Оптика – розділ фізики, який займається вивченням властивостей, фізичною природою та взаємодією з речовиною електромагн. хвиль опт. діап.

Оптичний діапазон: $\lambda = 1\,мм \div 120\,Å$ (12 нм)

$1\,Å = 10^{-4}\,мкм = 10^{-10}\,м$

1) ІЧ: дальній – 1 мм ÷ 25 мкм
середній – 25 мкм ÷ 5 мкм
ближній – 5 мкм ÷ 0.76 мкм

2) Видиме світло: $\lambda = 0.76\,мкм \div 0.4\,мкм$

червоне	0.76–0.63 мкм
оранжеве	0.63–0.60
жовте	0.60 – 0.57
зелене	0.57 – 0.50
синьо-зел.	0.50 – 0.45
синє	0.45 – 0.43
фіолетове	0.43 – 0.40

3) УФ: ближній – (4000 ÷ 3000) Å
середній – (3000 ÷ 2000) Å
вакуумний (далекий) – < 2000 Å
(~ до 1000 Å)

Розділи оптики

I Геометрична оптика (побудова зображень в різних опт. системах та опт. елементах)

II Фізична оптика
1. Хвильова оптика (інтерференція, дифракція, поляризація, дисперсія, розсіювання, ...)
2. Квантова оптика (враховується корпускул. природа світла $E_\phi = h\nu$ – квант світл. енергії).

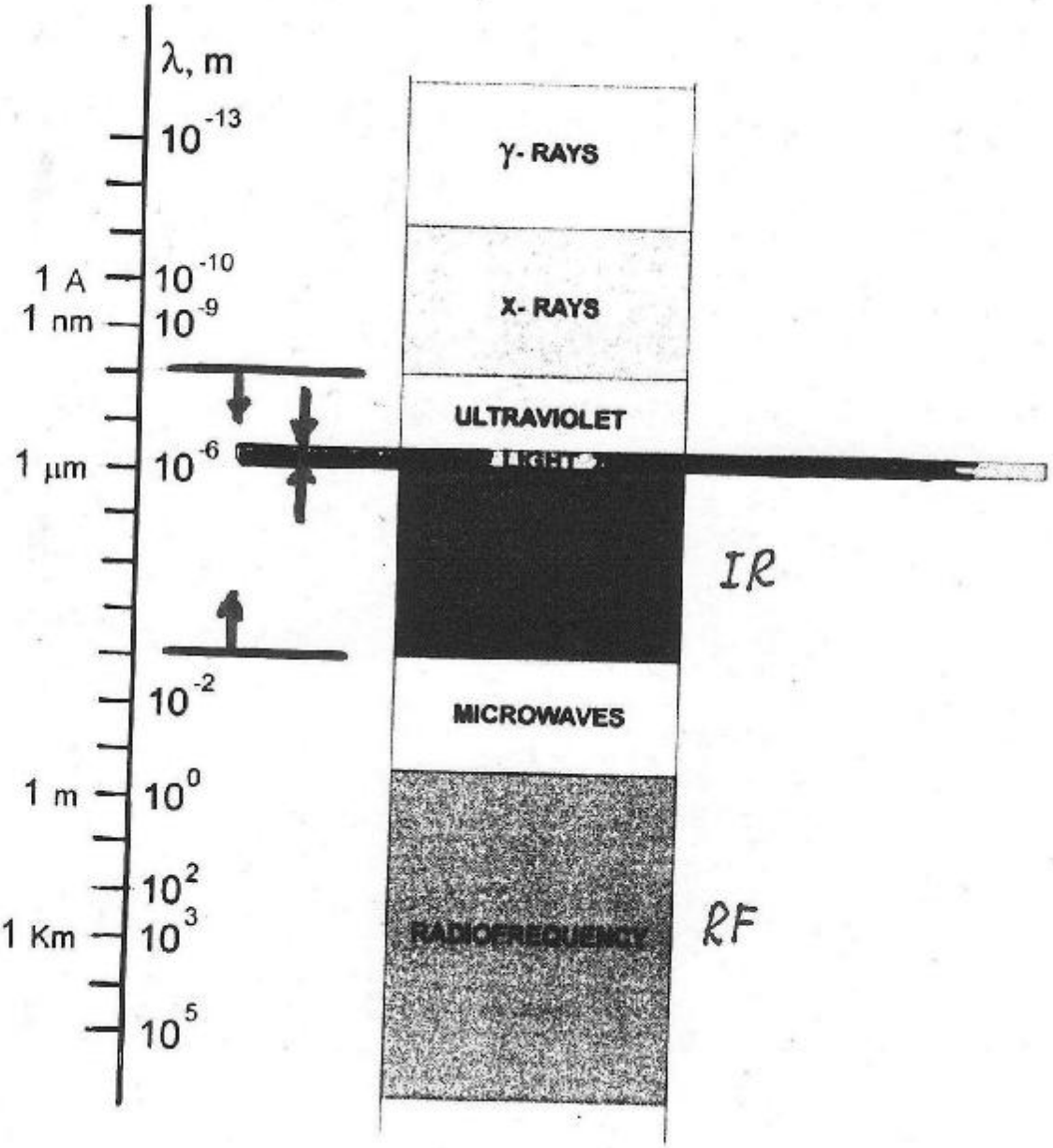
3. Фізіологічна оптика (оптика зору, око). 2

СРС Кучерук,... § 2.9; Ландсберг,... § 91
Сівухин,... § 21

Застосування оптичного діапазону

1. Метрологія. вимірювання l, α, кутів, темп-ри,..
2. Спектр. аналіз (визначення структури та складу
3. Опт. запис інформ., передача за допомогою ВОЛЗ, обробка інф. в системах оптоелектроніки тощо
4. Локація
5. ...

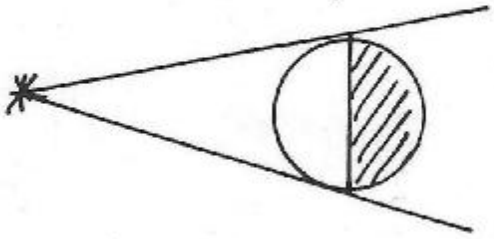
The electromagnetic-photon spectrum



Геометрична оптика

Закони ГО

1. Закон прямолінійного розповсюдження світла



- Джерело точкове (розмір дж. « розмір тіла, відстань до тіла);
- край тіні має дифракц. смуги;
- якщо середовище мутне, то відбувається розсіювання у баки.

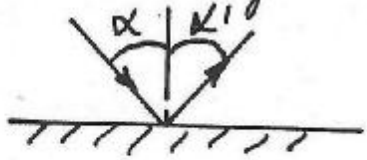
2. Закон незалежності поширення світлових променів.

3. Закон суперпозиції:

$$\vec{y}_{1+2} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \quad (\vec{E}_{1+2} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

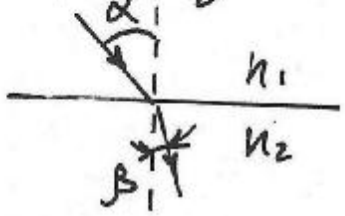
Закон виконується до тих пір, поки не починається інтерференція.

4. Закон відбиття:



$$\alpha = \alpha'$$

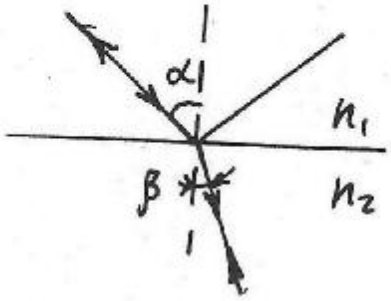
5. Закон заломлення (Закон Снелліуса):



$$n_1 \cdot \sin\alpha = n_2 \cdot \sin\beta$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$ відносний показник заломл.

6. Закон оборотності (або взаємності) опт. променів:



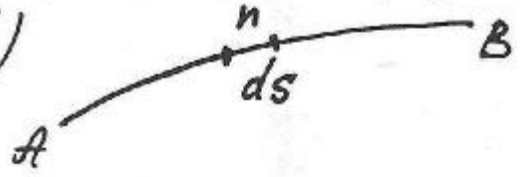
Принцип Ферма Ландсберг, ... § 69

1679 р. 1) Однорідне середовище ($n = const$)

Опт. довжина шляху $l = n \cdot s$, де s – геометр. довж. шляху

2) Неоднорідне середовище

$n \neq const$; $n(\vec{r})$



Шлях розбиваємо на такі малі відрізки ds, що на протязі кожного із них n вважаємо сталим. Тоді $dl = n \cdot ds \Rightarrow l = \int_A^B n \cdot ds$

Принцип Ферма: світло розповсюджується по шляху, оптична довжина якого екстремальна (тобто або max, або min, або стаціонарна). ≡ Необхідно, щоб варіація від інтеграла дорівнювала нулю:

$$\boxed{\delta \int_A^B n \cdot ds = 0}$$ – матем. формулювання принципу Ферма

Приклади: див. Фріш, Тиморева, ... § 253

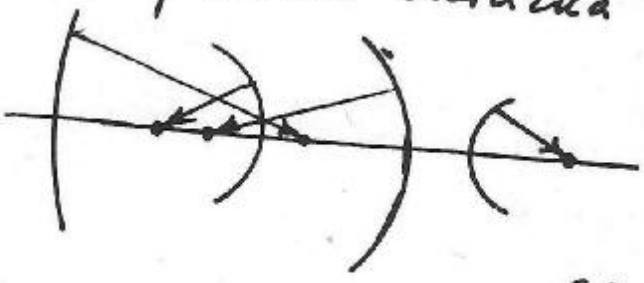
З принципу Ферма витікають такі закони ГО:

1) закон прямолін. розповс. світла в однорідн. середов.;
2) закон відбиття; 3) закон заломлення;
4) визначення траєкторії (шляху) світла в неоднорідному середовищі; 5) закон оборотності.

див. Сивухин ... § 7

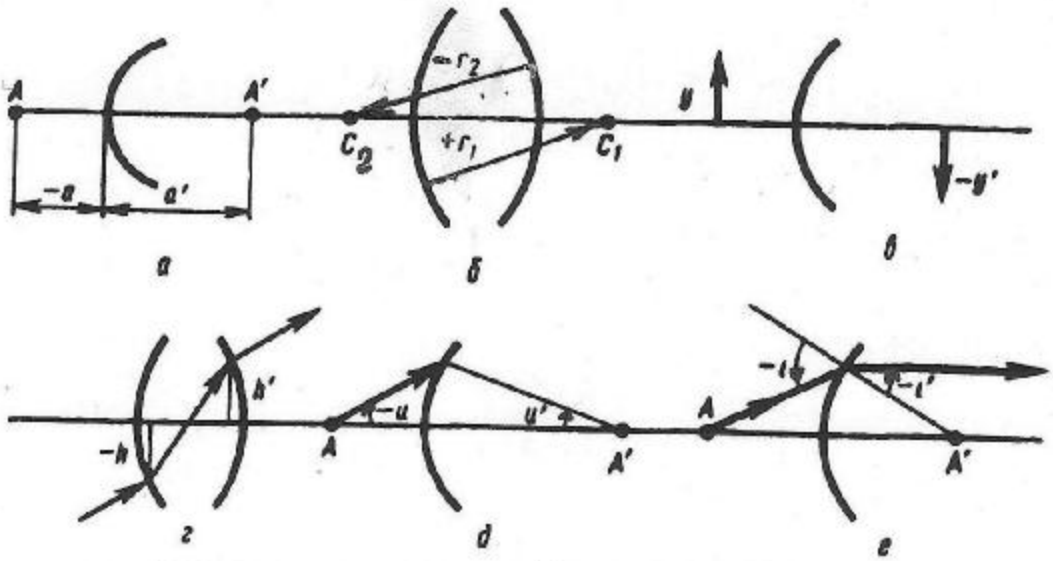
Основні поняття оптики

1. Гомоцентричний промінь.
2. Стигматичне та астигматичне зображення.
3. Спряжені площини і спряжені точки.
4. Площина предмета і площина зображення.
5. Параксіальні промені.
6. Центрована оптична система: два однорідні заломлюючі або відбиваючі середовища розділені одне від одного сферичними поверхнями, центри яких розташовані на одній прямій, яка наз. головною опт. віссю системи.

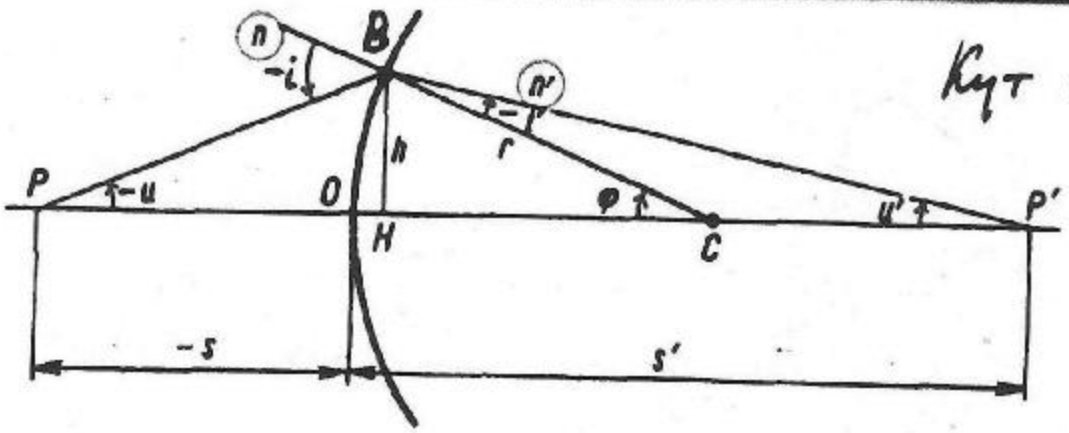


7. Головна опт. вісь ≡ опт. вісь.
8. Уявне та дійсне зображення.
   Уявне зобр. ⇄ дійсне зображення може бути перетворене за допомогою опт. системи (елементів).
9. Правила знаків:
   - відлік кутів – від опт. осі або від перпендикуляру до дотичної;
   - додатні кути – по годин. стрілці; від'ємні кути – проти годин. стрілки;
   - світло розповсюдж. зліва направо. Якщо R (радіус заломл. поверхні) співпадає за напрямком променя, то $R>0$, якщо проти – то $R<0$;
   - розміри предметів і зображень (y та y') – додатні, якщо вони розміщені вище опт. осі.

ІЛЮСТРАЦІЇ ДО ПРАВИЛ ЗНАКІВ



ЗАЛОМЛЕННЯ НА ОДНІЙ СФЕРИЧНІЙ ПОВЕРХНІ



Кут $u < 0$

Кут $u' > 0$



Пл. Δ = $\frac{1}{2} A \cdot B \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} A \cdot C \sin\beta$

Пл. Δ $PBP' =$ Пл. Δ $PBC +$ Пл. Δ BCP'

Пл. Δ $PBC = \frac{1}{2} \cdot |PB| \cdot |BC| \cdot \sin(180° - i)$

Пл. Δ $PBP' = \frac{1}{2} |PB| \cdot |BP'| \cdot \sin(180° - i + i') =$

$= \frac{1}{2} |PB| \cdot |BP'| \cdot [\sin(i - i')]$

Пл. Δ $BCP' = \frac{1}{2} |BC| \cdot |BP'| \cdot \sin i'$

$|PB| \cdot |BP'| \cdot \sin(i - i') = |PB| \cdot |BC| \cdot \sin i + |BC| \cdot |BP'| \cdot \sin i'$

$BC = R$

$|PB| \cdot |BP'| \sin(i - i') = R (PB \sin i + BP' \sin i')$

ξ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$$\frac{\sin i\cdot\cos i' - \cos i\cdot\sin i'}{R} = \frac{PB\cdot\sin i}{PB\cdot BP'} + \frac{BP'\cdot\sin i'}{PB\cdot BP'}$$

Ліву і праву половину домножимо на $(n/\sin i')$:

$$\frac{\sin i\cdot\cos i'\cdot(n/\sin i') - \cos i\cdot\sin i'\cdot(n/\sin i')}{R} = \frac{\sin i}{BP'}\cdot\frac{n}{\sin i'} +$$

$$+\frac{\sin i'}{PB}\cdot\frac{n}{\sin i'}.$$ Врахуємо, що $n\cdot\sin i = n'\cdot\sin i'$

$$\frac{\cos i'\cdot(\sin i/\sin i')\cdot n - \cos i\cdot n}{R} = \frac{n}{BP'}\cdot\frac{\sin i}{\sin i'} + \frac{n}{PB}$$

$$\frac{n'\cdot\cos i' - n\cdot\cos i}{R} = \frac{n'}{BP'} + \frac{n}{PB}$$

В параксіальному наближенні: $BP' \approx S'$; $BP \approx -S$

$\cos i' \approx 1$; $\cos i \approx 1$

$$\boxed{\frac{n'-n}{R} = \frac{n'}{S'} - \frac{n}{S}} \quad (1)$$ Рівняння Аббе

$$\frac{n'}{R} - \frac{n}{R} = \frac{n'}{S'} - \frac{n}{S}$$

$$\boxed{n'\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{S'}\right) = n\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{S}\right)}$$ – інв Аббе

Аналіз: 1) в параксіальному наближенні положення т. P' не залежить від кута i. Всі промені, які виходять з однієї т. P опт. осі, після заломлення на сфер. поверхні перетнуться в одній точці (т. P'), що теж лежить на опт. осі. Точка P' – зображення т. P. Гомоцентричні промені, стигматичне зображ.

2) Назвемо величину $\boxed{\frac{n'-n}{R} = \Phi}$ опт. силою сфер. поверхні

3) Якщо $S \to \infty$, то спряжена точка буде в заднього фокусі і $\Phi = \frac{n'}{S'}$ ⇐ із (1) - рівняння Аббе

$S' = \boxed{f' = \frac{n'}{\Phi}}$ (2) ⇒ $f' = \frac{n' \cdot R}{n'-n}$

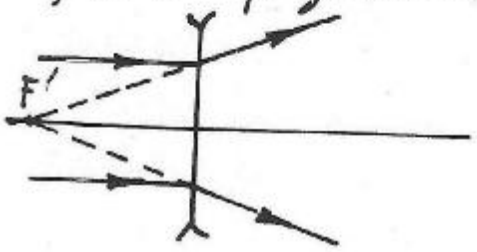
4) Якщо $S' \to \infty$, то передній фокус

$S = \boxed{f = -\frac{n}{\Phi}}$ (3) ⇒ $f' = -\frac{n \cdot R}{n'-n}$

5) З (2) та (3) ⇒ $\boxed{\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}}$ (4)

висновки (1-4) стосуються збираючої лінзи.

6) Для розсіючої лінзи: $f' = -\frac{n'}{\Phi}$ і $f = \frac{n}{\Phi}$



7) З рівняння Аббе $\frac{n'}{S'} - \frac{n}{S} = \frac{n'-n}{R} = \Phi$:
розділимо ліву і праву частину на $\frac{n'-n}{R}$

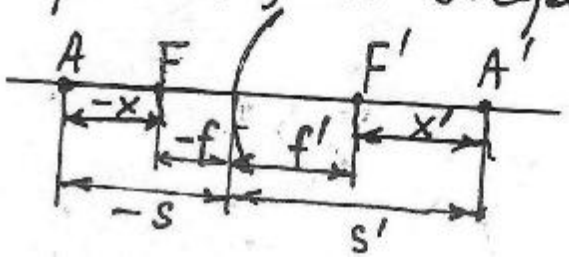
$$\frac{n' \cdot R}{S'(n'-n)} - \frac{n \cdot R}{S(n'-n)} = 1$$

Формула (рівняння) сферичної поверхні

$$\frac{1}{S'} \cdot \frac{n'R}{n'-n} - \frac{1}{S} \frac{R \cdot n}{n'-n} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{f'}{S'} + \frac{f}{S} = 1} \quad (5)$$

Рівняння Гаусса

8) Формулу (5) можна представити в іншому вигляді. Для цього введемо відрізки x та x':



$$\left.\begin{aligned} -S &= -f - x \\ S' &= f' + x' \end{aligned}\right\} \rightarrow (5):$$

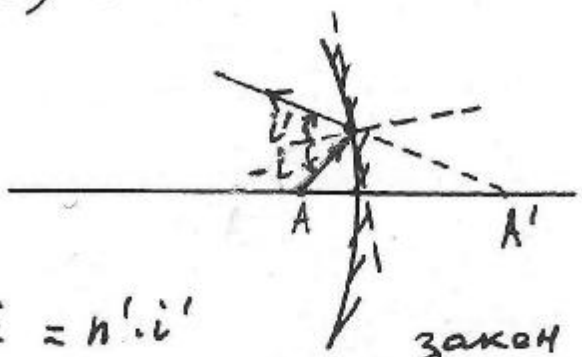
$$\frac{f'}{f'+x'} + \frac{f}{f+x} = 1$$

$$f'(f+x) + f(f'+x') = (f'+x')(f+x)$$

(6) $\boxed{x \cdot x' = f \cdot f'}$ Формула Ньютона (5) та (6) еквівалентні

9) Повернемось до (2) та (3):

$$\boxed{\Phi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}}$$



Сферичне дзеркало →

а) Із закону Снеліуса $n \cdot i = n' \cdot i'$

$n' = -n \Rightarrow n \cdot i = -n \cdot i' \Rightarrow \boxed{i = -i'}$ закон відбиття

б) з (1), якщо покласти $n' = -n$:

(7) $\boxed{\frac{1}{S'} + \frac{1}{S} = \frac{2}{R}}$ Формула сферичного дзеркала

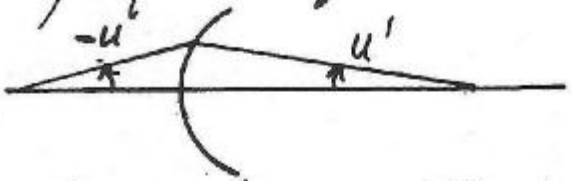
в) $\boxed{f = f' = \frac{R}{2}}$ ← з (5) та (7).

Збільшення, яке дає одна заломлююча поверхня

Є три характеристики збільшення:

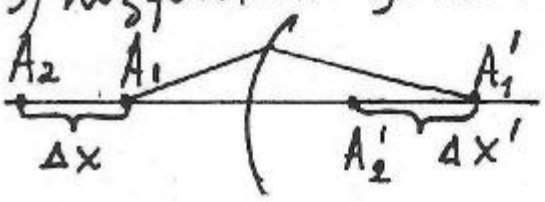
1) лінійне (поперечне) $\boxed{\beta = \frac{y'}{y}}$ y' – розмір зображ. y – розмір предмета

2) кутове збільшення

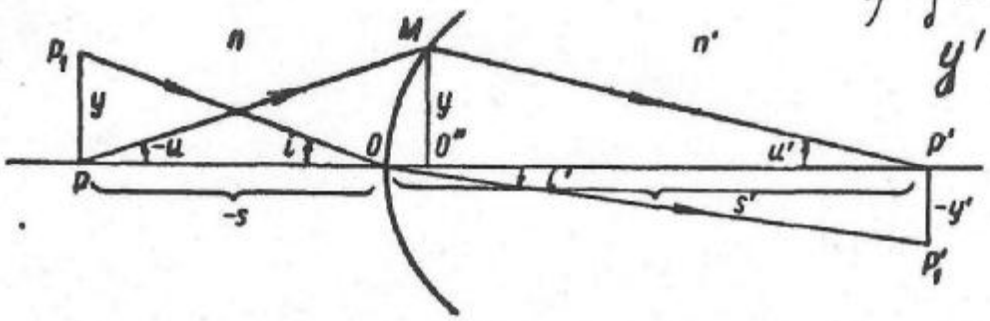


$$\boxed{\alpha = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u}}$$

3) поздовжнє збільшення



$$\boxed{\gamma = \frac{\Delta x'}{\Delta x}}$$



10

1) $y = s \cdot i$

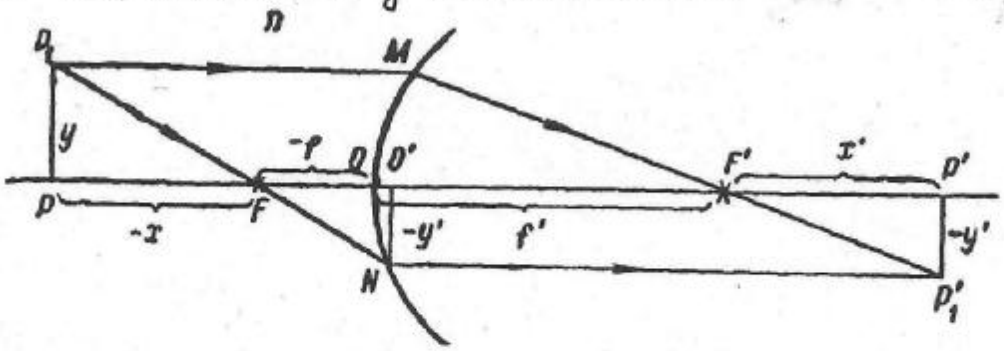
$y' = s' \cdot i'$

$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s' \cdot i'}{s \cdot i}$ (A)

2) Із закону заломлення: $n \cdot i = n' \cdot i' \Rightarrow \frac{i'}{i} = \frac{n}{n'}$ (B)

i – кут, під яким об'кт y видно з відстані (-s);

i' – кут, під яким об'кт y' видно з відстані s'.



(B) → (A): $\beta = \frac{n}{n'} \cdot \frac{s'}{s}$

З $\triangle PP_1F$ та $\triangle NO'F$: $\frac{y'}{y} = -\frac{f}{x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x}}$ (1)

З формули Ньютона $x \cdot x' = f \cdot f' \Rightarrow \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}$ (2)

(2) → (1): $\boxed{\beta = -\frac{x'}{f'}}$ (3)

Порівняйте (1) та (3). Зверніть увагу на зворотний характер чисельників і знаменників.

$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{n'}{n} \Rightarrow \frac{i}{i'} = \frac{n'}{n}$

$y' = s' \cdot \operatorname{tg} i' \approx s' \cdot \sin i'$; $y \approx s \cdot \sin i$

$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \cdot \frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{s'}{s} \cdot \frac{n}{n'}$ $\boxed{\beta = \frac{n}{n'} \cdot \frac{s'}{s}}$ (4)

В однорідному середовищі $\left(\frac{n}{n'} = 1\right)$: $\beta = s'/s$

11

$tg\,u = \frac{y}{s} \Rightarrow u = \frac{y}{s}$ Для непараксіальних променів:

$tg\,u' = \frac{y}{s'} \Rightarrow u' = \frac{y}{s'}$

$\boxed{n' \cdot y' \cdot \sin u' = n \cdot y \cdot \sin u}$

умова синусів Аббе

$\frac{tg\,u'}{tg\,u} = \frac{u'}{u} = \frac{y}{s'} : \frac{y}{s} = \frac{s}{s'}$ (5)

(5) → (4): $\frac{u'}{u} = \frac{ny}{n' \cdot y'} \Rightarrow \boxed{n' \cdot y' u' = n \cdot y \cdot u}$ (6)

Інваріант Лагранжа-Гельмгольца

В паракс. наближенні:

кут. зб $\alpha = \frac{tg\,u'}{tg\,u} \approx \frac{u'}{u} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{y}{y'}$

В однорідному середовищі ($n = n'$) $\boxed{\alpha = \frac{1}{\beta}}$ (7)

Якщо $x \cdot x' = f \cdot f'$ (ф-ла Ньютона) продифер.:

$\Delta x \cdot x' + \Delta x' \cdot x = 0$

$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = -\frac{x'}{x}\frac{f \cdot f'}{f \cdot f'} = -\frac{f'}{f} \cdot \beta^2 = \beta^2$

(1), (3) { в однорідному середовищі $f = -f'$

Поздовжнє збільш:

$\boxed{\gamma = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = -\frac{x'}{x}}$ (8) – для будь-якого (в т. ч. неоднорідн.) середовища

$\boxed{\gamma = \beta^2}$ (9) – для однорідного середовища ($n = n'$; $f = f'$)

(7) → (9): $\gamma = \beta \cdot \frac{1}{\alpha}$ $\boxed{\gamma \cdot \alpha = \beta}$ (10)

висновок із (9): $\gamma = \beta^2$ – поздовжнє збільшення пропорційне квадрату поперечного збільшення. Це означає, що жодна, навіть ідеальна, оптична система не дає геометрично подібного просторового зображення об'ємного предмета.

11

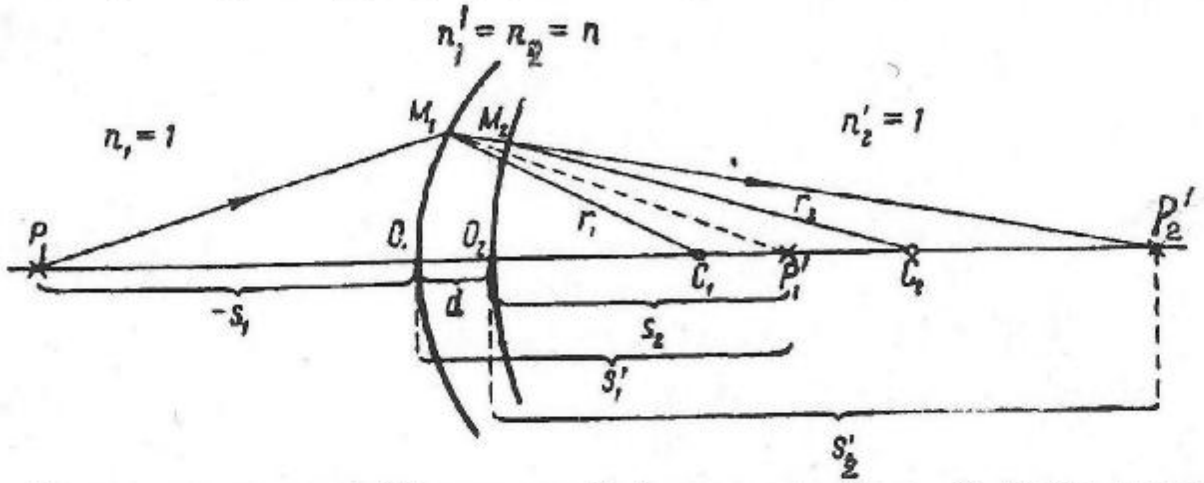
11

12

ТОНКА ЛІНЗА

Лінза – тіло, яке виготовлене із однорідного прозорого матеріалу і обмежене поверхнями, принаймні одна з яких має радіус кривизни, відмінний від нуля.

Ми розглядаємо (тут !) сферичні поверхні.



Заломлення на 1-ій поверхні (якщо не було б 2-ої) створило б в суцільній масі (наприклад, скла) з показником заломлення n_2 зображення P_1' на відстані S_1'. Для другої поверхні точка P_1' є начебто вторинним уявним джерелом, зображенням якого є точка P_2', яка знаходиться на відстані S_2' від оптичного центру 2-ої поверхні.

Застосуємо рівняння Аббе до обох поверхонь.

Для 1-ої: $$\frac{n}{S_1'} - \frac{n_1}{S_1} = \frac{n - n_1}{R_1} \qquad (1)$$

Для 2-ої поверхні: $$\frac{n_2'}{S_2'} - \frac{n}{S_2} = \frac{n_2' - n}{R_2} \qquad (2)$$

$S_2 = S_1' - d$

Для тонкої лінзи $S_2 = S_1'$. Тому із (1):

$$\frac{n}{S_2} = \frac{n}{S_1'} = \frac{n_1}{S_1} + \frac{n - n_1}{R_1} \qquad (3).$$

(3) → (2):

$$\frac{n_2'}{S_2'} - \frac{n_1}{S_1} - \frac{n - n_1}{R_1} = \frac{n_2' - n}{R_2}$$

S_2' – відстань до зображення (S')

S_1 – відстань до об'єкта (S).

Вважаємо, що $n_1 = 1$ та $n_2' = 1$, а також те, що відстань до об'єкта та до зображення: S та S'

$$\boxed{\frac{1}{S'} - \frac{1}{S} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$ Формула тонкої лінзи

Аналіз:

1) Треба не забувати враховувати знаки R_1 та R_2!

Для опуклих (опукло-) лінз в повітрі можна записати

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (1)$$

і користуватись вже без врахування знаків.

2) Якщо $s = \infty$, а $s' = f_2$, то

$$\frac{1}{s'} \equiv \frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad (2)$$

3) Якщо $s' = \infty$, а $s = f_1$, то

$$\frac{1}{s} \equiv \frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \quad (3)$$

4) З (2) та (3) витікає, що, якщо справа і зліва від лінзи середовища однакові, то

$$f_1 = -f_2 \quad (4)$$

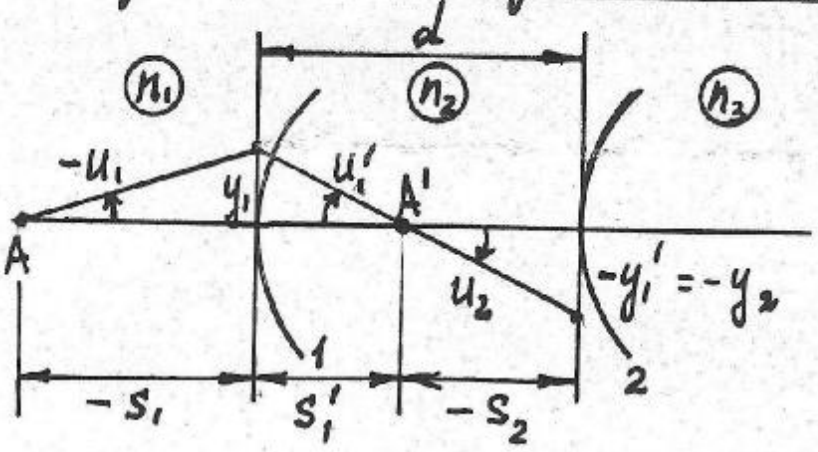
5) Величину

$$\boxed{\frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \Phi}$$

називають оптичною силою лінзи

$[\Phi] = м^{-1} \Rightarrow [\Phi]$ = діоптрія – опт. сила лінзи, фок. відстань якої – 1 м (в повітрі!)

Матричний метод в оптиці



Поширення параксиального променя через дві послідовні межі поділу опт. системи. Для I межі:

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{u}{u'} \Rightleftharpoons$$

$y' \cdot n' \cdot u' = y \cdot n \cdot u$ – інваріант Лагранжа – Гельмгольц

Введемо позначення:

{ узагальнений кут $V = n \cdot u$
{ зведена довжина $T = d/n$

Рівняння Аббе: $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r} = \Phi$

для точок A та A' має вигляд:

$$\frac{n_2 - n_1}{R_1} = \frac{n_2}{s_1'} - \frac{n_1}{s_1} \quad \Big| \times y_1$$

(ліву і праву частину множимо на y_1).

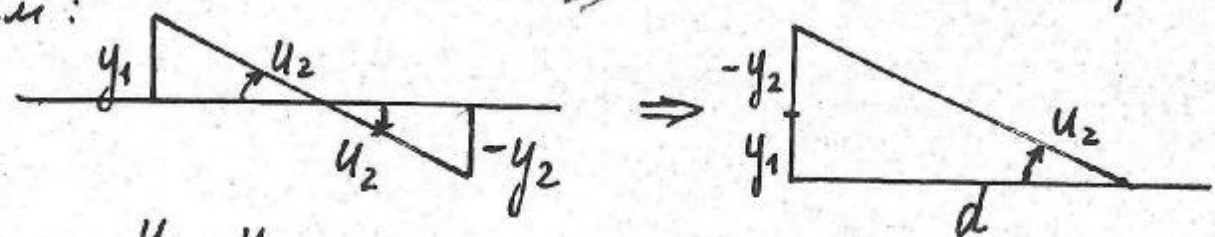
$$y_1 \cdot \frac{n_2 - n_1}{R_1} = \underbrace{\frac{y_1 \cdot n_2}{s_1'}}_{=V_2} - \underbrace{\frac{y_1 \cdot n_1}{s_1}}_{=V_1} \Leftarrow \frac{y_1}{s_1} = u_1$$

$$\frac{y_1}{s_1'} = u_2$$

$$\boxed{V_2 = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \cdot y_1 + V_1} \quad (1)$$

! рівняння узагальнених кутів

Далі:



$$\operatorname{tg} u_2 = \frac{y_1 - y_2}{d} \Rightarrow d \cdot u_2 = y_1 - y_2 \Rightarrow y_2 = y_1 - d u_2 =$$

$$= y_1 - \frac{d}{n_2} \cdot \underbrace{(u_2 \cdot n_2)}_{=V_2} \overset{(1)}{=} y_1 - \frac{d}{n_2}\left(\frac{n_2 - n_1}{R_1} \cdot y_1 + V_1\right) \Rightarrow$$

$$y_2 = y_1\left(1 - \frac{d}{n_2}\cdot\frac{n_2-n_1}{R_1}\right) - \left(\frac{d}{n_2}\right)\cdot V_1 \qquad (2)!$$

$= T_2$ – зведена товщина 2. оптичного проміжку

Маємо систему лін. рівнянь (1), (2), за допомогою яких координати променя на кожній наступній межі поділу виражається через координати променя на попередній межі. Систему рівнянь (1), (2) можна записати у вигляді матриці:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 - \frac{d}{n_2}\cdot\frac{n_2-n_1}{R_1} & -\frac{d}{n_2} \\ \hline \frac{n_2-n_1}{R_1} & 1 \end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad \text{або:}$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}, \text{ де } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} - \text{матриця оптичної системи}$$

вектор-стовпець (вектор променя)

Коеф. A, B, C, D містять тільки конструктивні елементи оптичної системи (d, R, n). Задача розрахунку опт. системи зводиться до знаходження цих коефіцієнтів.

Знайдемо матриці окремих елементів опт. системи.

1. Сферична заломлююча поверхня

В результаті заломлення висота променя не змінюється. Змінюється лише узагальнений кут. Тому:

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow V_2 = \frac{n_2-n_1}{R_1}\cdot y_1 + 1\cdot V_1 \\ (2) \Rightarrow y_2 = y_1\cdot 1 - 0\cdot V_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{матриця } R \text{ заломлення на сферичній поверхні}$$

$d = 0$!

