К. м. п.  $H_{k,1}$  менше термодинамічної критичного поля  $H_k$  для цих речовин. Повне проникнення магнітного поля в надпровідник настає при  $H_{k,2}$ , яке може бути як менше, так і більше  $H_k$ . У т. зв. жорстких надпровідниках, з яких найбільш відомі сплави на основі ніобію, К. м. п.  $H_{k,2} \gg H_{k,1}$  і досягає сотень тис. Гс. При значеннях поля  $H_{k,1}$  і  $H_{k,2}$  відбуваються фазові переходи II роду.

### 13.

Нехай довгий циліндр з надпровідного провідника I роду поміщений в однорідне поздовжнє поле  $H_0$ . Знайдемо значення цього поля  $H_c$ , при якому відбудеться руйнування надпровідності.

При  $H_0 < H_c$  існує ефект Мейснера, тобто  $B = 0$ , і магнітний момент одиниці об'єму циліндра  $M$ .

$$M = -H_0 / 4\pi$$

При зміні зовнішнього магнітного поля  $H_0$  на  $dH_0$  джерело магнітного поля здійснить роботу названої одиницею об'єму надпровідника, рівну

$$M dH_0 = H dH / 4\pi$$

Отже, при зміні поля від 0 до  $M_0$  джерело поля здійснює роботу

Ця робота запасена в енергії надпровідника, що знаходиться в магнітному полі  $H_0$  таким чином, якщо щільність вільної енергії надпровідника у відсутності магнітного поля дорівнює  $F_{s0}$ , то щільність вільної енергії надпровідників в магнітному полі

$$F_{sH} = F_{s0} + H_0^2 / 8\pi \quad (5.1)$$

Перехід у нормальний стан відбудеться, якщо вільна енергія  $F_{sH}$  перевищить рівень щільності вільної енергії нормального металу:  $F_{sH} = F_n$  при  $H_0 = H_c$ . Це означає, що

$$F_n - F_{s0} = H_c^2 / 8\pi \quad (5.2)$$

З цієї формули випливає, що критичне поле масивного матеріалу є мірою того, на скільки надпровідний стан є мірилом того, на скільки надпровідний стан є енергетично більш вигідним, ніж нормальне, тобто якою мірою вільна енергія надпровідного стану менше вільної енергії нормального стану. Поле  $H_c$  часто називають термодинамічним магнітним полем і позначають  $H_{cm}$ .

Звернемося тепер до питання про ентропію надпровідника. Відповідно до першого початку термодинаміки,

$$\delta Q = \delta A + dU \quad (5.3)$$

де  $\delta Q$  - протікання теплової енергії розглянутого тіла,  $\delta A$  - робота, що здійснюється одиницею об'єму цього тіла над зовнішніми тілами,  $dU$  - приріст його внутрішньої енергії. За визначенням вільна енергія

$$F = U - TS, \quad (5.4)$$

де  $T$  - [температура тіла](#), а  $S$  - енергія [ентропія](#). Тоді

$$dF = dU - TdS - SdT. \quad (5.5)$$

Оскільки при зворотному [процесі](#)  $\delta Q = TdS$ , маємо

$$dU = TdS - \delta A, \quad (5.6) \quad dF = -\delta A - SdT. \quad (5.7)$$

Звідси випливає, що

$$(5.8)$$

За допомогою цієї формули обчислимо різницю питомих ентропій надпровідного і нормального станів. Для цього вираз для вільної енергії (5.1) підставимо у формулу (5.8)

$$(5.9)$$

Ця формула дозволяє отримати ряд важливих фізичних наслідків.

1) Згідно з теоремою Нернста ентропія всіх тіл при  $T = 0$  рана нулю. Тому. Це означає, що крива залежності  $H_{cm}(T)$  при  $T = 0$  має нульову похідну.

2) З експерименту видно, що залежність  $H_{cm}(T)$  - це монотонно спадає зі збільшенням  $T$  крива, тобто що в усьому інтервалі температур від 0 до  $T_c$  величина. Отже, в цьому інтервалі температур  $s_s < s_n$ .

3) Оскільки при  $T = T_c$  після  $H_{cm} = 0$ , то  $s_s = s_n$  при  $T = T_c$ .

Проведений аналіз дозволяє зробити ряд істотних висновків.

1) надпровідний стан є більш упорядочено, ніж нормальне, так як його ентропія менше.

2) Перехід при  $T = T_c$  відбувається без поглинання або виділення прихованої теплоти, так як  $s_s = s_n$  при  $T = T_c$ . Отже, перехід при  $T = T_c$  - це перехід другого роду.

3) При  $T < T_c$  перехід з надпровідного стану в нормальний може відбуватися під дією магнітного поля.

Оскільки  $s_s < s_n$ , то такий перехід супроводжується поглинанням прихованої теплоти. Навпаки, при переході з нормального стану в надпровідний прихована теплота виділяється. Отже, всі переходи в магнітному полі при  $T < T_c$  є переходами першого роду.

Розглянемо далі питання про поведінку теплоємності. Питома теплоємність речовини, а різниця питомих теплоємностей надпровідного і нормального станів з урахуванням формули (5.9) є

Але при  $T = T_c$  критичне поле  $H_{cm} = 0$ , тому ця формула, відома як формула Рутгерса, показує, що при  $T = T_c$  теплоємність відчуває скачок (рис.20), як це і повинно бути при фазових переходах другого роду. При  $T > T_c$  теплоємність лінійно залежить від температури, як це буває у нормальних металів (електронна теплоємність).

Перенесення тепла у металі здійснюється як вільними електронами, так і коливаннями решітки. І

електропровідність, і теплопровідність обумовлені процесами розсіювання електронів. Тому наявність надпровідності означає відсутність обміну енергією електронів провідності з ґратами. У надпровіднику у міру пониження температури все більше число вільних електронів зв'язується в куперівських пари і тим самим виключається з процесів обміну енергії, а значить, внесок електронів в теплопровідність постійно зменшується. При достатньо низьких температурах в надпровіднику практично не залишається вільних електронів, і він веде себе як ізолятор: електронна система просто повністю вимикається з теплового балансу. Значна різниця теплопровідності металу в нормальному стані і надпровідному використовується для створення надпровідного теплового ключа - пристрою, що дозволяє розривати тепловий контакт між джерелом холоду і охолоджуваних тілом в експериментах в області низьких температур. Конструктивно надпровідний ключ виконується у вигляді відрізка тонкого дроту (діаметром 0,1 - 0,3 мм) з танталу або свинцю довжиною від декількох одиниць до декількох десятків сантиметрів, що з'єднує досліджуване тіло з хладопроводами. На таку дріт намотується мідна котушка, за якою пропускається струм, достатній для створення магнітного поля, більшого критичного значення. При пропущенні струму надпровідність руйнується магнітним полем, і ключ відкривається.

Аналогічні «магнітні» ключі застосовуються для створення поля в короткозамкнених надпровідних соленоїдах. У таких соленоїдах також є ділянка надпровідника з намотаною на ньому мідної обмоткою. При пропущенні струму через керуючу обмотку соленоїд стає розімкнутим, і через нього проходить струм від зовнішнього джерела. Потім ключ замикається, а магнітний потік виявляється замороженим в соленоїді. Надпровідний ключ може розриватися і при нагріванні (рис.21)

У такому випадку у коротко замкнутого соленоїда є невелика ділянка - перемичка, що підігрівається зовнішнім джерелом. Перемичка переходить з надпровідного в нормальний стан при її нагріванні до температури вище  $T_c$ .

Так як надпровідний стан є бездисипативним, в такому соленоїді магнітне поле надзвичайно стабільно і існує до тих пір, поки його температура не перевищить  $T_c$ . Сучасна техніка дозволяє виготовляти кріостати з настільки малим теплопритоком, що гелієві температури підтримуються після заливки рідкого гелію в кріостат з надпровідним соленоїдом приблизно протягом року!



14.

**Рівняння Лондонів** — система феноменологічних рівнянь, що встановлюють зв'язок між електричним струмом та величиною електричного й магнітного поля в надпровіднику й дозволяють найпростішим чином описати ефект Мейснера.