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi & 1 \end{pmatrix}$$

$\det R = A\cdot D - B\cdot C = 1$ – матриця унімодулярна

2. Матриця переміщення (трансляції, оптичного проміжку).

Узагальнений кут при поширенні променя в однорідному середовищі не змінюється. Змінюється лише висота променя:

$$(2) \Rightarrow y_2 = y_1 - T \cdot V_1; \quad (1) \Rightarrow V_2 = V_1$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \det T = 1$$

3. Матриця плоского дзеркала

Висота променя не змінюється: $y_1 = y_2$. Геометр. кут змінює знак на протилежний: $U_1 = -U_2$

(3) $n_1 \cdot U_1 \cdot y_1 = n_2 \cdot U_2 \cdot y_2 \Rightarrow \boxed{n_2 = -n_1}$ правило знаків: для променя, що рухається проти опт. осі, при обчисленні узаг. кута та зведеної довжини необхідно перед показником заломл. середовища ставити знак "-", при $y_1 = y_2$ значення $V_1 = V_2$!

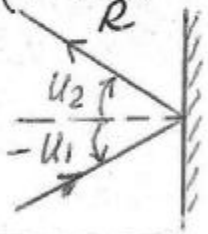
Це дозволяє отримати правильний результат:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – одинична матриця (не змінює координат променя). $\det R = 1$

4. Матриця сферичного дзеркала

Із матриці сфер. заломл. поверхні, із врахуванням правила знаків для показника заломл.: $n_2 = -n_1 = -n$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \qquad \det R = 1$$



$V = U \cdot n$

$V_1 = (-U_1) \cdot n_1 = -U_1 \cdot n_1$

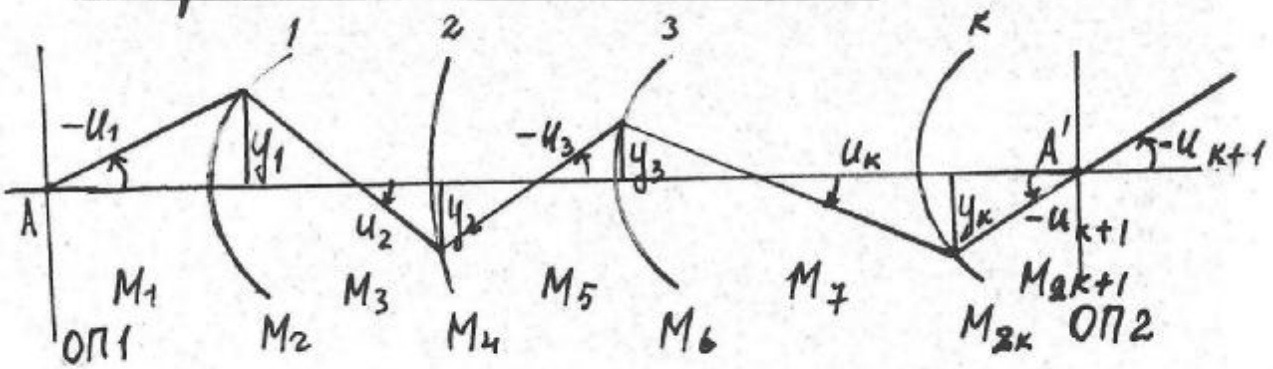
Все добре із знаками!

$V_2 = U_2 (-n_2) = -U_2 \cdot n_2$

$\Rightarrow V_1 = V_2$

Через існування (3) знак "-" вкосять і в показник заломл.

Матриця оптичної системи



M_i – матриці заломлення і переміщення

Для вектора променя на виході опт. системі маємо

$$\begin{pmatrix} y_K \\ V_K \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де M – матриця опт. системи.

З іншого боку (див. рис.):

$$\begin{pmatrix} y_K \\ V_K \end{pmatrix} = M_{2K} \begin{pmatrix} y_{K-1} \\ V_{K-1} \end{pmatrix} = M_{2K} \cdot M_{2K-1} \begin{pmatrix} y_{K-2} \\ V_{K-2} \end{pmatrix} = \dots$$

$$= M_{2K} \cdot M_{2K-1} \cdot M_{2K-2} \cdot \dots \cdot M_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Порівнюючи (1) та (2), маємо: $\boxed{M = M_{2K} \cdot M_{2K-1} \dots M_1}$

Матриця опт. системи, яка дає перетворення променя від входу опт. системи до її виходу, дорівнює добутку матриць окремих її елементів, починаючи з останнього.

$$\det M = A \cdot D - B \cdot C = 1$$

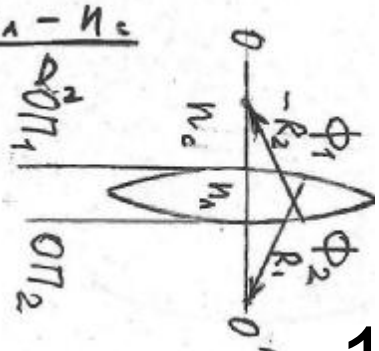
Матриця тонкої лінзи

$d \ll R_{1,2}$ $(d \to 0)$.

$$M = M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_1 + \Phi_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_1 = \frac{n_л - n_с}{R_1}; \quad \Phi_2 = \frac{n_с - n_л}{-R_2} = \frac{n_л - n_с}{R_2}$$

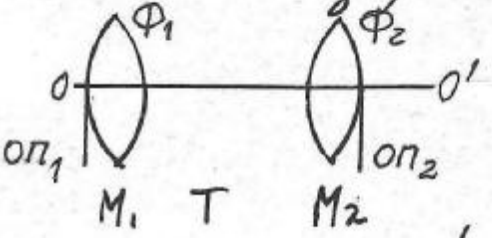
$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi$$



$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = (n_1 - n_c)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Матриця товстої лінзи

≡ дві тонкі лінзи на відстані d (d ≡ товщині товстої лінзи)



$$M = M_2 \cdot T \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n}\Phi_1 \cdot \Phi_2 = \Phi$$

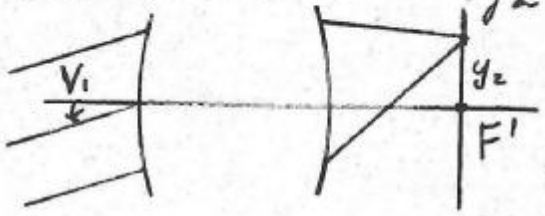
Якщо $\left|\frac{d}{n}\cdot\Phi_1\cdot\Phi_2\right| > |\Phi_1 + \Phi_2|$, то система двох лінз (товста лінза) є такою, що розсіює світло

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d}{n} \\ \Phi_2 & \Phi_2\left(-\frac{d}{n}\right)+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1-\frac{d}{n}\cdot\Phi_1 & -\frac{d}{n} \\ \hline \Phi_1+\Phi_2-\Phi_1\Phi_2\frac{d}{n} & -\Phi_2\frac{d}{n}+1 \end{array}\right)$$

Властивості матриць окремих оптичних систем

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = A\cdot y_1 + B V_1 \\ V_2 = C\cdot y_1 + D\cdot V_1 \end{cases}$$

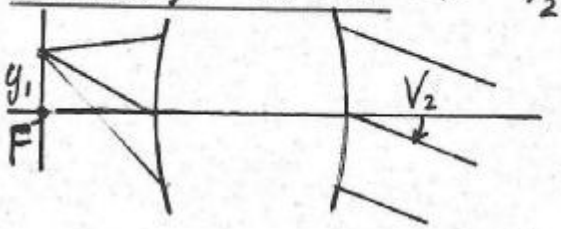
1. Якщо $A = 0 \Rightarrow y_2 = B\cdot V_1$



Враховуючи унімодулярність матриці опт. системи, маємо:

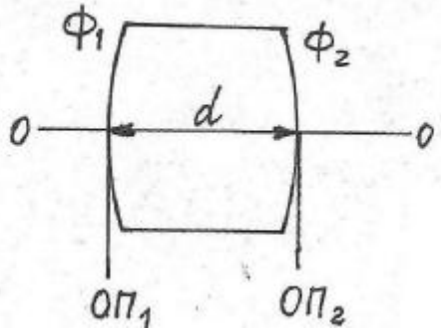
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1/C \\ C & D \end{pmatrix}$$

2. Якщо $D = 0 \Rightarrow V_2 = C\cdot y_1$



$$M = \begin{pmatrix} A & -1/C \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$



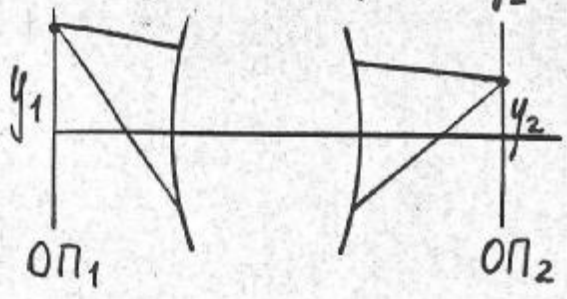
$$A = 1 - \frac{d}{n}\cdot\Phi_1$$

$$B = -d/n$$

$$C = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1\cdot\Phi_2\frac{d}{n}$$

$$D = 1 - \Phi_2\frac{d}{n}$$

3. Якщо $B = 0$, $\Rightarrow y_2 = A \cdot y_1 \Rightarrow A = \frac{y_2}{y_1} = \beta$



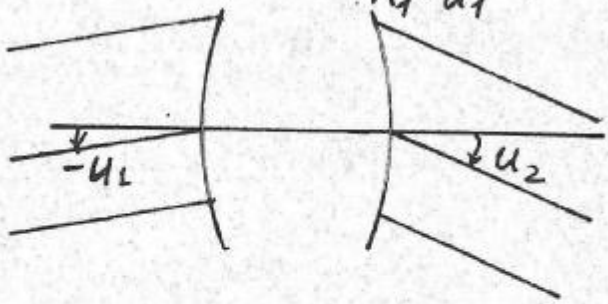
$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1/A \end{pmatrix}$$

$\mathcal{D} = \frac{1}{A} = \frac{1}{\beta} = \alpha$ коеф. кут. збільшення

$B = 0$ – умова спряженості

4. Якщо $C = 0 \Rightarrow V_2 = \mathcal{D} \cdot V_1$

$\mathcal{D} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2 \cdot u_2}{n_1 \cdot u_1}$; Для $n_1 = n_2 \Rightarrow \mathcal{D} = \frac{u_2}{u_1} = \alpha$

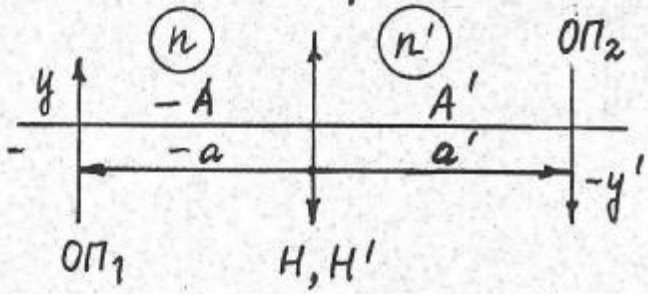


Це – афокальна система

$C = 0$ – умова (ознака) афокальності

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathcal{D}} & B \\ 0 & \mathcal{D} \end{pmatrix}$$

Матриця оптичної системи: тонка лінза, опорні площини – спряжені



A, A' – зведені довжини (зведені проміжки).

$A = \frac{a}{n}$; $A' = \frac{a'}{n'}$

$ОП_1, ОП_2$ – спряжені площини

$$M = T_2 \cdot R \cdot T_1 = \begin{vmatrix} 1 & -A' \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \Phi & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -A' \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & A \\ \Phi & A\Phi+1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{c|c} 1-A'\Phi & A-A'A\Phi-A' \\ \hline \Phi & A\Phi+1 \end{array}\right|;$$

$B = A - A' - A \cdot A' \cdot \Phi = 0$! $\Rightarrow$

$$\boxed{\Phi = \frac{A - A'}{A \cdot A'}}$$

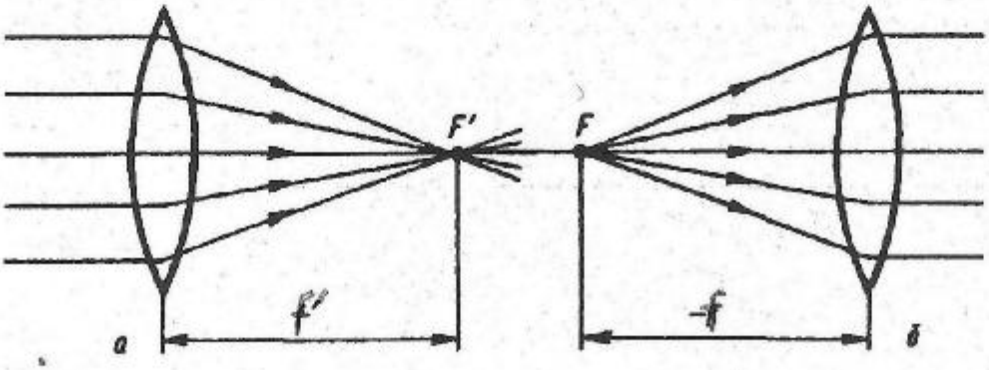
$$\boxed{A' = \frac{A}{1 + A \cdot \Phi}}$$

$$\boxed{A = \frac{A'}{1 - A' \cdot \Phi}}$$

Кардинальні точки та кардинальні площини (метод Гауса)

Розрізняють 6 (три пари) кардинальних точок та 6 (три пари) кардинальних площин. Теорія Гауса (1841р.) встановлює кардинальні точки та кардинальні площини, введення яких повністю описує всі властивості оптичної системи і дозволяє користуватись нею, не розглядаючи реального ходу променів в самій системі.

Фокальні точки (фокуси) та фокальні площини



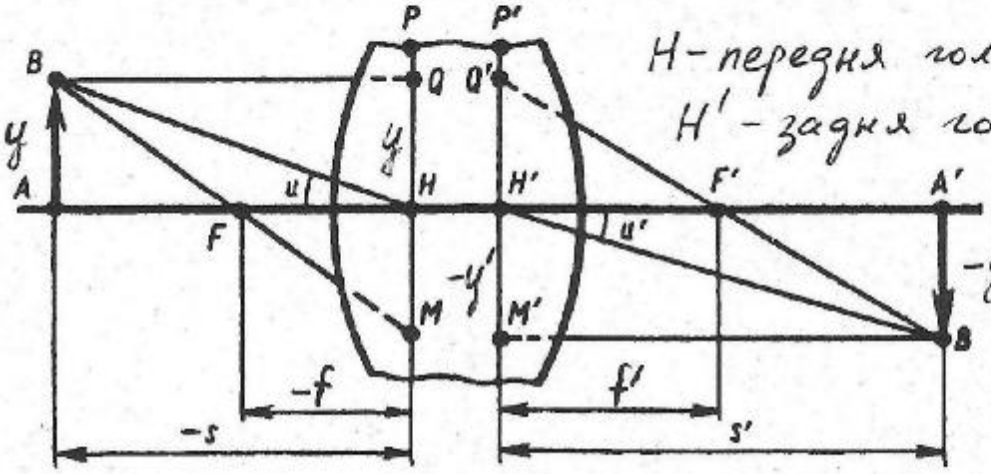
F - передній фокус

F' - задній фокус

Рис.1

Головні точки та головні площини

Спряжені площини з лінійним (поперечним) коефіцієнтом збільшення $\beta = +1$, називаються головними площинами. Точки перетину головних площин із оптичною віссю називаються головними точками.



H - передня головна точка

H' - задня головна точка

$\beta = +1 \Rightarrow y = y'$

$\beta = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\alpha}$

Рис.2

Якщо $n = n'$, то при $\beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1$ всі відстані відраховуються від головних точок.

Метод Гауса (метод головних площин) має ту перевагу, що дозволяє розв'язувати задачі для оптичних систем із формулами для тонкої лінзи. Але відлік величин треба проводити від головних пл.

21

Вузлові точки та вузлові площини

Дві спряжені точки на оптичній осі, для яких кутове збільшення $\alpha = +1$, називаються вузловими точкам N_1, N_2, а площини, які проходять через такі точки перпендикулярно до головної оптичної осі, називаються вузловими площинами n_1, n_2.

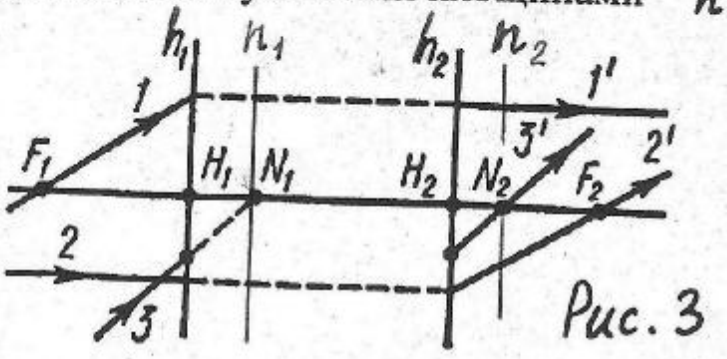
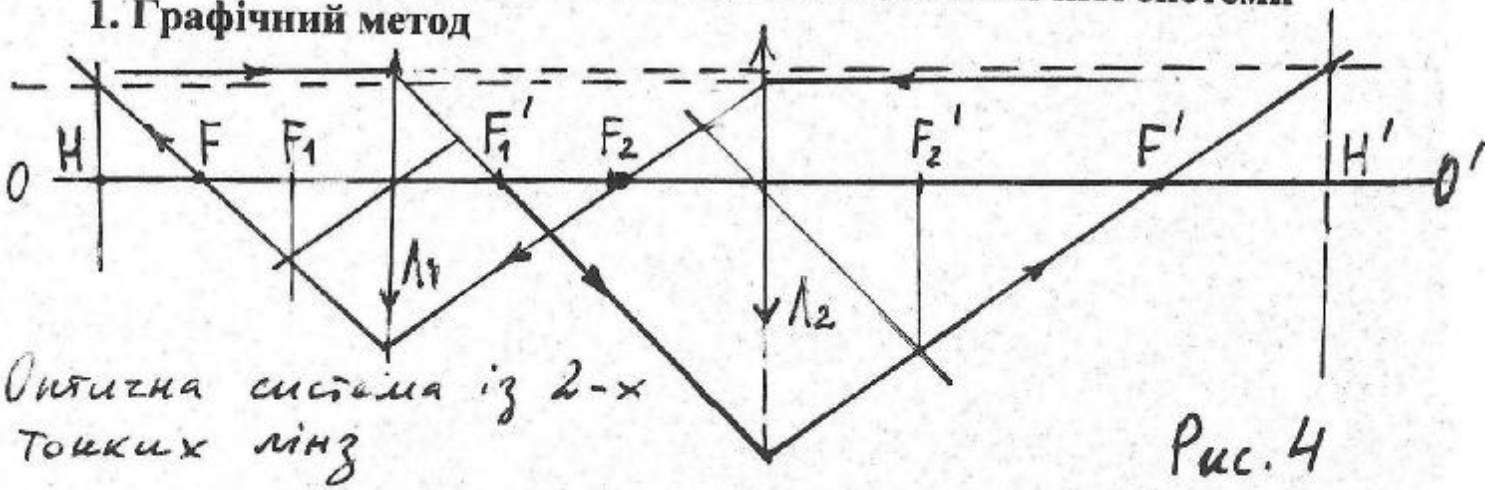


Рис. 3

Промінь (промінь 3 на рис.), що попадає в оптичну систему через вузлову точку (N_1), виходить з оптичної системи через другу вузлову N_2 точку (промінь 3′ на рис.) паралельно початковому напрямку падіння

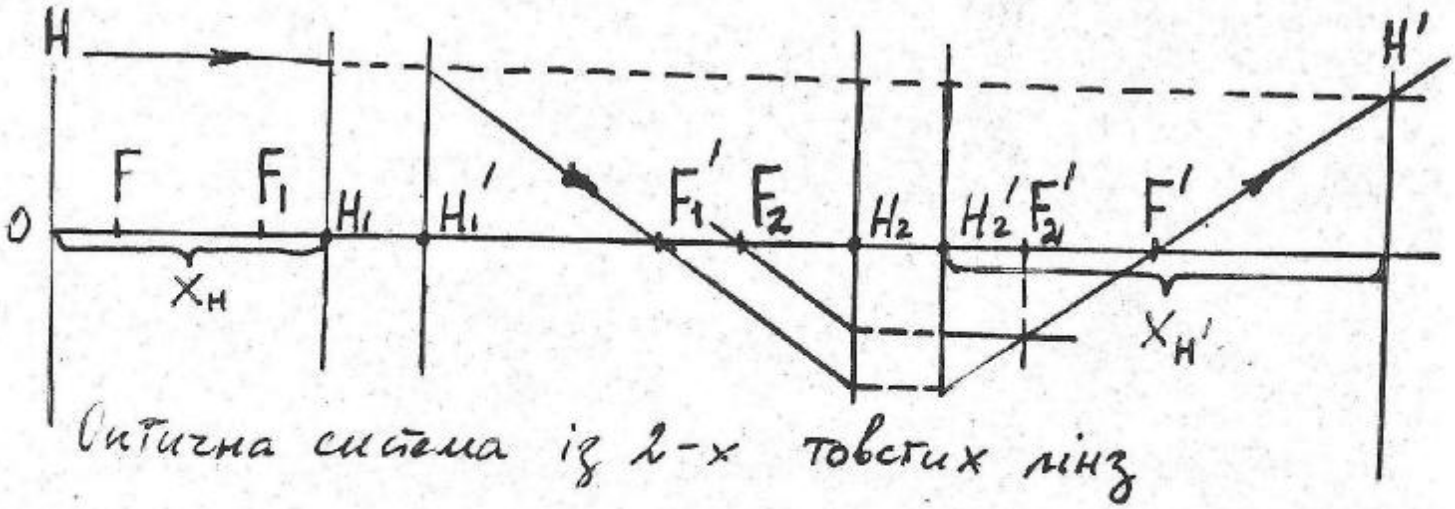
Методика знаходження головних площин оптичної системи

1. Графічний метод



Оптична система із 2-х тонких лінз

Рис. 4



Оптична система із 2-х товстих лінз

Рис. 5

21

2. Аналітичний метод

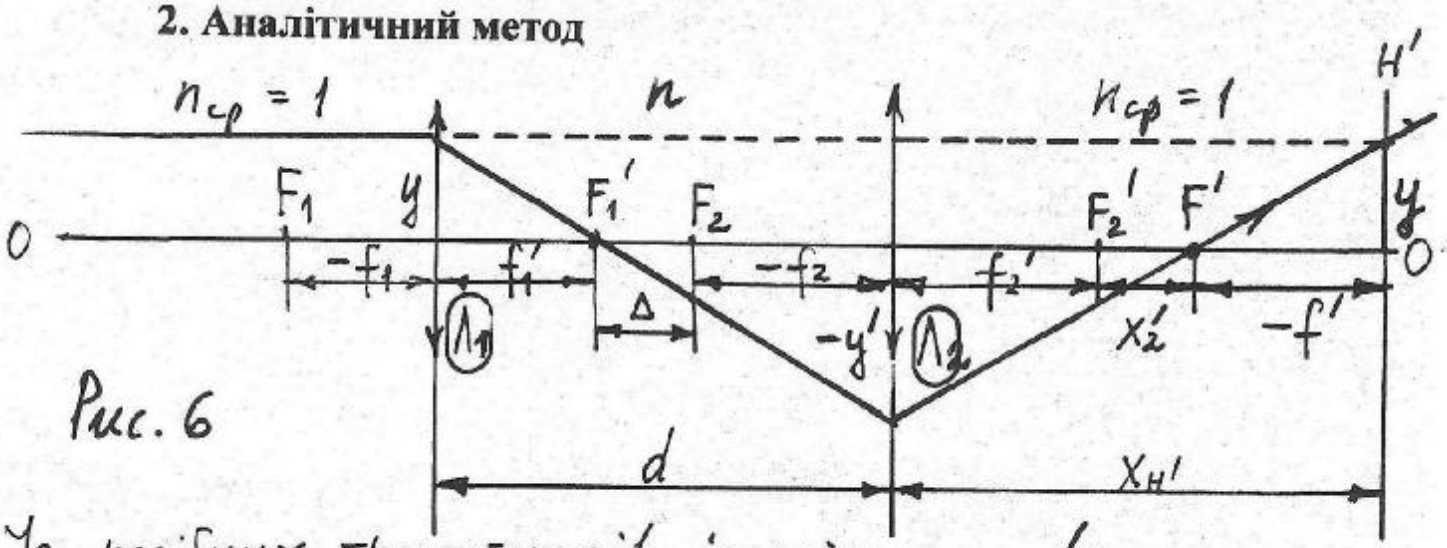


Рис. 6

Із подібних трикутників із спільними вершинами F_1' та F':

$$\frac{y}{f_1'}=\frac{-y'}{\Delta-f_2}\ ;\qquad \frac{y}{-f'}=\frac{-y'}{f_2'+x_2'}.$$ Звідси маємо:

$$\frac{f_1'}{\Delta-f_2}=\frac{-f'}{f_2'+x_2'}\Rightarrow f'=\frac{-f_1'(f_2'+x_2')}{\Delta-f_2}\qquad (1)$$

Для $Л_2$ →

Застосуємо формулу Ньютона: $x_2'\cdot\Delta=-f_2\cdot f_2'\Rightarrow$

$$x_2'=-\frac{f_2\cdot f_2'}{\Delta}\qquad (2);\qquad (2)\to(1):$$

$$\boxed{f'=\frac{-f_1'\left(f_2'-\frac{f_2\cdot f_2'}{\Delta}\right)}{\Delta-f_2}\equiv-\frac{f_1'\cdot f_2'}{\Delta}}\qquad (3)$$

Аналогічно

$$\boxed{f=\frac{f_1\cdot f_2}{\Delta}}$$

З рис. видно, що $d=f_1'+\Delta-f_2$

$$\Delta=d-f_1'+f_2\qquad (4);\qquad (4)\to(3):$$

$$\Phi=\frac{1}{f'}=\frac{-d+f_1'-f_2}{f_1'\cdot f_2'}\equiv-\frac{d}{f_1'\cdot f_2'}+\frac{1}{f_2'}-\frac{f_2}{f_1'\cdot f_2'}\qquad (5)$$

$$\Phi_1=\frac{n}{f_1'}=\frac{1}{-f_1}\ ;\qquad \Phi_2=\frac{1}{f_2'}=\frac{n}{-f_2}\qquad (6)$$

4.

(6)→(5): $\boxed{\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n}\Phi_1 \cdot \Phi_2}$

При $d=0$: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ – тонка лінза

Для товстої лінзи і для опт. системи із двох тонких лінз: $f' = \frac{1}{\Phi}$

З рис.6 видно, що:

$$x_H' = f_2' + x_2' - f' =$$

$$= f_2' - \frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta} + \frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta} = \frac{f_2'}{\Delta}(\Delta - f_2 + f_1') = \frac{d \cdot f_2'}{\Delta} =$$

$$= \frac{d}{f_1'} \cdot \frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta} = -\frac{d}{f_1'} \cdot f' = -\frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi}$$

$\boxed{x_H' = -\frac{d}{n}\frac{\Phi_1}{\Phi}}$

Положення передньої головної пл.:

$\boxed{x_H = \frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi}}$

Формула товстої лінзи

На рис. 2 із подібних трикутників з спільними вершинами F та F':

$$\frac{-y'}{y} = \frac{-f}{-s+f}; \qquad \frac{-y'}{y} = \frac{s'-f'}{f'} \quad (1)$$

$$\frac{f}{s-f} = \frac{s'-f'}{f'} \Rightarrow sf' + s'f = s \cdot s' \quad (2)$$

Поділимо ліву та праву частини (2) на $s \cdot s' \cdot f$:

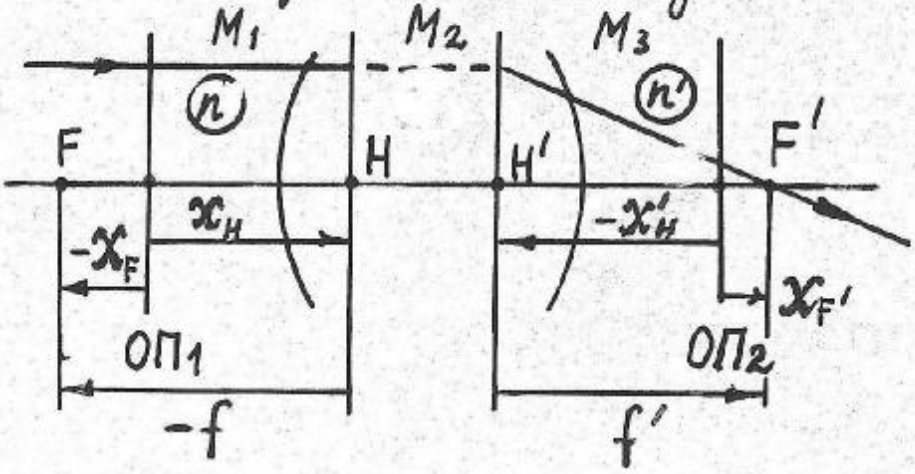
Через те, що $f' = -f$, маємо

$$\boxed{\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}} \quad (A)$$

Формула товстої лінзи

(A) має такий же вигляд, як і формула тонкої лінзи (але відстані відраховуються від H та H', положення яких не співпадають ні між собою, ні з положеннями головних поверхонь лінзи).

3. Матричний метод



$M = M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$

В матриці M_2: $\beta = 1$

$ОП_1$ та $ОП_2$ – спряжені площини

В матриці M: $A = \beta$; $\underline{\underline{B = 0}}$; $\mathcal{D} = \frac{1}{A} = \frac{1}{\beta}$

$A \cdot \mathcal{D} - B \cdot C = 1 \cdot \mathcal{D} - 0 \cdot C = 1 \Rightarrow \mathcal{D} = 1$

Для лінзи: $C = \Phi = \frac{n'}{f'}$

Таким чином: $M = \begin{vmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{x'_H}{n'} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n'}{f'} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{x_H}{n} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= \left| \begin{array}{c|c} 1 + \frac{x'_H}{f'} & \frac{x'_H}{n'} - \frac{x'_H}{n}\left(1 + \frac{x_H}{f'}\right) \\ \hline \frac{n'}{f'} & 1 - \frac{x_H}{f'} \cdot \frac{n'}{n} \end{array} \right| \quad (A)$$

З (A): $\boxed{f' = \frac{n'}{C}}$ $\boxed{x'_H = \frac{A-1}{C} \cdot n'}$ $\boxed{x_H = \frac{1-\mathcal{D}}{C} \cdot n}$

Із того, що $\frac{f}{f'} = \frac{-n}{n'} \Rightarrow$ $\boxed{f = -\frac{n}{C}}$

Із того, що $x_F = f - x_H$, а $x_{F'} = f' - x'_H$:

$\boxed{x_F = -\frac{\mathcal{D}}{C} \cdot n}$ $\boxed{x_{F'} = \frac{A}{C} \cdot n'}$

Положення головних площин для різних лінз

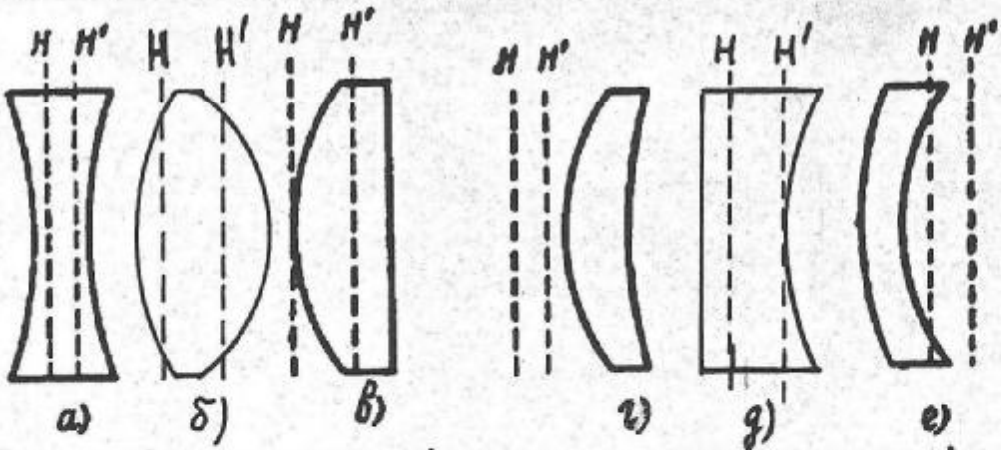
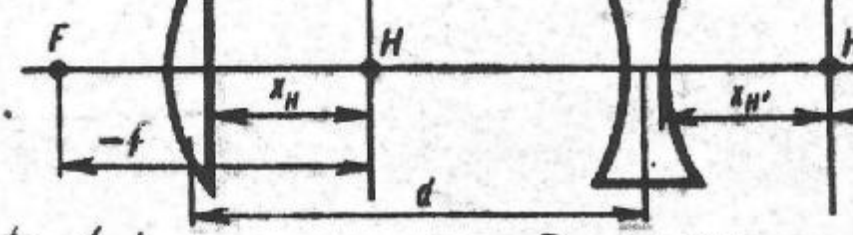


Рис. 7

Система із двох тонких лінз розглядається як товста лінза

Рис. 8



$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n}\Phi_1\Phi_2$$

$$f' = \frac{1}{\Phi}$$

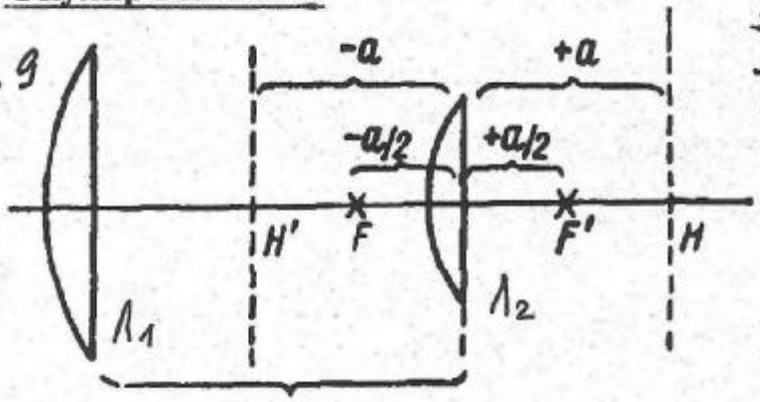
$$x_H = d\frac{\Phi_2}{\Phi};$$

$$x_{H'} = -d\frac{\Phi_1}{\Phi}$$

Головні площини не збігаються із лінзами.

Окуляр Гюйгенса

Рис. 9



Дано: $d = 2a$

$f_2' = a$; $f_1' = 3a$

Розв'язок:

$$\Phi_1 = \frac{1}{f_1'} = \frac{1}{3a}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{f_2'} = \frac{1}{a}$$

$$f' = -f = \frac{3}{2}a$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\cdot\Phi_1\cdot\Phi_2 = \frac{2}{3a}$$

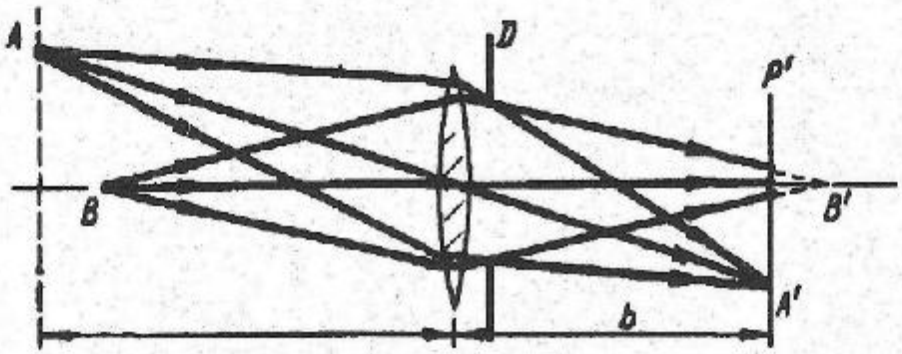
1. Головні площини H та H' помінялись місцями
2. Пл. H лежить поза системою $x_H = d\frac{\Phi_2}{\Phi} = 2a\cdot\frac{3a}{2a} = 3a$.
3. Пл. H' лежить посередині між лінзами $x_{H'} = -a$.
4. Головні фокуси системи розташовані симетрично відносно $Л_2$ на рівних відстанях $+\frac{a}{2}$ та $-\frac{a}{2}$ від неї.

Діафрагми оптичних систем

Діафрагма (Д) існує в будь-якій оптичній системі (роль Д. може грати оправа лінзи).

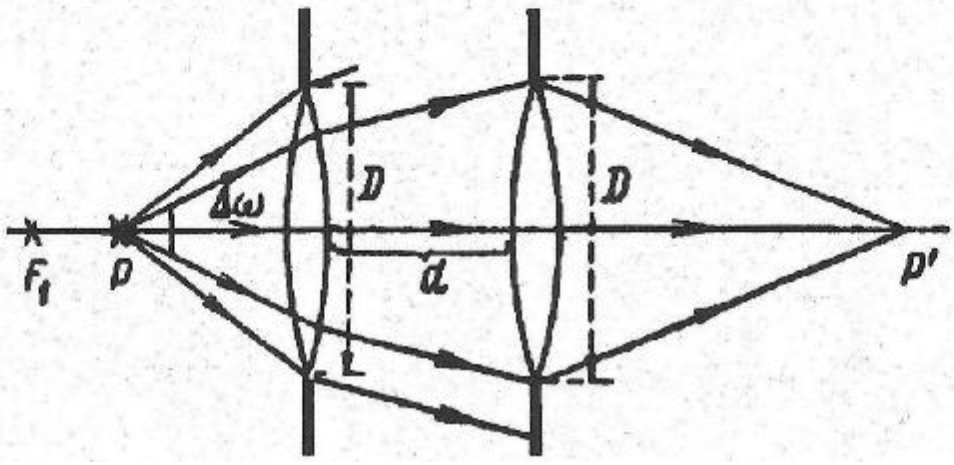
Від величини і положення Д. залежить:

- аберації (якість зображення);
- світлосила оптичної системи;
- поле зору оптичної системи;
- градієнт розподілу освітленості зображення, який сам предмет не має (*віньєтування);*
- чіткість зображення (глибина різкості та роздільна здатність).