Рівняння запропонували в 1935 році німецькі фізики Фріц та Гайнц Лондони.

Рівняння мають вигляд:

$$\frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E},$$
$$\text{rot } \mathbf{j}_s = -\frac{n_s e^2}{mc} \mathbf{H},$$

де  $\mathbf{j}_s$  — густина надпровідного струму,  $n_s$  — густина надпровідних електронів,

$\mathbf{E}$  — напруженість електричного поля,  $\mathbf{H}$  — напруженість магнітного поля,

$e$  — елементарний електричний заряд,  $m$  — маса електрона,  $c$  — швидкість світла.

## Пояснення ефекту Мейснера

При відсутності електричного поля, використовуючи закон Ампера в диференціальній формі,

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

рівняння для вектора магнітної індукції набирає вигляду:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B},$$

де

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}}.$$

Ця величина отримала назву лондонівської глибини проникнення.

Розв'язок цього рівняння для плоскої поверхні надпровідника, поміщеної у нормальне для неї магнітне поле  $B_0$  має вигляд:

$$B = B_0 e^{-z/\lambda_L},$$

де  $z$  — віддаль від поверхні у глибину надпровідника.

Таким чином магнітне поле спадає в надпровіднику експоненційно, проникаючи тільки на деяку глибину, тобто виштовхується з надпровідника.



15.

**Лондонівська глибина проникнення** - характеристика надпровідника, яка визначає наскільки глибоко може проникнути в нього магнітне поле. Названа на честь Фріца та Гайнца Лондонів, які в 1935 запропонували рівняння Лондонів для опису магнітних властивостей надпровідників.

Лондонівська глибина проникнення  $\delta$  визначається формулою

$$\delta = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}}$$

де  $m$  - маса електрона,  $c$  - швидкість світла у вакуумі,  $e$  - заряд електрона,

$n_s$  - густина надпровідної фракції електронів у надпровіднику.

Затухання магнітного поля в глибину надпровідника визначається формулою

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-x/\delta}$$

де  $\mathbf{B}$  - магнітна індукція на глибині  $x$ , а вектор  $\mathbf{B}_0$  - паралельний поверхні надпровідника.

Затухання магнітного поля в глибину надпровідника описується даною формулою в тому випадку, коли глибина проникнення  $\delta$  набагато більша за довжину когерентності. Така ситуація щодо надпровідника називається лондонівською.

Зазвичай лондонівська глибина проникнення має порядок  $10^{-6} - 10^{-5}$  см.

**8.2. Квантование магнитного потока.** Мы переходим к изучению очень интересного (и важного для различных технических применений сверхпроводимости) явления — квантования магнитного потока в сверхпроводниках.

Рассмотрим внутри массивного сверхпроводника цилиндрическую полость (рис. 8.1). Пусть сперва  $T > T_c$  и сверхпроводник находится в нормальном состоянии. Наложим внешнее поле  $\mathbf{H}_0$  параллельно образующей полости. Понизим температуру так, чтобы сверхпроводник перешел в сверхпроводящее состояние. Теперь поле из тела сверхпроводника будет вытеснено, а в полости будет заморожен некоторый магнитный поток. Этот поток будет создаваться сверхтоком, возникающим на внутренней поверхности полости. Найдем этот замороженный магнитный поток.

Рассмотрим контур  $C$  (рис. 8.1), который охватывает полость и проходит всюду внутри сверхпроводника на расстояниях от границы полости, много больших  $\lambda$ . Тогда в любой точке этого контура сверхток  $\mathbf{j}_s = 0$ , и контурный интеграл уравнения (8.3) по этому контуру сведется к выражению

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \nabla \theta d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (8.4)$$



Рис. 8.1. В сплошном сверхпроводнике (заштриховано) имеется цилиндрическая полость. Контур  $C$  проходит всюду внутри сверхпроводника на больших по сравнению с  $\lambda$  расстояниях от границы полости.

Учитывая, что

$$\oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l} = \Phi, \quad (8.5)$$

имеем

$$\Phi = (\Phi_0/2\pi) \oint_C \nabla\theta d\mathbf{l}. \quad (8.6)$$

Здесь  $\Phi$  — это полный магнитный поток, охватываемый контуром  $C$ . Отсюда сразу видно, что  $\theta$  — многозначная функция; каждый раз при обходе вокруг отверстия она изменяется на некоторую величину. Но волновая функция  $\Psi$  должна быть однозначной. Поэтому мы должны потребовать, чтобы изменение  $\theta$  при обходе вокруг отверстия с магнитным потоком было кратным  $2\pi n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Действительно, добавление к  $\theta(\mathbf{r})$  величины  $2\pi n$  не изменяет функцию  $\Psi(\mathbf{r}) = (n_s/2)^{1/2} e^{i\theta}$ , так как  $e^{i2\pi n} = 1$ . Поэтому  $\oint_C \nabla\theta d\mathbf{l} = 2\pi n$ , и равенство (8.6) можно написать окончательно в виде

$$\Phi = n\Phi_0, \quad (8.7)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e} = \frac{\hbar c}{2e}. \quad (8.8)$$

Из формулы (8.7) следует, что магнитный поток в полости (точнее — магнитный поток, охватываемый контуром  $C$ ) может принимать только значения, кратные минимально возможному потоку  $\Phi_0$  — кванту потока. Величина  $\Phi_0$  определяется формулой (8.8) и равняется

$$\Phi_0 = 2.07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2.$$

Физически квантование магнитного потока имеет то же происхождение, что квантование орбит электронов в атоме. Нужно, чтобы волновая функция электронов, вращающихся по некоторому замкнутому контуру, имела целое число длин волн на длине этого контура.

## § 11. Комплексная проводимость сверхпроводника

В этом параграфе будет рассмотрена комплексная проводимость сверхпроводника, на плоскую поверхность которого падает электромагнитная волна. При этом мы предполагаем, что длина свободного пробега электронов  $l$  невелика, т. е. справедливо приближение нормального скин-эффекта. Иными словами,  $l$  достаточно мала, а частоты не столь велики, и поэтому  $l$  меньше глубины проникновения электромагнитного поля. При этом частота соударений электронов  $\tau^{-1} = v_F/l \gg \omega$ , где  $\omega$  — частота электромагнитной волны,  $v_F$  — скорость электронов на поверхности Ферми.

В изложении этих вопросов мы будем частично следовать книге Ван-Дузера и Тернера [25].

Для вычисления проводимости сверхпроводника в высокочастотном поле воспользуемся двухжидкостной моделью, т. е. будем считать, что существуют нормальные электроны с плотностью  $n_n$  и сверхпроводящие с плотностью  $n_s$ , причем плотность электронов проводимости  $n = n_s + n_n$ .

Уравнением движения для сверхпроводящих электронов является первое уравнение Лондонов (5.2)

$$\mathbf{E} = \Lambda d\mathbf{j}_s/dt. \quad (11.1)$$

Для нормальных электронов можно написать

$$e\mathbf{E} - \frac{m}{n_n e} \frac{d\mathbf{j}_n}{dt} = \frac{m}{n_n e} \frac{d\mathbf{j}_n}{dt}. \quad (11.2)$$

Здесь в левой части стоят силы, действующие на нормальные электроны: электрическое поле и усредненная «сила трения» из-за соударений, а справа — произведение массы на ускорение. Этот второй закон Ньютона для нормального электрона можно записать в виде

$$\mathbf{E} = \frac{n_s}{n_n} \Lambda \frac{d\mathbf{j}_n}{dt} + \frac{n_s}{n_n} \Lambda \frac{\mathbf{j}_n}{\tau}. \quad (11.3)$$

Предполагая, что  $\mathbf{j}_n \propto e^{i\omega t}$ , запишем (11.1) и (11.3) так:

$$\mathbf{j}_s = -i \frac{1}{\Lambda \omega} \mathbf{E}, \quad (11.4)$$

$$\mathbf{j}_n = \frac{n_n \tau}{n_s \Lambda} \frac{1 - i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \mathbf{E}. \quad (11.5)$$

Полная плотность тока  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n$ , и мы имеем окончательно

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \sigma = \sigma_1 - i\sigma_2, \quad (11.6)$$

$$\sigma_1 = \frac{n_n \tau}{n_s \Lambda} \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad (11.7)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\Lambda \omega} \left[ 1 + \frac{n_n}{n_s} \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \right]. \quad (11.8)$$

Уравнения (11.6)–(11.8) дают комплексную проводимость сверхпроводника в высокочастотном поле.

## 18.

**Скін-еф́ект** — явище проникнення електромагнітного поля в провідник на певну глибину, яка називається скін-шаром. Водночас, скін-ефект призводить до протікання струму в провіднику в основному в області скін-шару, і, як наслідок, збільшення опору провідника. Тобто скін-ефект — це проходження змінного електричного струму високої частоти не через увесь переріз провідника, а переважно лише в поверхневому шарі.

Інша назва — поверхневий ефект.

Глибина скін-шару визначається формулою

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{8\pi\mu\sigma\nu}}$$

де  $\delta$  — глибина скін-шару,  $c$  — швидкість світла,

$\mu$  — магнітна проникність речовини провідника,  $\sigma$  — електропровідність,  $\nu$  — лінійна частота.

Густина струму в провіднику спадає від поверхні експоненційно:

$$j = j_0 e^{-x/\delta}$$

де  $j$  — густина струму, а  $x$  — віддаль від поверхні.

Глибина скін-шару зменшується зі збільшенням частоти. Якщо при частоті 50 Гц глибина скін-шару в міді становить 0,7 см, то на частоті 0,5 МГц — 0,007 см.

Скін-ефект призводить до збільшення опору провідника високочастотному струму. Це збільшення стає помітним тоді, коли радіус провідника має однаковий порядок величини з глибиною скін-шару. При частоті 1 МГц опір мідного провідника з діаметром 2 мм збільшується майже в 7 разів, а отже збільшуються втрати на нагрівання провідника.

Скін-ефект призводить до нагрівання провідників у електронних пристроях, зокрема у мікропроцесорах, відтак накладає обмеження на підвищення, наприклад, тактової частоти, на якій працює комп'ютер.

**14.1. Плотность свободной энергии.** Переходим теперь к рассмотрению общего случая неоднородного сверхпроводника, находящегося во внешнем магнитном поле.

Вблизи  $T_c$  разложение свободной энергии Гиббса по степеням  $\Psi$  можно записать так:

$$G_{sH} = G_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| -i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right|^2 + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}_0}{4\pi}, \quad (14.1)$$

$G_n$  — плотность свободной энергии сверхпроводника в нормальном состоянии,  $\mathbf{H}_0$  — напряженность внешнего однородного магнитного поля, в котором находится сверхпроводник. Предпоследнее слагаемое в (14.1) представляет собой просто плотность магнитной энергии, где  $\mathbf{H}$  — это точное микроскопическое поле в данной точке сверхпроводника. Слагаемое с градиентным членом — это плотность кинетической энергии сверхпроводящих электронов. Рассмотрим это слагаемое более подробно.

Плотность кинетической энергии частицы с массой  $m$  в квантовой механике записывается в виде

$$\frac{1}{2m} | -i\hbar\nabla\Psi |^2.$$

В случае, если частица имеет заряд  $e$  и движется в поле векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , в выражении для плотности кинетической энергии оператор  $-i\hbar\nabla$  надо изменить:

$$-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A} = m\mathbf{v}.$$

Оператор скорости поэтому равен

$$\mathbf{v} = -(i\hbar/m)\nabla - (e/cm)\mathbf{A}.$$

Поскольку в выражение для плотности кинетической энергии входит именно скорость частицы  $\mathbf{v}$ , становится понятным выражение (14.1). Остается только сказать, что в этом выражении произведена замена  $e \rightarrow 2e$ , поскольку элементарный заряд носителя сверхтока равен  $2e$ . Соответственно, под  $m^*$  в (14.1) понимается удвоенная масса свободного электрона.

**14.2. Уравнения Гинзбурга – Ландау (ГЛ).** Свободная энергия Гиббса всего сверхпроводника, согласно (14.1), равна

$$\mathcal{G}_{sH} = \mathcal{G}_n + \int \left[ \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| -i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right|^2 + \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{8\pi} - \frac{\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_0}{4\pi} \right] dV, \quad (14.2)$$

где интегрирование ведется по всему объему сверхпроводника. Наша задача — найти такие уравнения относительно функций  $\Psi(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , решения которых, будучи подставлены в (14.2), давали бы минимальное значение  $\mathcal{G}_{sH}$ .

Для решения этой вариационной задачи будем сперва считать  $\Psi(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  неизменными, а проварьируем функцию  $\Psi^*(\mathbf{r})$ . Итак, решаем вариационную задачу

$$\delta \Psi^* \mathcal{G}_{sH} = 0, \quad (14.3)$$

где

$$\delta \Psi^* \mathcal{G}_{sH} = \int dV \left[ \alpha \Psi \delta \Psi^* + \beta \Psi |\Psi|^2 \delta \Psi^* + \frac{1}{4m} \left( i\hbar \nabla \delta \Psi^* - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \delta \Psi^* \right) \left( -i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right) \right]. \quad (14.4)$$

Вынести  $\delta \Psi^*$  за квадратные скобки мешает только член  $i\hbar \nabla \delta \Psi^*$ . Проведем такие преобразования. Обозначим

$$\mathbf{v} = \left( -i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right).$$

Используя тождество

$$\nabla(\delta \Psi^* \mathbf{v}) = \mathbf{v} \nabla \delta \Psi^* + \delta \Psi^* \nabla \mathbf{v},$$

имеем

$$\begin{aligned} \int dV \nabla \delta \Psi^* \mathbf{v} &= - \int \delta \Psi^* \nabla \mathbf{v} dV + \int \nabla(\delta \Psi^* \mathbf{v}) dV. \quad (14.5) \\ &= \int \left\{ \frac{1}{4m} \left( -\frac{2e}{c} \Psi^* \delta \mathbf{A} \right) \left( -i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4m} \left( i\hbar \nabla \Psi^* - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi^* \right) \left( -\frac{2e}{c} \Psi \delta \mathbf{A} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \text{rot } \delta \mathbf{A} \right\} dV. \quad (14.7) \end{aligned}$$

Из (14.7) следует, что вынести вариацию  $\delta \mathbf{A}$  за фигурную скобку мешает член  $(1/4\pi)(\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \text{rot } \delta \mathbf{A}$ . Воспользовавшись тождеством

$$\mathbf{a} \text{rot } \mathbf{b} = \mathbf{b} \text{rot } \mathbf{a} - \text{div}[\mathbf{a}\mathbf{b}], \quad (14.8)$$

$$\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b} = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \operatorname{div}[\mathbf{a}\mathbf{b}], \quad (14.8)$$

проинтегрируем последнее слагаемое в (14.7):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int dV (\operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \operatorname{rot} \delta \mathbf{A} = \\ = \frac{1}{4\pi} \int dV \delta \mathbf{A} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \frac{1}{4\pi} \oint dS [\delta \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0]. \end{aligned} \quad (14.9)$$

При этом мы воспользовались теоремой Гаусса и перешли от объемного интеграла к поверхностному:

$$\int dV \operatorname{div}[\delta \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0] = \oint dS [\delta \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0].$$

Но этот поверхностный интеграл равен нулю, так как магнитное поле на поверхности сверхпроводника задано, и поэтому  $\delta \mathbf{A}|_S = 0$ .

Подставляя теперь (14.9) без последнего члена в (14.7), производя элементарные преобразования и приравнявая вариацию свободной энергии нулю, получим

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{G}_{sH} = \int dV \left[ \frac{i\hbar e}{2mc} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \right. \\ \left. + \frac{2e^2}{mc^2} \mathbf{A} |\Psi|^2 + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right] \delta \mathbf{A} = 0. \end{aligned} \quad (14.10)$$

Этот интеграл может быть равен нулю при любой вариации  $\delta \mathbf{A}$  только в том случае, если выражение в квадратных скобках равно нулю. Это требование определяет второе уравнение теории ГЛ относительно векторного потенциала  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{j}_s = -\frac{i\hbar e}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{mc} |\Psi|^2 \mathbf{A}, \quad (14.11)$$

где, согласно уравнению Максвелла, плотность тока  $\mathbf{j}_s$  в сверхпроводнике равна

$$\mathbf{j}_s = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (14.12)$$

Перейдем к безразмерной волновой функции  $\psi(\mathbf{r})$ , обозначив

$$\psi(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r})/\Psi_0, \quad (14.13)$$

где  $\Psi_0^2 = n_s/2 = |\alpha|/\beta$ .