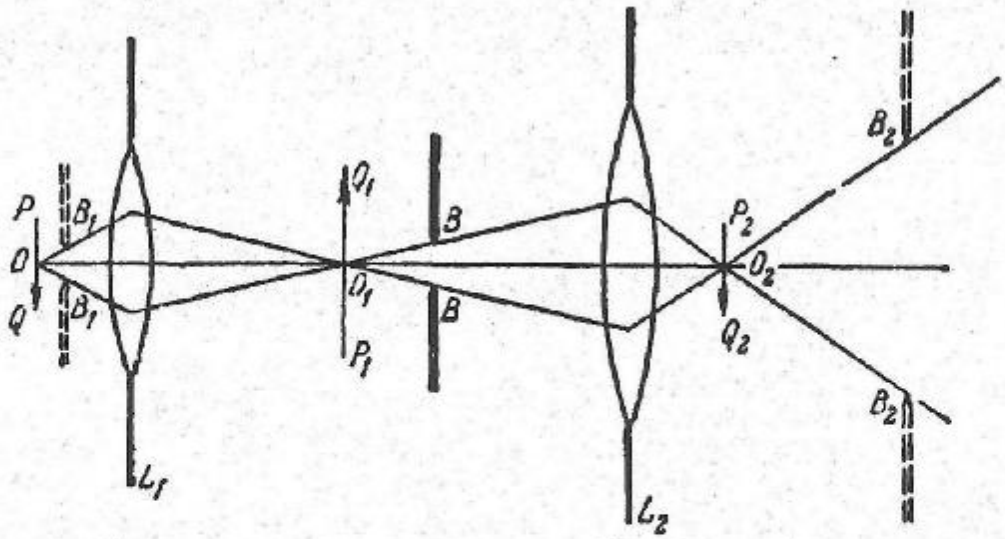
I. Обмеження променів від осьових точок предмета (осьових променів)

Апертурною (або - діючою) діафрагмою називається діафрагма, яка виконує *максимальне* обмеження світлового променя, який виходить із точки предмета, що розташована на оптичній осі системи.



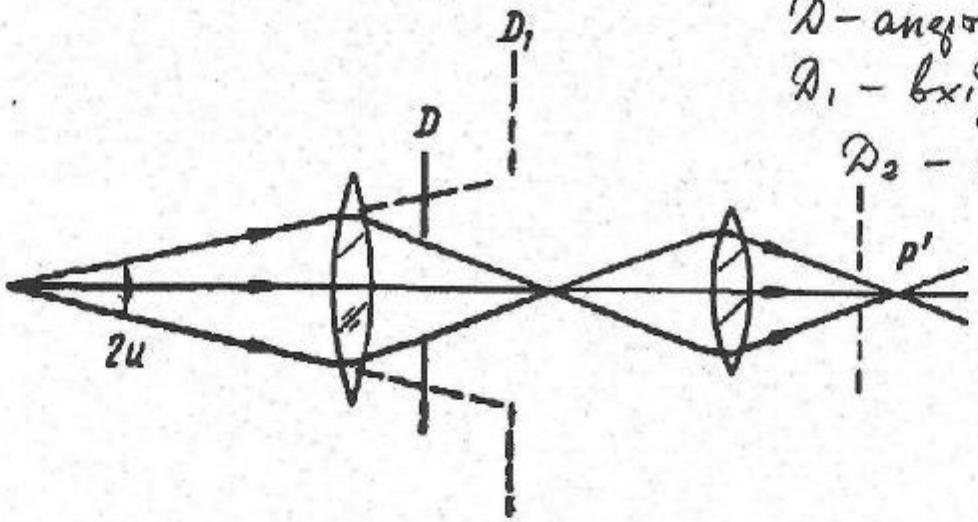
27

8.



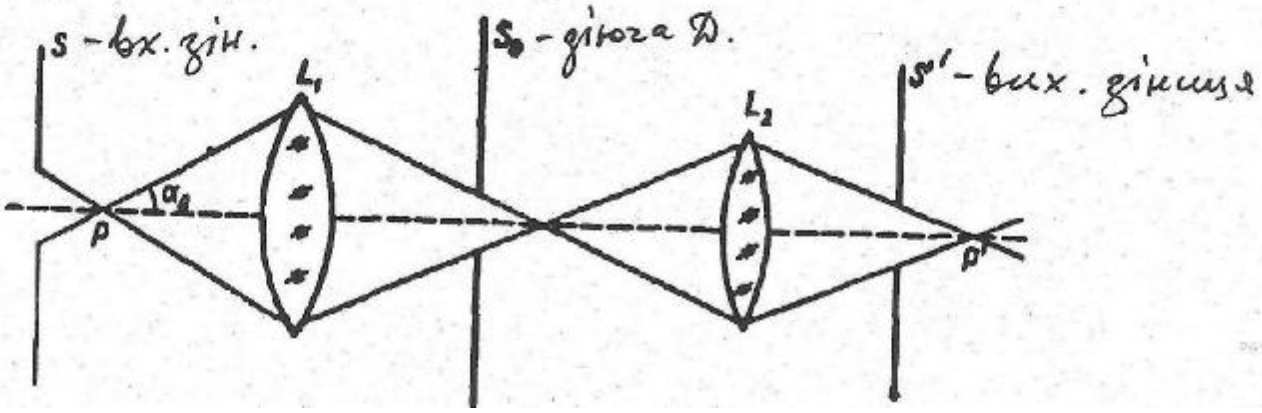
ВВ – апертурна Д.
B_1B_1 – вхідна зіниця
B_2B_2 – вихідна зіниця

Вхідною зіницею називається параксіальне зображення апертурної діафрагми, яке здійснюється тією частиною оптичної системи, що знаходиться перед апертурною діафрагмою.



Д – апертурна діафр.
$Д_1$ – вхідна зіниця
$Д_2$ – вихідна зіниця

Вихідною зіницею називається зображення апертурної діафрагми, яке здійснюється тією частиною оптичної системи, що знаходиться після апертурною діафрагмою.



S – вх. зін.
S_0 – діюча Д.
S' – вих. зіниця

27

9.

Апертурний кут – кут, під яким із точки перетину оптичної осі із площиною предмету видно радіус вхідної зіниці

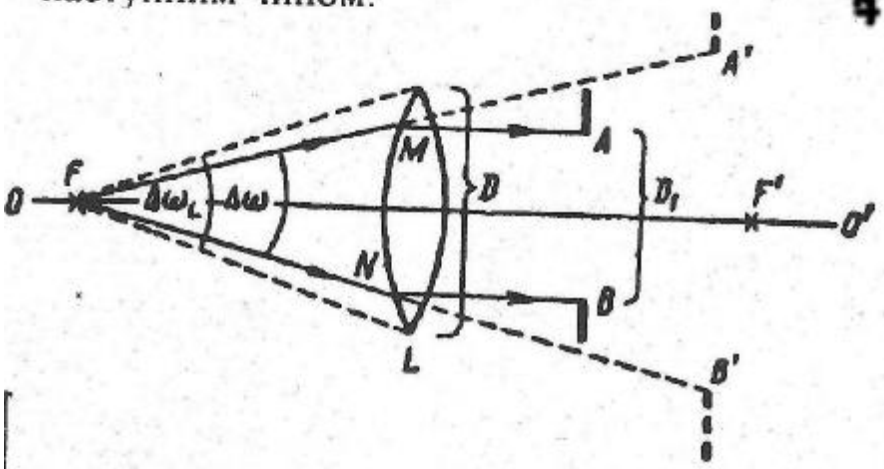
Зауваження:

1. *Вихідна зіниця є зображенням вхідної зіниці*, що отримується за допомогою всієї оптичної системи.

2. Якщо *апертурна діафрагма знаходиться перед оптичною системою*, то вона співпадає із вхідною зіницею.

3. Якщо *апертурна діафрагма знаходиться позаду оптичної системи*, то вона співпадає із вихідною зіницею.

4. Якщо *всередині оптичної системи знаходиться декілька діафрагм або оправ лінз*, то апертурну діафрагму шукають (визначають) наступним чином:



4. При сумісному використанні кількох оптичних систем необхідно, щоб вихідна зіниця попередньої опт. системи збігалась із вхідною зіницею наступної опт. системи

– слід отримати зображення всіх діафрагм (та оправ), які містить оптична система;

– апертурною діафрагмою буде та, зображення якої із місця розташування предмета на оптичній осі видно під меншим телесним кутом.

5. Для тонкої лінзи вхідна та вихідна зіниці співпадають із оправою самої лінзи.

6. Не слід плутати апертурний кут (апертуру) α із числовою апертурою $A = n \cdot \sin\alpha$, де n – показник заломлення.

7.

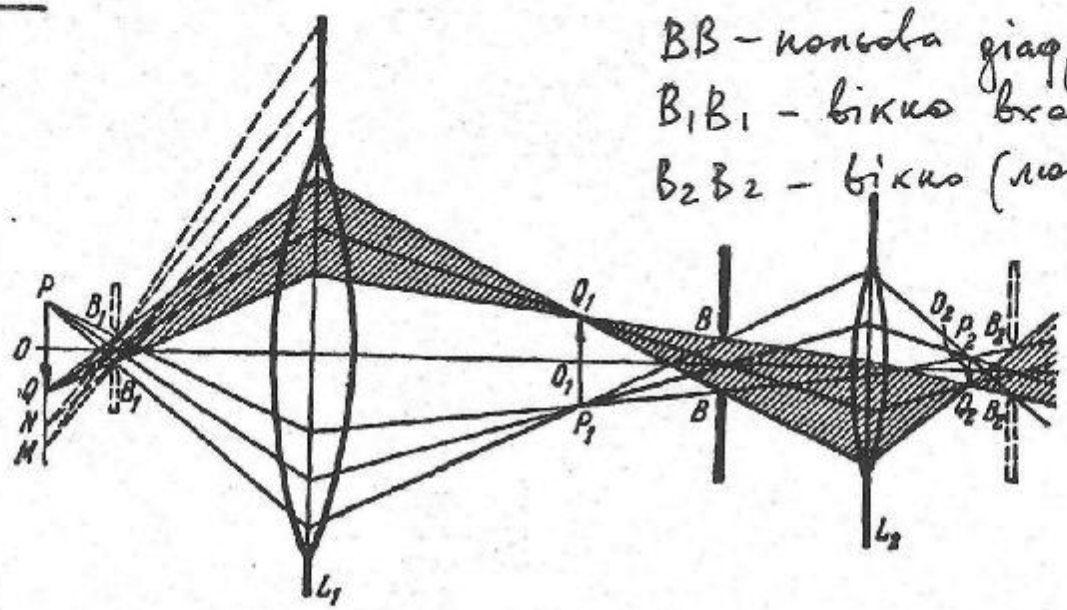
II. Обмеження променів від неосьових точок предмета

Не від всіх точок предмету промені , що пройдуть вхідну зіницю, пройдуть через оптичну систему.

Полем зору називається найбільша область в площині предмета, точки якої відображаються оптичною системою без помітного послаблення.

10.

Поле зору обмежується *діафрагмою поля зору*, або *польовою діафрагмою*.

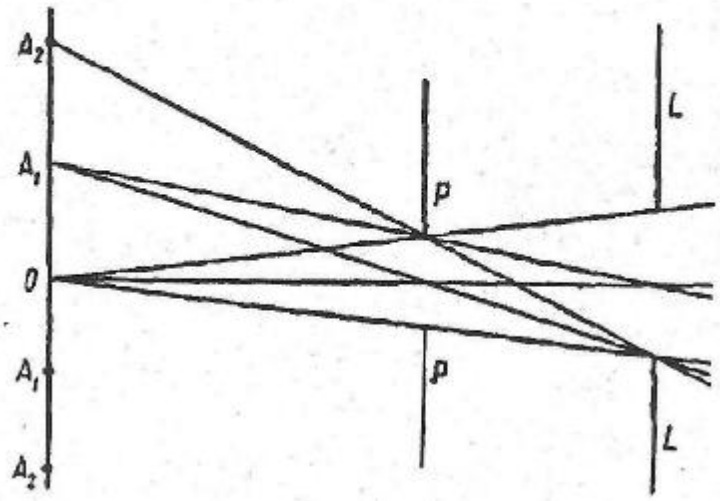


Діафрагма поля зору знаходиться шляхом побудови зображень кожної із діафрагм системи, яке здійснюється частиною оптичної системи, що знаходиться перед діафрагмою. Те із зображень діафрагм, яке із центра вхідної зіниці видно під найМЕНШим кутом (кутом зору) і буде *діафрагмою поля зору*, або *польовою діафрагмою*.

Зображення діафрагми поля зору в просторі предмета називається *вікном (або - люком) входу*, а в просторі зображень – *вікном (люком) виходу*.

Люк виходу є зображенням люку входу.

Віньєтування (градієнт розподілу освітленості зображення, який сам предмет не має) виникає в результаті того, що косі (неосьові) промені від предмета частково затемнюються діафрагмою поля зору.



Ступінь віньєтування залежить від відносного розташування люка і зіниці входу, а також площини предмета. В разі, коли площина люка входу збігається із площиною предмета, віньєтування зникає.

Аберації (викривлення, вади зображень)

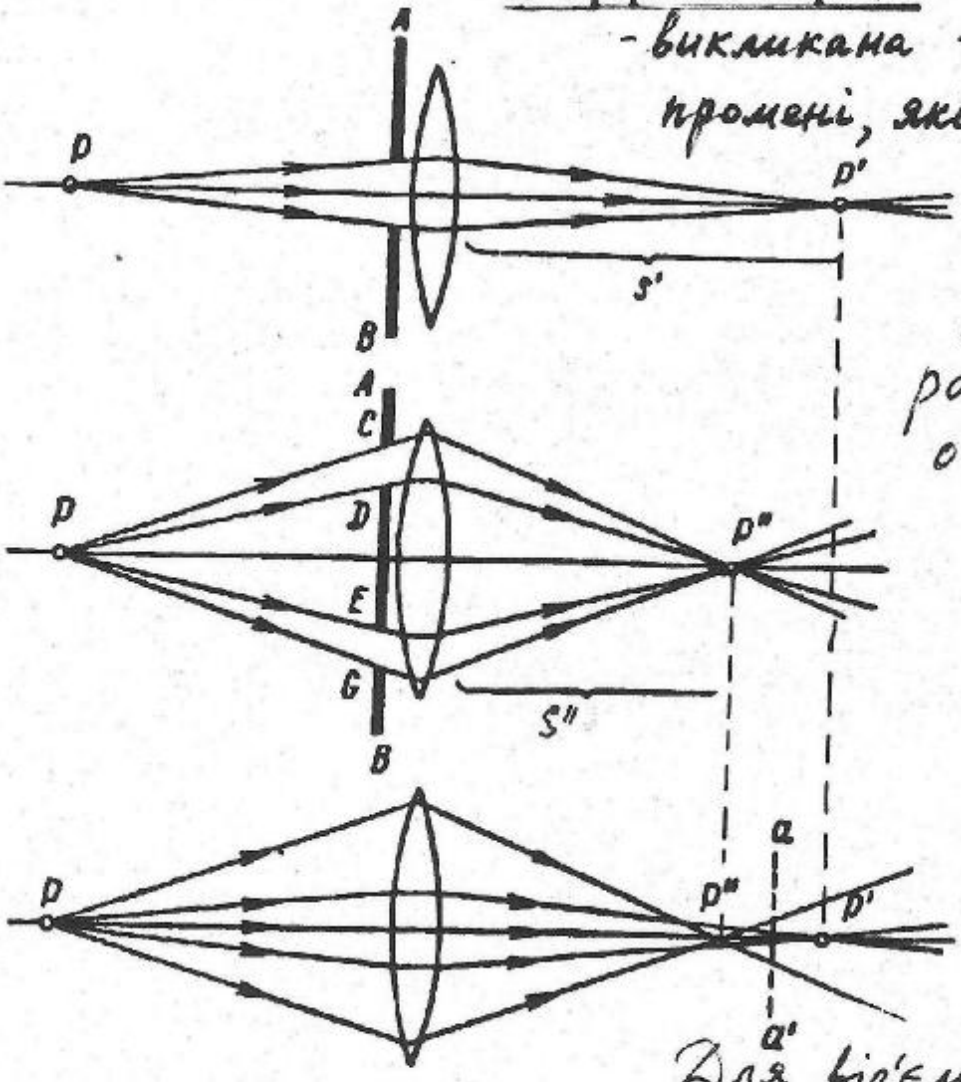
Ідеалізації в геом. оптиці: 1) параксіальне наближення; 2) монохроматичність; 3)показник заломлення $n \neq n(\lambda)$; 4) не враховуються хвильові властивості світла (наприклад, дифракція).

По ДСТУ розрізняють 7 видів аберацій:

1) сферична (аберація широкого осьового променя); 2) хроматична аберація; 3) кома ; 4) астигматизм нахилених (неосьових) променів; 4) дисторсія; 5) кривина поля зображення; 6 та 7) аберації положення та збільшення (кривина поля зображення).

1. Сферична аберація

- викликана тим, що монохром. промені, які виходять під різними кутами з точки предмета, що розташована на оптичній осі, після заломлення в лінзі не перетинаються в одній точці.



○○○○○○

Для додатних лінз $\delta S < 0$

Для від'ємних лінз $\delta S > 0$

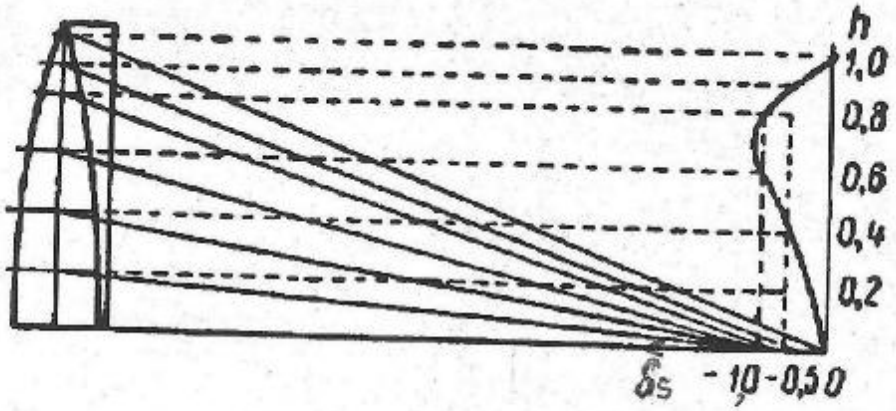
$\delta S = S'' - S'$ – поздовжня сферична аберація

Сферична аберація – результат непараксіальності променів.

У параболічних дзеркалах сфер. аберації немає

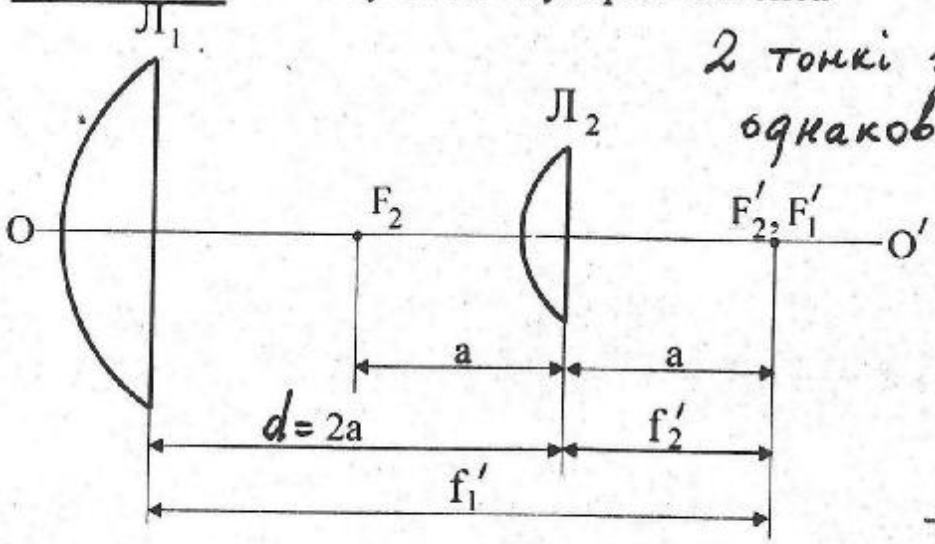
Виправлення сферичної аберації:

1-ий спосіб – застосування складених із різних типів (додатної і від'ємної лінз) оптичних систем. $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 > 0$, скло – однакове.



Завдяки тому, що лінзи мають поздовжні аберації різних знаків, для крайніх променів (див. рис.) аберація скомпенсована повністю.

2-ий спосіб - застосування окуляра Гюйгенса



2 тонкі збираючі лінзи з однакового матеріалу.

Якщо $d = \frac{f_1 + f_2}{2}$, то можна скомпенсувати сферичну аберацію

$f_2 : d : f_1 = 1 : 2 : 3$ або $2 : 3 : 4$

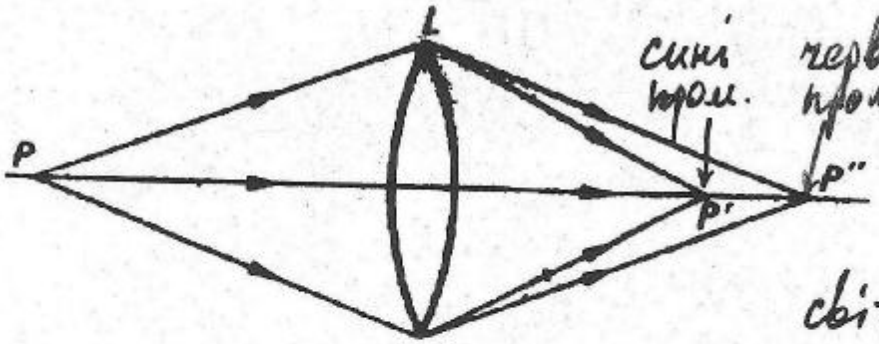
Характеристики ОГ:

$f_2' = a$; $f_1' = 3a$; $d = 2a$

$\Phi_1 = \frac{1}{3a}$; $\Phi_2 = \frac{1}{a}$; $\Phi = \frac{2}{3a}$

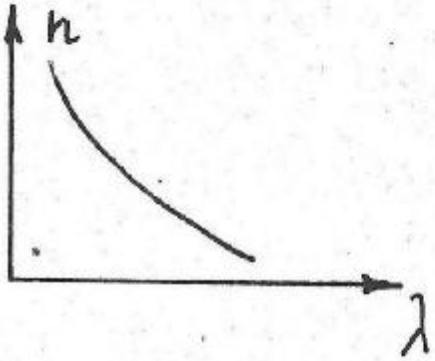
$X_H = 3a$; $X_{H'} = -a$

2. Хроматична аберація

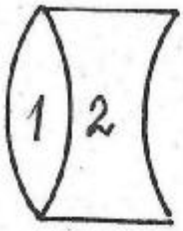


Якщо джерело випромінює біле світло, то зображення буде розмите та по краях зафарбоване.

$n = n(\lambda)$; $\quad n(\lambda) = A + \frac{B^2}{\lambda^2} + \dots \Rightarrow \frac{dn}{d\lambda} \sim \frac{1}{\lambda^3}$



Хроматичну аберацію можна знайбігти шляхом комбінації додатної і від'ємної лінз, зроблених із скла з різних сортів (з різними дисперсіями):



1 – крон (має меншу відносну дисп. $\frac{dn}{d\lambda}$)
2 – флінт (має більшу величину $dn/d\lambda$).
Така лінза називається ахроматом (хром. аберації скомпенсовані). Опт. сила $\Phi > 0$.
Якщо поміняти місцями крон і флінт, то $\Phi < 0$.

Як змінюється фокусна відстань системи при малих змінах показника заломл. $n(\lambda)$?:

$$\Phi = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{(n-1)f} \quad (1)$$

$$d\left(\frac{1}{f}\right) = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \cdot dn \quad (2)$$

$$(1) \to (2): \; d\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{dn}{(n-1)f} \Rightarrow \Delta\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{\Delta n}{(n-1)f}$$

Δn береться для крайніх частин видимого спектру:

33 33

Для лінії Cd: $\lambda_F = 0.480$ мкм; $\lambda_c = 0.644$ мкм

Значення n та f беруться для λ із середньої частини спектру $\lambda_e = 0.546$ мкм.

$$\boxed{\Delta\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{n_F - n_c}{(n_e - 1) f}} \quad (A)$$

$\tilde{\nu} = \frac{\Delta n}{n_e - 1}$ – відносна дисперсія

$(1/\tilde{\nu})$ – коеф. дисперсії (число Аббе).

Для оптичної системи із 2-х тонких лінз (додатної та від'ємної), що дотикаються:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \qquad (\Phi = \Phi_1 + \Phi_2)$$

Умова ахроматизації (система не має хроматичної аберації ≡ опт. сила системи Φ не залежить від зміни f_1 та f_2 при зміні спектрального складу падаючого світла):

$$d\left(\frac{1}{F}\right) = d\left(\frac{1}{f_1}\right) + d\left(\frac{1}{f_2}\right) = 0$$

$$\Delta\left(\frac{1}{F}\right) = \Delta\left(\frac{1}{f_1}\right) + \Delta\left(\frac{1}{f_2}\right) = 0$$

З урахуванням (A):

$$\frac{n_{F1} - n_{c1}}{(n_{e1} - 1) \cdot f_1} = \frac{n_{F2} - n_{c2}}{(n_{e2} - 1) \cdot f_2} = 0$$

$$(1)\begin{cases} \tilde{\nu}_1 \cdot \Phi_{1(e)} - \tilde{\nu}_2 \cdot \Phi_{2(e)} = 0 \\ \Phi_{1(e)} + \Phi_{2(e)} = \Phi_{(e)} \end{cases}$$

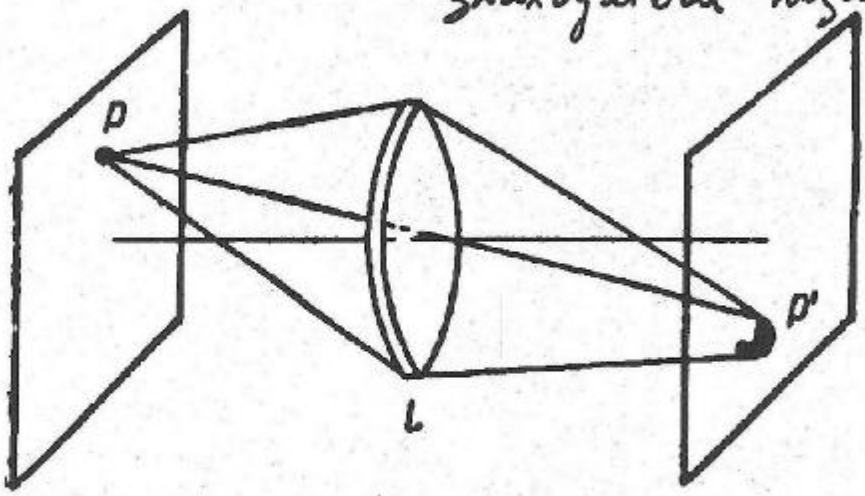
– умова ахроматизму

Така лінза має фокуси, що для синіх і червоних променів співпадають

З (1): $\Phi_1 = \frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_1} \cdot \Phi$; $\Phi_2 = -\frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_1} \cdot \Phi$

33 33

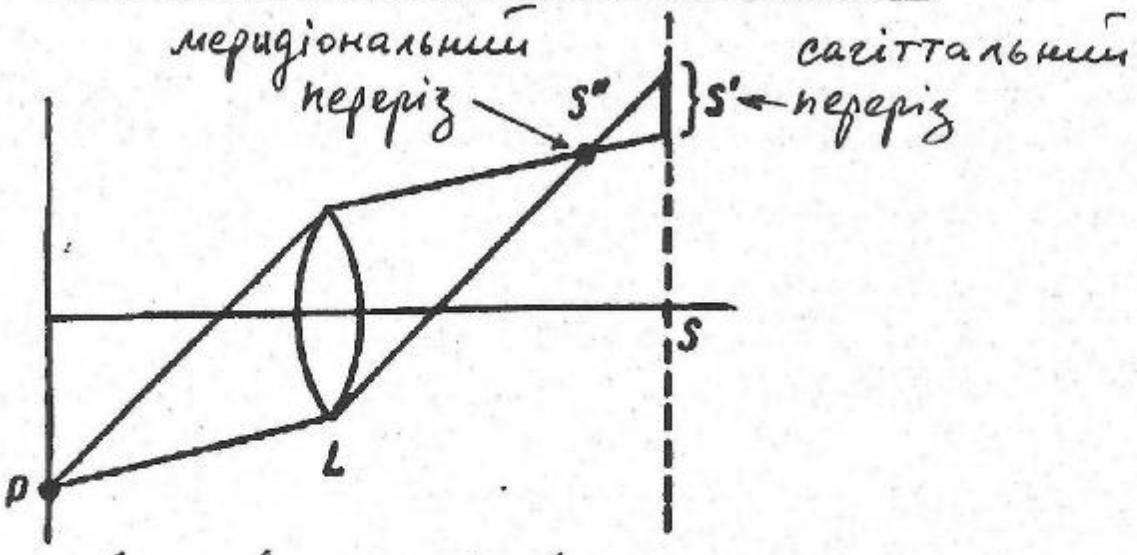
3. Кома – виникає для точкових об'єктів, що знаходяться поза оптичною віссю



(Раніше розглядали сферичну аберацію для осьових променів).

Кома у оптичній системі із виправленою сферичною аберацією відсутня, якщо виконується умова інваріанта Лагр.-Гель.: $n \cdot y \cdot \sin u = n' \cdot y' \cdot \sin u'$

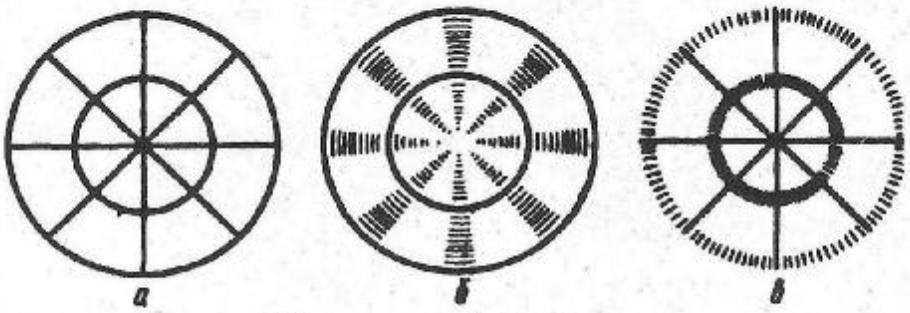
4. Астигматизм нахилених (неосьових) променів



Виправити цей вид аберацій можна шляхом спеціального підбору радіусів кривини заломлюючих поверхонь (відмінна від сферичної оптики!).

Система, виправлена на астигматизм, називається анастигматом.

Викривлення зображення в результаті астигматизму:

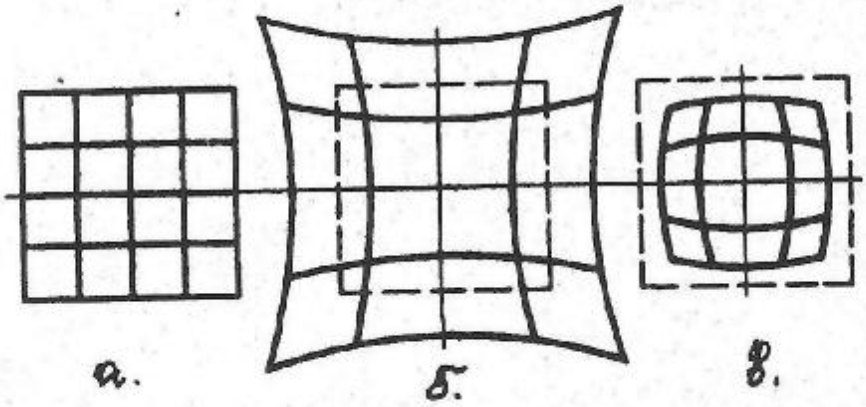


а – невикривлене зображення (предмет).

б – в фокусі меридіонального переріз;

в – в фокусі сагіттального переріз.

5. Дисторсія



– викликана неоднаковим лінійним збільшенням в межах поля зображення: $tg\,u \neq const$

а. б. в.

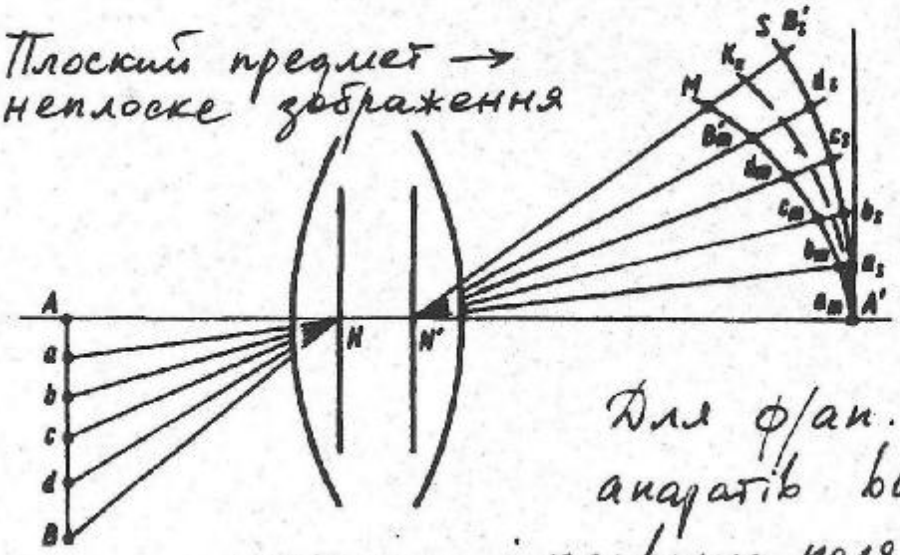
б – при збільшенні, що зростає по мірі віддалення від оптичної осі;

в – при лінійному збільшенні, що зменшується по мірі віддалення від оптичної осі.

При дисторсії створюється геометрична подібність між предметом (а) та його зображеннями (б, в).

Дисторсію можна усунути (зменшити), якщо в системі з 2-х лінз розмістити діафрагму між лінзами. Подушкоподібна дисторсія від I лінзи компенсує бочкоподібну дисторсію від II лінзи.

6. Кривина поля зображення



Плоский предмет → неплоске зображення

-існує навіть в системах з виправленим астигматизмом

Для ф/ап. та проекційних апаратів виправлення астигматизму і кривини поля зобр. особливо важливо.

Виправлені об'єктиви – <u>астигмати</u>.

<u>Зауваження:</u>

1. Повне усунення всіх видів аберацій на практиці неможливо.
2. Найткідливішими з усіх видів аберацій є сферична аберація та кома.
3. Послаблення прояву монохроматичних аберацій досягається, в основному, добором різних лінз.
4. Навіть для непараксіальних променів в площинах, для яких виконується умова синусів (інваріант Лагр.–Гельмг.: $y \cdot n \cdot \sin u = y' \cdot n' \cdot \sin u'$, відображення відбувається без значних аберацій.

Об'єктиви мікроскопів – апланати: усунено сферичну аберацію та виконані умови синусів.

Фотометрія

Слово "фотометрія" складене з двох грецьких слів і означає "світлові (оптичні) вимірювання".

Під оптичним випромінюванням розуміють електромагнітне випромінювання, довжина хвилі якого міститься в діапазоні з умовними межами від 10 нм до 1 мм. До оптичного випромінювання належить видиме випромінювання (світло у вузькому значенні слова), що займає діапазон довжин хвиль від 380-400 нм до 760-780 нм. Саме таке випромінювання викликає зорове відчуття у людини. З довгохвильового боку до цього діапазону аж до $\lambda \approx 1$ мм розташована область інфрачервоного (ІЧ), а з короткохвильового – області ультрафіолетового (УФ) випромінювання та ультрам'якого рентгенівського випромінювання (аж до $\lambda \approx 10$ нм).

Для світла, тобто електромагнітних хвиль видимого діапазону, були встановлені (історично першими) властивості електромагнітного випромінювання та величини, що кількісно оцінюють це випромінювання, введені одиниці вимірювання цих величин. Пізніше на основі уже вибудованої системи світлових величин та їх одиниць вимірювання була створена система енергетичних величин і їх одиниць для вимірювання оптичного випромінювання, яке крім видимої ділянки спектру ("світла") містить і суміжні ділянки - "ультрафіолетову" та "інфрачервону".

Вихідною характеристикою, яка використовується при вимірюванні світлових та енергетичних величин, є потужність випромінювання, яка називається потоком випромінювання – Ф. Потік – це потужність, що переноситься у вигляді випромінювання і яку вимірюють відношенням енергії випромінювання до тривалості переносу, що значно перевищує період коливань. Якщо виміряний у видимій ділянці спектру потік пов'язують із спектральною чутливістю людського ока, то застосовують термін "світловий потік". У разі вимірювання потоку за допомогою об'єктивних приладів кажуть про "енергетичний потік". В позначеннях потоків використовують індекси: "*v*" – видимий, "*e*" – енергетичний. При вимірюванні світлових величин застосовують термін "фотометрія", а енергетичних величин - "радіометрія".

Для вимірювання енергетичного потоку застосовують одиниці вимірювання потужності – *Вт*. При вимірюванні світлового потоку використовують одиницю – *лм* (люмен).

Якщо випромінювання складне, тобто складається з кількох монохроматичних складових, то повний енергетичний потік такого випромінювання складається з суми монохроматичних енергетичних потоків.

У випадку ж суцільного спектру в діапазоні від λ_1 до λ_2 повний енергетичний потік визначиться, як:

$$\Phi_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi_e(\lambda)\, d\lambda \qquad (2.1)$$

де $\varphi_e(\lambda)$ - величина, яка називається спектральною густиною енергетичного потоку:

$$\varphi_e(\lambda) = \frac{d\Phi_e}{d\lambda}, \qquad (2.2)$$

$d\Phi_e$ - потік енергії, який припадає на довжини хвиль від λ до $\lambda + d\lambda$.

Система фотометричних величин:

Дія світла на око залежить від довжини хвилі. Чутливість середньо статистичного адаптованого людського ока до оптичного випромінювання різних довжин хвиль відображається кривою спектральної чутливості ока (рис.2.1), встановленою міжнародною угодою (1924 р.), яка застосовується при всіх розрахунках світлового впливу випромінювання. Величина $V(\lambda)$ - відносна спектральна світлова ефективність монохроматичного випромінювання.

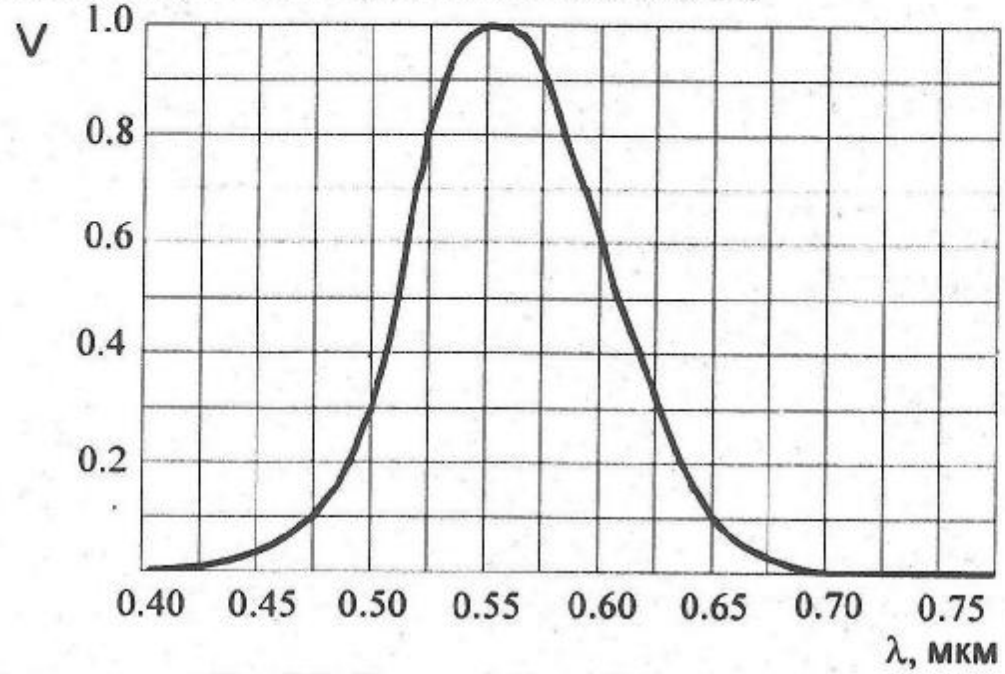


Рис.2.1. Крива відносної спектральної чутливості ока

Найбільш чутливе око до випромінювання з $\lambda = 0.55$ мкм (зелене світло). Функція V для цієї довжини хвилі дорівнює одиниці. При тому ж потоці енергії інтенсивність світла для інших довжин хвиль оцінюється оком як менша. Відповідно для інших, крім $\lambda = 0.55$ мкм , довжин хвиль і значення функції V будуть менші за 1. Поза інтервалу довжин хвиль видимого світла $V = 0$.

Світловий потік Φ_v – це потужність випромінювання, яка оцінюється по його дії на середнєстатистичне людське око.

Одиниця вимірювання світлового потоку – люмен (лм). При $\lambda = 0.55$ мкм світловий потік в 1 лм відповідає енергетичному потоку в (1/680) Вт.

Світловий потік і енергетичний потік в інтервалі $d\lambda$ пов'язані між собою співвідношенням:

$$d\Phi_v = K_m \cdot V(\lambda) \cdot d\Phi_e \,. \qquad (2.3)$$

де K_m = 680 лм/Вт.*)

Якщо підставити (2.1) в (2.3), то отримаємо:

$$d\Phi = K_m \cdot V(\lambda) \cdot \varphi_e(\lambda) \cdot d\lambda \,. \qquad (2.4)$$

Повний світловий потік

*) Далі індекс „v" для світлових величин писати не будемо. При цьому будемо мати на увазі, що величина без індекса - світлова величина. Для енергетичних величин будемо писати індекс „e".

$$\Phi = K_m \cdot \int_0^{\infty} V(\lambda) \cdot \varphi(\lambda) \cdot d\lambda \qquad (2.5)$$

Сила світла – це відношенням світлового потоку, що поширюється від джерела в деякому заданому напрямі всередині елементарного телесного кута, що має центральною віссю цей напрям, до цього елементарного телесного кута:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \qquad (2.6)$$

Для ізотропних джерел (коли сила світла I не залежить від напрямку)

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}, \qquad (2.7)$$

де Φ – повний світловий потік , який випромінюється джерелом в усіх напрямках (в телесному куті 4π стерадіан).

Силу світла можна використовувати не тільки для точкового джерела, а і у випадку протяжного джерела, говорячи про силу світла елемента його поверхні dA. Тоді під $d\Phi$ в (2.6) розуміють світловий потік, який випромінює елемент поверхні dA в межах телесного кута $d\Omega$.

Одиниця сили світла в СІ- кандела (*кд*), або свіча (*св*).

Освітленість – це відношення світлового потоку, що падає на елемент поверхні, до площі цього елементу поверхні

$$E = \frac{d\Phi}{dA}. \qquad (2.8)$$

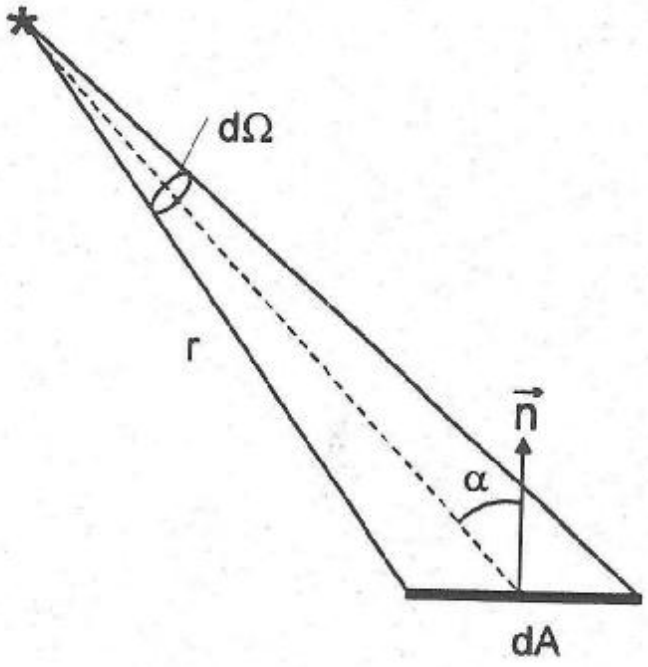


Рис.2.2. До визначення освітленості

Одиницею освітленості є *люкс (лк)*, рівний освітленості, що створює світловий потік в 1 лм, який рівномірно розподілений по поверхні в 1 м^2 :

$$1\,\text{лк} = \frac{1\,\text{лм}}{1\,\text{м}^2}. \qquad (2.9)$$

Освітленість E, що створює точкове джерело, можна виразити через силу світла I джерела, відстань r від поверхні до джерела та кут α між нормаллю до поверхні $\vec{n}$ і напрямком на джерело (рис.2.2):

$$E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha, \qquad (2.10)$$

Світність. Протяжне у просторі джерело можна характеризувати світністю M різних його ділянок. Під світністю M розуміють світловий потік, який виходить з одиниці поверхні у всіх напрямках (в межах значень θ від 0 до $\pi/2$; θ – кут, який утворений даним напрямком із зовнішньою нормаллю до поверхні):

$$M = \frac{d\Phi_{випр}}{dA}, \qquad (2.11)$$

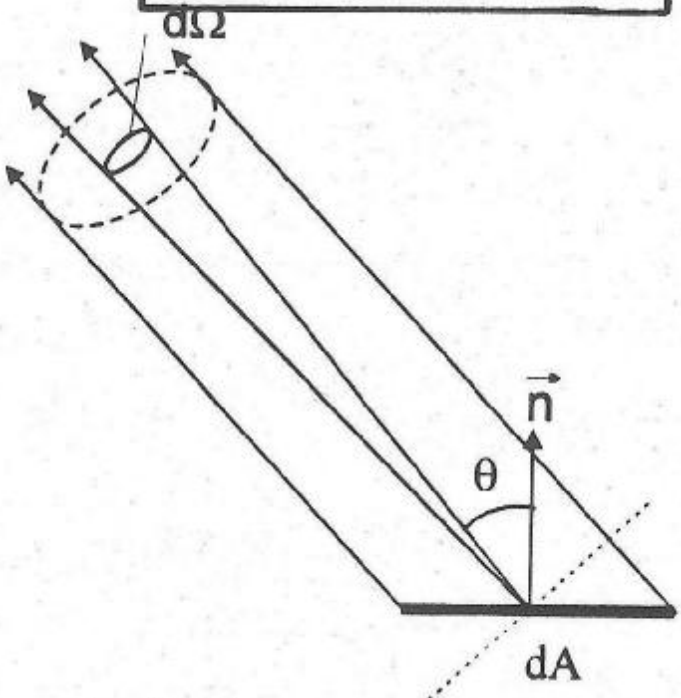
де $\Phi_{випр}$ - світловий потік, що випромінюється по всіх напрямках поверхнею dA джерела.

Світність може характеризувати не тільки поверхню, що випромінює світло, але і поверхню, що не дзеркально відбиває світло, яке падає на неї. Тоді під $\Phi_{випр}$ в (2.11) розуміють світловий потік, що відбивається поверхнею dA у всіх напрямках.

Світність M вимірюється у $лм/м^2$. Формально $лм/м^2 = лк$ - одиниця вимірювання освітленості.

Яскравість. Для характеристики поверхні, що випромінює світло у заданому напрямку, використовують яскравість (L). Яскравість визначається як відношення сили світла dI елемента поверхні dA у заданому напрямку до проекції площі dA на площину, що перпендикулярна до обраного напрямку (рис.2.3):

$$L = \frac{dI}{dA \cdot \cos\theta} = \frac{(d\Phi_{випр})^2}{d\Omega \cdot dA \cdot \cos\theta}. \qquad (2.12)$$



$L \neq L(\theta)$

Рис.2.3. До визначення яскравості

В загальному випадку яскравість для різних напрямків різна. Джерела, яскравість яких у всіх напрямках однакова, називаються ламбертовськими, або косинусними.

Для ламбертовських джерел світність та яскравість пов'язані простим співвідношенням:

$$M = \pi L \qquad (2.13)$$

Одиницею яскравості є *кд/м²*, або *ніт (нт)*.

Хвильова оптика

Основні положення ел.м. теорії світла

Світло - ел.м. хвилі від НВЧ ($1\,мм = \lambda$) до м'якого рентгена ($120\,Å = \lambda$)

Система рівнянь Максвелла при умові, що середовище однорідне ($\varepsilon = const$; $\mu = const$), непровідне (поверхн. $-\sigma$ та об'ємна-ρ густина зарядів $= 0$, струм провідн. $-j = 0$)

$$(A)\begin{cases} div\,\vec{E} = 0 \\ div\,\vec{B} = 0 \\ rot\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ rot\,\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Із системи рівнянь Максвелла можна зробити такі висновки:

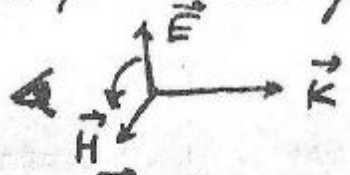
1) ел.м. поле поширюється у вигляді ел.м. хвиль із швидкістю

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

2) ел.м. хвилі поперечні:

$\vec{H} \perp \vec{E}$; $\vec{H} \perp \vec{k}$ ($\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\vec{n}$; $\vec{k} \parallel \vec{v}$); $\vec{E} \perp \vec{k}$

3) вектори $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ складають правогвинтову систему



4) вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ в плоскій монохроматичній хвилі, що розповсюджується, (не в сферичній хвилі!) коливаються як у часі, так і у просторі синфазно (max $\vec{E}$ співпадає з max $\vec{H}$, те ж - з мін).

Всі 4 властивості ел.м. хвиль випливають з р-нь Максвелла. Їх можна довести: див. Білий... с. 10, або Годжаєв... с. 21

Нагадаємо, що:

Оператор $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

$\nabla \to grad$

$\nabla^2 = \Delta$ - оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

(B) $rot\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$

Продиф. за часом останнє з рівнянь Максвелла:

$rot\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$. Через те, що $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} rot\vec{E}$,

маємо: $-\frac{c}{\mu} rot\, rot\,\vec{E} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

Враховуючи, що $rot\, rot\,\vec{E} = grad\, div\,\vec{E} - \Delta\vec{E}$, а $div\, E = 0$, маємо: $\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ (1)

Так само можна отримати:

$\Delta\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$ (2)

(1) та (2) - хвильові рівн

В курсі „Механіка" було: хвильове рівн.

$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2x}{dt^2}$

або:

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

$\boxed{v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$

Розв'язок (1) має вигляд: $E = E_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{v})}$, або: $E = E_0 \cos\omega(t - \frac{x}{v})$

$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\vec{n} = \frac{\omega}{v}\vec{n}$

$= E_0 \cdot \exp i(\omega t - \frac{\omega}{v}\vec{r}\cdot\vec{n}) =$

$\vec{n}$ - нормаль до фронту хвилі; $\vec{r}$ - радіус-вектор.

$= E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ (3); $H = H_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ (4)

(A), (B), (3) $\Rightarrow \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}\right) \Rightarrow \boxed{\sqrt{\mu}\, H_x = \sqrt{\varepsilon}\cdot E_z}$

Умова синфазності

Покажемо це на стор 2а:



Хвиля – плоскополяризована

$E_y = E_x = 0$; $E_z = E(y,t)$
$H_y = H_z = 0$; $H_x = H(y,t)$
$\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{H}$ 2a

$E_z = E_z(y,t) = E_{0z} \cdot e^{i(\omega t - ky)}$ (5)

1) x-компонента маг. поля (H_x), як витікає із (A) та (B), визначається із: $\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}$. (6)

2) z-компонента ел. поля (E_z), як витікає із (A) та (B), визначається із:

$\frac{\partial H_x}{\partial y} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}$ (7).

$\forall_3$ (5) $\Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{k}{\omega}\frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{1}{v}\frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}$ (8)

(8) → (6) : $-\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}$ (9)

Проінтегруємо (9) по часу:

$\sqrt{\mu} \cdot H_x(y,t) = \sqrt{\varepsilon} \cdot E_z(y,t) + const.$

Оскільки постійне (стаціонарне) поле в електродинаміці не грає ролі, то $const = 0$. Тоді:

$\sqrt{\mu} \cdot H_x = \sqrt{\varepsilon} \cdot E_z$ 1) умова синфазності
2) зв'язок між E та H компонентами ЕМХ

Для опт. діапазону $\mu = 1$ $(B = H) \Rightarrow \boxed{\sqrt{\varepsilon}\, E = H}$ 3

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} = \frac{1}{v^2} \Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow n \cdot E = H$$

Енергія ел.м. хвилі. Вектор Умова-Пойнтинга

Об'ємна густина ен. $u = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 + \frac{\mu}{8\pi} H^2 = \frac{\varepsilon}{4\pi} E^2$

Густина потоку ен. (s) - кількість енергії, яка переноситься через од. поверхні за од. часу v - швидкість ЕМХ

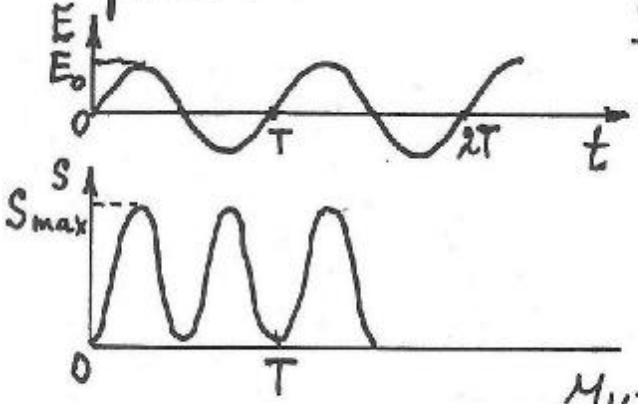
$$s = v \cdot u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot u = \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4\pi} E^2 = \frac{c}{4\pi} \cdot E \cdot H$$

V - об'єм

$\boxed{\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]}$ Вектор Умова-Пойнтинга $u = \frac{S}{v}$

Вектор $\vec{S} \perp$ пл., де розташовані $\vec{E}$ та $\vec{H}$ $u = \frac{W}{V}$

Вектор $\vec{S}$ в ізотропному середовищі визначає напрям переносу хвильової енергії, тобто напрям світлового променю.



Значення потоку ен. св. хвилі коливається з подвійною частотою подібно з $\vec{E}$ або $\vec{H}$

$$S_{max} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon}\, E_0^2$$

Інтенсивність світла (J)

J - середнє значення густини потоку ел.м. випромінення по часу, рівному 1 періоду коливань

$$J = \langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4\pi} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)\, dt =$$

$$= \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4\pi} E_0^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{8\pi} E_0^2 \Rightarrow J \sim E_0^2;\ J \sim n$$

$n = \sqrt{\varepsilon}$

Фазова і групова швидкості

Плоска монохроматична хвиля в однорідному середовищі описується виразом

$E = E_0 e^{i(\omega t - kx)}$ Фаза $\varphi = \omega t - kx$

$\varphi = const$ Хвильова поверхня – геом. місце точок, які коливаються в однаковій фазі.

Фронт хвилі – геом. місце точок, до яких в даний момент часу дійшла хвиля і викликала коливання.

Для однорідних ізотропних середовищ хвильова поверхня і фронт хвилі співпадають; для анізотр. – ні.

$\varphi = \omega t - kx = const \Rightarrow \omega \cdot dt - k dx = 0$

$\frac{dx}{dt} = v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \nu \cdot \lambda$ Фаз. шв. – шв. переносу фронту хвилі

Групова шв. – шв. амплітуди групи хвиль (шв. переносу енергії хвилею), швидкість хвильового пакету

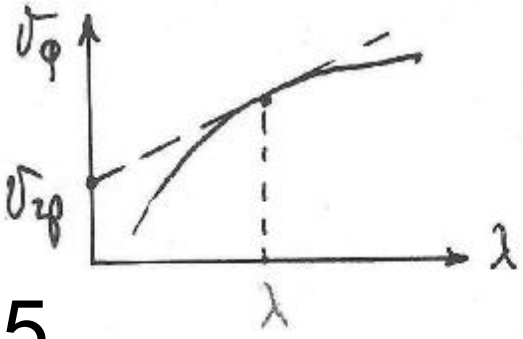
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v_\varphi \cdot k) = \boxed{v_\varphi + k\frac{dv_\varphi}{dk}} =$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda = -\frac{k}{\lambda} \cdot d\lambda \Rightarrow \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{\lambda}{k}$$

$$\frac{dv_\varphi}{dk} \equiv \frac{dv_\varphi}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{dv_\varphi}{d\lambda} \cdot \frac{\lambda}{k}$$

Формула Релея

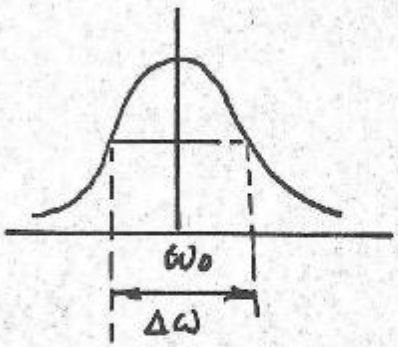
$$= v_\varphi + k\left(-\frac{dv_\varphi}{d\lambda} \cdot \frac{\lambda}{k}\right) = \boxed{v_\varphi - \lambda\frac{dv_\varphi}{d\lambda} = v_g}$$



Метод визначення v_g (П. Еренфест)

Необхідність розгляду, поруч з $v_ф$, групової шв. $v_{гр}$ пов'язана із негармонічними ЕМХ.

ЕМХ з кінечним (відмінним від 0) значенням $\Delta\omega$ м.б. представлена у вигляді суперпозиції плоских гармонічних хвиль різної частоти $\Rightarrow$ різні частоти – різні швидкості (дисперсія). Тому така хвиля являє собою збурення ел.м. поля у вигляді імпульсу, рівного нулю за межами деякого інтервалу Δx (об'єму ΔV) і проміжку часу τ. Таке хвильове поле називають хвильовим пакетом. Амплітуди гармонічних хвиль, які складають таке збурення, відмінні від нуля лише всередині деякого інтервалу частот $\Delta\omega$ поблизу середньої частоти ω_0.



Якщо $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$, то хвиля називається квазігармонічною (майже гармонічною).

Хвильові пакети широко використовуються при розгляді взаємодії ЕМХ із речовиною, а також процесів передачі інформації тощо.

Зауваження:

1) Для плоских гармонічних ЕМХ $v_ф = v_{гр}$
2) У вакуумі $v_{гр} = v_ф = c$. (У вакуумі немає хвильового пакету, немає дисперсії, „немає" $v_{гр}$, її не розрізняють, про неї не говорять).
3) Для плазми і металів $v_{гр} v_ф = c^2$
4) Є випадки, коли $v_ф > c$ (у вікні прозорості: $\omega > \omega_0$, $v_ф \gtrless c$ – це не суперечить СТВ
5) $v_{гр} < c$!
6) Інколи теорія (і експеримент!) дає $v_{гр} > c$...

Заломлення та відбиття світла на границі двох ізотропних діелектриків. Формули Френеля

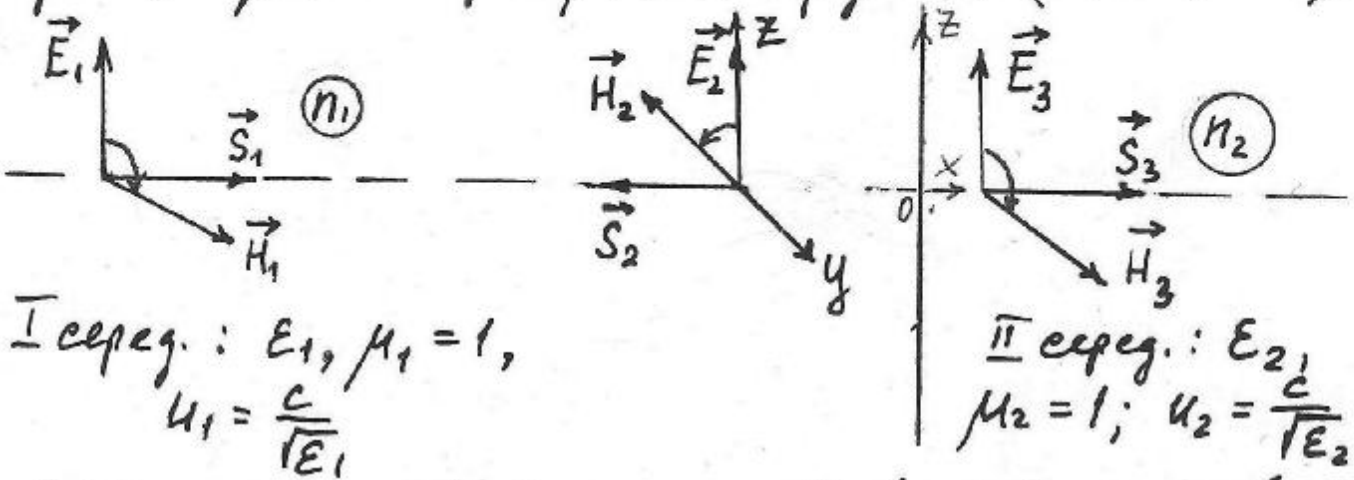
Коефіцієнт відбиття та коеф. пропускання при нормальному падінні світла

$$R = \frac{J_{відб}}{J_{пад}} = \frac{(c/8\pi)\cdot\sqrt{\varepsilon_1}\cdot E_0^2\,відб}{(c/8\pi)\cdot\sqrt{\varepsilon_1}\,E_0^2\,пад} = \frac{E_0^2\,відб}{E_0^2\,пад}$$

$$T = \frac{J_{прох}}{J_{пад}} = \frac{(c/8\pi)\sqrt{\varepsilon_2}\cdot E_0^2\,пр}{(c/8\pi)\sqrt{\varepsilon_1}\cdot E_0^2\,пад} = \frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{E_0^2\,пр.}{E_0^2\,пад}$$

Середовище без поглинання $\Rightarrow T + R = 1$

Для нормального падіння електромагн. хвилі (ЕМХ) на границю двох непроводящих середовищ ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$);



I серед.: $\varepsilon_1, \mu_1 = 1$, $u_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}$

II серед.: ε_2, $\mu_2 = 1$; $u_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}}$

В I серед. розповсюджуються 2 хвилі (пад. та відб.), в II серед. – хвиля, що пройшла. Будемо вважати (поки що!): $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3$. Хвиля – плоска:

пад. $E_1 = E_{01} e^{i\omega_1(t - x/u_1)}$

відб $E_2 = E_{02} e^{i\omega_2(t - x/u_1)}$

прош. $E_3 = E_{03} e^{i\omega_3(t - x/u_2)}$

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\varepsilon_1}\,E_1 \\ H_2 &= \sqrt{\varepsilon_1}\,E_2 \\ H_3 &= \sqrt{\varepsilon_2}\cdot E_3 \end{aligned}\right\} (1)$$

Вектори $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$ в усіх 3-х хвилях строго орієнтовані за правилом правого гвинта

Для збереження правила правого гвинта ми обрали $\vec{H}_1$ та $\vec{H}_2$. З тим же успіхом можна було б приписати знак „–" вектору $\vec{E}_2$, але тоді б вектор $\vec{H}_2$ був би додатнім

Граничні умови – збереження tg-іальних складових векторів $\vec{E}$ та $\vec{H}$ на границі розділу ($x = 0$):

$$E_1 + E_2 = E_3 \qquad H_1 - H_2 = H_3 \qquad (2)$$

$$E_{01} e^{i\omega_1 t} + E_{02} e^{i\omega_2 t} = E_{03} e^{i\omega_3 t} \qquad (3)$$

При довільному t тотожність (3) може мати місце лише, якщо $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$. Це так, крім випадку дуже потужної ЕМХ („нелін. оптика").

З (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $E_{01} + E_{02} = E_{03}$; $H_{01} - H_{02} = H_{03}$ (4)

(1) $\Rightarrow H_{01} = \sqrt{\varepsilon_1} \cdot E_{01}$; $H_{02} = \sqrt{\varepsilon_1} \cdot E_{02}$; $H_{03} = \sqrt{\varepsilon_2} \cdot E_{03}$ (4')

З (4) $\Rightarrow$ $\begin{cases} E_{01} + E_{02} = E_{03} \\ \sqrt{\varepsilon_1} \cdot E_{01} - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot E_{02} = \sqrt{\varepsilon_2} \cdot E_{03} \end{cases}$ (5)

зв. (4') $\rightarrow$

$$E_{01} - E_{02} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \cdot E_{03} \equiv \frac{n_2}{n_1} \cdot E_{03} \qquad (5').$$

$\Rightarrow 2E_{01} = E_{03}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)$; $\boxed{E_{03} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \cdot E_{01}}$ (6)

(6) $\rightarrow$ в I рівн. системи (5):

$$E_{01} + E_{02} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_{01} \Rightarrow \boxed{E_{01} \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = E_{02}} \quad (7)$$

Аналіз (7): 1) При $n_1 < n_2$ $E_{01} = -E_{02}$ ..., тобто відбувається втрата напівхвилі, або зсув фази відбитої хвилі на π. Вектори $\vec{H}_1$ та $\vec{H}_2$ коливаються при цьому синфазно.

2) При $n_1 > n_2$ знаки E_{01} та E_{02} співпадають. На границі двох діелектриків вектори $\vec{E}_1$ та $\vec{E}_2$ коливаються синфазно, а фази $\vec{H}_1$ та $\vec{H}_2$ відрізняються на π.

3) Для хвилі, що пройшла, амплітуда $\vec{E}_{03}$ завжди співпадає по знаку з ампл. $\vec{E}_{01}$. Тобто вектори $\vec{E}_{03}$ завжди сонаправлені вектору $\vec{E}_{01}$. Те * стосується і $\vec{H}_{03}$ та $\vec{H}_{01}$.

Введемо енерг. коеф. відбиття (R) і коеф. пропускання (T):

$$R = \frac{\text{сер. потік ен. відб. хв.}}{\text{сер. потік ен. пад. хв}} = \frac{\left\langle \frac{c}{4\pi} E_2 H_2 \right\rangle}{\left\langle \frac{c}{4\pi} E_1 \cdot H_1 \right\rangle} = \frac{J_{\text{відб}}}{J_{\text{пад}}}$$

$$T = \frac{\text{середн. потік ен. прох. хв.}}{\text{середн. потік ен. пад. хв}} = \frac{\left\langle \frac{c}{4\pi} E_3 \cdot H_3 \right\rangle}{\left\langle \frac{c}{4\pi} E_1 \cdot H_1 \right\rangle} = \frac{J_{\text{прош.}}}{J_{\text{пад.}}}$$

використовуючи (6) та (7):

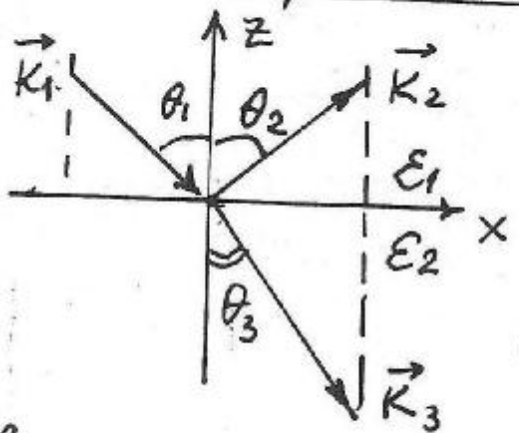
$$R = \frac{E_{02}^2}{E_{01}^2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

$$T = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{E_{03}^2}{E_{01}^2} = \frac{4 n_1 \cdot n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

для нормального падіння світла на межу двох діелектриків

Можна перевірити, що $R + T = 1$

Закон відбиття та закон заломлення (доведення)



пад. $\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \exp i(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})$

відб. $\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \exp i(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r})$

зал: $\vec{E}_3 = \vec{E}_{03} \exp i(\omega t - \vec{k}_3 \vec{r})$

Граничні умови: $E_{1t} + E_{2t} = E_{3t}$

в площині розділу двох середовищ $\Rightarrow$

$$\vec{E}_{01t} \exp i(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}) + \vec{E}_{02t} \exp i(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r}) = \vec{E}_{03t} \cdot \exp i(\omega t - \vec{k}_3 \cdot \vec{r}) \quad (1)$$

50 50

де $\vec{E}_{0i,t}$ – амплітуда $\overset{tg\text{-складові}}{\sqrt{}}$ (сталі величини)

Умова (1) повинна виконуватись в будь-який момент часу t та для всіх точок $\vec{r}$, які лежать на межі розділу. Звідси витікає, що

(2) $\begin{cases} \omega t - k_1\vec{r} = \omega t - \vec{k}_2\vec{r} = \omega t - \vec{k}_3\vec{r}, \text{ а також} \\ \vec{k}_1\vec{r} = \vec{k}_2\vec{r} = \vec{k}_3\vec{r} \text{ або в декарт. СК:} \end{cases}$

(3) $k_{1x}\cdot x + k_{1y}\cdot y + k_{1z}\cdot z = k_{2x}x + k_{2y}y + k_{2z}z =$

$(k_{1x} = \vec{k}_{1x}\cdot\vec{i})$ $= k_{3x}\cdot x + k_{3y}\cdot y + k_{3z}\cdot z$

1) Остання умова повинна виконуватись для будь-яких x та y

2) $z = 0$ (на межі розділу)

Тому: 1) Для $x = 0$ $\quad k_{1y} = k_{2y} = k_{3y}$ (4)

2) Для $y = 0$ $\quad k_{1x} = k_{2x} = k_{3x}$ (5)

1. З (4) та (5) $\Rightarrow$ хвильові вектори відбитої та заломленої хвиль $\vec{k}_2$ та $\vec{k}_3$ лежать в площині падіння (в пл., в якій лежать $\vec{k}_1$ та $\vec{n}$).

Таким чином: всі 4 вектори: $\vec{n}$, $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$, $\vec{k}_3$ лежать в одній площині (компланарні).

2. Направимо вісь x вздовж границі розділу так, щоб пл. xz співпадала із пл. падіння. Тоді

$k_{1y} = k_{2y} = k_{3y} = 0$; $\quad k_{1x} = k_{2x} = k_{3x}$, (6)

де $k_{1x} = k_1\cdot\sin\theta_1$; $\quad k_{2x} = k_2\sin\theta_2$; $\quad k_{3x} = k_3\sin\theta_3$ (7)

$k_1 = \frac{\omega}{c}n_1 \qquad k_2 = \frac{\omega}{c}n_1 \qquad k_3 = \frac{\omega}{c}\cdot n_2$ (8)

$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$; $\quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$. З (7), (8) $\rightarrow$ (6): $\boxed{\theta_1 = \theta_2}$ (9)

Закон відбиття

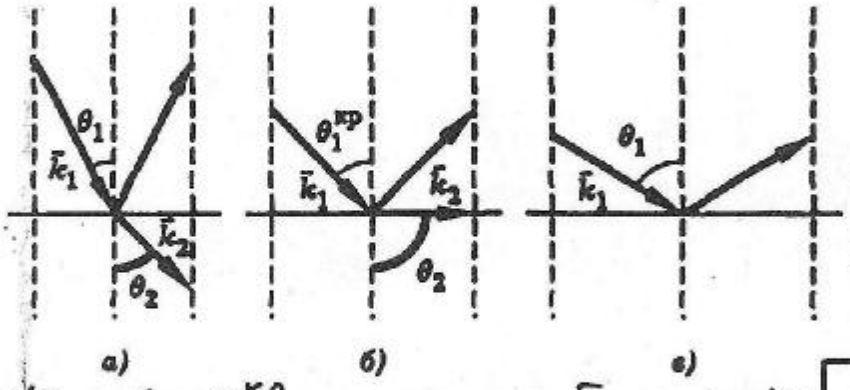
50 50

3. Якщо обидва середовища прозорі, то n_1, n_2 – дійсні. 5а

(7), (8) → (6): $\frac{\omega}{c} n_1 \cdot \sin\theta_1 = \frac{\omega}{c} n_2 \sin\theta_2$

закон Снелліуса

Повне внутрішнє відбиття



$n_1 > n_2$ (!)

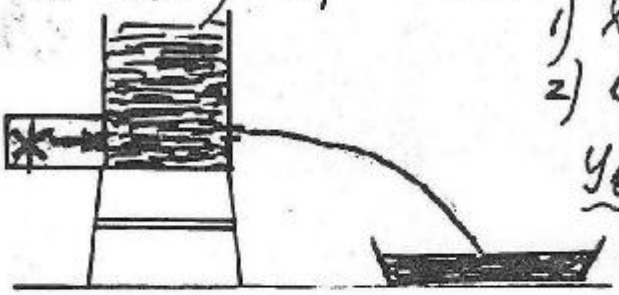
$\theta_2 > \theta_1$ – це випливає із закону Снелліуса $n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

Якщо $\theta_2 = 90°$ ($\sin\theta_2 = 1$), то

$$\theta_1^{кр} = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$$

При $\theta_1 = \theta_1^{кр}$ заломлений промінь не заходить в II середовище, а розповсюджується вздовж границі поділу (рис. б).

Ефект повного внутрішнього відбиття, $\theta_1^{кр}$ – граничний кут ПВВ. На границі скло-повітря ($n_1 = 1.5$; $n_2 = 1.0$) $\theta_1^{кр} \cong 42°$.



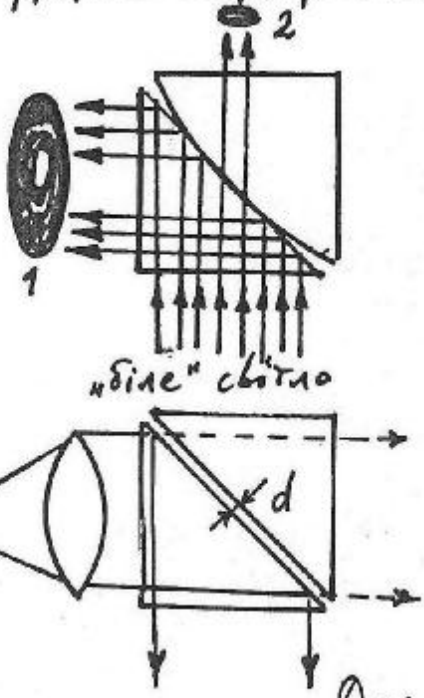
1) Демонстрація прояву ПВВ (див. рис.).
2) Оптичне волокно.

Увага!: Промінь сковзає вздовж межі розділу лише при $\theta_1 = \theta_1^{кр}$ (рис. б). При $\theta_1 > \theta_1^{кр}$ є тільки 2 промені: падаючий та відбитий (рис. в)

3) Ефектом ПВВ пояснюється відбиття радіохвиль від іоносфери. На висоті 100–300 км існує іонізований шар атмосфери, від якого відбиваються ЕМХ з $\lambda > 10$ м. Більш короткі хвилі проходять. В іоносфері $v_{ф} > c$. Із збільшенням висоти зменшується пок. зал. п. Дальня радіопередача.

Ефект порушення ПВВ при $\theta > \theta^{кр}$.

(Ефект проникнення, „просочування" світла в друге середовище при ПВВ)



Експеримент N1:

В одній із призм зрізаються (зточуються, зішліфовуються) кути.