Кроме того, введем следующие обозначения:

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{4m|\alpha|}, \quad (14.14)$$

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} = \frac{mc^2 \beta}{8\pi e^2 |\alpha|}. \quad (14.15)$$

Тогда уравнения ГЛ можно записать в более компактной и удобной форме:



$$\xi^2 \left( i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 = 0, \quad (14.16)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -i \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \mathbf{A}. \quad (14.17)$$

Здесь  $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$  — квант потока (§ 8).

Представив волновую функцию  $\psi$  в виде  $\psi = |\psi| e^{i\theta}$ , второе уравнение ГЛ можно записать в следующей форме:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right). \quad (14.18)$$

## § 15. Два характерных масштаба длины в сверхпроводниках. Эффект близости

### 15.1. Длина когерентности и глубина проникновения.

В предыдущем параграфе была введена чисто формально определенная величина  $\xi$  (14.14). Сейчас мы узнаем ее физический смысл.

Рассмотрим такой простой пример. На чистую плоскую поверхность сверхпроводника нанесена пленка нормального металла. Тогда локально около поверхности плотность сверхпроводящих электронов несколько понизится. Иными словами, значение параметра порядка  $|\psi|$  на поверхности будет несколько отличаться от его равновесного значения в глубине сверхпроводника, где  $|\psi| = 1$ . Каков тот характерный масштаб длины, на котором параметр порядка восстановится до единицы?

Направим ось  $x$  перпендикулярно к поверхности сверхпроводника (на поверхности  $x = 0$ ). Очевидно, изменение  $\psi$  может происходить только вдоль оси  $x$ , т. е.  $\psi = \psi(x)$ . Кроме того, поскольку мы рассматриваем односвязный сверхпроводник, можем считать  $\psi$  вещественной функцией (см. § 14). Тогда первое уравнение ГЛ (14.16) примет следующий простой вид:

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0. \quad (15.1)$$

Предположим, что слой нормального металла на поверхности такой тонкий, что значение  $\psi$  на поверхности очень мало отличается от единицы, т. е.

$$\psi = 1 - \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \ll 1.$$

Подставляя это выражение для  $\psi$  в (15.1) и оставляя только линейные по  $\varepsilon(x)$  члены, получим

$$\xi^2 d^2\varepsilon(x)/dx^2 - 2\varepsilon(x) = 0. \quad (15.2)$$

Учитывая, что при  $x \rightarrow \infty$  функция  $\psi \rightarrow 1$ , имеем  $\varepsilon(\infty) = 0$ . Решение уравнения (15.2) очевидно:

$$\varepsilon = \varepsilon(0)e^{-\sqrt{2}x/\xi}.$$

Отсюда следует, что  $\xi$  — это и есть по порядку величины тот характерный масштаб, на котором происходит изменение параметра порядка  $\psi$ .

Эту длину называют длиной когерентности.

Другая величина, введенная в предыдущем параграфе,  $\lambda$ , нам уже известна (§ 6). Это глубина проникновения слабого магнитного поля. Она так же, как и  $\xi$ , зависит от температуры;

$$\lambda^2 = mc^2\beta/(8\pi|\alpha|e^2), \quad (15.3)$$

$$\xi^2 = \hbar^2/(4m|\alpha|), \quad (15.4)$$

поскольку вблизи  $T_c$  имеем  $|\alpha| \propto (T_c - T)$ . Таким образом, вблизи  $T_c$

$$\lambda \propto (T_c - T)^{-1/2}, \quad \xi \propto (T_c - T)^{-1/2}. \quad (15.5)$$

Во всем диапазоне температур  $\lambda(T)$ , как правило, хорошо аппроксимируется формулой (6.5). Значения  $\lambda(0)$  для некоторых сверхпроводников были приведены в таблице 6.1. Используя нормировку (13.1) и формулу (13.3), убеждаемся, что глубина проникновения (15.3) совпадает с глубиной проникновения, введенной в (5.7).

С помощью  $\lambda(T)$  и  $\xi(T)$  можно ввести очень важную величину — параметр теории Гинзбурга — Ландау  $\kappa$ :

$$\kappa = \lambda/\xi. \quad (15.6)$$

Используя формулы (15.3), (15.4) и (15.6), получим другое выражение для  $\kappa$ :

$$\kappa = 2\sqrt{2} \frac{e}{\hbar c} \lambda^2 H_{cm}. \quad (15.7)$$

С помощью выражения для кванта магнитного потока  $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$  легко получим отсюда очень полезную формулу:

$$\sqrt{2} H_{cm} = \frac{\Phi_0}{2\pi \lambda \xi}. \quad (15.8)$$

Обсудим в заключение вопрос о влиянии магнитного поля на параметр порядка и на глубину проникновения.

Пусть  $\kappa \ll 1$ , т. е.  $\lambda \ll \xi$ . Сверхпроводящий образец занимает полупространство  $x > 0$ , а внешнее магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ . Поскольку по предположению  $\lambda \ll \xi$ , магнитное поле проникает в образец лишь на небольшую по сравнению с  $\xi$  глубину. Это значит, что параметр порядка  $\Psi$  оказывается под воздействием магнитного поля лишь на глубине  $\lambda$ , а существенно измениться он может только на расстоянии  $\xi$ . Поэтому на основной части длины когерентности параметр порядка «не знает» о существовании магнитного поля и близок к  $\Psi_0 = (|\alpha|/\beta)^{1/2}$ . Следовательно, мы можем заключить, что в случае  $\kappa \ll 1$  параметр порядка мало изменяется магнитным полем.

Отсюда сразу же следует, что и глубина проникновения магнитного поля, которая зависит от  $|\Psi|^2$ , тоже мало изменяется магнитным полем. Точный расчет показывает, что уменьшение модуля параметра порядка  $\psi$  вблизи поверхности образца во внешнем магнитном поле  $H_0$  происходит на величину [27]

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \kappa \frac{H_0^2}{H_{cm}^2}.$$

Влияние внешнего магнитного поля на параметр порядка в случае  $\lambda \gg \xi$  оказывается значительно более сильным и приводит ко многим интересным и качественно новым эффектам. Об этом мы будем подробно говорить в будущем.

Из (14.6) получим граничное условие для  $\psi$ . Если сверхпроводник граничит с вакуумом или каким-либо другим диэлектриком, таким условием будет

$$\left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{A}\right)\mathbf{n}\psi = 0, \quad (14.19)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности сверхпроводника. Легко проверить с помощью формулы (14.11), что условие (14.19) обеспечивает выполнение естественного физического требования, чтобы сверхток через границу сверхпроводник — диэлектрик равнялся нулю. Однако этому же требованию равенства нулю нормальной компоненты сверхтока на границе удовлетворяет и более общее равенство:

$$\left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{A}\right)\mathbf{n}\psi = ia\psi, \quad (14.20)$$

где  $a$  — произвольное вещественное число. С помощью микротемии сверхпроводимости можно показать, что условие (14.20) соответствует случаю, когда сверхпроводник граничит с нормальным металлом.

Последний интеграл в этом равенстве по теореме Гаусса превращается в поверхностный интеграл:

$$\int \nabla(\delta\Psi^*\mathbf{v}) dV = \oint_S \delta\Psi^*\mathbf{v} dS.$$

Подставляя (14.5) в (14.4), а (14.4) в (14.3), получим

$$\begin{aligned} \delta\Psi \cdot \mathcal{G}_{sH} = \int dV \left[ \alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi \right] \delta\Psi^* + \\ + \oint_S \left[ -i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right] \delta\Psi^* dS = 0. \end{aligned}$$

Это выражение может быть равно нулю при произвольной функции  $\delta\Psi^*$  только в том случае, если выражения в квадратных скобках равны нулю. Так мы получим первое уравнение теории ГЛ и граничное условие к нему:

$$\begin{aligned} \alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left( i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi = 0, \\ \left( i\hbar\nabla\Psi + \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right)\mathbf{n} = 0, \end{aligned} \quad (14.6)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, нормальный к поверхности сверхпроводника. Легко проверить, что минимизация  $\mathcal{G}_{sH}$  по  $\Psi$  даст уравнение, комплексно сопряженное уравнению (14.6). Полученное уравнение есть уравнение относительно параметра порядка  $\Psi$ . У нас осталось еще одно переменное:  $\mathbf{A}$ .

**15.2. Эффект близости.** Очень ярко проявляется роль длины когерентности в случае хорошего контакта между нормальным металлом  $N$  и сверхпроводником  $S$ . Куперовские пары могут проникать из  $S$  в  $N$  и некоторое время там жить. Это приводит к тому, что какой-то слой нормального металла вблизи границы  $SN$  станет сверхпроводящим. Но проникновение пар из  $S$  в  $N$  приведет к уменьшению их плотности в  $S$ , т.е. параметр порядка  $\psi$  в сверхпроводнике вблизи  $NS$ -границы будет меньше единицы даже в отсутствие магнитного поля.

Это явление называется эффектом близости.

Рассмотрим наиболее простой случай. Пусть хороший контакт осуществлен между двумя сверхпроводниками, критические температуры которых ( $T_{cN}$  и  $T_{cS}$ ) слегка различны:  $T_{cS} > T_{cN}$ ,  $T_{cS} - T_{cN} \ll T_{cN}$ . Температура образца  $T$  выбрана такой, что выполняется неравенство  $T_{cN} < T < T_{cS}$ , т.е. материал с критической температурой  $T_{cN}$  находится в нормальном состоянии. Плоская граница между двумя материалами совпадает с плоскостью  $x = 0$ . Сверхпроводник занимает полупространство  $x > 0$ , нормальный металл — соответственно,  $x < 0$ .

Поведение параметра порядка в  $S$ -области ( $x > 0$ ) можно определить, решив первое уравнение ГЛ (14.16) в форме (15.1). Это уравнение интегрируется точно. Действительно, его первый интеграл имеет вид

$$-\xi^2(d\psi/dx)^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 = C, \quad (15.9)$$

где  $C$  — константа интегрирования. Поскольку при  $x \rightarrow \infty$  имеем  $(d\psi/dx) \rightarrow 0$ ,  $\psi \rightarrow 1$ , то  $C = -1/2$ . Подставляя это значение  $C$  в (15.9) и интегрируя, получим

$$\psi = \text{th} [(x - x_0)/\sqrt{2\xi}]. \quad (15.10)$$

Здесь  $x_0$  — константа интегрирования, которая должна быть определена из граничного условия при  $x = 0$ . Это условие (14.20) в нашем случае имеет вид

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{b}. \quad (15.11)$$

Значения  $b$  в общем случае должны быть вычислены с помощью микроскопической теории. Ее геометрический смысл ясен из рис. 15.1.

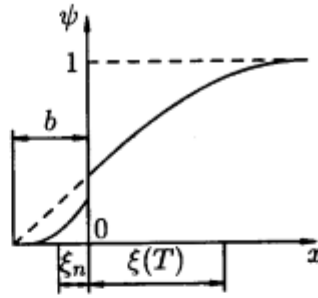


Рис. 15.1. Параметр порядка  $\psi(x)$  вблизи границы между сверхпроводником ( $x > 0$ ) и нормальным металлом ( $x < 0$ ).

Подставив (15.10) в (15.11), найдем связь между константой интегрирования  $x_0$  и величиной  $b$ :

$$-\text{sh}(\sqrt{2}x_0/\xi) = \sqrt{2}b/\xi.$$

Рассмотрим теперь поведение параметра порядка  $\psi$  в нормальной области ( $x < 0$ ). Здесь мы тоже можем использовать (см., например, [29]) первое уравнение ГЛ. Действительно, согласно (13.6), коэффициент  $\alpha_n \propto (T - T_{cn})$ , т. е.  $\alpha_n < 0$  при  $T < T_{cn}$  и  $\alpha_n > 0$  при  $T > T_{cn}$ . Поэтому первое уравнение ГЛ (14.6) в нашем случае для  $N$ -области и при условии  $(T - T_{cn}) \ll T_{cn}$  будет иметь вид

$$-\xi_n^2(d^2\psi/dx^2) + \psi + \psi^3 = 0,$$

где  $\xi_n^2 = \hbar^2/4m\alpha_n$ .

Параметр порядка в нормальной области мал ( $\psi \ll 1$ ), поэтому можно пренебречь кубическим членом. В результате имеем

$$-\xi_n^2(d^2\psi/dx^2) + \psi = 0.$$

Решение этого уравнения при условии  $\psi \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$  будет

$$\psi = \psi_0 e^{-|x|/\xi_n}. \quad (15.12)$$

Отсюда следует, что параметр порядка, экспоненциально затухая, проникает в  $N$ -область на глубину  $\xi_n$ . Поскольку  $T_{cn}$  и  $T_{cs}$  близки, можно считать  $\psi$  и  $d\psi/dx$  непрерывными на  $NS$ -границе. Тогда из (15.12) имеем  $b = \xi_n$ .

В общем случае контакта сверхпроводника с истинно нормальным металлом ( $T_{cn} = 0$ ) применять уравнения ГЛ в нормальной области уже нельзя. Тем не менее, качественно явление сохраняется: параметр порядка проникает на некоторую глубину  $\xi_n$  в нормальную область.



## 24.

**Вихор Абрикосова** — локальна область проникнення магнітного поля в надпровідник, і, відповідно, область нормальної фази в надпровідникову. Вихори Абрикосова виникають в надпровідниках в магнітному полі, напруженість якого вища за перше критичне, але нижча за друге критичне. Зазвичай, вихори Абрикосова містять один квант магнітного потоку. Іноді вихори Абрикосова називають *флюксонами*.

Вихор складається із нормальної серцевини (кора), куди проникає магнітне поле і протяжної зовнішньої області, в якій напруженість магнітного поля спадає експоненційно. Назва вихор зумовлена тим, що навколо кора в надпровідній фазі протікають циклічні струми, магнітне поле яких протилежне за напрямком полю у вихорі й компенсує його на віддалі від серцевини.

Вихори Абрикосова в однорідному надпровіднику без дефектів утворюють ґратку, здебільшого гексагональну (нестрого - трикутну). При пропусканні струму через надпровідник вихори дрейфують, однак цей дрейф може зупинитися, якщо вихор прив'язується до дефекта. Це прив'язування називають пінінгом.

При збільшенні напруженості магнітного поля до величини, яка називається першим критичним полем і позначається  $H_{c1}$ , магнітне поле починає проникати в надпровідник локально у вигляді вихорів Абрикосова, в серцевині яких існує нормальна фаза, тоді як решту об'єму залишається надпровідною.



**РЕШЁТКА ВИХРЕЙ АБРИКОСОВА** - двумерная решётка квантованных вихрей в сверхпроводниках второго рода (СВР). Теоретически предложена А. А. Абрикосовым (1957) для объяснения магн. свойств СВР. Вихри, образующие Р. в. А., характеризуются остовом с радиусом порядка длины когерентности  $\xi$ . В центре остова (на оси вихря) плотность сверхпроводящих электронов равна нулю. Вокруг остова на расстояниях порядка глубины проникновения магн. поля  $\lambda$  циркулирует сверхпроводящий ток, распределённый так, что создаваемый им магн. поток равен кванту магн. потока (см. Квантование магнитного потока). Схематич. поведение магн. поля и плотности сверхпроводящих электронов изолиров. вихря изображено на рис. 1. В интервале полей  $H_{C1} < H < H_{C2}$  (см. Критическое магнитное поле) такие вихри в результате взаимодействия друг с другом (отталкивания) образуют регулярную (в однородном материале) решётку. Минимуму свободной энергии отвечает треугольная решётка, однако в нек-рых сверхпроводящих материалах, обладающих тетрагональной симметрией, можно наблюдать также квадратную решётку. Характерное расстояние между вихрями определяется приложенным магн. полем. По мере приближения  $H$  к  $H_{C2}$  остовы вихрей сближаются, начинают перекрываться и сверхпроводимость подавляется, пока полностью не разрушится при  $H = H_{C2}$ . Р. в. А. обладает жёсткостью, значения модулей упругости Р. в. А. выражаются через параметры кривой намагничивания сверхпроводника. Причиной электрич. сопротивления СВР является движение Р. в. А. Регулярность Р. в. А. может нарушаться за счёт дефектов структуры материала, приводящих к пиннингу вихревых нитей (см. Критический ток), захвату магн. потока в образце и необратимости процесса намагничивания СВР. Р. в. А. можно непосредственно наблюдать по рассеянию нейтронов, а также в электронном микроскопе с помощью техники декорирования ферромагн. порошком (рис. 2).