1 - має синій колір, 2 - червоний.

„Просочується" світло із великою λ.

Експеримент N2:

При зазорах між поверхнями призм $d \leq \lambda$ світло „просочується".

Можна використати для модуляції.

Для проміжку „повітря-скло" $\theta^{кр} \approx 42$ світла

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = n_{21} \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{\sin\theta_1}{n_{21}} \qquad n_{21} < 1.$$

Це означає, що при $\theta_1 \uparrow$ колись $\sin\theta_2$ стане ≥ 1 ?!?

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \pm\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_1}{n_{21}^2}} = \pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n_{21}^2}-1} =$$

$$= \pm j\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n_{21}^2}-1} \qquad k_z = k\cdot\cos\theta_2$$

Хвиля, що „просочується", описується виразом:

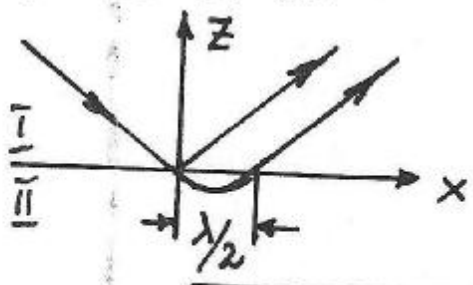
$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \exp\left(\pm jk\cos\theta_2 \cdot z\right)\cdot\exp j(\omega t - k_x\cdot x) =$$

$$= \underbrace{\mathcal{D}_0 e^{\pm jkz\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n_{21}^2}-1}}}_{\text{Амплітуда.}} \cdot e^{j(\omega t - k_x\cdot x)}$$

Хвиля з такою амплітудою неоднорідна. Знак „+" не має фіз. сенсу, бо означає нескінченне збільшення амплітуди хвилі в II середовищі. Знак „-" відповідає хвилі, яка швидко затухає по мірі проникнення в II середовище.

53

Практично ця неоднорідна хвиля існує лише 5б в приповерхневому шарі II середовища, товщина якого ~ λ.



Частина енергії, яка попадає в II середовище, потім з неї виходить.

Оцінимо глибину проникнення:

$k \cdot z \sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n_{21}^2} - 1} = 1$ — умова зменшення ампл. в e раз.

Із врахуванням того, що $k = 2\pi/\lambda$

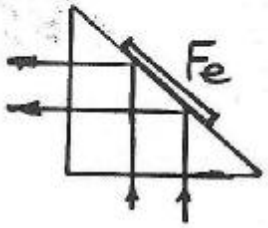
$$z = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n_{21}^2} - 1}}$$

Коли $\lambda \uparrow$, величина $z \uparrow$.

Коли $\sin\theta_1 = n_{21}$ — неробоча обл.

Хвиля біжить вздовж x, амплітуда зменшується вздовж z

Базуючись на ефекті порушення ПВВ, можна навіть вимірювати спектри матеріалів



$n_{21} = n_{21}(\lambda)$.

На порушенні ПВВ базується ближньопольова оптика (див. останню лекцію курсу).

53

Формули Френеля

Яка доля падаючого на границю двох діелектриків світла відбивається? Заломлюється? Чи залежить вона від величини кута падіння і поляризації падаючого світла?

Відповідь дають формули Френеля.

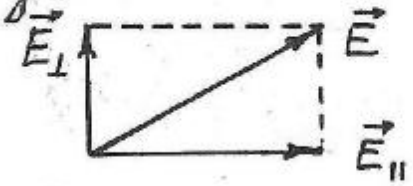
Розрахунок формул Френеля базується на:
1) врахуванні граничних умов;
2) зв'язку між полями $\vec{E}$ та $\vec{H}$ в світловій хвилі, який витікає із рівнянь Максвелла.

Індекси верхні: i - падаюча, r - відбита, d - та, що пройшла

Хвилі - плоскі і монохроматичні.

Середовища - лінійні, ізотропні і х-уються $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

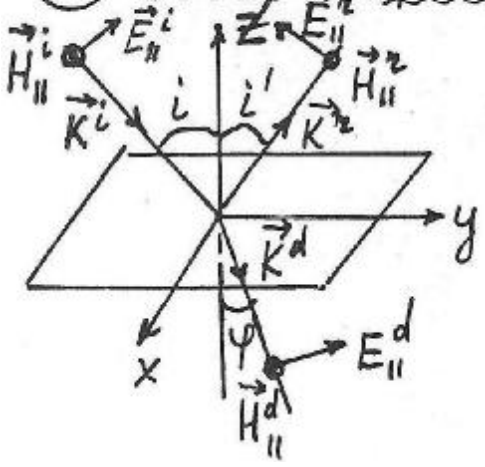
Хвилю з довільним станом поляризації можна представити у вигляді суперпозиції двох лінійно поляризованих хвиль $\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel$



Позначення: $E_\parallel$, або E_p - в пл. падіння
в напрямку $\perp$ пл. падіння: $E_\perp$, або E_s.

Розглянемо окремо випадки: „p" (або ∥) компоненти та „S" (або ⊥) компоненти.

(I) випадок „p" компоненти (вектор $\vec{E}$ в пл. падіння).



Умова збереження тангенц. складових ел.м. хвилі на границі поділу (граничні умови): для амплітуд для $z = 0$

$$\begin{cases} \vec{H}^i_\parallel + \vec{H}^r_\parallel = \vec{H}^d_\parallel & (1) \\ \vec{E}^i_\parallel - \vec{E}^r_\parallel = \vec{E}^d_\parallel & (2) \end{cases}$$

Раніше було встановлено зв'язок між $\vec{E}$ та $\vec{H}$: *

$$H_{\parallel}^{i} = n_1 E_{\parallel}^{i}; \quad H_{\parallel}^{r} = n_1 \cdot E_{\parallel}^{r}; \quad H_{\parallel}^{d} = n_2 \cdot E_{\parallel}^{d} \qquad (3)$$

$(3) \to (1)$: $n_1 \cdot E_{\parallel}^{i} + n_1 \cdot E_{\parallel}^{r} = n_2 E_{\parallel}^{d}$

$$E_{\parallel}^{i} + E_{\parallel}^{r} = \frac{n_2}{n_1} E_{\parallel}^{d} = \frac{\sin i}{\sin \varphi} \cdot E_{\parallel}^{d} \qquad (4)$$

З (2) $\Rightarrow$ $E_{\parallel}^{i} \cdot \cos i - E_{\parallel}^{r} \cos i' = E_{\parallel}^{d} \cdot \cos \varphi$ (5)

(4) + (5) та враховуючи, що $i = i'$:

$$2E_{\parallel}^{i} = E_{\parallel}^{d} \left(\frac{\sin i}{\sin \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\cos i} \right) = E_{\parallel}^{d} \left(\frac{\cos i \cdot \sin i + \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\sin \varphi \cdot \cos i} \right)$$

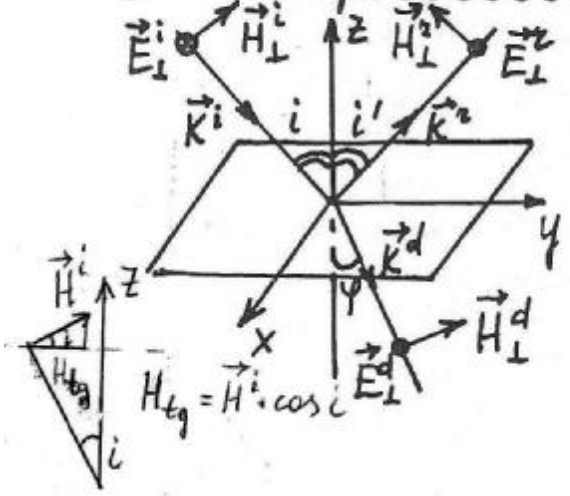
$$= E_{\parallel}^{d} \left(\frac{\sin 2\varphi + \sin 2i}{2 \sin \varphi \cdot \cos i} \right)$$

$$\boxed{E_{\parallel}^{d} = \frac{2 \cos i \cdot \sin \varphi}{\sin(i+\varphi) \cdot \cos(i-\varphi)} \cdot E_{\parallel}^{i}}$$ Перша формула Френеля

$(4) : (5) \Rightarrow \dfrac{E_{\parallel}^{i} + E_{\parallel}^{r}}{E_{\parallel}^{i} - E_{\parallel}^{r}} = \dfrac{\sin i \cdot \cos i}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi} = \dfrac{\sin 2i}{\sin 2\varphi}$

$$\boxed{E_{\parallel}^{r} = \frac{\sin 2i - \sin 2\varphi}{\sin 2i + \sin 2\varphi} \cdot E_{\parallel}^{i} = \frac{tg(i-\varphi)}{tg(i+\varphi)} \cdot E_{\parallel}^{i}}$$ II формула Френеля

(II) Випадок „S" компоненти ($\vec{E} \perp$ пл. падіння)



Граничні умови:

$$\begin{cases} \vec{E}_{\perp}^{i} + \vec{E}_{\perp}^{r} = \vec{E}_{\perp}^{d} & (6) \\ \vec{H}_{\perp}^{i} - \vec{H}_{\perp}^{r} = \vec{H}_{\perp}^{d} & (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{\perp}^{i} = n_1 \cdot E_{\perp}^{i}; \quad H_{\perp}^{r} = n_1 \cdot E_{\perp}^{r} \\ H_{\perp}^{d} = n_2 \cdot E_{\perp}^{d} \end{cases} \qquad (8)$$

$$(6) \Rightarrow \begin{cases} E_\perp^i + E_\perp^r = E_\perp^d & (9) \\ (7) \Rightarrow \end{cases}$$

$$H_\perp^i \cdot \cos i - H_\perp^r \cdot \cos i' = H_\perp^d \cos\varphi \quad (10)$$

(10) із врахуванням (8) та того, що $i' = i$:

$$n_1 E_\perp^i \cdot \cos i - n_1 E_\perp^r \cos i = n_2 \cdot E_\perp^d \cos\varphi$$

$$E_\perp^i - E_\perp^r = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos i} \cdot E_\perp^d \equiv \frac{\sin i}{\sin\varphi} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos i} E_\perp^d \quad (11)$$

(9) + (11):

$$2E_\perp^i = E_\perp^d \left(1 + \frac{\sin i \cdot \cos\varphi}{\sin\varphi \cdot \cos i}\right)$$

$$\boxed{E_\perp^d = \frac{2\sin\varphi \cdot \cos i}{\sin\varphi \cdot \cos i + \sin i \cdot \cos\varphi} E_\perp^i = \frac{2\sin\varphi \cdot \cos i}{\sin(i+\varphi)} \cdot E_\perp^i}$$ III формула Френеля

$$(6) : (11) \Rightarrow \frac{E_\perp^i + E_\perp^r}{E_\perp^i - E_\perp^r} = \frac{\sin\varphi \cdot \cos i}{\sin i \cdot \cos\varphi}$$

$$\boxed{E_\perp^r = -\frac{\sin(i-\varphi)}{\sin(i+\varphi)} \cdot E_\perp^i}$$ IV формула Френеля

Аналіз формул Френеля

1. Формули Фр. нами отримані для амплітуд. Для енергетичного опису явищ на границі поділу (по інтенс.) вводять коеф. відбиття (R) та коеф. пропускання (T):

$$R = \left(\frac{E^r}{E^i}\right)^2; \qquad T = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E^d}{E^i}\right)^2$$

2. Якщо $E_\perp^r \neq E_\parallel^r$, то світло (частково) поляризоване.

$$\frac{|E_\perp^r|}{|E_\parallel^r|} = \frac{\cos(i-\varphi)}{\cos(i+\varphi)} > 1 \Rightarrow E_\perp^r > E_\parallel^r$$

Відбите світло - частково поляризоване з переважно напрямленим вектором поляризації в „S" компоненті.

3. Якщо $E_\perp^i = E_\parallel^i$, то світло природне.
В природному світлі $J_\perp^i = J_\parallel^i = \frac{1}{2} J_0$

4. Ступінь поляризації $P = \frac{J_\perp - J_\parallel}{J_\perp + J_\parallel}$

II форм. Френ.: $E_\parallel^r = \frac{tg(i-\varphi)}{tg(i+\varphi)} \cdot E_\parallel^i$ ⇒

5. Якщо $i+\varphi = \frac{\pi}{2}$, то з (II): $tg\,\pi/2 \to \infty \Rightarrow$ $E_\parallel^r = 0 \Rightarrow$ після відбиття світло повністю поляризоване

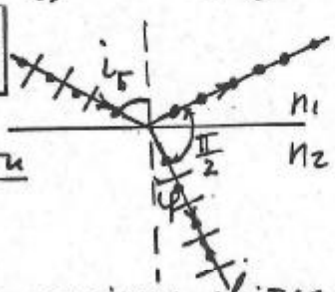
Кут падіння (i), для якого виконується умова $i+\varphi = \frac{\pi}{2}$, наз. кутом Брюстера ($i_Б$).

з іншого боку

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i}{\sin\varphi} = \frac{\sin i_Б}{\sin(\frac{\pi}{2} - i_Б)} = \frac{\sin i_Б}{\cos i_Б} = tg\, i_Б \overset{k}{=} \frac{n_2}{n_1}$$

$$\boxed{i_Б = arc\,tg\,\frac{n_2}{n_1}}$$

Для $i_Б$ відбитий та заломлений кути ортогональні



Для переходу повітря-скло ($n = 1.5$) кут $i_Б \approx 57°$

Для $n_2 > n_1 \Rightarrow i_{Б-1}$
$i_{кр}$ – не існує!
Для $n_2 < n_1 \Rightarrow i_{Б-2}$
$i_{Б-1} \neq i_{Б-2}$
$i^{кр} > i_{Б-2}$
$i_{Б-1} > i_{Б-2}$
Дайте три (!) визначення кута Брюстера

6. Для нормального падіння світла на границю поділу двох середовищ $i = i' = 0$. Кут $\varphi = 0$ також.

$$E_\perp^r = E_\parallel^r = -\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E^i$$

У формулах Френеля невизначеність!

7. Якщо $i \to \frac{\pi}{2}$, то $(E_\perp^r$ та $E_\parallel^r) \to E_\perp^i$ та $E_\parallel^i$.

8. За допомогою формул Френеля можна обчислити R та T.

$$R_\perp = \left(\frac{E_\perp^r}{E_\perp^i}\right)^2 = \frac{\sin^2(i-\varphi)}{\sin^2(i+\varphi)}$$ Коеф. відбиття для „s" компоненти

$$R_\parallel = \left(\frac{E_\parallel^r}{E_\parallel^i}\right)^2 = \frac{tg^2(i-\varphi)}{tg^2(i+\varphi)}$$ Коеф. відбиття для „p" компоненти світла

$$T_\perp = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E_\perp^d}{E_\perp^i}\right)^2; \quad T_\parallel = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E_\parallel^d}{E_\parallel^i}\right)^2$$ Коеф. пропускання для „s" та „p"

Можна показати (див. Іродов, №5.180), що у випадку $i = i_Б$ величина коеф. відб. R для природного світла дорівнює: $R = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2$

1) якщо $n_{сер} = 1$ – повітря
2) враховано, що $R = \frac{1}{2} R_s$ для кута Брюстера

Для природного світла:

$$R = \frac{(E_\perp^r)^2 + (E_\parallel^r)^2}{(E_\perp^i)^2 + (E_\parallel^i)^2} \overset{E_\perp = E_\parallel}{=} \dots = \frac{1}{2}(R_\perp + R_\parallel) = R$$

9. Можна ввести кут $\alpha_i = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{E_\perp^i}{E_\parallel^i}\right)$

$$\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{E_\perp^i}{E_\parallel^i}$$ де α_i – азимут падаючого світла

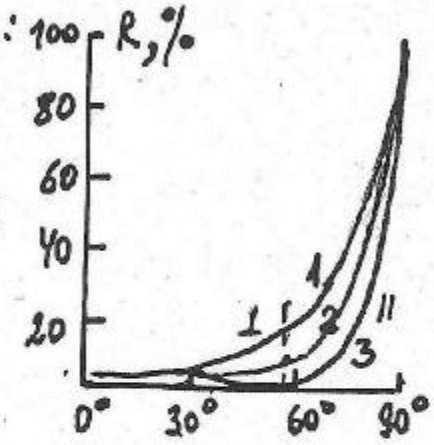
$\alpha_i = 0$: $\vec{E} \parallel$ пл. падіння $\Rightarrow E_\perp = 0 \Rightarrow$ Існує лише „p" компонента

$\alpha_i = \frac{\pi}{2}$: $\vec{E} \perp$ пл. падіння $\Rightarrow E_\parallel = 0 \Rightarrow$ Існує лише „S" компонента

$\alpha_i = \frac{\pi}{4}$: $E_\perp = E_\parallel$ Фріш, Тиморєва ... с. 144

При відбитті лінійно поляризованого світла з азимутом $\alpha_i \neq 0$ відбувається поворот вектора поляризації: Азимут змінюється! При куті падіння, наприклад, $i = 30°$ і азимуті $\alpha_i = 45°$ існує поворот $\vec{E}$ на 12°.

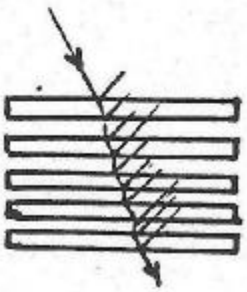
10. Графік залежності R від i:



1 – „S" компонента ($R_\perp$)
2 – природне світло
3 – „p" компонента ($R_\parallel$)

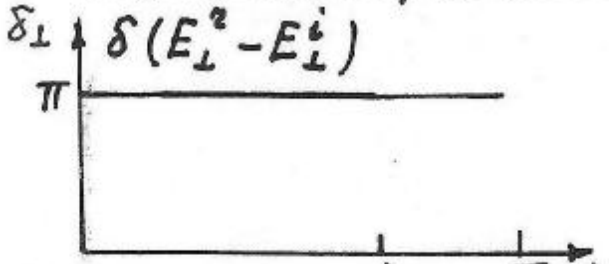
На всій кривій виконується $\rightarrow R_\perp + R_\parallel = 2R$

12. Стопа Столєтова



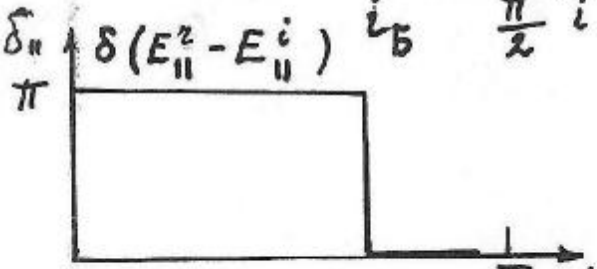
На стопу падає природне світло.
Із стопи виходить частково поляриз. світло
Ідеальний поляризатор ($p = 100\%$) при $n = \infty$. Для $n = 8-10$: $p \sim 44\%$
n – кількість пластин в стопі.

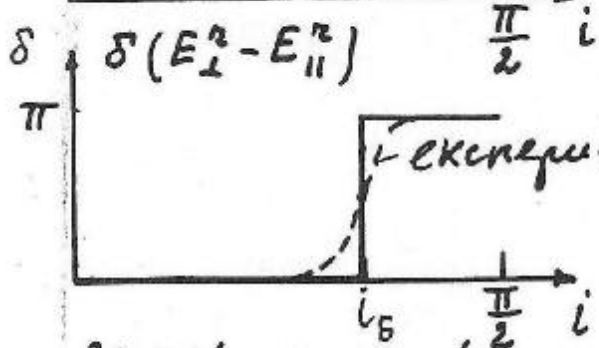
Фазові співвідношення у відбитому та заломленому світлі



$n_1 < n_2 \Rightarrow i > \varphi$

Знак „−", наприклад, в IV формулі Френеля каже про зсув між фазами падаючої та відбитої хвилі на π





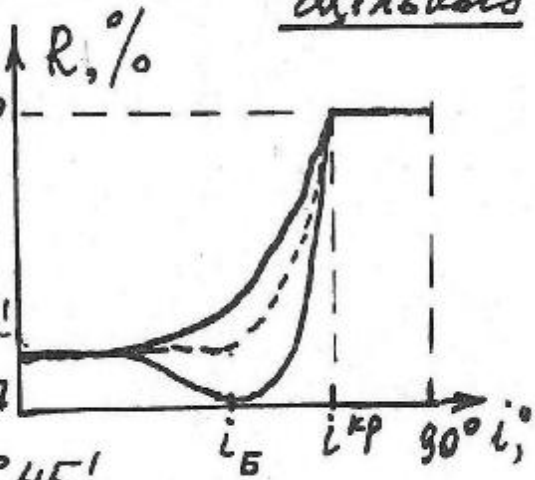
$\delta = \delta_\perp - \delta_\parallel$

← експерим. – див. Білий ... с. 230

Відбивання світла від середовища менш оптично щільного

$n_2 < n_1 \Rightarrow i < \varphi$

Вже розглядали ефект ПВВ з $i^{кр}$ та ефект Брюстера з $i_Б$



$\sin i^{кр} = n_{21}$

$tg\, i_Б = n_{21}$

Для скла – повітря:

$n_{21} = 0.6667$

$\sin i^{кр} = \frac{1}{1.5} = 0.6667$

$i_Б = 33°45'$

$i^{кр} = 42°$; (1) $tg\,\frac{\delta_\parallel - \delta_\perp}{2} = \frac{\cos i\sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{\sin^2 i}$

Позначення:

$\delta_\parallel = \delta(E_\parallel^r - E_\parallel^i)$; $\delta_\perp = \delta(E_\perp^r - E_\perp^i)$; $\delta_\parallel - \delta_\perp = \delta$

Продиференц. (1) по i та прирівняємо $\frac{\partial}{\partial i}\left(tg\,\frac{\delta}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow$ одержимо умову виникнення так різних фаз:

$$\cos i_{max} = \sqrt{\frac{1-n_{21}^2}{1+n_{21}^2}} \quad \text{або} \quad \sin i_{max} = \sqrt{\frac{2n_{21}^2}{1+n_{21}^2}} \qquad (2)$$

(2) → (1):

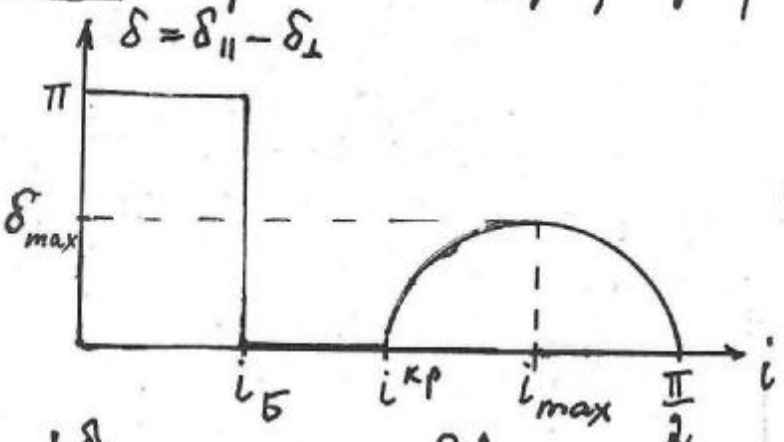
$$tg\,\frac{\delta_{max}}{2} = \frac{1-n_{21}^2}{2n_{21}} \qquad (3)$$

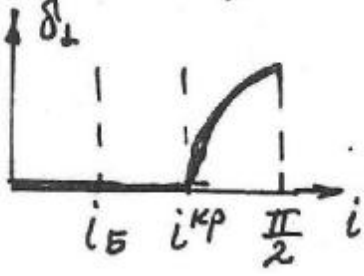
Формула (2) – для знаходження i_{max} по n_{21};
формула (3) – для знаходження δ_{max} по n_{21}.

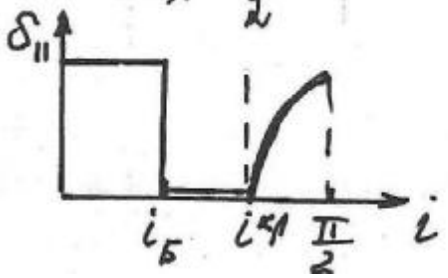
Чим більша різниця в показниках заломлення (чим менше їх відношення $n_{21} = n_2/n_1$), тим більше різниця фаз між двома коливаннями ($\delta = \delta_n - \delta_\perp$).

Для отримання циркулярної поляризації, для якої потрібно, щоб $\delta_{max} = \pi/2$ і $tg\,\frac{\delta_{max}}{2} = 1$, різниця в n повинна бути дуже великою. Із умови $(1-n_{21}^2)/2n_{21} = 1$ знаходимо, що $n_{21} \approx 0.4$. Це досягається лише для {алмаза / діамантa} (в окт. діапазоні):
$n_1 = 2.4$; $n_2 = 1.0$ $\Rightarrow$ $1/2.4 \approx 0.4$

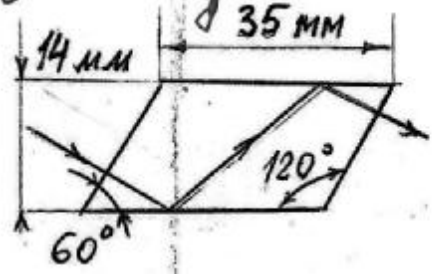
Для границі скло-повітря $i_{max} \approx 51°$ (із (2)) і при одноразовому проходженні світла через межу ніяк отримати циркулярну поляризацію не можна.







Величина $\delta = \delta_\parallel - \delta_\perp$ обертається в нуль двічі:
1) при $i_Б < i < i^{кр}$
2) при $i = \frac{\pi}{2}$ (ковзаюче падіння світла)



Класична теорія ел.м. випромінювання

Модель лінійного гармонічного осцилятора (електричного диполя): ізольований атом у вакуумі ($\varepsilon = \mu = 1$; $v = c$). Осцилює електрон, ядро - нерухоме.

Рівняння руху електрона: $m\ddot{\vec{r}} = \alpha \vec{r}$ (α-коеф. квазіпружн.)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{i\omega_0 t}, \text{ де } \omega_0^2 = \frac{\alpha}{m} \quad (1)$$

Зміщення ел-на створює дип. мом. $\vec{p}(t) = q \cdot \vec{r}(t)$

Диполь Герца є джерелом сферичн. ел.м. хвилі, вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ якої на великій відстані від джерела, в так званій хвильовій зоні, рівні по величині і взаємно перпендикулярні.

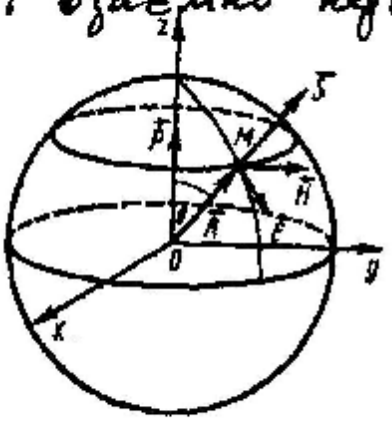


Рис. 1

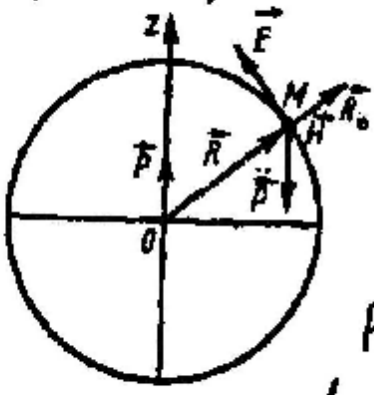


Рис. 2

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \sin \omega t \quad (2)$$

$$\ddot{\vec{p}}(t) = -\omega^2 \vec{p}_0 \sin \omega t \quad (3)$$

Вектори $\vec{p}$ та $\ddot{\vec{p}}$ протилежні за напрямом.

Радіус-вектор $\vec{R}$, проведений з початку СК в точку спостереження т. M, складає кут θ з напрямом $\vec{p}$ (рис. 1).

Розв'язуючи хвильове рівняння для хвильової зони, можна отримати, що

$$\vec{H}(t) = \frac{1}{c^2 R}\left[\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R}{c}\right) \times \vec{R}_0\right] \quad (4)$$

$$\vec{E}(t) = \left[\vec{H}(t) \times \vec{R}_0\right] \quad (5) \quad \text{де } \vec{R}_0 = \frac{\vec{R}}{|R|} - \text{одиничний вектор по напрямку } \vec{R}$$

Аргумент $\left(t - \frac{R}{c}\right)$ при $\ddot{\vec{p}}$, обумовлений кінцевою величиною швидкості розповсюдження ел.м.хв. (хвиля в т. M в момент часу t визначається значенням в більш ранній момент часу).

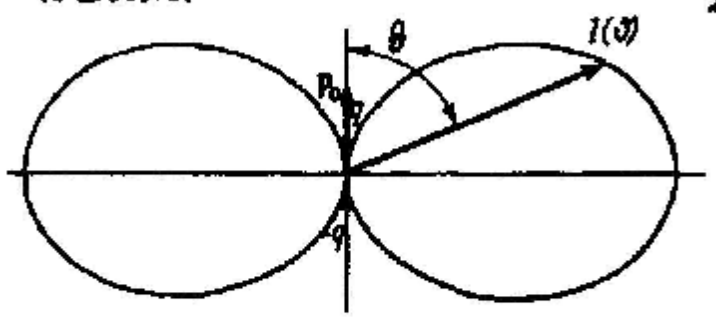
$$|\vec{E}| = |\vec{H}| = \frac{|\ddot{\vec{p}}(t - R/c)|}{c^2 R} \cdot \sin\theta \qquad (A)$$

Проаналізуємо (A):

1) При $\theta = 0$ (вздовж $\vec{p}$) $H = E = 0$: диполь не випромінює ел.м. енергію в напрямку своєї осі;

2) При $\theta = \pi/2$ $E = E_{max}$: max випромінювання відбувається в напрямку $\perp$ до осі диполя.

3) При $\theta = const$ $E = H \sim \frac{1}{R}$: випромінюється сферична хв. хвиля



4) $E \sim \frac{1}{R} \Rightarrow$ в обл. хвильової зони можна позбавитись від впливу $E_{стат} \sim \frac{q}{R^3}$ і можна його не враховувати.

Інтенсивність випромінювання

Вектор Умова–Пойнтінга

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} E^2 = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2\theta = \frac{q^2 \cdot \ddot{r}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2\theta \qquad (6)$$

Величина S визначає лінійне значення потоку ел.м. енергії в напрямку θ. Потік ен. за од. часу по всім напрямам $J = \int S \cdot d\sigma$. Інтегруємо по замкненій поверхні, яка оточує осцилятор.

В сфер. системі коорд. $d\sigma = R^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$

$$J = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \cdot d\theta = \frac{\ddot{p}^2}{2c^3} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta) \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \boxed{\frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} = J} \quad (7) \xrightarrow{\vec{p} = q \cdot \vec{r}} \boxed{J = \frac{2q^2 \cdot \ddot{r}^2}{3c^3}} \quad (8)$$

Квітлові хвилі випромінюються при прискореному русі заряду

Частота світл. коливань $\nu = 10^{14} \div 10^{15} c^{-1}$. Око реагує на усереднене по часу T значення енергії

$$\langle J \rangle = \frac{2}{3c^3}\langle \ddot{p}^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T J\,dt = \frac{2\omega_0^4 p_0^2}{3c^3}\underbrace{\langle \cos^2 \omega_0 t \rangle}_{=1/2} =$$

$p = p_0 \cos \omega_0 t$

$$= \boxed{\frac{\omega_0^4}{3c^3} p_0^2 = \langle J \rangle} \quad (9)$$

$\langle J \rangle$ - сер. енергія, або інтенсивн. випр.

$\langle J \rangle \sim \omega_0^4$ або $\langle J \rangle \sim \frac{1}{\lambda_0^4}$ (як і в релеєвськ. розсіюв.

Добротність випромінювання

Осцилятор - загухаючий. Розглянута вище теорія (не враховували загухання!) правильна, якщо взяти ен. за рахунок випромінювання при великому числі коливань складає малу долю середньої ен. осцилятора. Покажемо це.

$$\overline{W_{повн}} = \overline{W^n} + \overline{W^k} = \frac{\overline{\alpha r^2}}{2} + \frac{\overline{m\dot{r}^2}}{2}$$

Для гармон. ос.: сер. кін. ен. = сер. пот. ен. (див. „Коливання").

$$\frac{\overline{\alpha r^2}}{2} = \frac{\overline{m\dot{r}^2}}{2}$$

$$\overline{W_{повн}} = \overline{\alpha r^2} = \overline{m\dot{r}^2} = \frac{m\omega_0^2}{2} r_{max}^2 = \frac{m\omega_0^2}{2q^2} \cdot p_0^2 \quad (10)$$

де $p_0 = q \cdot r_{max}$.

Ен., що випром. за період: $W_{випр} = \langle J \rangle \cdot T = \frac{\omega_0^4 p_0^2}{3c^3} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi\omega_0^3 p_0^2}{3c^3} = W_{випр.}$ (11)

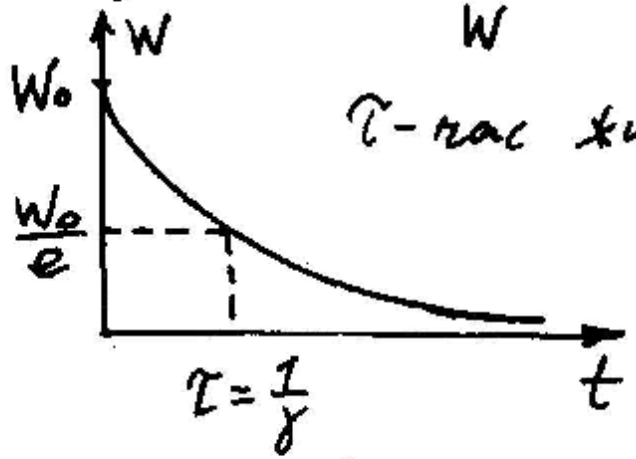
$$Q = 2\pi \frac{\overline{W_{повн.}}}{W_{випр}} = 2\pi \frac{m\omega_0^2 p_0^2}{2q^2 \cdot 2\pi\omega_0^3 \cdot p_0^2} \cdot 3c^3 = \frac{3mc^3}{2q^2\omega_0} \quad (12)$$

Для $\nu = 10^{15} c^{-1} \Rightarrow Q = 10^7$ — дуже багато: можна брати середнє значення для великої кількості коливань. Це середнє значення ен. повільно змінюється із часом. „Повільно" — порівняно із яким часом?:

Тривалість випромінювання осцилятора

$$\frac{dW}{dt} = -\langle \gamma \rangle \overset{i3(9)}{=} -\frac{\omega_0^4}{3c^3} p_0^2 \overset{i3(11)}{=} \frac{2\omega_0^2 q^2}{3mc^3} \cdot W_{випр}$$

Позначимо $\frac{dW}{W} = -\gamma dt \Rightarrow W = W_0 e^{-\gamma t}$ (13)



τ - час життя осцилятора

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{3mc^3}{2\omega_0^2 q^2}$$

Для $\lambda = 500$ нм; $\omega_0 = 4 \cdot 10^{15} c^{-1}$ і для електрона $m = 9 \cdot 10^{-28}$ г; $\left(\frac{q}{mc}\right) = 1.76 \cdot 10^7$

$\tau \sim 10^{-8}$ с. За цей час осцилятор здійснює n коливань. n - ?

$\tau = \frac{1}{\gamma}$ (γ - декр. загух.); логар. дек. загух - δ

$\delta = \gamma \cdot T = \gamma \cdot \frac{2\pi}{\omega}$; $n = \frac{1}{\delta} = \frac{\omega}{2\pi\gamma} \sim 10^7$

65 65

Фізика взаємодії світла із речовиною.
(Класична осциляторна модель середовища)

Світло заставляє коливатись електрони в атомі → віддаючи свою енергію, світло поглинається → однак заряди, що коливаються, самі стають джерелами вторинних світлових хвиль → світлове поле в середовищі формується в результаті інтерференції падаючого випромінювання і вторинних світлових хвиль.

Середовище веде себе як суцільна речовина.

Класифікація середовищ.

1. Середовище без дисперсії: залежність $\vec{P}(\vec{E})$ є локальна та безінерційна, тобто значення поляризації середовища в деякій точці простору і в деякий момент часу визначається значенням поля $\vec{E}$ в тій же самій точці і в той же момент.
2. Середовище з просторовою дисперсією: нелокальність відгуку: $D = \varepsilon(k) \cdot E$
3. Часова (або частотна) дисперсія: інерційність відгуку, тобто запізнювання $\vec{P}$ відносно $\vec{E}$. $\Rightarrow \varepsilon(\omega)$
4. Лінійне середовище: $\vec{P} = \hat{L}(\vec{E})$, де $\hat{L}$ - лінійний оператор.
5. Нелінійне середовище: $\vec{P} = \hat{NL}(\vec{E})$, де $\hat{NL}$ - нелінійний оператор
6. Ізотропне середовище: $\vec{P} \parallel \vec{E}$
7. Анізотропне середовище: $\vec{P} \nparallel \vec{E}$

Властивості середовища (дисперсія, лінійність ізотропність) не пов'язані між собою

65 65

66 66

Будемо розглядати ізотропне, лінійне середовище.

Класична модель атома.



Опт. середовище складається із сукупності гармонічних ел-них осциляторів, які не взаємодіють між собою. (Така ситуація підходить до газу).

Під дією ел. поля хвилі в кожному осциляторі виникає дип. момент $p = r \cdot e$, де r – зміщення ел-на від положення рівноваги.

В од. об'єму є N осциляторів.

Поляризація од. об'єму $P = Np = N \cdot re$

Вважаємо, що всі осцилятори одного типу і мають одну частоту власних коливань. В СГСЕ:

Діел. індукція середовища $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} =$

$= \vec{E} + 4\pi N e \vec{r}$ $\qquad \varepsilon = 1 + \frac{4\pi P}{E} = 1 + 4\pi\beta$

зовн. поле — поле поляризації

β – діелектр. сприйнятл.