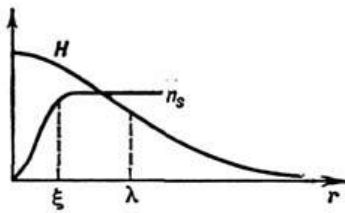


Рис. 1. Распределение плотности сверхпроводящих электронов  $n_s$  и магнитного поля изолированного вихря в зависимости от расстояния до оси вихря  $r$ .

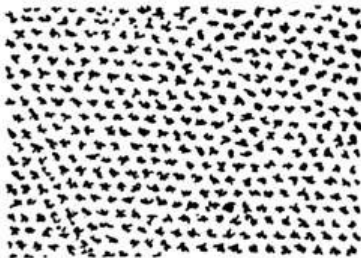


Рис. 2. Воспроизведение структуры решётки Абрикосова в сплаве Pb - 6,3 ат. % In,  $H \approx 80$  Э.

**2.3. Магнитные свойства сверхпроводников второго рода.** В отличие от сверхпроводников первого рода, сверхпроводники второго рода не обнаруживают полного эффекта Мейсснера – Оксенфельда. Магнитное поле в них проникает, но весьма своеобразно.

Возьмем длинный цилиндр из сверхпроводника второго рода и поместим его в продольное внешнее магнитное поле. Начнем увеличивать это поле от нуля. Тогда мы обнаружим, что сначала цилиндр полностью выталкивает это поле, т. е. индукция внутри цилиндра равна нулю. Это значит, что сперва обнаруживается эффект Мейсснера – Оксенфельда. Однако, начиная с некоторого поля (назовем его первым критическим полем и обозначим  $H_{c1}$ ), внутри цилиндра начинает появляться конечная индукция  $B$ , которая увеличивается с увеличением внешнего поля  $H_0$ . Так будет происходить до тех пор, пока среднее поле  $B$  внутри цилиндра не станет равным внешнему полю  $H_0$ . Это произойдет при так называемом втором критическом поле  $H_{c2}$ , при котором наш цилиндр перейдет в нормальное состояние. Правда, даже при  $H_0 > H_{c2}$  сверхпроводимость все-таки сохранится в тонком поверхностном слое. Но при  $H_0 = 1.69 H_{c2}$  сверхпроводимость и этого поверхностного слоя окажется разрушенной. Это поле называют третьим критическим и обозначают  $H_{c3}$ .

Состояние сверхпроводника в полях между  $H_{c1}$  и  $H_{c2}$  называется смешанным или вихревым состоянием, поскольку наличие магнитной индукции в таком состоянии поддерживается многочисленными вихревыми токами в глубине сверхпроводника. Особенно велика область смешанного состояния в высокотемпературных сверхпроводниках, где оно существует при низких температурах в интервале полей от  $10^3$  до  $10^6$  Э для направления поля поперек слоистой структуры кристаллов ВТСП. Хорошая металлическая проводимость в этих веществах обеспечивается электронным транспортом вдоль плоскостей  $\text{Cu}-\text{O}$ , в то время как транспорт поперек слоев слоев гораздо слабее, что можно охарактеризовать с помощью сильной анизотропии эффективной массы носителей, электронов или дырок:  $m_{\parallel}/m_{\perp} = \varepsilon^2 \ll 1$ . Как следствие этого (см. § 35), анизотропным оказывается и отношение второго и первого критических полей: параметр анизотропии  $\varepsilon^{-1} = H_{c2}^{\parallel}/H_{c2}^{\perp} \simeq H_{c1}^{\perp}/H_{c1}^{\parallel}$  достигает нескольких сотен в ВТСП висмутового и таллиевого семейств, так что интервал существования смешанного состояния оказывается еще шире для полей, параллельных плоскостям  $\text{Cu}-\text{O}$ .

## 27.

Високотемпературні надпровідники є надпровідниками другого роду і, як відомо, в зовнішньому магнітному полі, напруженість якого перевищує перше критичне поле, такий надпровідник буде перебувати в змішаному (вихоревому) стані. Якщо пропускати крізь нього транспортний струм в напрямку, що перпендикулярний вихорам то на них буде діяти сила Лоренца, яка створюється цим струмом. В випадку надпровідника, що не має дефектів і є повністю однорідним під дією цієї сили вихори Абрикосова будуть рухатись і критичний струм буде рівний нулю, внаслідок того, що рух вихорів Абрикосова супроводжується дисипацією енергії. В неоднорідному ж надпровіднику, що має різного роду дефекти, вихори Абрикосова будуть закріплюватись на них – пінінгуватися. І в цьому випадку критичний струм не буде нульовим, а визначатиметься рельєфом потенціалу Гібса, що зумовлений дефектною структурою надпровідника. Сила Лоренца, що діє на вихор Абрикосова є постійною при обертанні зовнішнього магнітного поля.

## 28.

Вихори Абрикосова в однорідному надпровіднику без дефектів утворюють ґратку, здебільшого гексагональну (нестрого - трикутну). При пропусканні струму через надпровідник вихори дрейфують, однак цей дрейф може зупинитися, якщо вихор прив'язується до дефекта. Це прив'язування називають пінінгом.

Пласкі дефекти, так само як і лінійні, пінінують вихор по всій його довжині для зсувів, перпендикулярних площині дефекту. В той же час, для руху вихорів, локалізованих на пласкому дефекті, уздовж його площини, пінінг є ослабленим (для однорідної площини - взагалі відсутній). Таким чином, пласкі дефекти здійснюють анізотропний пінінг вихорів: вони пінінують вихори для руху в напрямі, перпендикулярному площині дефекту, і, водночас, є каналами легкого ковзання вихорів в напрямі уздовж площини дефекту. Для величин магнітної індукції в надпровіднику  $B > B_{c1}$  в даному розділі розглянуто задачу про термодинамічно рівноважну структуру вихрової решітки поблизу плаского дефекту. З магнітооптичних експериментів, що зазвичай проводяться в достатньо слабких полях ( $\sim 0,01$  Тл) відомо, що у ВТНП монокристалах в рівноважному стані вихори концентруються на пласких дефектах (двійникових межах). Це вказує на те, що такі дефекти є пінінуючими площинами.

Взаємодія пружної вихрової нитки з протягнутим лінійним  $c$ -орієнтованим дефектом в присутності транспортного струму з густиною  $j$  описується функціоналом енергії вихору :

$$W_v\{s(z)\} = \int \left[ U[s(z)] - \phi_0 j(z) s(z) + \frac{P}{2} \left( \frac{ds}{dz} \right)^2 \right] dz \quad (1)$$

де  $s(z)$  – зсув вихра відносно вісі лінійного дефекту (вісь  $z$  направлена уздовж кристалографічної вісі  $c$ ) :  $s = \{s_x(z); 0; 0\}$ ;  $U(s)$  – потенціал пінінгу лінійного дефекту;  $P$  – лінійне натягнення вихра, яке в анізотропному шаруватому надпровіднику з коефіцієнтом анізотропії  $\Gamma$  визначається через власну енергію  $J(\theta)$  вихрової нитки, орієнтованої під кутом  $\theta$  до вісі  $c$  [1,2]:

$$P(\theta) = J(\theta) + \frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2}; \quad P(0) = \frac{J(0)}{\Gamma^2}; \quad P\left(\frac{\pi}{2}\right) = J(0)\Gamma;$$

$$J(\theta) = J(0)[\cos^2 \theta + \Gamma^{-2} \sin^2 \theta]^{1/2}; \quad J(0) = \frac{\phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda_{ab}^2}(\ln \kappa + 0.5); \quad (2)$$

$$\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_{ab}}\right) = \left(\frac{\xi_{ab}}{\xi_c}\right) = \left(\frac{m_c}{m_{ab}}\right)^{1/2} = \Gamma.$$

Мінімізація функціоналу (1) призводить до рівняння, яке описує рівноважну форму вихрової нитки  $s_x(z)$  з відповідними граничними умовами:

$$\min W_v\{s(z)\} \Rightarrow \frac{\delta W_v}{\delta s} = 0$$

$$P \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} + \phi_0 j(z) - \frac{\partial U(s(z))}{\partial s} = 0; \quad (3)$$

$$s(-\infty) = 0; \quad s'(0) = 0.$$

Розв'язання рівняння (3) і подальша підстановка в (1) дозволяє обрахувати енергію вихра і дослідити стійкість запінінгованого стану, тобто обрахувати енергію активації вихра і критичний струм депінінгу.











Под слабой сверхпроводимостью понимается такая ситуация, когда два сверхпроводника соединены между собой какой-либо слабой связью. Такой слабой связью может быть туннельный переход, тонкопленочное сужение, просто слабое касание двух сверхпроводников на малой площади и другие подобные «ослабления» сверхпроводимости контакта между двумя сверхпроводниками.

Различают два эффекта Джозефсона: стационарный и нестационарный.

Остановимся сперва на стационарном эффекте. Пропустим ток через слабую связь (или, иначе, через переход Джозефсона). Оказывается, что если ток достаточно слабый, он протекает через слабую связь без сопротивления, даже если сама слабая связь сделана из несверхпроводящего материала, например, в туннельном переходе — из изолятора. Здесь мы самым непосредственным образом сталкиваемся с важнейшим свойством сверхпроводника — согласованным, когерентным поведением его электронов. Электроны двух сверхпроводников с помощью слабой связи объединились в единый квантовый коллектив. То же можно сказать и по-другому. Волновая функция электронов с одной стороны слабой связи, проникнув через эту связь на другую сторону, проинтерферировала с «местной» волновой функцией электронов. В результате все сверхпроводящие электроны с обеих сторон слабой связи стали описываться единой волновой функцией. При этом слабая связь не должна сильно изменить волновые функции с двух сторон связи по сравнению с тем, какими они были до установления этой связи.

Еще более впечатляющим является нестационарный эффект Джозефсона. Увеличим постоянный ток через слабую связь настолько, чтобы на ней появилось некоторое электрическое напряжение. Оказывается, что это напряжение, кроме постоянной составляющей  $V$ , будет иметь еще и переменную составляющую, осциллирующую с угловой частотой  $\omega$ , причем

$$\hbar\omega = 2eV. \quad (1.2)$$

Остановимся теперь на видах слабых связей. Прежде всего, отметим устройства без концентрации тока. Так, в туннельных переходах (рис. 20.1, а) (с толщиной изоляционной прослойки до 2 нм) характерная плотность критического тока может иметь величину порядка нескольких сотен А/см<sup>2</sup>, что на много порядков меньше критической плотности тока электродов.

В сэндвичах сверхпроводник – нормальный металл – сверхпроводник толщина нормальной прослойки из чистого металла может достигать величины в несколько микрон (рис. 20.1, б). Волновые функции сверхпроводящих электронов проникают в нормальный металл за счет эффекта близости. В области их перекрытия возникает интерференция волновых функций, которая означает установление фазовой когерентности между электродами. Если амплитуда волновой функции сверхпроводника в области слабой связи мала, то и критический ток в этой области будет мал.

Того же эффекта можно добиться, помещая между двумя сверхпроводниками вместо слоя нормального металла слой легированного полупроводника или другого сверхпроводника с малой плотностью критического тока. Перекрытие узкой сверхпроводящей пленки узкой пленкой нормального металла (рис. 20.1, в) приводит за счет эффекта близости к уменьшению амплитуды волновой функции сверхпроводящих электронов в пленке в области покрытия ее нормальным металлом. Это приводит к локальному уменьшению плотности критического тока, т.е. к появлению слабой связи.

В устройствах с концентрацией тока плотность критического тока в области слабой связи такая же, как и вне ее, но полный критический ток существенно меньше. К таким устройствам относится пленка с сужением (мостик Дайема) (рис. 20.1, г), если размер сужения будет порядка длины когерентности  $\xi$  материала пленки. Мостик переменной толщины, пленочные берега ко-

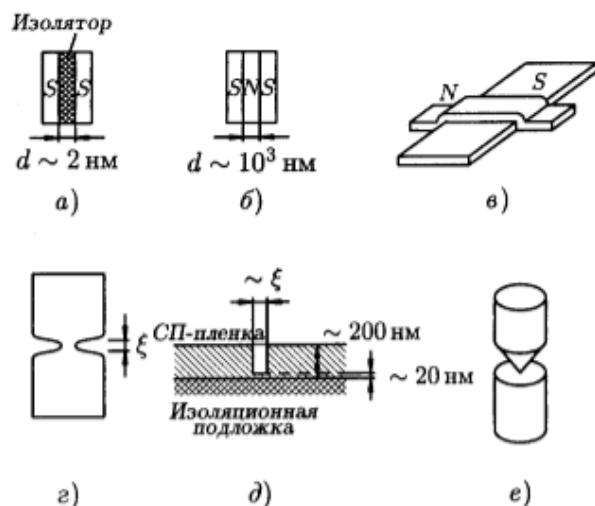


Рис. 20.1. Виды слабых связей: а) туннельный переход; б) сэндвич; в) нормальная пленка  $N$  локально понижает параметр порядка сверхпроводящей пленки  $S$ ; г) мостик Дайема, вид в плане; д) мостик переменной толщины, продольный разрез; е) точечный контакт.

торого имеют толщину порядка сотен нм, а пленка собственно мостика — десятки нм (рис. 20.1, д), и, наконец, точечный контакт, возникающий в результате слабого касания острого конца сверхпроводящей проволоки и плоского участка поверхности другого сверхпроводника (рис. 20.1, е) — тоже примеры слабых связей.

Что же происходит с джозефсоновским переходом, когда по нему течет заданный извне постоянный ток  $I > I_c$ ? Поскольку сверхток не может быть больше  $I_c$ , ясно, что теперь, кроме сверхтока, возникнет ток нормальной компоненты, т. е. возникнет ток одиночных электронов. Это утверждение сразу приводит нас к так называемой резистивной модели, т. е. рассмотрению джозефсоновского перехода как параллельного включения собственно джозефсоновского контакта, пропускающего только сверхток, и нормального участка (рис. 22.1). Полный ток  $I$  равен сумме нормального тока  $V/R$  и сверхтока  $I_s = I_c \sin \varphi$ :

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (22.5)$$

где  $R$  — сопротивление перехода в нормальном состоянии. Это дифференциальное уравнение относительно функции  $\varphi(t)$  элементарно интегрируется. Подставляя решение в (22.4), получим напряжение на переходе в виде

$$V(t) = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega t}, \quad (22.6)$$

$$\omega = \frac{2e}{\hbar} R \sqrt{I^2 - I_c^2}. \quad (22.7)$$

Так мы обнаруживаем удивительное свойство джозефсоновского перехода. Если заданный извне постоянный ток  $I$  больше критического тока перехода, на нем возникает напряжение  $V$ , периодически зависящее от времени. Это явление получило название джозефсоновской генерации. Схематическая зависимость  $V(t)$  от времени дана на рис. 22.2. Частота колебаний напряжения зависит от того, насколько превышает ток через переход  $I$  его критическое значение  $I_c$  (см. (22.7)).

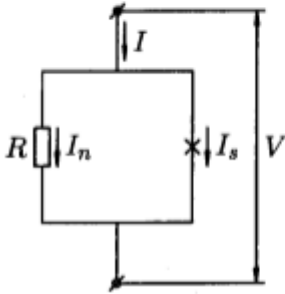


Рис. 22.1. Резистивная модель джозефсоновского перехода. Сверхток через собственно джозефсоновский переход равен  $I_s = I_c \sin \varphi$ .