У гармон. наближенні діє квазіпружна сила $\vec{F}_1 = -b\vec{r}$, де b – стала пружності,

Коливання є затухаючим ⇒ Сила тертя $\vec{F}_2 = -g\frac{d\vec{r}}{dt}$

де g – коеф. тертя.

На ел-н діє ще зовнішня сила з боку хвилі:

$\vec{F}_3 = e\vec{E}$, де $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\omega t$ (або $\vec{E} = E_0 e^{i\omega t}$).

Рівняння руху електрона: $m\ddot{\vec{r}} = -b\vec{r} - g\dot{\vec{r}} + e\vec{E}$ або:

(1) $\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}$ де $2\gamma = \frac{g}{m}$, γ – коеф. загух.

$\omega_0^2 = \frac{b}{m}$; власна цикул. частота коливань ел-на (

(1) – рівняння вимушених коливань. Розв'язок шукаємо у вигляді $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = i\omega\vec{r}$; $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\vec{r}$

66 66

$$\vec{r} = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \cdot \vec{E}, \quad \text{де } \omega_0^2 = \frac{b}{m}$$

В СІ:

$$\vec{P} = e\vec{r} \cdot N = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \cdot \vec{E}; \qquad \varepsilon = 1 + \frac{P}{E \cdot \varepsilon_0} = 1 + \beta.$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{Ne^2/(m \cdot \varepsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \quad (2) \qquad \varepsilon(\omega)!$$

(2) – вираз для комплексної діел. проникності середовища в моделі Лоренца

Дисперсія і поглинання світла в лінійному ізотропному середовищі

Дисперсія і поглинання світла в лінійному середовищі

в рамках моделі суцільного середовища (моделі Лоренца). Введемо дійсну і уявну частину комплексного показника заломлення середовища $n^* = n' - in''$.

Те ж для хвильового числа $k = k' - ik''$, де параметри $k' = \frac{\omega}{c} \cdot n'$ та $k'' = \frac{\omega}{c} n''$.

n' визначає швидкість розповсюдження хвилі, а n'' – затухання світлової хвилі

Оскільки $n' = n'(\omega)$, а $v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{n'}$, маємо, що v_ϕ залежить від частоти світла. Це явище називається дисперсією.

Враховуючи, що $\varepsilon = (n' - in'')^2$, маємо

$$(n' - in'')^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \quad \Big| * \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega}$$

$$n'^2 - n''^2 - i2n' \cdot n'' = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} - i\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

Поділимо на дійсну (Re) та уявну (Im) частини:

Для спрощення викладок (за формою) позначимо:

$n' \Rightarrow n$; $n'' \Rightarrow \chi$

$$\begin{cases} n^2 - \chi^2 = 1 + \dfrac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \\ 2n\chi = \dfrac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \dfrac{2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \end{cases} \quad (A)$$

Співвідношення (A) визначають показник заломлення (n) та показник поглинання (χ) через частоту світла (ω) і молекулярні параметри речовини N та e/m.

Аналіз (A):

I) Випадок коли $\chi = 0$.

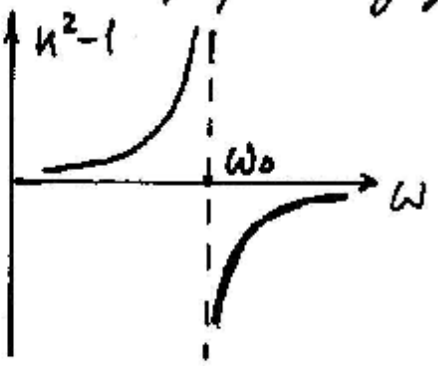
Оскільки загухання (δ) в опт. діапазоні досить мале, за винятком частот $\omega \approx \omega_0$, тобто $\gamma \cdot \omega \ll \omega_0^2 - \omega^2$, будемо вважати, що $\chi = 0$ та $\gamma = 0$. Тоді з (A):

$$n^2 = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \cdot N \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (B)$$ залежність $n(\omega)$ в середов. без загух.

1) При $0 < \omega < \omega_0$ $n > 1$

при $\omega = \omega_0$ $n = \pm\infty$

при $\omega_0 < \omega \leq \infty$ $n < 1$



2) Для випадку $\omega \ll \omega_0$ співвідношення (B) можна розкласти в ряд за степенями ω/ω_0 і обмежитись двома членами ряду. У цьому випадку:

$$n^2 = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2} N \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] \quad (C)$$

Для випадку $\omega \ll \omega_0$ (випадок далекого ІЧ світла або НВЧ діапазону) $n \neq f(\omega) \Rightarrow n = \text{const}$; $n > 1$

Оскільки $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot c$, а $\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot c$, то (с) $\Rightarrow$

$$n^2 = 1 + A\left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right) \quad \text{де } A = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega_0^2};\ B = \frac{4\pi^2 c^2}{\omega_0^2}$$

Це рівняння подібно до співвідношення Коші:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$

Розходження між теорією і експериментом 10–20%

3) При $\omega_0 = 0$ (цей стан характерний для плазми):

$$n^2 = 1 - \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \Big\} n < 1 \ ! \Rightarrow v_\phi > c\ !$$

Якщо $\omega^2 = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}$, то $n = 0 \Rightarrow \boxed{\sqrt{\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}} = \omega_p}$ – плазмова частота

Якщо $\omega^2 > \omega_p$, то $0 < n < 1$ $\left(n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$.

Якщо $\omega^2 < \omega_p$, то $n < 0$ – хвилі відбиваються (ефект відбиття хвиль з $\lambda \sim 1$ м від іоносфери. Для космічного зв'язку на НВЧ)

4) При $\omega \gg \omega_0$ – для рентгенівського діапазону спектру

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}$$

$n < 1$ і мало відрізняється від 1 через велике значення частоти ω.

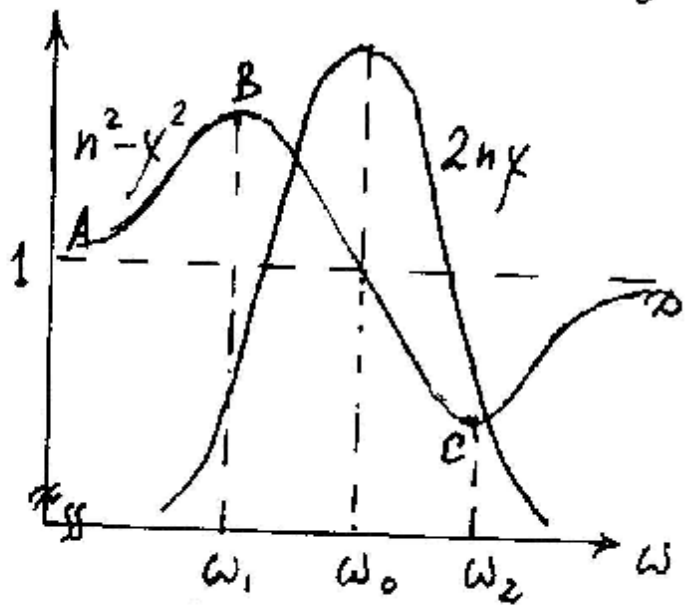
Для скла $n \approx 1$ з точністю до $\pm 10^{-6}$ – мала дисперсія!

Для рентгенівського випромінювання можна здійснити повне внутр. відб. (ПВВ) на межі кордону повітря – тв. тіло при падінні променів з повітря.

(II) Випадок, коли $\chi \neq 0$

врахуємо затухання коливань ел-на, коли $\omega \to \omega_0$ і $\gamma \neq 0$. В (А) можна покласти $(\omega + \omega_0) = 2\omega_0$ і спростити (А) до вигляду, зручного для аналізу:

$$\begin{cases} n^2 - \chi^2 = 1 + \dfrac{e^2 N}{2\varepsilon_0 m \omega_0} \cdot \dfrac{1}{(\omega_0 - \omega) + \dfrac{\gamma^2}{\omega_0 - \omega}} \\ 2n\chi = \dfrac{e^2 N}{2\varepsilon_0 m \omega_0} \cdot \dfrac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \end{cases} \qquad (\Phi)$$



Аналіз графіків та аналітичного виразу (Φ)

1. $(2n\chi)_{max} = \dfrac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega_0 \gamma}$  При $\gamma \uparrow$ величина $\chi_{max} \downarrow$
2. Ширина кривої $\chi(\omega)$ – $(\omega_0 - \omega)$ – зростає із зростанням γ.
3. При деяких значеннях ω (ω_1 та ω_2) величина $(n^2 - \chi^2)$ набуває екстремального значення
$$\frac{d(n^2 - \chi^2)}{d\omega} = 0$$
4. При $\omega = \omega_0$ величина $(n^2 - \chi^2) = 1$
5. На ділянці BC при $\omega \uparrow$ величина $n \downarrow$, що відповідає аномальній дисперсії.
6. На ділянках AB та DC – дисперсія нормальна.
7. Врахування затухання не змінило характер дисперсії.

Нормальна та аномальна дисперсії

Обл. нормальної дисперсії: $\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0$ $\left(\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0\right)$.

Обл. аномальної дисперсії: $\frac{\partial n}{\partial \lambda} > 0$ $\left(\frac{\partial n}{\partial \omega} < 0\right)$.

Біля центра лінії поглинання, там, де поглинання світла максимальне, дисперсія — аномальна: з ростом ω величина n падає.

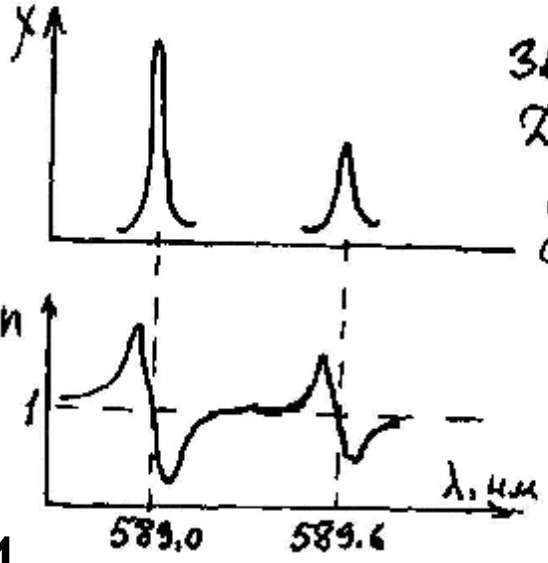
За межами смуги поглинання, там, де середовище прозоре, дисперсія — нормальна: з ростом ω величина n збільшується.

Сила осциляторів

Вимірювання величини N у (1) не співпадають з кількістю осциляторів в од. об'єму (N_0). Завжди $N < N_0$. Тому для узгодження з експериментом було введено сталу $f \leq 1$, яка пов'язує N та N_0: $N = f \cdot N_0$. f називається силою осцилятора.

Реальні атоми мають не одну, а, як правило, декілька спектральних ліній поглинання. Тому з (2):

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\gamma_j \cdot \omega}$$



Звичайно f_j нормують: $\sum_j f_j = 1$.

Для атомів лужних металів, у яких на зовн. оболонці 1 ел-н.

Наприклад, для 2-х D-ліній натрію

$f_1 \left(3^2S_{1/2} \to 3^2P_{1/2}\right) = 0.325$

$f_2 \left(3^2S_{1/2} \to 3^2P_{3/2}\right) = 0.65$

$f_1 + f_2 \approx 1$

Врахування впливу взаємодії молекул на дисперсію. Показник заломлення ідеальних середовищ

Треба розрізняти зовн. поле E (поле світлової хвилі) та діюче на осцилятор (ефективне) E_{ef} поле. Треба враховувати вплив полів від сусідніх атомів (молекул), поляризованих дією світла.

Розгляд – для ізотропного випадку.

Лоренц показав, що $E_{ef} = E + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{P}{3}$ (1). Тому рівняння $m\ddot{r} + br = eE \rightarrow m\ddot{r} + br = eE + \frac{1}{3\varepsilon_0}eP$

Враховуючи, що $\vec{P} = eN\vec{r}$, та домноживши (1) на eN, отримуємо $m\ddot{P} + b\dot{P} = Ne^2E + \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0}P$ (2)

$\omega_0^2 = \frac{b}{m}$; $b = m\omega_0^2$

$$m\ddot{P} + \left(m\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3}\right)P = Ne^2E \equiv Ne^2E_0\sin\omega t \quad (3)$$

Розв'язок (3) шукаємо у вигляді $\vec{P} = \vec{P}_0\sin\omega t$

де $$P_0 = \frac{e^2NE_0}{m\left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3m\cdot\varepsilon_0} - \omega^2\right)}$$

Відомо, що $\varepsilon = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}$, та $n^2 = \varepsilon$. Тоді

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \frac{e^2N}{\varepsilon_0 m\left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3m\cdot\varepsilon_0} - \omega^2\right)} = 1 + \frac{e^2N\frac{1}{m\cdot\varepsilon_0}}{(\omega_0^2-\omega^2) - \frac{Ne^2}{3m\cdot\varepsilon_0}}$$

$$(n^2-1)(\omega_0^2-\omega^2) = \frac{e^2N}{3m\cdot\varepsilon_0}(n^2-1+3)$$

$$\boxed{\frac{n^2-1}{n^2+2} = N\frac{e^2}{3\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)}}$$

Формула Лоренц-Лоренца 1880 р, Г.А.Лоренц та Л.Лоренц

$\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{N} = const$ або $\frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{\rho} = const$ для $\lambda = const$

(N – кількість атомів в од. об'єму, тобто $N \sim \rho$)

$\rho = m \cdot N$, m – маса атома (молекули).

Величина $\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{\rho} = R$ наз. (питомою) рефракцією речовини.

Дослід підтверджує той факт, що при зміні густини багатьох прозорих середовищ (повітря, кисень, водяна пара тощо) під дією тиску при незмінній температурі і навіть при зміні агрегатного стану, величина R залишається сталою.

Для повітря (при зміні ρ в 150 разів):

Густина, ρ	n	$R = \frac{1}{\rho} \frac{n^2-1}{n^2+2}$	$10^4(n-1)$
1	1.00029	$1953 \cdot 10^{-7}$	2.9
42,1	1.0124	$1959 \cdot 10^{-7}$	12.4
96.2	1.0284	$1961 \cdot 10^{-7}$	28.4
149.5	1.0442	$1956 \cdot 10^{-7}$	44.2

З точністю 2-3% величина R – незмінна

Рефракція R при утворенні суміші складається адитивно: $R \cdot m = \sum_i m_i R_i$.

Це означає, зокрема, що вплив окремих атомів на заломлення світла є незалежним.

Фактори, які підтверджують класс. теорію дисперсії Лоренца

1. Рефракція R
2. Дисперсія в обл. високих частот ($\omega \gg \omega_0$): $n \to 1$

$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$; $2\pi c/\omega_p \cong 0.3$ мкм (УФ).

Рентгенівське випром. майже не відбивається і не заломлюється. Інерція електронів на ВЧ ел.м. вплив. висока і не дозволяє їм відслідковувати коливання

Амплітуда коливань ел-нів в такому полі досить мала. Випромінювання та речовина взаємодіють дуже слабо. Ускладнення у створенні рентген. лазера, рентгенівської оптики (призми, лінзи, дзеркала, резонатори).

3. Дисперсія в обл. низьких частот ($\omega \ll \omega_0$)

$n = 1 + A + \frac{B}{\lambda^2} + \dots$ дисперсійна формула Коші

A, B – сталі, можна розрахувати

$A = 2\pi N \frac{e^2}{m\omega_0^2}$

$B = \lambda_0^2 = \left(\frac{2\pi c}{\omega_0}\right)^2$

$h\omega_0 = E = \frac{me^4}{2\hbar^2} =$

$= 13.6$ ев

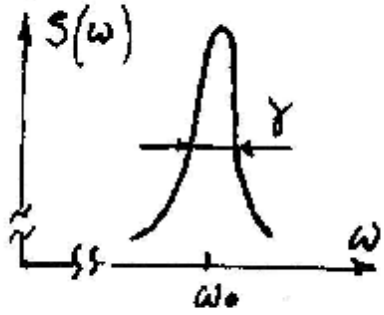
Газ	$A \cdot 10^5$	$B \cdot 10^{11}$, $см^2$	
Аргон	27.92	5.6	Експеримент
Азот	29.19	7.7	
Гелій	3.48	2.3	
Водень	13.6	7.7	
Кисень	26.63	5.07	
Повітря	28.79	5.67	

$\lambda_0 = 10^{-5}$ см ; $N = N_0 = 2.7 \cdot 10^{19}$ $см^{-3}$

Для водню: $A = 1.2 \cdot 10^{-4}$; $B = 10^{-10}$ $см^2$. Результати вимірювань добре підтверджують ці оцінки.

4. Форма спектральної лінії

Для реальних атомів і молекул форми спектр. ліній відрізняються великою різноманітністю. Однак, віроми спектр. лінії, які експериментально спостерігаються, що мають криву лоренцеву форму



$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{E_0^2/4}{\gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2}$$

$\gamma = \frac{1}{\tau}$. Потужність випромінювання пропорц. числу осциляторів N, а також середній частоті спалахів окремого осцилятора γ.

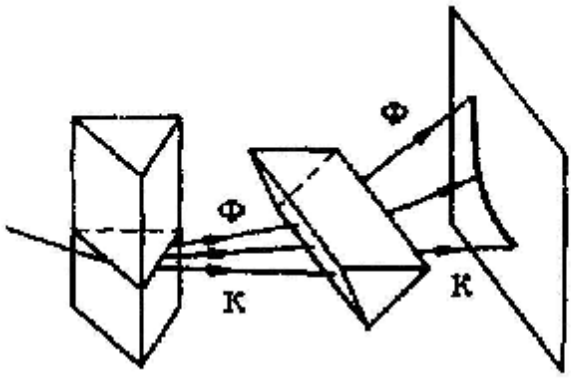
5. Модель Лоренца знаходить своє підтвердження в квантовій теорії: при не сильних світлових полях динаміка дип. моменту атома дійсно адекватно описується рівнянням класичного осцилятора. 15.

Методи дослідження дисперсії і поглинання світла

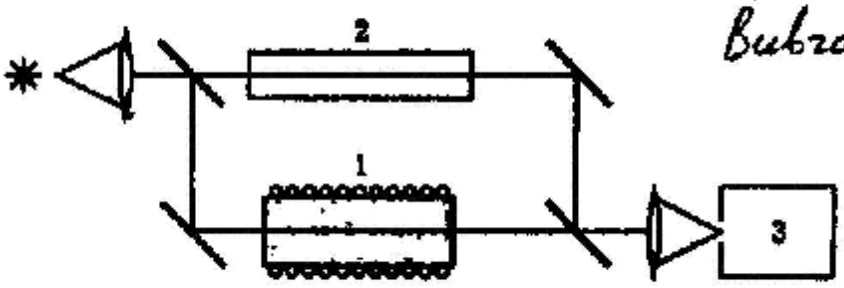
Дослід Ньютона



Метод схрещених призм Ньютона



Спектральний прилад (призма або дифр. гратка) вкупі з інтерферометром. (Метод "крюків" Рождественського)



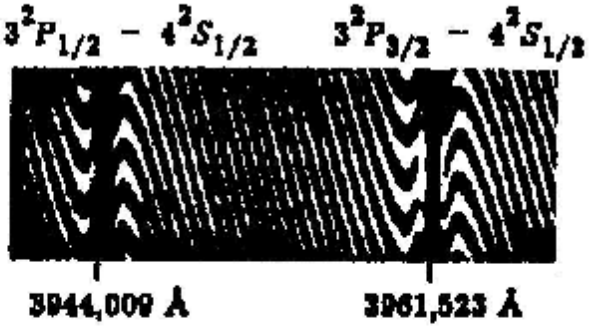
а)

Вивчається дисперсія атомних парів

1 – кювета з парами

2 – компенсаційна кювета

3 – спектрограф



б)

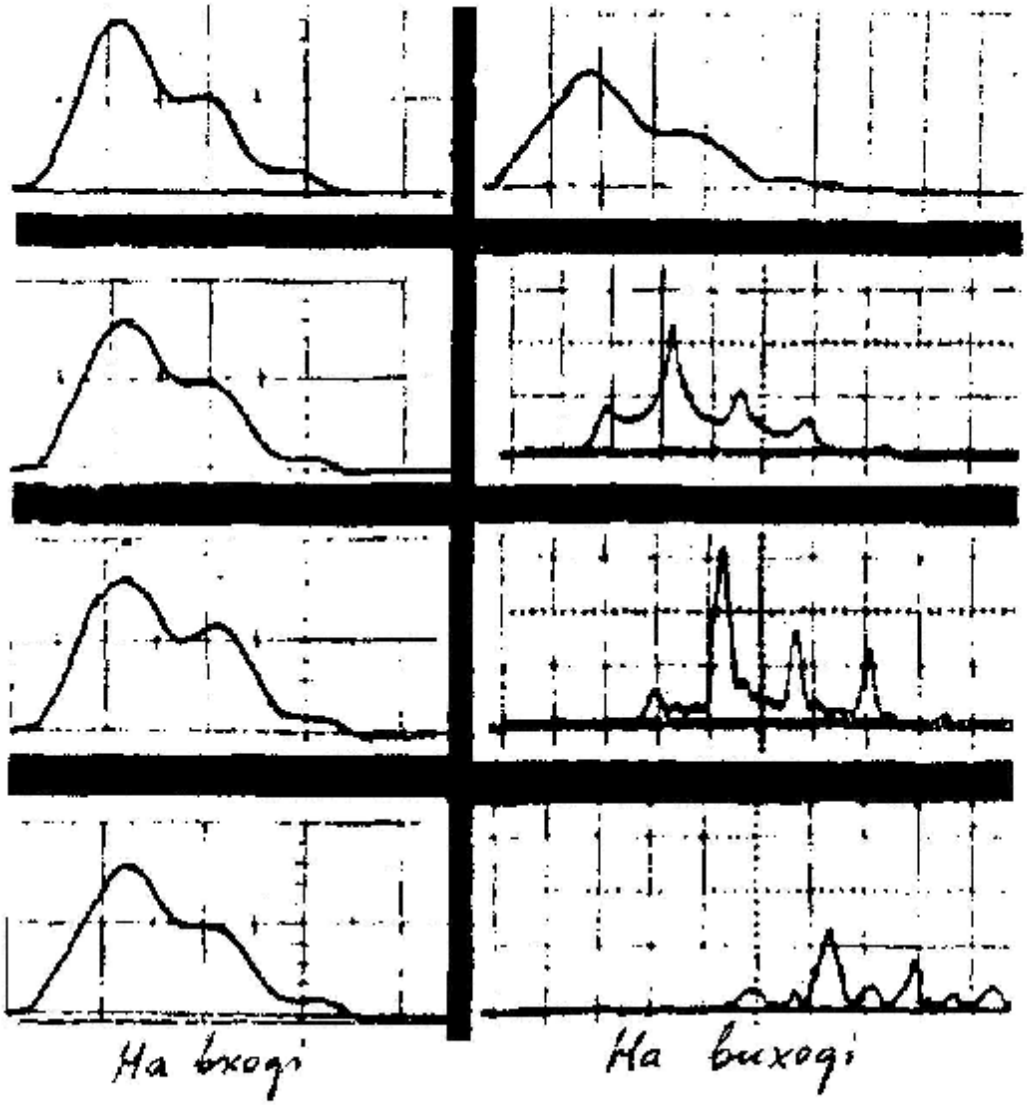
Інтерференційна картина („крюки") в залежності від λ поблизу резонансних ліній алюмінію

Розповсюдження світлового імпульсу в середовищі із дисперсією

Раніше розглядали монохроматичне світло. Світловий імпульс – не монохроматичне світло

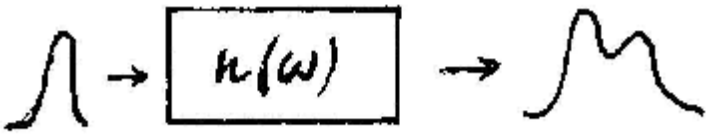
$n = n(\lambda) \Rightarrow$ різні спектральні компоненти поля при розповсюдженні через диспергуюче середовище із різними швидкостями набувають різних фазових набігів

$v_ф = \frac{c}{n(\lambda)} = v_ф(\lambda)$. Форма вихідного імпульсу відрізняється від форми імпульсу на вході: імпульс деформується. Максимальна деформація (спотворення форми) імпульс набуває в резонансних умовах, коли $\omega \approx \omega_0$ – частота власних коливань середовища.



Інший приклад спотворення імпульсу – розповсюдження світл. імпульсу в прозорому опт. волокні. Резонансний ефект відсутній, але через велику довжину волокна (до 100 км) теж імпульс деформується.

Постановка задачі:



На вході: плоска монохр. світлова хвиля попадає в лінійне ізотропне середовище із дисперсією $n(\omega)$

$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$

$\Delta\omega$ – ширина спектр. лінії; ω – несуча частота

Розглядаємо світловий імпульс з вузькою смугою:

$\Delta\omega \ll \omega$. $\Rightarrow$ тривалість імпульсу $(\tau_0) \gg$ періоду світл. коливань (T_0): $\tau_0 \gg T_0$ – умова вузької смуги

в оптиці $T_0 = 10^{-14} - 10^{-15}$ с. Значить:

$\tau_0 \geq 10^{-13}$ с

Сигнал на вході: $\vec{E}_{вх}(t) = \vec{E}_0(t) \cdot e^{i\omega_0 t}$

Сигнал на виході: $\vec{E}(t) = \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega_0 t}$

Розкладаємо амплітуду $E_0(t)$ та $E(t)$ в інтеграл Фур'є

$$E_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (1)$$

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (2)$$

Процес розповсюдження світл. хвилі можна описати формулою $E(\omega) = E_0(\omega) e^{-ik(\omega)z}$ (3)

Спектральна амплітуда $E_0(\omega)$ виражається через комплексну амплітуду вх. сигналу $E_0(t)$ за допомогою зворотного перетворення Фур'є

$$E_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t) e^{-i\omega t} dt \qquad (4)$$

Задача розв'язана: знаючи вид амплітуди вх. сигналу $E_0(t)$ по ф-лах (1)–(3) знаходять ампл. сигналу на виході дисперсного середовища.

Формули (1)-(3) виражають три послідовних етапи розв'язку задачі:
- фур'є аналіз вх. сигналу;
- перетворення спектральної компоненти кожн. дисперсійним середовищем;
- фур'є синтез сигналу на виході

Моделі середовищ із дисперсією

Закон дисперсії: $k(\omega) = \frac{\omega}{c} \cdot n(\omega)$

Користуючись умовою вузької смуги, можна розкласти хвильове число в ряд Тейлора по степеням ч-ти:

поблизу ω_0 відлік частот тут відбувається відносно ω_0

$$k(\omega) = k_0 + \omega k_0' + \frac{1}{2}\omega^2 k_0'' + \dots$$

введемо позначення:

$$k_0 = k(0);\ k_0' = \frac{\partial k}{\partial \omega}\Big|_0;\ k_0'' = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\Big|_0$$

Будемо користуватись:

1) моделлю <u>середовища з дисперсією I порядку</u>:
$$k(\omega) = k_0 + \omega k_0'$$

2) моделлю <u>середовища з дисперсією II порядку</u>:
$$k(\omega) = k_0 + \omega k_0' + \frac{1}{2}\omega^2 k_0''$$

Середовище з дисперсією I порядку.

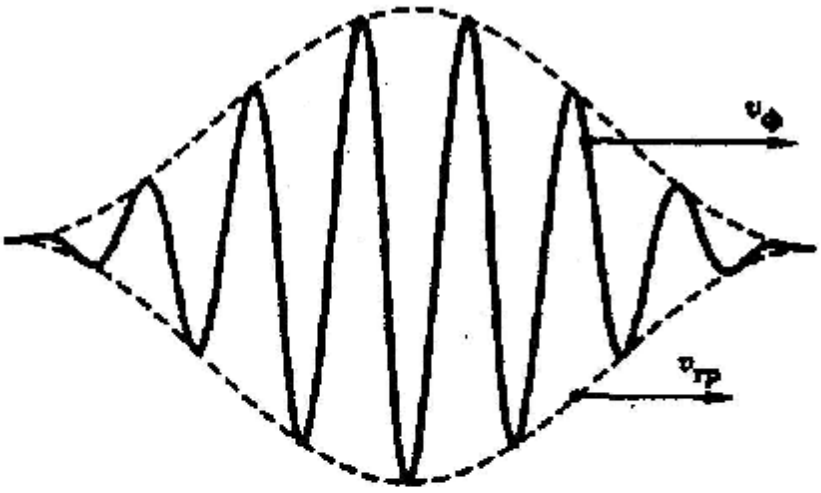
Фазова і групова швидкості:

Швидкість розповсюдж. імп $u = v_{гр} = \frac{\partial \omega}{\partial k}\Big|_0$

$$v_ф = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n(\omega_0)} \qquad v_{гр} = \frac{v_ф}{1 + \frac{\omega}{n}\cdot\frac{\partial n}{\partial \omega}}$$

Можна показати, що:

В середовищі з дисперсією I порядку світловий імпульс з вузькою смугою розповсюдж БЕЗ зміни форми



$$v_{гр} < v_ф$$

Для вакууму $n = 1$

$$v_{гр} = v_ф$$



Середовище із дисперсією II порядку. Дисперсія групової швидкості

$v_{гр} = v_{гр}(\omega)$

$$\frac{1}{v_{гр}} = \frac{\partial k}{\partial \omega} = k_0' + k_0'' \cdot \omega$$

1. Утворення імпульсів із стійкою формою спектронів.

Можна показати, що в дальній зоні дисперсії ($z \gg z_{дисп}$) світлові імпульси набувають стійкої форми, яка визначається спектром вхідного імпульсу. Такий імпульс називається „спектроном".

$$z_{дисп} = \frac{\tau_0^2}{2\pi k_0''}$$

2. Саме дисперсія $v_{гр}$ призводить до розпливання світлового імпульсу.

Існує зв'язок: $\tau_0 \cdot \Delta\omega = 2\pi$

80 80

В дальній зоні ($z >> z_{дисп}$):

$$\boxed{\tau_u(z) = \Delta\omega \cdot k_0'' \cdot z} \qquad (A)$$

З (А) витікає, що $\tau_u(z)$ лінійно зростає по мірі збільшення z. Це і є дисперсійне розпливання імпульсу.

Обидва ефекти (утворення „спектрому" і розпливання імпульсу) в дальній зоні можна пояснити за допомогою аналогії із бігунами на довгу дистанцію.

Для зручності (А) можна записати так:

$$\boxed{\tau_u(z) = \tau_0 \frac{z}{z_{дисп}}}$$

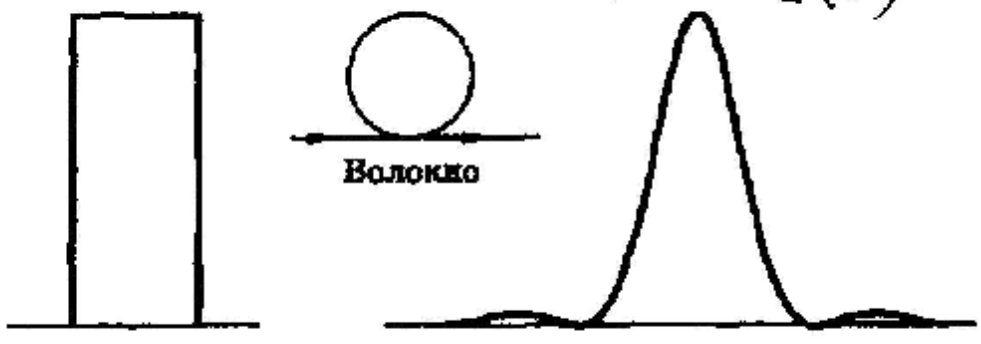
Приклад: опт. волокно; $\lambda = 1$ мкм; $k_0'' = 3 \cdot 10^{-28}$ с^2/см
$\tau_0 = 10^{-12}$ с. Можна розрахувати $z_{дисп}$:

$z_{дисп} = 5$ м.

Якщо довжина волокна $z = 50$ м, то імпульс на виході буде мати тривалість $\tau_u(z) = 10^{-11}$ с, тобто він прийде із 10-тикратним розпливанням.

Якщо на вході прямокутний імпульс τ_0, то інтенсивність в дальній зоні має вигляд

$$J(t) = J_{max} \cdot \mathrm{sinc}^2\left[\frac{\pi\theta}{\tau_u(z)}\right], \text{ де } \theta = t - k_0' \cdot z$$



80 80

Оптика металів

Експерим. факти: 1) Метали мають високі коеф. відбиття $R = 98\%$ (Ag); 87% (Cu); 40% (Fe), але величина R помітно залежить від λ.

2) У відбитому від металевої поверхні світлі завжди (крім нормального падіння) еліптично поляризована компонента присутня.

Проходження світла через середовище з провідністю

Середовище з провідністю описується рівн. Максвелла

(1) $\operatorname{rot} E = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$; $\operatorname{rot} H = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\underbrace{\sigma E}_{j}$ (2)

$\operatorname{div} E = 0$ (немає об'ємн. зарядів); $\operatorname{div} H = 0$ j – струм пров.

$$\begin{cases} \frac{d(2)}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\operatorname{rot} H \equiv \operatorname{rot} \dot{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c}\sigma\frac{\partial E}{\partial t} \quad (3) \\ \operatorname{rot}(1) \equiv \operatorname{rot}\operatorname{rot} E = -\frac{\mu}{c}\operatorname{rot}\dot{H} \Rightarrow \end{cases}$$

$\operatorname{rot}\operatorname{rot} E = \operatorname{grad}\operatorname{div} E - \Delta E$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$\Rightarrow \operatorname{grad}\operatorname{div} E - \Delta E = -\frac{\mu}{c}\operatorname{rot}\dot{H}$

Якщо $\operatorname{div} E = 0$, то і $\operatorname{grad}\operatorname{div} E = 0$.

Тоді $\Delta E = \frac{\mu}{c}\operatorname{rot}\dot{H}$ (4)

(4) → (3): $\Delta E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2}\mu\sigma\frac{\partial E}{\partial t} = 0$ — хвильове рівнян.

Аналогічне хвильове рівняння можна отримати і для H.

Для спрощення розрахунків розглянемо плоску хвилю і тільки компоненту ел. поля вздовж Ox.

Розв'язок хвил. рівняння шукаємо у вигляді

$E = E_0 e^{i\omega(t - r/v)}$ $\quad (r \to x)$

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} = i\omega E \\ \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -i\omega^2 E \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{i\omega}{v}E \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}E \end{cases} \Big| \rightarrow \text{хвильове рівняння}$$

2.

$$-\frac{\omega^2}{v^2} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2 - \frac{4\pi}{c^2}\mu\sigma i\omega = 0$$

$$\frac{c^2}{v^2} = \varepsilon\mu - \frac{4\pi\mu\sigma}{\omega}\cdot i$$

Комплекс. показн. заломл. $n^* = n - i\chi$

n – фізичний показн. заломл.

χ – показник поглинання

(5) $n^{*2} = \frac{c^2}{v^2} = \mu\varepsilon - \frac{4\pi i\sigma}{\omega}\cdot\mu$

(6) $n^{*2} = n^2 - 2ni\chi - \chi^2$. Прирівняємо (5) і (6):

(7) $\boxed{n^2 - \chi^2 = \varepsilon\mu}$ і $\boxed{2n\chi = \frac{4\pi\sigma\mu}{\omega}}$ (7')

Фізичний сенс показника поглинання:

Рівняння хвилі $E = E_0 e^{i\omega(t-\frac{z}{c}n)}\cdot e^{-i\omega\frac{z}{c}(-i\chi)} =$

$$= \underbrace{E_0 e^{-\frac{\omega z\chi}{c}}}_{\text{амплітуда хвилі}} e^{i\omega(t-\frac{z}{c}n)}$$

Ампл. хвилі загухає при збільшенні χ. Це відповідає поглинанню світла. Отже, відповідальним за поглинання світла у середовищі є його провідність σ. Якщо $\sigma = 0$, то і $\chi = 0$.

$$\left.\begin{aligned} 2n^2 &= \varepsilon\left[\left(1 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\omega^2\cdot\varepsilon^2}\right)^{1/2} + 1\right] \\ 2\chi^2 &= \varepsilon\left[\left(1 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)^{1/2} - 1\right] \end{aligned}\right\}$$

$J \sim E^2 \Rightarrow J = J_0 e^{-\frac{2\omega\chi}{c}\cdot x} = J_0 e^{-Kx}$ Закон Бугера-Ламберта

K – коеф. поглинання, J_0 – інтенс. світла для $x = 0$

$$\boxed{K = \frac{2\omega\chi}{c} = \frac{4\pi}{c\cdot n}\sigma = \frac{4\pi\chi}{\lambda}} \quad (8).$$

Із (7) випливає, що взагалі $n \neq \sqrt{\varepsilon}$. Тому слід мати на увазі, що швидк. поширення світла у середовищі v дорівнює $\frac{c}{n}$, а не $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$.

$n^* = n - i\chi$

Глибина проникнення світла у середовище з провідністю

Нехай показник екр в законі Бугера $\frac{2\omega\chi}{c}\chi = 1 \Rightarrow$

$d = \frac{c}{2\omega\chi}$ – це глибина (d), на якій інтенсивність світла зменшується в e разів: d – товщина скін-шару. Наприклад, для міді

λ	1000 Å (УФ)	10 мкм (ІЧ)	10 см (НВЧ)
d	6.2 Å	62 Å	6200 Å

3 (8): при проходженні світла через шар металу товщиною $\chi = \lambda$ потік енергії послаблюється в $e^{4\pi\chi}$ разів. Для більшості металів $\chi = 1.5 - 5$.

Відбиття світла від металів

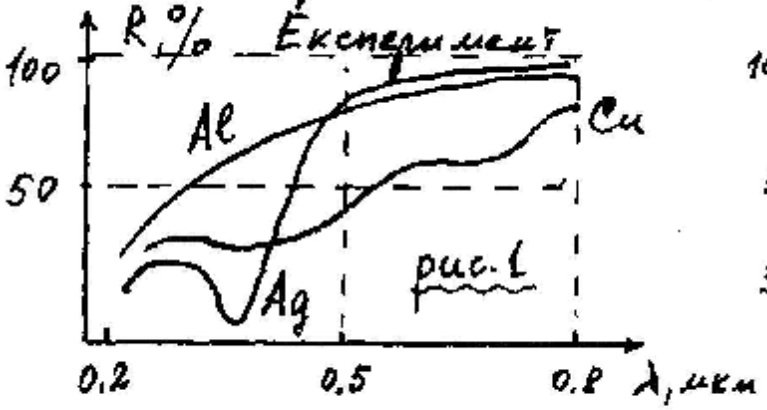


рис. 1

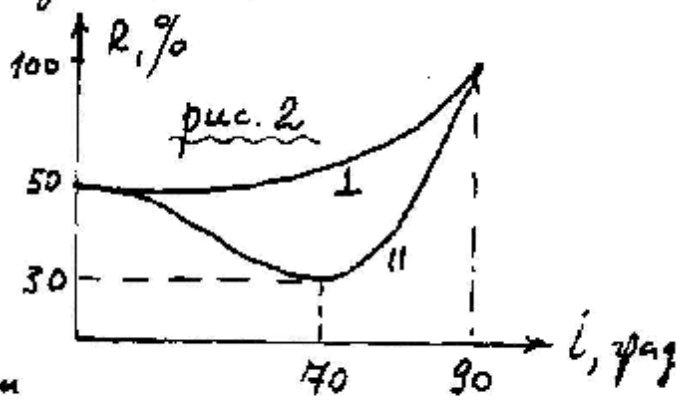


рис. 2

Рис. 2 якісно схожий на подібну залежність для діелектрика (скла). Відміни: 1) велике значення R при нормальному падінні світла на поверхню металу; 2) значення R не досягає нуля в тій ("$i = i_б$"); 3) при відбитті між „p" та „s" компонентами виникає різниця фаз. Лінійно поляриз. світло при відбитті від металу стає еліптично поляризованим.

$$R = \frac{E_{відб} \cdot E^*_{відб}}{E_{пад} \cdot E^*_{пад}} = \frac{(n - i\chi - 1)(n + i\chi - 1)}{(n - i\chi + 1)(n + i\chi + 1)} = \frac{(n-1)^2 + \chi^2}{(n+1)^2 + \chi^2}$$

Нагадаємо, що для діелектриків $R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$

Для металів $$R = \frac{(n-1)^2 + \chi^2}{(n+1)^2 + \chi^2} \quad (А)$$

Є така наука - еліпсометрія. Значення R в ній визначається експериментально. Це - I рівняння. Друге рівняння - для знаходження n та χ - рівняння стану поляризації (еліптичної поляризації). Параметри еліпсу: мала напівось, велика напівось, азимут.

Амплітудний коеф. відбиття $r = \frac{E_{відб}}{E_{пад}}$

Для нормального падіння світла із повітря на провідне середовище: $r = -\frac{n^* - 1}{n^* + 1}$

Введемо комплексний показн. заломлення (n^*):

$$r = -\frac{n - i\chi - 1}{n - i\chi + 1} \cdot \frac{n + i\chi + 1}{n + i\chi + 1} \overset{②}{=} -\frac{n^2 + \chi^2 - 2i\chi - 1}{(n+1)^2 + \chi^2} =$$

$$\left\{ \overset{①}{=} -\frac{n - (i\chi + 1)}{(n+1) - i\chi} \cdot \frac{n + (i\chi + 1)}{(n+1) + i\chi} = \right\} \quad = a + ib$$

$$tg\,\Delta\varphi = \frac{a}{b}$$

$$= a + ib$$

$$a = \frac{1 - n^2 - \chi^2}{(n+1)^2 + \chi^2}; \quad b = \frac{2\chi}{(n+1)^2 + \chi^2}$$

Зсув по фазі між амплітудами пад. та відб. хвиль - $\Delta\varphi$:

$$tg\,\Delta\varphi = \frac{1 - n^2 - \chi^2}{2\chi} \quad (Б)$$

Для лін. поляриз. світла $\delta_{\parallel} - \delta_{\perp} = 0 \Rightarrow tg\,\delta = 0$

Для еліптично поляриз. світла знаходять $\delta = \delta(n, \chi)$ та $R = R(n, \chi)$.



Схема еліпсометра

Значення n та χ розраховують по формулах, вимірюючи на еліпсометрі параметри еліптично поляриз. світла, відбитого від металу, (А) та (Б) - основні формули для розрахунків.

Наведеними в таблицях довідників значеннями ε та σ для розрахунків n та χ не можна користуватись, бо вони стосуються статичних полів!

Вимірені методами еліпсометрії величини n, χ та r наведені в Таблиці 1 (для $\lambda = 0.589$ мкм):

Метал	χ	n	r, %
залізо	1.63	1.51	32.6
мідь	4.26	2.06	70.1
золото	2.82	0.37	85.1
срібло	3.64	0.18	95.0
натрій	2.61	0.005	99,7

Аналіз таблиці:

1) для деяких металів $n < 1$. На таку можливість вказувалось при розгляді теми „Дисперсія світла".

2) Теоретично для дії. (7): $n \cdot \chi = \frac{25}{\nu}$. Це співвідношення добре виконується в далекій IY обл. Для видимого діапазону – сильне розходження. Одна з причин, пояснюючих це, полягає у тому, що при падінні на метал видимого світла помітну роль грають не тільки вільні електрони, але і зв'язані електрони.

Повернемось до моделі Лоренца, яка дозволяє обчислити компл. діел. проникність матеріалу за рахунок взаємодії ел.м. хвилі із електронами середовища.

Вже отримували, що при нехтуванні загухань електронних коливань ($\gamma = 0$), $\varepsilon(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$ де ω_p – плазмова частота $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}}$.

При $N = 10^{22}$ см$^{-3}$ величина ω_p відповідає $\lambda_p = 0.3$ мкм. Для оптичного діапазону $\omega < \omega_p$ величина $\varepsilon(\omega)$ виявляється від'ємною ($\varepsilon < 0$), а комплексний показник заломл. $n^* = \sqrt{\varepsilon}$ тоді є чисто уявним.

Тобто: $\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon} = 0 \Rightarrow n = 0$.

Тому компл. показник заломл. металла $n^* = ix$, де x – дійсна величина.

Тоді при нормальному падінні світла $R = \left|\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right|^2$.

Для границі повітря–метал: $\sqrt{\varepsilon_1} = 1$, $\sqrt{\varepsilon_2} = ix_2$. Тому $R = 1$, тобто метал повинен повністю відбивати світло: „металевий блиск".

Чим нижче частота (чим більша λ) $\overset{\text{при}}{\sqrt{\omega}} < \omega_p$, тим краще відбиття. Ось тому майже всі метали при $\lambda \sim 10$ мкм мають $R \sim 100\%$.

Для деяких металів ω_p лежить у видимому діапазоні. Оскільки для $\omega > \omega_p$ величина R помітно падає, поверхня металу в цьому випадку виглядає не білою, а має колір. Так, наприклад, золото має $\lambda_p = 0.6$ мкм, тому воно слабо відбиває синє-зелене світло і добре – жовте. Для Al величина λ_p лежить в УФ. Тому Al добре відбиває видиме світло і виглядає білим.

Зауваження: 1) Закон дисперсії $\varepsilon(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$ виправдовується як для металів, так і для дійсно плазми, що складається із вільних електронів та іонів.

2) При проходженні плазмової частоти ω_p (при нормальному падінні світла на поверхню металу) коеф. відбиття R повинен (принаймні, теоретично!) змінюватись стрибком від 0 до 1.

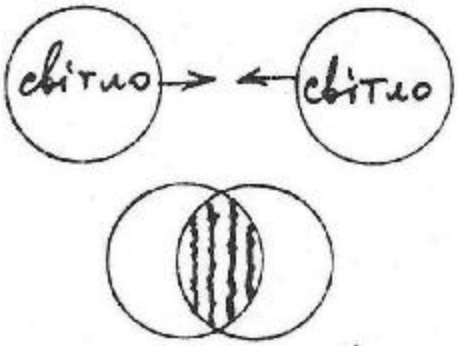
Інтерференція світла.

Основні поняття та дослідні данні

Інтерференція - хвильове явище. Ньютон: світло - потік корпускул (частинок).

І-ція досить тонке фіз. явище, яке в побутовому житті зустрічається не часто. В побуті відоме більше явища, які підпадають під закон складання (додавання) інтенсивностей (принцип суперпозиції): приклад з двома лампочками.

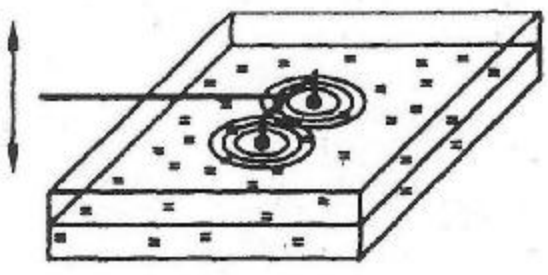
Принцип спостереження І-ції: два однорідних світлових пучка, які зводяться на екрані, утворюють систему темних і світлих смуг - інтерф. картину

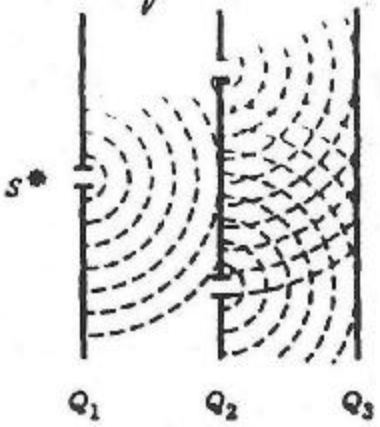


Світло + світло = темнота

В цьому випадку - джерела залежні, пов'язані між собою - когерентні

Інтерференцію хвиль на воді спостерігали завжди
І-цію світла вперше спостерігав в 1801 р Юнг







88 88

Інтерференція світла

І. – додавання хвиль, при якому порушується закон незалежності світлових променів (закон суперпозиції): $I \neq I_1 + I_2$. В одних випадках $I > I_1 + I_2$, в інших – $I < I_1 + I_2$.

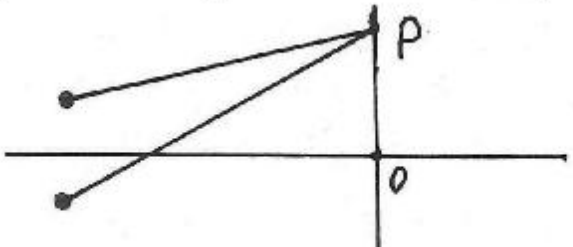
Умови, що необхідні для спостереження інтерференції в оптичному діапазоні:

1) однакова поляризація, але щоб кут α між векторами $\vec{E}_1$ та $\vec{E}_2$ хвиль, що складаються, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$;

2) промені повинні бути когерентними, тобто різниця фаз $\Delta\varphi = \text{const}$ на протязі всього часу спостереження інтерф. картини;

3) амплітуди хвиль, що інтерферують, бажано, були б однаковими.

Інтерференція двох хвиль: $\vec{E}_1 = \vec{E}_{01}(r) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})}$ та (хвилі сферичні: $E_0(r)$) $\vec{E}_2 = \vec{E}_{02}(r)\, e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r})}$



$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ – принцип суперпозиції

$I = E \cdot E^*$, де E^* – комплексно спряжена до E величина:

$$I = \underbrace{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1^*}_{I_1} + \underbrace{\vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2^*}_{I_2} + \underbrace{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \vec{E}_1^*}_{\text{інтерференц. член}} \quad (1)$$

$z = \rho e^{i\varphi}$, $z^* = \rho e^{-i\varphi}$

$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = E_1 \cdot E_2 \cos \vec{E}_1 \hat{\vec{E}}_2$. Якщо кут $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $I = 0$. Тому взаємно перпендикулярні поляризовані хвилі не інтерферують.

Інтерф. член $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_1^* = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}\, e^{i(\vec{k}_2 \vec{r}_2 - \vec{k}_1 \vec{r}_1)} +$

$+ \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}\, e^{i(\vec{k}_1 \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \vec{r}_2)} = 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_1 \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \vec{r}_2)$

$\vec{k} \cdot \vec{r} = \varphi$ – фаза

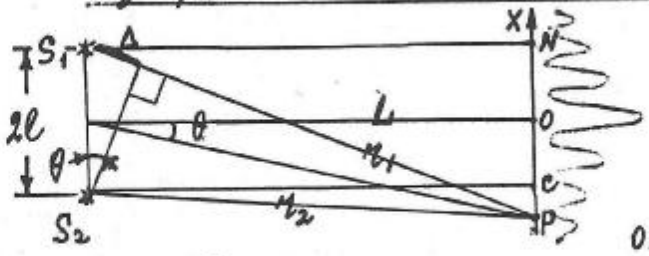
$\vec{k}_2 \vec{r}_2 - \vec{k}_1 \vec{r}_1 = \varphi_2 - \varphi_1$ – різниця фаз

$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos\varphi$ – формула Ейлера

88 88

89 89

Розподіл інтенсивності світла в інтерфер. картині



$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cos\varphi \quad (A)$$

1) Якщо $\langle \cos\varphi \rangle = 0$ – фаза неперервно змінюється, то коливання некогерентні і $J = J_1 + J_2$ (1)

2) Якщо $J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 \cdot J_2} \cdot \cos\varphi$ (2) коливання когерентні і інтерфер. картина спостерігається.

$$A^2 = 2A_0^2 + 2A_0^2 \cdot \cos\varphi = 2A_0^2(1+\cos\varphi) = 4A_0^2 \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2}, \text{ де } \varphi = k\cdot\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta$$

(3) $A^2 = 4A_0^2 \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2}$

$J_{рез} = 2J_0 \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2}$

З рис. видно, що $\sin\theta = \Delta/2\ell$, або $\theta \approx \Delta/2\ell$

$$\Delta = 2\ell\cdot\theta = 2\ell\frac{x}{L} \Leftarrow \frac{x}{L} = \operatorname{tg}\theta$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{2\ell\cdot x}{L} \qquad \eta = \frac{\pi\cdot 2\ell}{L\cdot\lambda}$$

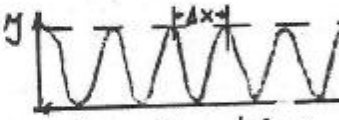
Тоді $A^2 = 4A_0^2\cos^2\frac{\varphi}{2} = 4A_0^2\cos^2\frac{2\ell\cdot x\cdot 2\pi}{2\cdot L\cdot\lambda} \downarrow = 4A_0^2\cos^2\eta x$

Через те, що $J \sim A^2$ $\boxed{J = J_0\cos^2\eta x}$ (Б)

J_0 – інтенс. в max

У интенсивності в min: $J_{min} = 0$.

Отримано ідеалізований (теоретичний) розподіл інтенсивності $J(x)$,



ΔPS_2C: $r_2^2 = L^2 + (x-\ell)^2$

ΔPS_1N: $r_1^2 = L^2 + (x+\ell)^2$ } (4)

$r_1^2 - r_2^2 = (r_1 - r_2)\cdot(r_2 + r_1) \Leftarrow$ з алгебри

$(4) \Rightarrow r_1^2 - r_2^2 = 4\ell\cdot x = \Delta\cdot 2L$

$\boxed{x = \Delta\cdot L/2\ell}$

Висновок: $\boxed{\Delta = \frac{2\ell\cdot x}{L}}$ (В)

Різниця ходу між двома променями в точці екрану з координатою x, відміряною від центра, прямо пропорційно залежить від відстані 2ℓ між щілинами в досліді Юнга і обернено пропорційно – від відстані L між екраном і площиною з щілинами.

89 89

Око і фотоприймачі – інерційні: 0.1 с та 10^{-10} с, відпов.[2]
Опт. частота $f \cong 10^{14}$ Гц $\Rightarrow$ вираз (1) треба усереднювати:

$$\langle J \rangle = \langle J_1 \rangle + \langle J_2 \rangle + 2\sqrt{\langle J_1 \rangle \langle J_2 \rangle} \cdot \langle \cos(k_2 r_2 - k_1 r_1) \rangle$$

Якщо різниця фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ змінюється у часі, то $\langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = 0$ і інтерференція не спостерігається.

Тобто необхідна умова для інтерф.: $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$

$$k_2 r_2 - k_1 r_1 = \text{const} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2 r_2 - n_1 r_1) = \varphi$$

$(n_2 r_2 - n_1 r_1)$ – опт. різниця ходу; $(r_2 - r_1)$ – різниця ходу

Якщо $n_1 = n_2$, то $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n(r_2 - r_1)$. Зміна $(r_2 - r_1)$ в результаті нагріву, вібрації тощо дають залежність φ від часу, роблять інтерф. неможливою.

Позначимо: $\frac{r_2 \cdot n_2 - r_1 n_1}{\lambda} = m$ – порядок інтерференції; $m = \frac{\Delta}{\lambda}$

Величина m показує, скільки довжин хвиль (λ) вміщується в опт. різницю ходу.

Якщо $\Delta = m \cdot \lambda = 2m\frac{\lambda}{2}$ або $\varphi = 2\pi \cdot m$ } умова max

(де $m = 0, 1, 2, \ldots$), то $J = J_1 + J_2 + 2J_1^{1/2} \cdot J_2^{1/2} = J_{max}$

Якщо $\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ або $\varphi = (2m+1)\pi$, } умова min

то $J = J_1 + J_2 - 2\sqrt{J_1 \cdot J_2} = J_{min}$

Коли $n_1 \cdot r_1 = n_2 r_2$ (або $\varphi = 0$), то шляхи називають тautохронними: світло по шляхам, які не рівні геометрично, розповсюджується за рівні проміжки часу.

Контрастність інтерфер. картини х-ється функцією видності

$$V = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max} + J_{min}} = \frac{4\sqrt{J_1 \cdot J_2}}{2(J_1 + J_2)} = \frac{2\sqrt{J_1 \cdot J_2}}{J_1 + J_2}$$

91 91

Ширина інтерференційної смуги

В точці з координатою x на екрані буде max, коли $\Delta = m \cdot \lambda$. Відстань від центра інтерф. картини до максимуму m-го порядку $x_m = \frac{m \cdot \lambda \cdot L}{2\ell}$

відстань між максимумами:

! $$\boxed{\Delta x = \frac{x_m}{m} = \frac{L \cdot \lambda}{2\ell}}$$ „Правило трьох „Л"" (Г)

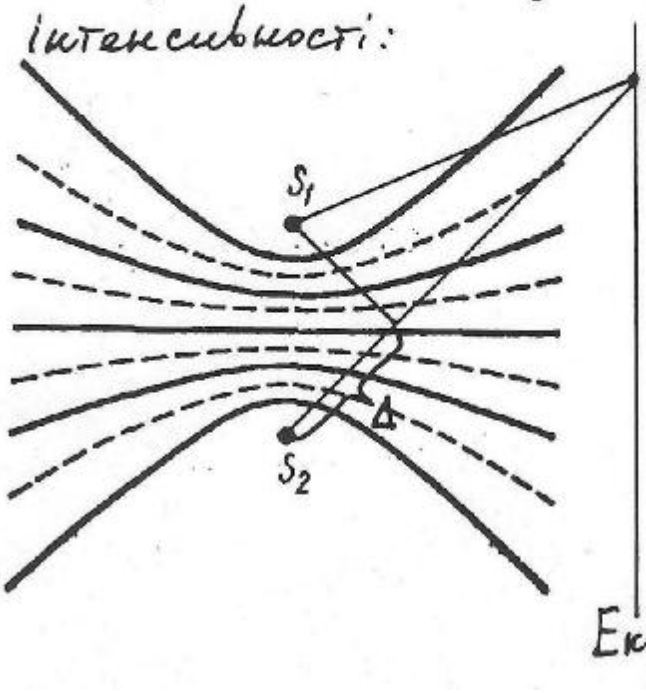
Δx – ширина інтерф. смуги ≡ відстань між сусідніми max (або min).

ℓ – мале, L – велике $\Rightarrow \frac{2\ell}{L} \approx \theta$ $$\boxed{\Delta x = \frac{\lambda}{\theta}}$$ (Д)

Якщо $L = 1$ м; $\lambda = 500$ нм, $2\ell = 1$ мм, то $\Delta x = 1$ мм

Зауваження 1: Центральний max ($m = 0$) буде ахроматичним (незабарвленим): хвилі з різними λ приходять в т. P в однакових фазах ($\Delta = 0$).

Зауваження 2: Визначимо геом. місце точок, де $r_2 - r_1 = \Delta = \text{const}$ (поверхні максимальної (мінім.) інтенсивності:



Це – гіперболи (в просторі – гіперболоїди) з фокусами в т. S_1 та S_2

Суцільні лінії – геом. місце розміщення max, штрихові – min.

91 91

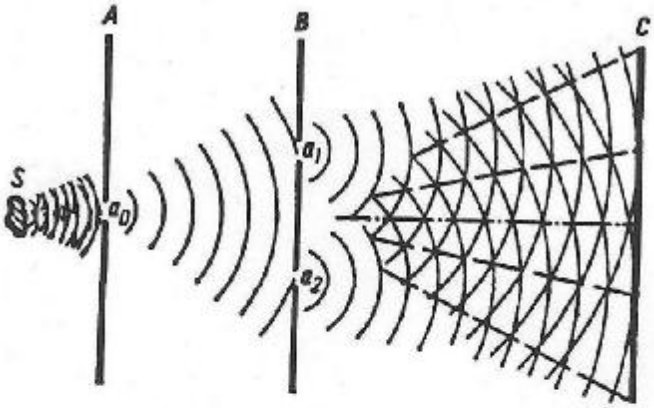
Двопроменева інтерференція

1. Класичні схеми спостереження інтерференції методом поділу фронту хвилі. (Інтерференція Френеля)

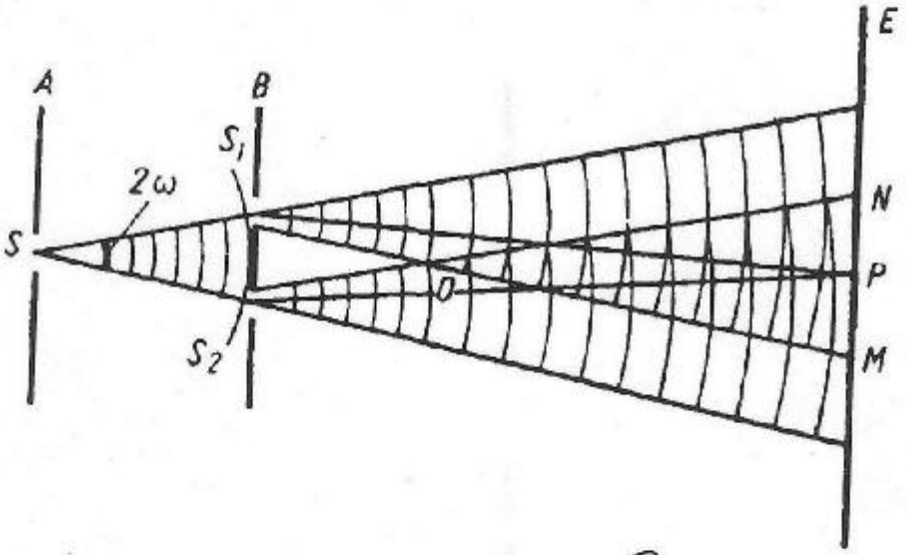
Точкове джерело дає хвилю із сферичним фронтом, який поділяється на 2, щоб потім об'єднатись для інтерференції.

Придатний тільки для достатньо малих джерел світла, які наближено можна вважати точковими.

Дослід Юнга



Додаткових лінз для спостереження інтерференц. картини не потрібно



Ділянка перекриття когерентних променів від S_1 та S_2 називають полем інтерференції

1) Інтерфер. картина спостерігається в будь-якій точці поля інтерфер.

2) Монохр. світло збільшує чіткість (контраст) інтерференційних смуг.

3) При збільшенні щілини S збільшується освітленість але зменшується контраст інтерф. картини.

93

7.

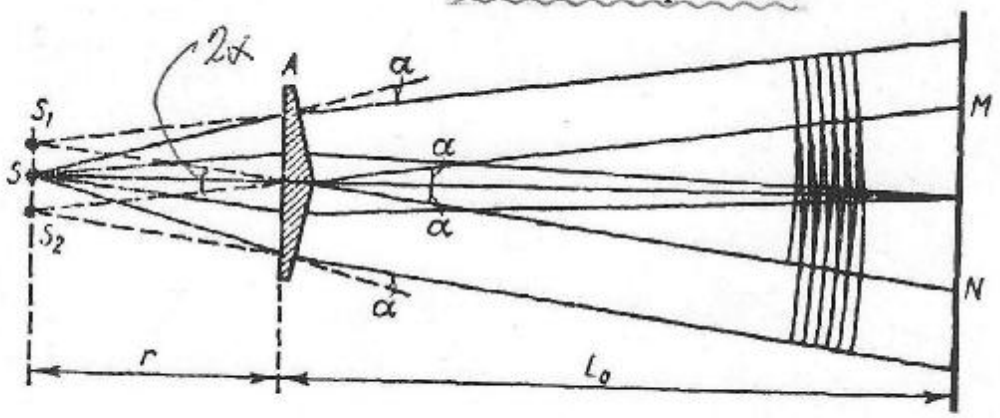
Для пл. хвилі:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

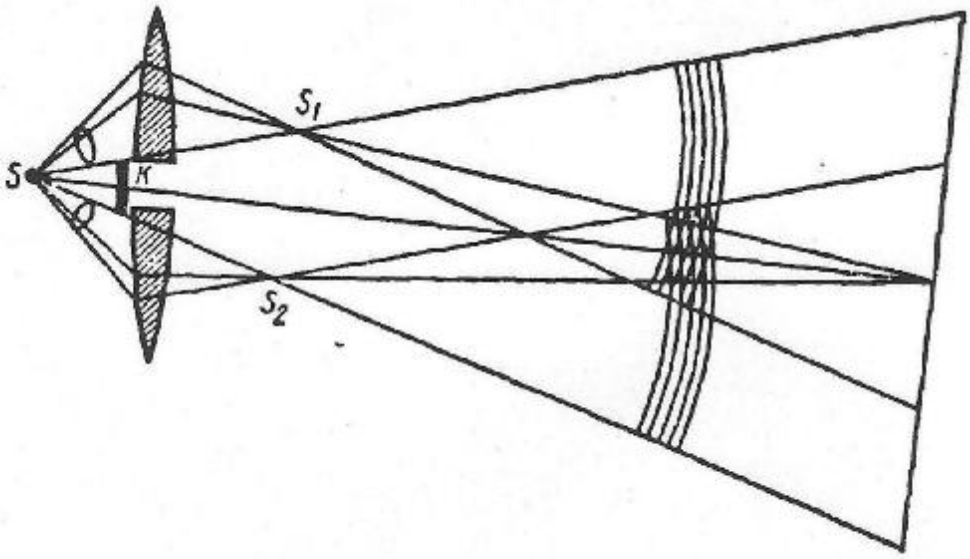
Для сферичної хв.:

$$\Delta x = \frac{\lambda b}{2\alpha}\left(1 + \frac{L_0}{r}\right)$$

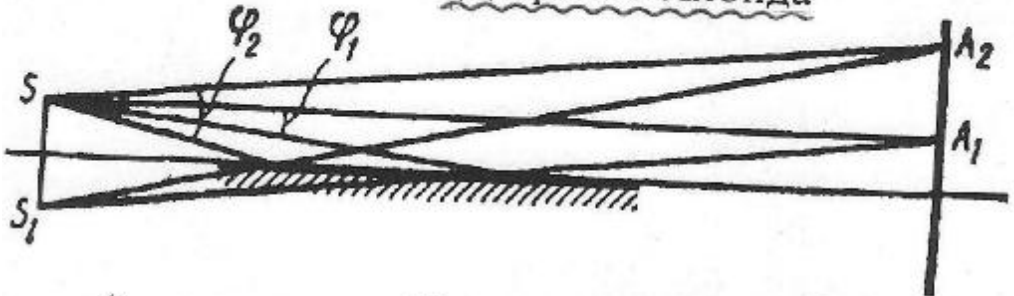
Призма Френеля



Білінза Бійе



Дзеркало Ллойда



Кут падіння обирається дуже близьким до 90°, щоб відстань між когерентними джерелами була невеликою

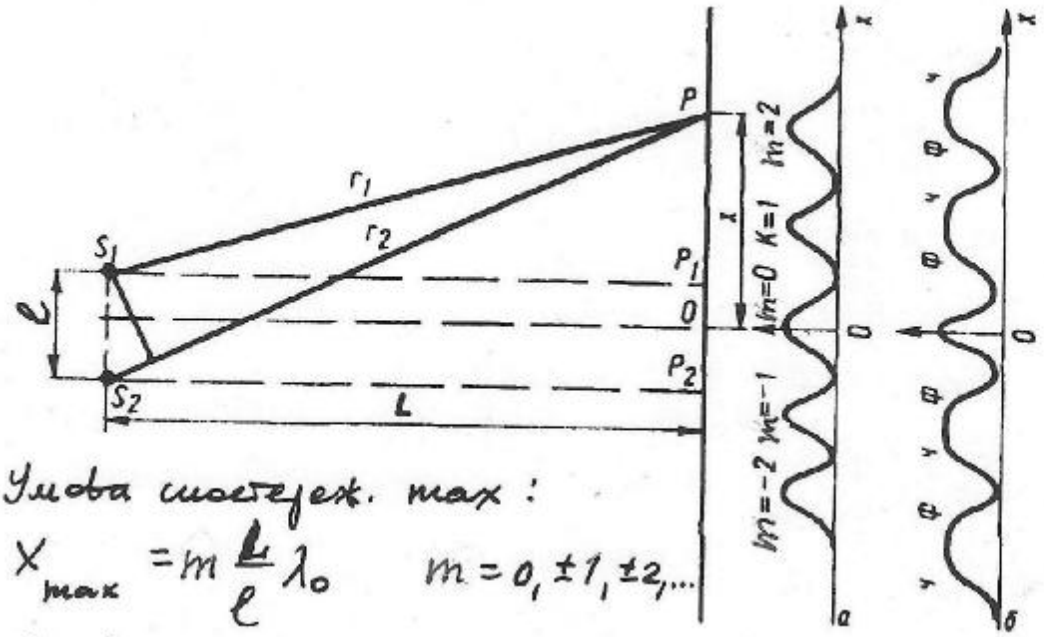
S – дійсне джерело;

S_1 – віртуальне джерело.

93

94

6.



$$\Delta = r_2 - r_1 = \frac{x \cdot \ell}{L}$$

Умова спостереж. max:

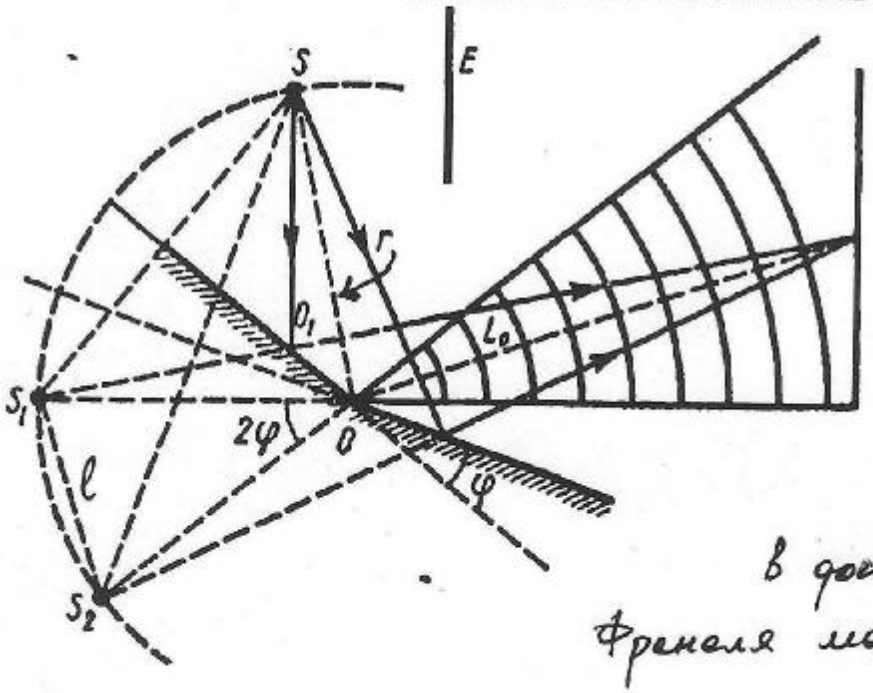
$$x_{max} = m \frac{L}{\ell} \lambda_0 \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Умова спостереж. min:

$$x_{min} = (2m+1) \frac{L}{\ell} \cdot \frac{\lambda_0}{2}$$

Ширина інтерф. смуги $\Delta x = x_{min}(m+1) - x_{min}(m) = \frac{L}{\ell} \cdot \lambda_0$

Бідзеркало Френеля



(віртуальні)
S_1, S_2 – уявні джерела

Ширина інтерф. смуги

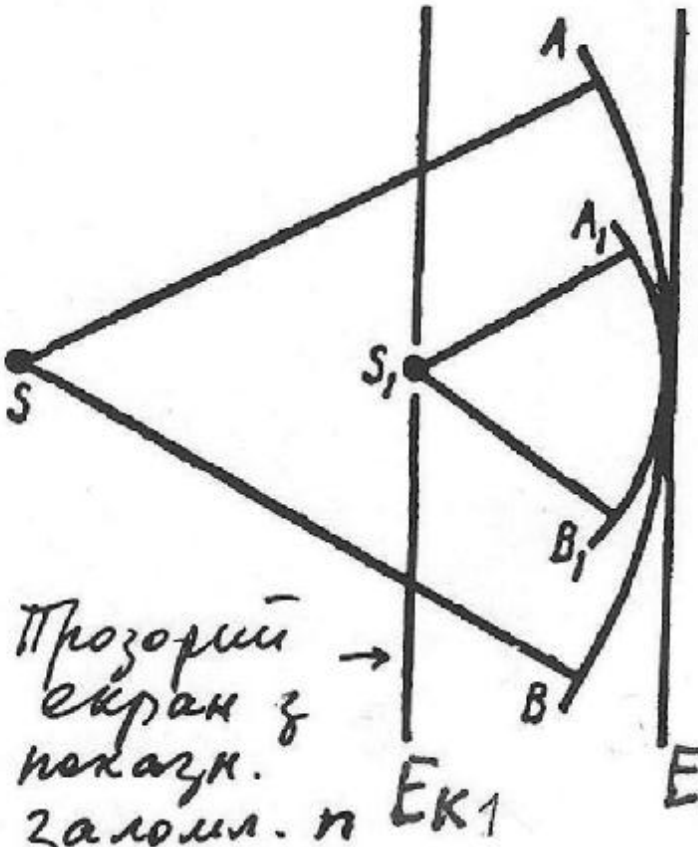
$$\Delta y = \frac{L}{\ell} \cdot \lambda = \frac{L_0 + r}{\ell} \cdot \lambda \approx \frac{L_0 + r}{2\varphi \cdot r} \cdot \lambda$$

в дослідах з бідзеркалом Френеля можна визначити λ:

$$\lambda = \frac{2\varphi \cdot r \cdot \Delta y}{L_0 + r}$$

94

Метод Вінкна



Різниця ходу для променів, які проходять через прозорий екран, та променів, які проходять через отвір, $\Delta = d(n-1)$

де d - товщина екрану Ек1

Перекриття відбувається в усій області між вторинним джерелом S1 та екраном Ек2.

Інтерф. картина спостерігається весь час при переміщенні екрана Ек2 паралельно самому собі: інтерфер. картина - нелокалізована.

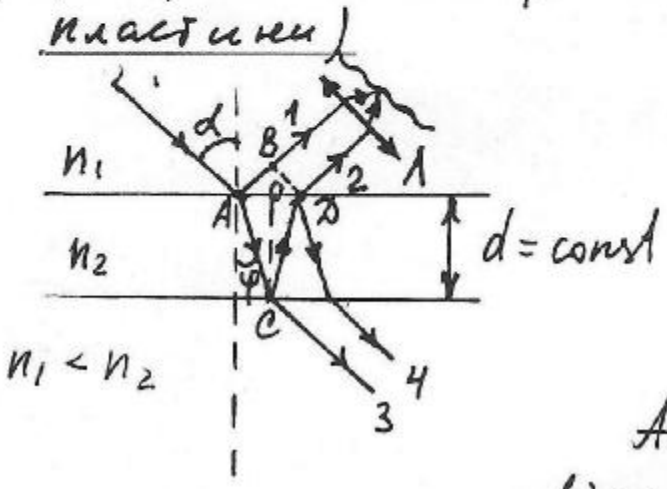
96 96

2. Методи одержання когерентних променів поділом амплітуди. (Інтерф. Ньютона)

Ці методи полягають у поділі світлового пучка напівпрозорими поверхнями, які частково відбивають і частково пропускають світло.

Вони придатні як для точкових джерел, так і для джерел скінченних розмірів.