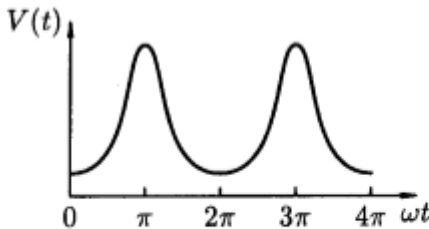


Рис. 22.2. Напряжение на переходе (джозефсоновская генерация).

Вольтметр постоянного тока, подключенный к переходу, покажет, конечно, среднее по периоду значение  $\bar{V}$ . Усреднение по

времени формулы (22.6) дает

$$2e\bar{V} = \hbar\omega. \quad (22.8)$$

Эта формула имеет совершенно ясную интерпретацию. Если среднее расстояние по энергиям между уровнями куперовских пар в двух половинках перехода равно  $2e\bar{V}$ , то при переходе одной пары через область слабой связи такая энергия выделяется в виде кванта электромагнитного излучения.

Вольт-амперная характеристика перехода, которая следует из формул (22.7) и (22.8), показана на рис. 22.3.

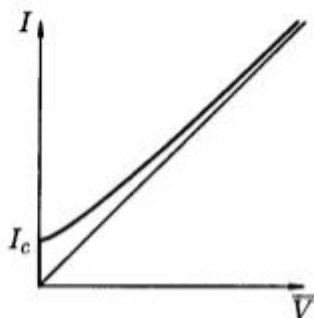


Рис. 22.3. Вольт-амперная характеристика джозефсоновского перехода.

При токе через переход  $I = I_s + I_n$ , достаточно близком к  $I_c$ , значительная его доля протекает в виде сверхпроводящего тока  $I_s$  через джозефсоновский элемент на эквивалентной схеме рис. 22.1. При  $I \gg I_c$  практически весь постоянный ток течет через резистивный элемент ( $I \simeq I_n$ ), и вольт-амперная характеристика на этом участке выходит на характеристику перехода в нормальном состоянии. Чтобы подробнее пояснить такое поведение, представим скорость изменения разности фаз на переходе в таком виде:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2e}{\hbar} V = \frac{2e}{\hbar} R(I - I_s) = \frac{2e}{\hbar} R(I - I_c \sin \varphi). \quad (22.9)$$

Можно заметить, что в течение первого полупериода джозефсоновского тока, когда  $I_s = I_c \sin \varphi$  совпадает по направлению с полным током  $I$  через переход ( $\sin \varphi > 0$ ), скорость изменения разности фаз меньше, чем в течение второго полупериода, когда сверхпроводящий ток имеет обратное направление ( $\sin \varphi < 0$ ). Усреднение по полному периоду даст сверхпроводящую компоненту, совпадающую по направлению с  $I$ , что обеспечит уменьшение доли нормальной компоненты  $I_n$  в полном токе. С увеличением  $I$  доля  $I_s$  в (22.9), ограниченная  $I_c$ , будет уменьшаться, и скорости изменения разности фаз на положительном и отрицательном полупериодах в конце концов сравняются. Это приведет к исчезновению сверхпроводящей компоненты в среднем по времени токе и выходу вольт-амперной характеристики на линейную зависимость  $V = RI$ .

Здесь необходимо отметить, что соотношения (22.4) и (22.8) являются совершенно фундаментальными и точными. Многочисленные эксперименты подтвердили их с громадной точностью.

**35.**

смотреть частично вопрос 34

*Сходи́нки Шапі́ро*

Якщо до джозефсонівського контакту прикласти змінний надвисокочастотний (НВЧ) сигнал на ВАХ контакту виникають сходи́нки Шапі́ро. Ці сходи́нки виникають при напругах, що відповідають гармонікам частоти НВЧ сигналу. Величина цих сходинок відповідає потужності відповідної спектральної складової сигналу. Чим більша ця потужність – тим більша «амплітуда» сходи́нки.

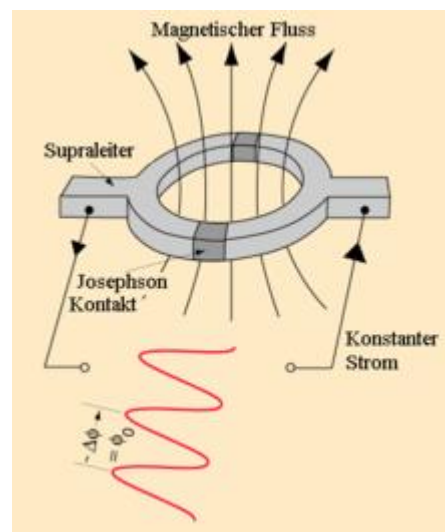


37.

**СКВИД**— сверхчувствительные магнитометры, используемые для измерения очень слабых магнитных полей. СКВИД-магнитометры обладают рекордно высокой чувствительностью, достигающей  $5 \cdot 10^{-33}$  Дж/Гц (чувствительность по магнитному полю —  $10^{-13}$  Тл).

## Принцип работы

Простейший квантовый магнитометр — СКВИД представляет собой сверхпроводящее кольцо с двумя джозефсоновскими туннельными контактами. Это в определенном смысле аналог оптического эффекта с интерференцией от двух щелей, только в данном случае интерferируют не световые волны, а два джозефсоновских тока. Существенным для понимания работы СКВИДа является наличие волновых свойств у электрона — в СКВИДе волна электронов разделяется на две, каждая из которых проходит свой туннельный контакт, а затем обе волны сводятся вместе. В случае отсутствия внешнего поля обе ветви будут эквивалентны, и обе волны придут без разности фаз. Но при наличии магнитного поля в контуре будет наводиться циркулирующий сверхпроводящий ток. Этот ток в одном из контактов будет вычитаться из постоянного внешнего тока, а во втором — складываться с ним. Теперь две ветви будут иметь разные токи, и между туннельными контактами возникнет разность фаз. Волны электронов, пройдя через контакты и соединившись, будут интерферировать, интерференция проявится как зависимость критического тока СКВИДа от приложенного внешнего магнитного поля. Ступенчатый характер зависимости позволяет чувствовать отдельные кванты потока. Ступенчатый вид зависимости возникает из-за наличия условия изменения фазы электронной волны на джозефсоновском контакте на  $2\pi n$ , где  $n$  — целое число.



Различают два типа СКВИДов — СКВИД на постоянном токе (двухконтактный СКВИД) и высокочастотный СКВИД (одноконтактный СКВИД).

### 1. СКВИД на постоянном токе

СКВИД на постоянном токе представляет собой два джозефсоновских перехода, включенных параллельно. Включение осуществляется массивными сверхпроводниками, которые вместе с джозефсоновскими переходами а и б образуют замкнутый контур (кольцо). Внутри этого кольца введена катушка, создающая магнитный поток.

Работа СКВИДа на постоянном токе описывается двумя соотношениями Джозефсона:

$$I_c = I_s \sin \varphi$$
$$\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2eV$$

Эти соотношения описывают соответственно стационарный и нестационарный эффект Джозефсона. Видно, что наиболее устойчиво сверхпроводящее состояние кольца по отношению к внешнему току будет в случаях, когда полный магнитный поток через интерферометр будет равен целому числу квантов потока  $\Phi_0$ . Наоборот, случай, когда полный поток равен полуцелому числу квантов потока,



соответствует неустойчивому сверхпроводящему состоянию: достаточно приложить к интерферометру ничтожный ток, чтобы он перешел в резистивное состояние и чтобы вольтметр обнаружил напряжение на интерферометре.

## **2. СКВИД на переменном токе (ВЧ-СКВИД)**

Работа СКВИДа на переменном токе основана на нестационарном эффекте Джозефсона и использует только один джозефсоновский контакт. ВЧ-СКВИД в измерительной технике демонстрирует обычно более высокую чувствительность за счет более высокой трансформации потока от измерительного объёма (образца). Он дешевле и проще в производстве в малых количествах. Значительная часть экспериментов в фундаментальной физике и измерений в биомагнетизме, включая измерение сверхмалых сигналов, были выполнены с использованием СКВИДов на переменном токе.