1) Криві рівного нахилу (інтерф. від плоскопаралельної пластини)



Лінза Л – таутохронна (не вносить додаткової різниці ходу)

Промені 1 та 2 – когерентні (як і 3 та 4)

Але промені 3 та 4 сильно відрізняються за інтенсивністю

$$\Delta_{21} = \Delta = n_2(AC + CD) - n_1 \cdot AB - \frac{\lambda}{2}$$

$$AC = CD = \frac{d}{\cos\varphi}; \qquad AB = AD \cdot \sin\alpha = 2AO \cdot \sin\alpha =$$

$$= 2d \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin\alpha$$

$$\Delta_{21} = \frac{2n_2 \cdot d}{\cos\varphi} - \frac{2dn_1 \cdot \sin\varphi \cdot \sin\alpha}{\cos\varphi} - \frac{\lambda}{2} = \qquad (1)$$

$$= \frac{2n_2 d(1 - \sin^2\varphi)}{\cos\varphi} - \frac{\lambda}{2} = \boxed{2n_2 d\cos\varphi - \frac{\lambda}{2} = \Delta}$$

$\sin\alpha = \frac{n_2}{n_1}\sin\varphi$

Для монохр. світла. Умова спостер. max в інтерф. картині:

$$\Delta = 2m\frac{\lambda}{2} = m\lambda \quad \text{де } m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Умова спостереж інтерф. min: $\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ (темна смуга)

(Необх. умова спостереж. інтерф. замикається тією *: $\Delta < L_к = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$)

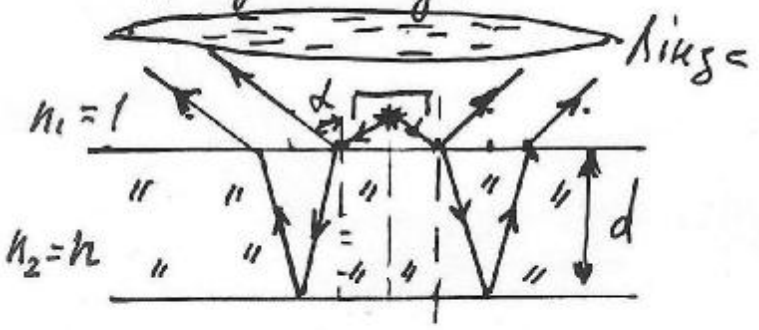
про це → пізніше

96 96

97 97

Із (1) видно, що Δ залежить від кута падіння світла на пластину („кута нахилу"). Тому при падінні на пластину світлового пучка променів, що розходяться, утворюється інтерф. картина, яка називається „смугами рівного нахилу" (СРН).

Наприклад:



Зауваження:

$d = const$

1) Інтерф. картина у вигляді кілець. Кожному кільцю відповідає свій кут α.

2) СРН локалізовані в ∞: промені, що повинні інтерферувати – паралельні. Для спостереження СРН обов'язково потрібна лінза або око, акомодоване в ∞.

3) Формулу (1) можна записати не через кут заломл. φ, а через кут падіння α:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \pm \frac{\lambda}{2} \qquad (2)$$

Якщо дослід проводиться не у повітрі, а у середовищі з показником заломлення n_0, то

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - n_0^2\sin^2\alpha} \pm \frac{\lambda}{2} \qquad (3)$$

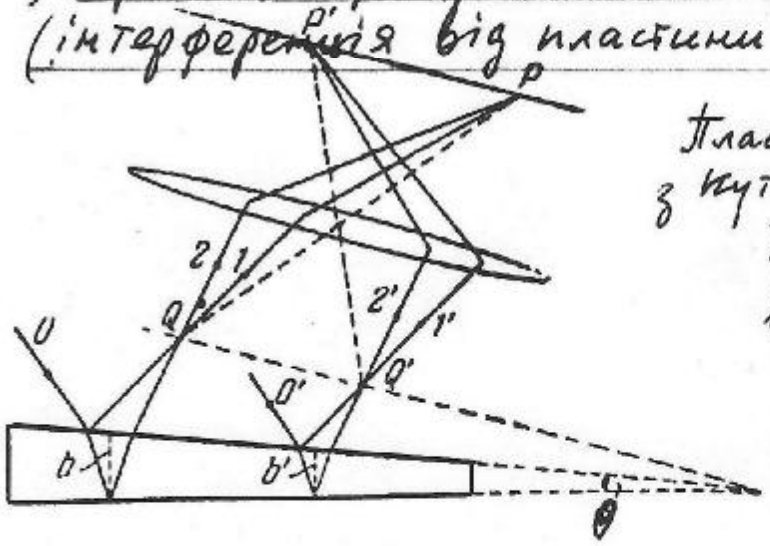
4) Знак „–" обирається, коли $n > n_0$

Знак „+" обирається, коли $n < n_0$

97 97

98
98

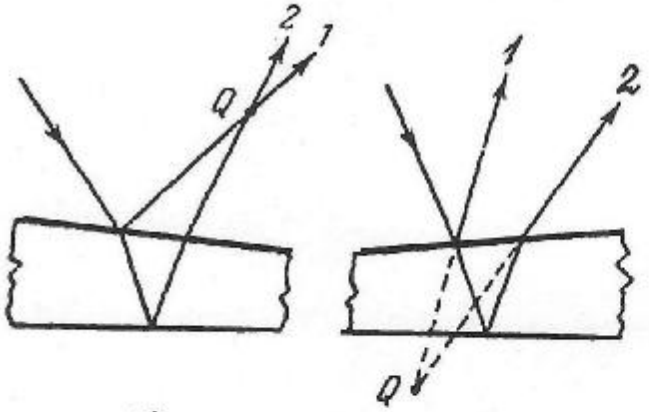
г) Криві (смуги, кільця тощо) рівної товщини. (інтерференція від пластини змінної товщини)



Пластина у вигляді клина з кутом при вершині θ

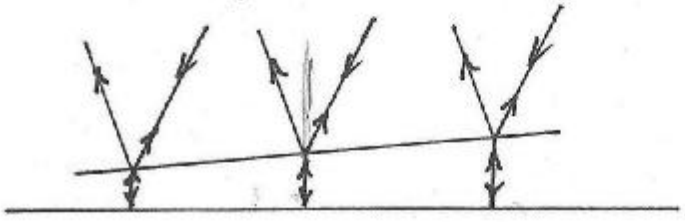
Промені 1, 2 та 1', 2', відповідно, інтерферують

При невеликих значеннях θ величину Δ можна знаходити за формулою (1), беручи за d товщину клину в місці падіння на нього променя.



Екран з точками спостереження інтерфер. картини P та P' розташований так, щоб він був стяжним з поверхнею, яка проходить через Q та Q'. Кожна із інтерфер. смуг утворюється за рахунок відбиття від місць пластинки, які мають однакову товщину. Тому – смуги рівної товщини (СРТ).

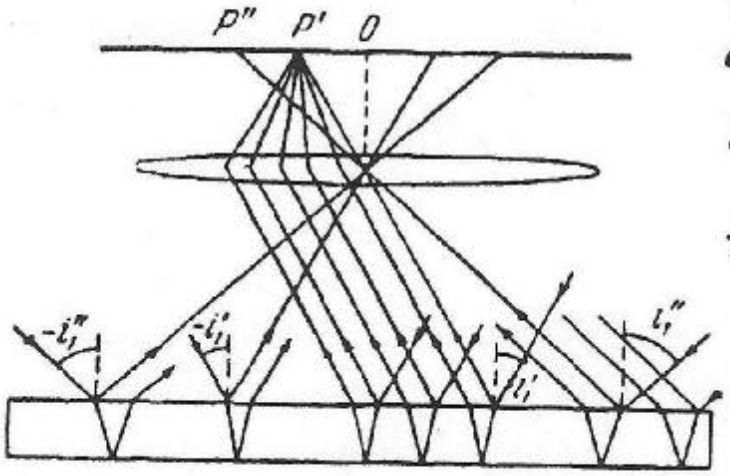
СРТ локалізовані поблизу пластинки: над нею (а), або під нею (б). При нормальному падінні променя на пластинку (промінь 2 перпендикулярний до нижньої поверхні пластинки) СРТ локалізовані на верхній поверхні пластинки.



98
98

99 99

Природа зафарбованості плівок нафти на поверхні води, мильних бульбашок, кольорів побіжалості. Порівняльний аналіз СРН та СРТ



СРН спостерігаються при освітленні плівок постійної товщини ($d = const$) розсіяним світлом, в якому містяться промені різних напрямків (кути падіння і змінюються в деяк. діап.). СРН локалізовані в ∞.

СРТ спостерігаються при освітленні плівок несталої товщини паралельними променями світла ($i = const$). СРТ локалізовані поблизу поверхні плівки, а при норм. падінні світла – на поверхні плівки.

В реальних умовах змінюються як товщина так і кути і. В цих випадках спостерігаються криві (або смуги) змішаного типу.

Зауважимо, що інтерф. на плівках можна спостерігати не тільки у відбитому, але і в проходящому світлі.

99 99

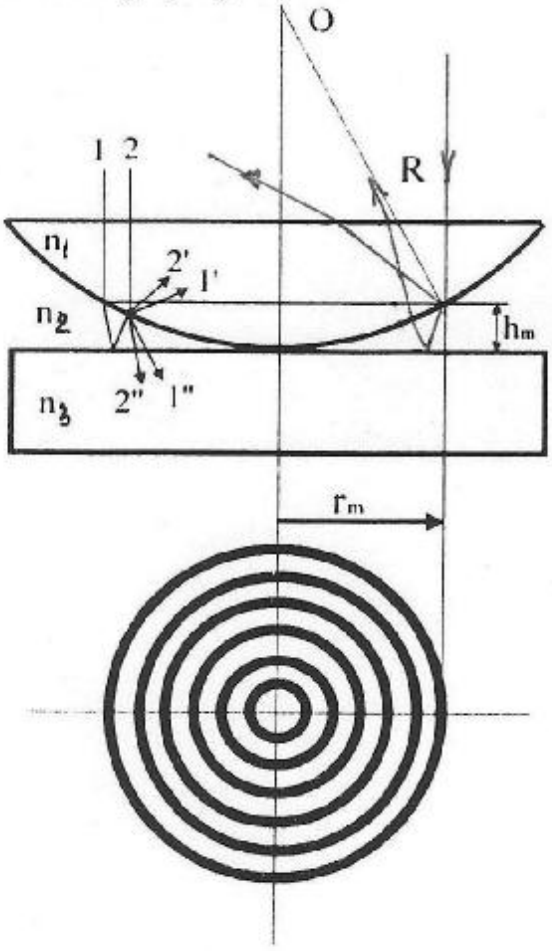
100 100

13.

Кільця Ньютона

Двопроменева інтерференційна картина у вигляді концентричних кільцевих смуг (*кільця Ньютона*) може бути утворена за допомогою установки, схема якої представлена на рис.

Радіуси світлих і темних кілець Ньютона визначаються за такими формулами:



- В світлі, що відбивається:

$$r_m^l = \sqrt{\frac{R}{n_2}(2m-1)\frac{\lambda}{2}}; \qquad (1)$$

$$r_m^d = \sqrt{\frac{R}{n_2} m\lambda}; \qquad (2)$$

- В світлі, що проходить:

$$r_m^l = \sqrt{\frac{R}{n_2} m\lambda}; \qquad (3)$$

$$r_m^d = \sqrt{\frac{R}{n_2}(2m-1)\frac{\lambda}{2}}, \qquad (4)$$

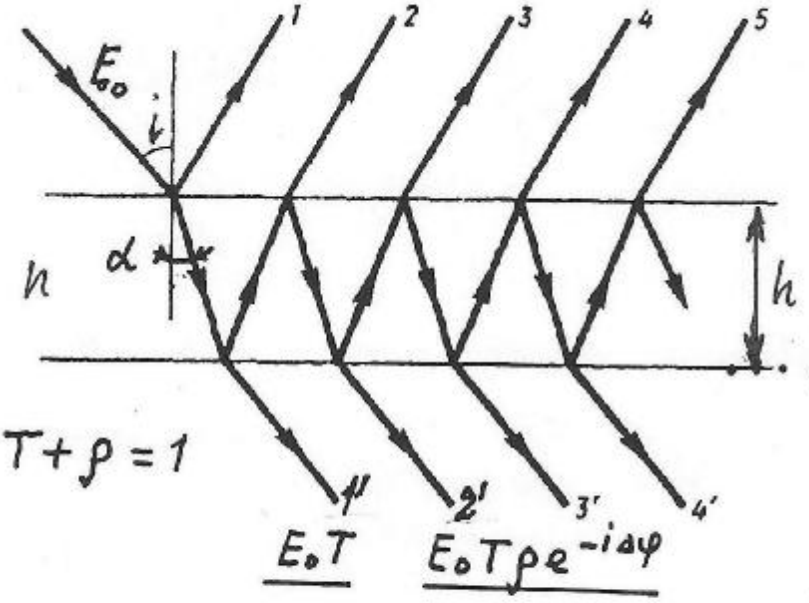
де R – радіус кривизни поверхні лінзи; n_2 – показник заломлення середовища у зазорі між лінзою і пластиною; m = 1,2, . . . – порядковий номер кільця; λ – довжина хвилі монохроматичного світла.

Кільця Ньютона – частковий випадок кривих рівної товщини.

100 100

101 101

Багатопроменева інтерференція



$T + \rho = 1$

$E_0 T$ $E_0 T \rho e^{-i\Delta\varphi}$ $E_0 T \rho^{N-1} e^{-i(N-1)\cdot\Delta\varphi}$

$\Delta\varphi = k \cdot \Delta$

$\Delta = 2h \cdot \cos\alpha \cdot n$

$\frac{\lambda}{2}$ „зникає" через подвійне відбиття

Всі отримані промені – когерентні (отримані із одного променя

$$E_{пр} = E_0 T\left(1 + \rho e^{-i\Delta\varphi} + \rho^2 e^{-2i\cdot\Delta\varphi} + \ldots + \rho^{N-1} e^{-i(N-1)\Delta\varphi}\right) =$$

$$= \frac{E_0 T}{1 - \rho e^{-i\Delta\varphi}}$$

Сума членів збіжної геом. прогресії з кожеф. прогресії $q = \rho e^{-i\cdot\Delta\varphi}$

$$I_{пр} = \frac{E_0^2 T^2}{(1 - \rho e^{-i\Delta\varphi})(1 - \rho e^{i\cdot\Delta\varphi})} = \frac{E_0^2 T^2}{1 + \rho^2 - \rho e^{i\Delta\varphi} - \rho e^{-i\Delta\varphi} + 2\rho - 2\rho} =$$

$$- \rho\left(e^{i\Delta\varphi} + e^{-i\cdot\Delta\varphi}\right) =$$

$$= -2\rho\cos\Delta\varphi$$

$I = E \cdot E^*$

$$= \frac{E_0^2 T^2}{(1-\rho)^2 + 2\rho(1 - \cos\Delta\varphi)} =$$

$$= \frac{E_0^2 T^2}{(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}} = I_{пр} \quad (A)$$ Формула Ейрі

Аналіз (A): 1) $I_{пр.max}$, якщо $\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{2} = m\cdot\pi \Rightarrow$

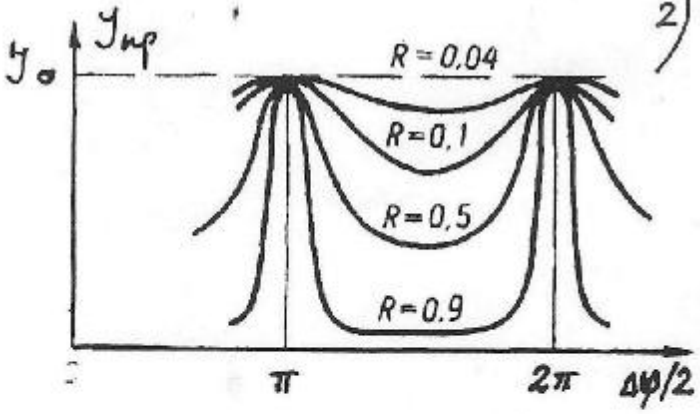
$\Delta\varphi = 2m\cdot\pi \Rightarrow I_{пр.max} = \frac{E_0^2 T^2}{(1-\rho)^2} = \frac{E_0^2 T^2}{T^2} = E_0^2 \neq f(\rho)$

$I_{пр.min}$, якщо $\frac{\Delta\varphi}{2} = (2m+1)\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = (2m+1)\pi$

$I_{пр.min} = \frac{E_0^2 T^2}{(1+\rho)^2} \Rightarrow I_{пр.min} \neq 0;$

101 101

15.

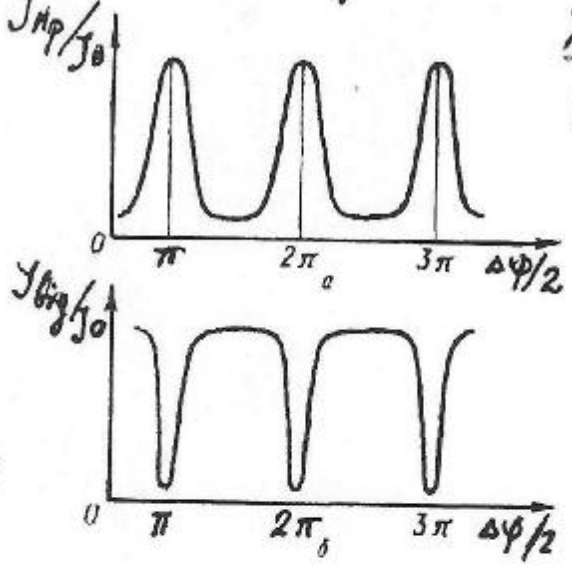


2) Контрастність інтерфер. картини: $\frac{J_{max}}{J_{min}} = \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2$

3) Контрастність залежить від ρ!

4) Залежність інтенсивності $J_{пр}$ від $\Delta\varphi$ має систему max-ів, форма яких істотно відрізняється від вигляду кривих $\sim \cos^2\Delta\varphi$, що характеризували картину двопроменевої інтерференції пучків.

5) Інтерф. картина у світлі, що проходить, має вигляд світлих смуг на темному фоні. (рис. 1).



1
2

Для відбитого світла формула Ейрі:

$$J_{відб} = \frac{4E_0^2\rho\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}{(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}} \quad (6)$$

1) У відбитому світлі інтерф. картина має вигляд темних смуг на широкому світлому фоні. (рис. 2).

2) „Смуги" являють собою кільця рівного нахилу. Спостерігати їх треба у фокальній площині лінзи, бо СРН локалізовані на ∞.

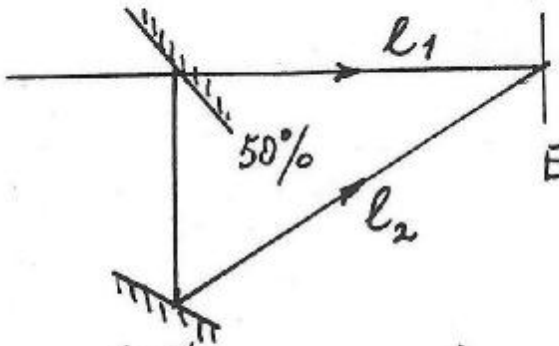
3) Важливо, щоб пластинка, на якій спостерігається багатопроменева інтерф., мала тіні поглинання!

Когерентність світла

К.с.-хар-ка упорядкованості структури світла, ступінь наближеності світл. поля до ідеальної гармонічної хвилі. К.с. – здатність світла до інтерференції.

Розрізняють 2 види когерентності – просторову і часову.

Часова когерентність. Час когерентності. Довжина когерентності.



Для інтерф. в т. P двох променів необхідно, щоб

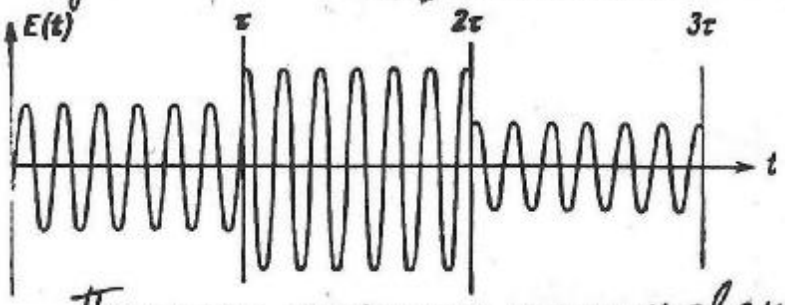
$$\varphi_1(t_1) - \varphi_2(t_1 + \tau_{затр}) = const$$

весь час спостереження.

Якщо τ – час спостереж. м.б. будь-яким, то кажемо про 100% когерентність у часі. Якщо величина τ обмежена, то маємо часткову часову когерентність.

Час когерентності – $\tau_к$: $\boxed{\varphi_1(t_1) - \varphi_2(t_1 + \tau_к) \leq \pi}$

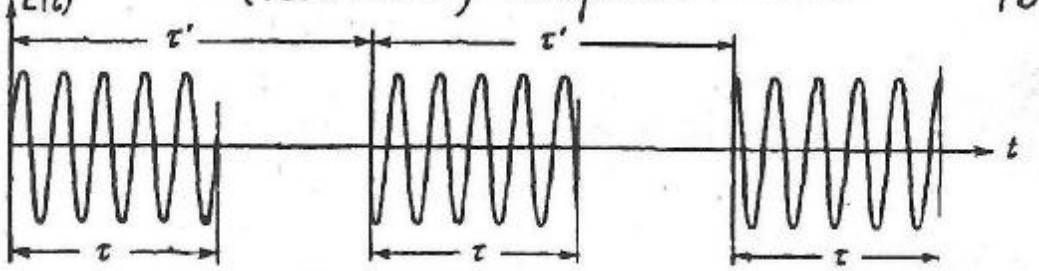
Через немонохр. світла ідеальної часової когер. ($\tau_к \to \infty$) немає. При випромінюванні світла ізольованим атомом виділяється цуг хвиль. Час випромінювання 1-го цугу і є час когерентн.



Приклад хаотично модульованого (теплового) випромінювання

На початку кожного цугу випадково змінюються фаза і ампл. коливань.

Тоді $\tau_к \sim 10^{-8}$ с



Ускладнена модель коливань опт. електрона

6.

Ще один спосіб пояснення часу когерентн.: $\tau_к$ – це час затримки, необхідний променю, щоб пройти відстань, тах. оптичної різниці ходу променів – $\tau_к = \frac{\Delta}{c}$

1) $\Delta_{max} = \tau_к \cdot c = 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^8 = 3$ м для теплових джерел

$\Delta_{max} = L_к$ – довжина когерентності.

Треба враховувати ще зіткнення атомів, рух атомів тощо.

Тоді $\tau_к \sim 10^{-9} \div 10^{-10}$ с.

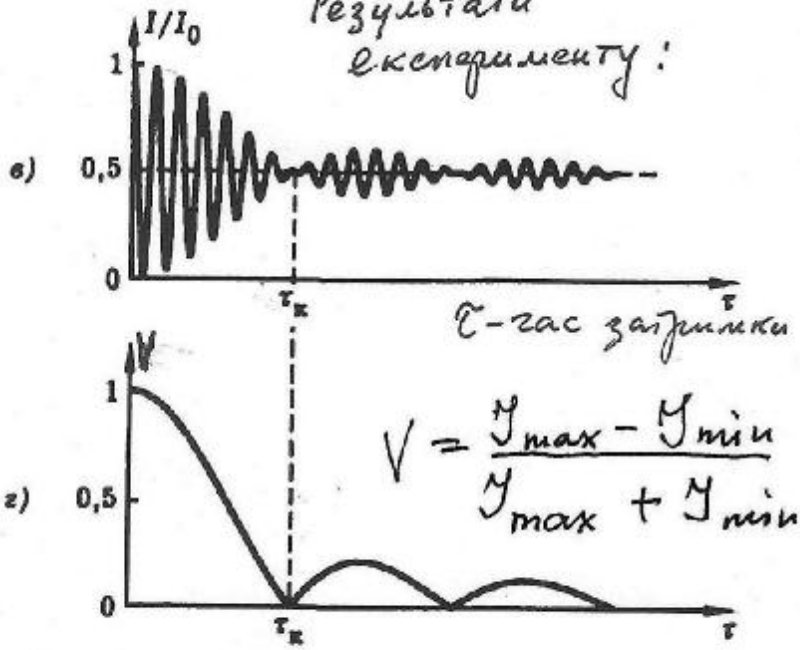
$L_к = 3-30$ см



Інтерферометр Майкельсона:

а) б)

Результати експерименту:



$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

2) Для лазерів $\Delta\nu \sim 10^2 с^{-1}$

Тоді $\tau_к = 10^{-2}$ с

$L_к = 10^6$ м!

Реально на лазерах вдається спостерігати інтерф. при $\Delta \sim$ декілька км.

Обмеження – за рахунок неоднорідності земної атмосфери та вібрацій.

Інтерференція може спостерігатись у випадку, коли

$$\boxed{\Delta \le L_к} \qquad L_к = \Delta_{max}$$

3) Вплив монохроматичності світла на часову когерентність променів

Джерелом світла будемо вважати збуджений ізольований атом.

7.

Рівняння осцилят. $m\ddot{x} + kx + \beta\dot{x} = 0$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma\dot{x} = 0$$

Розв'язок: $x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot e^{i\omega t}$, де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

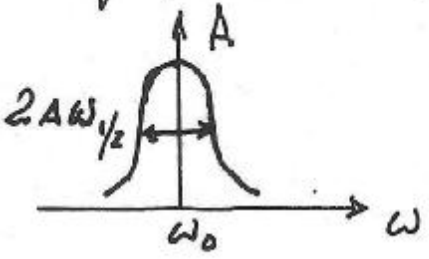
В курсі механіки при розгляді АЧХ було строго доведено, що ширина рез. кр. на напіввисоті АЧХ ($2\Delta\omega_{1/2}$) зв'язана з γ-декрементом загухання:

$$\Delta\omega_{1/2} = \gamma.$$

Крім того, $\gamma = 1/\tau$, де τ – час релаксації.

Тому: $\boxed{\Delta\omega_{1/2} \cdot \tau = 1}$ $\Rightarrow$ Монохроматичність світла більша ($\Delta\omega_{1/2}$ менша) у тих хвиль, у яких тривалість цугу більша ($\tau \uparrow$).

В нашому випадку $\Delta\omega_{1/2}$ - радіаційна (природна) ширина лінії випромін. (~ МГц)



$$\boxed{\tau \cdot \Delta\nu = \frac{1}{2\pi}}$$

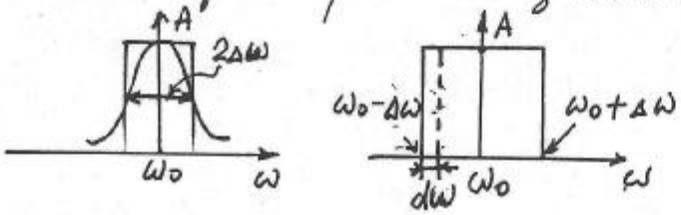
$$\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \cdot \Delta\lambda$$

$$\Delta\lambda \sim 10^{-3}\ \text{Å}$$

$$m_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{5 \cdot 10^3}{10^{-3}} = 5 \cdot 10^6 \text{ смуг!}$$

Але при цьому не враховувалась: 1) атом не ізольований: відбуваються зіткнення $\Rightarrow$ уширення $\Delta\omega_{1/2} \sim 10$ МГц; 2) атом рухається $\Rightarrow$ ефект Доплера $\Rightarrow$ $\Delta\omega_{1/2} \sim 1500$ МГц – осн. вклад в уширення спектр. лінії; 3) є ще механізми уширення: ефект Зеемана та еф. Штарка $\Rightarrow$ розщеплення спектр. лінії.

Візьмемо джерело, в якому лінія випромінюв. замінена прямокутником з тією ж напівшириною



Інтенсивність джерела, яке має лінію випромінюв. у вигляді прямокутника шириною $2\Delta\omega$, у смузі $d\omega$ дорівнює $dJ_0 = \frac{J_0}{2\cdot\Delta\omega_{1/2}}\cdot d\omega$. Для 2-х променевої інтерференції:

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1\cdot J_2}\cdot\cos\Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = k\cdot\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(r_2 - r_1)$$

$$J = 2J_0(1+\cos k\cdot\Delta)\,, \text{ якщо } J_1 = J_2 = J_0$$

$dJ = 2dJ_0(1+\cos k\cdot\Delta)$ ⟶

$$dJ = \frac{2J_0}{2\cdot\Delta\omega_{1/2}}\cdot d\omega\left(1+\cos\frac{\omega}{c}\cdot\Delta\right) = \frac{J_0}{\Delta\omega_{1/2}}(1+\cos\omega\tilde{\tau}_к)\,d\omega$$

$$J = \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega}\frac{J_0}{\Delta\omega_{1/2}}(1+\cos\omega\tau)\,d\omega = 2J_0 + \frac{J_0}{\Delta\omega_{1/2}}\cdot\frac{1}{\tau}\sin\omega\tau\Big|_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} =$$

$\sin\alpha - \sin\beta =$
$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$= 2J_0 + \frac{J_0}{\tau\Delta\omega_{1/2}}\left[\sin(\omega_0+\Delta\omega)\tau - \sin(\omega_0-\Delta\omega)\tau\right] =$$

$$= 2J_0\left(1 + \frac{2}{2\cdot\Delta\omega_{1/2}\cdot\tau}\sin\Delta\omega_{1/2}\cdot\tau\cdot\cos\omega_0\tau\right) =$$

$$= 2J_0\left(1 + \frac{\sin\Delta\omega_{1/2}\cdot\tau}{\Delta\omega_{1/2}\cdot\tau}\cdot\cos\omega_0\cdot\tau\right)$$

$\Delta\omega_{1/2}$ – напівширина спектр. лінії

$\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, де $\alpha = \Delta\omega_{1/2}\cdot\tau$

V – видність інтерфер. картини:

$$V = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max} + J_{min}}$$

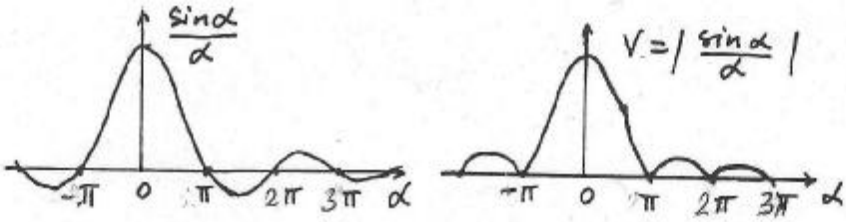
$J_{max} = 2J_0(1+\sin\alpha/\alpha)$

$J_{min} = 2J_0(1-\sin\alpha/\alpha)$

$$\boxed{V = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \neq 1},$$ коли $J_1 = J_2$!

107

$\alpha = \Delta\omega_{1/2} \cdot \tau$



Подібна закономірність характерна і для інших контурів спектральної лінії випромінювання

Із графіка видно: Інтерф. пропадає, коли: $\Delta\omega_{1/2} \cdot \tau = \pi$ (2) $\Rightarrow 2\Delta\nu \cdot \tau = 1 \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{1}{2\Delta\nu}}$

(2) схоже на (1), але отримане альтернативним шляхом!

$2\Delta\nu$ – ширина спектр. лінії

τ – час затримки одного цуга відносно іншого

$\Delta\nu = \Delta\nu_{зіткн} + \Delta\nu_{приш.} + \Delta\nu_{допл.} + \ldots \Rightarrow \tau \ll 10^{-8}$ с

$\nu = \frac{c}{\lambda}$

$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$

$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \cdot \Delta\lambda$

$\boxed{L_к = c \cdot \tau_к = c \cdot \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{c}{\frac{c}{\lambda^2} \cdot \Delta\lambda} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}}$ – довж. когер.

Для спостереження інтерфер. необхідно, щоб

$\Delta < L_к = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ Приклад:

$\Delta\lambda = 100\,Å$; $\lambda = 5000\,Å \Rightarrow L_к = 25$ мкм

Максимальний порядок інтерференції (m_{max}) обумовлений max різницею ходу: $\Delta_{max} = L_к$

$m_{max} \cdot \lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \Rightarrow m_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$

Ще раз про визначення часу когерентності:

Часову когерентність якісно можна визначити, як

1) інтервал часу, на протязі якого фаза хвильового руху послідовно змінюється передбаченим чином при проходженні хвилі фіксованої точки простору.

але $\Delta\varphi \leq \pi$ →

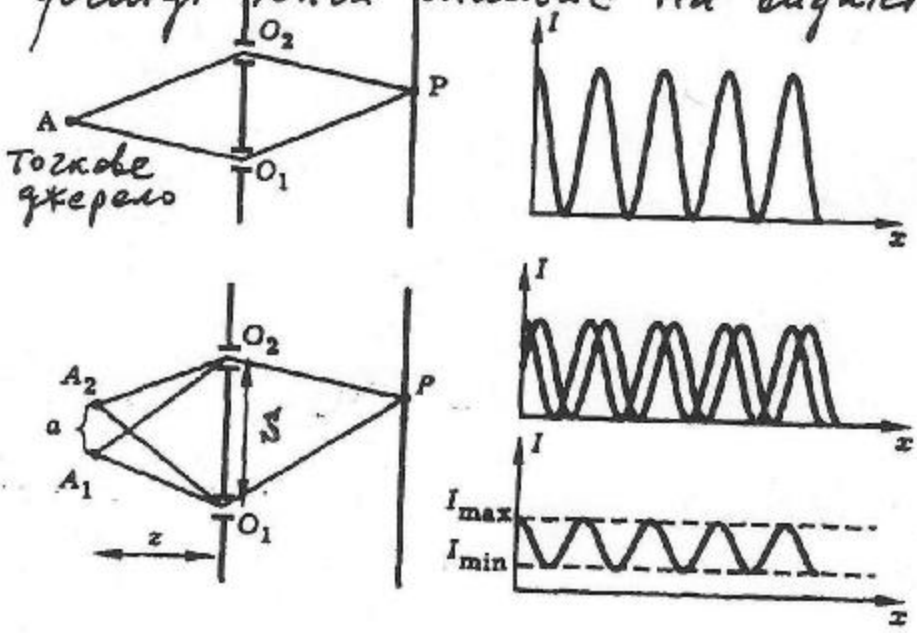
Більш кількісно $\tau_к$ визначають як проміжок часу,

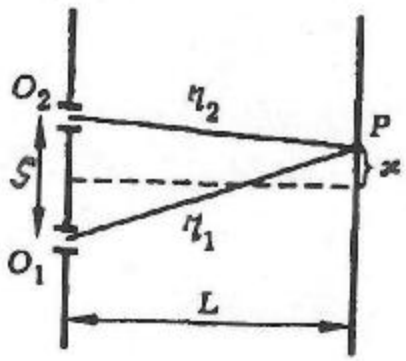
2) на протязі якого випадкові зміни фази хвилі в даній точці простору досягають значення порядку π.

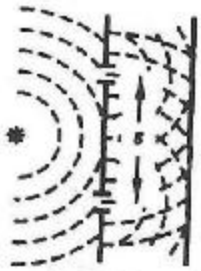
107

Просторова когерентність

1. Результати експерименту. Як розмір джерела в досліді Юнга впливає на видність інтерфер. картини:



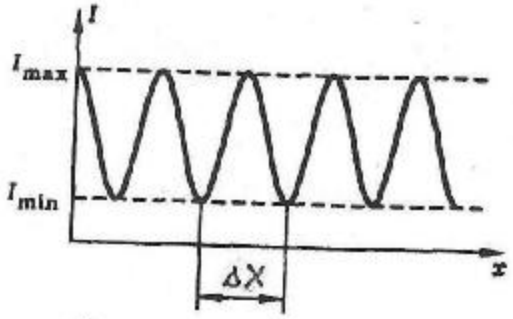


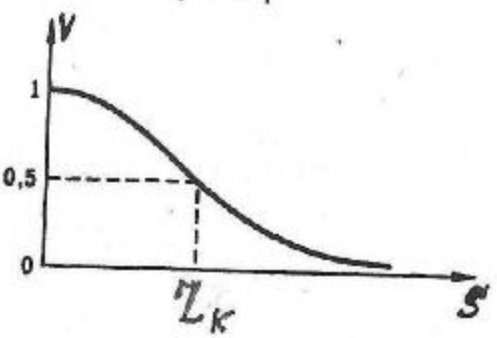


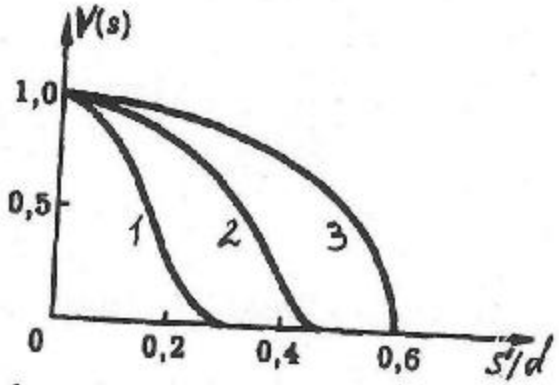
а)



б)







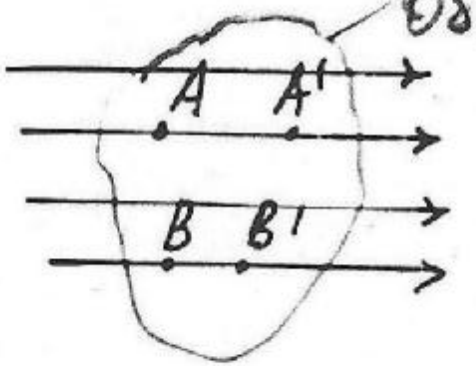
d – діаметр лазерного променя

1, 2, 3 – відносяться до різних типів лазерів

S – відстань між щілинами.

$r_к$ – радіус когерентності;

Просторова когерентність світлового поля означає, що різниця фаз коливань в різних довільно взятих точках простору не залежить від часу і є величиною сталою.



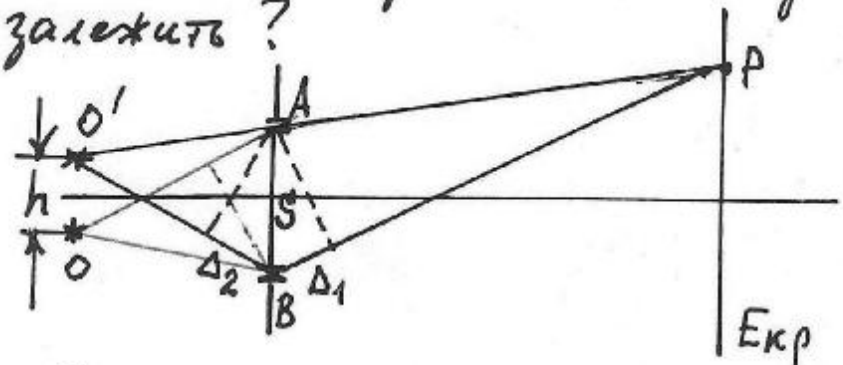
Обл. когерентності $\Delta\left(\varphi(A)-\varphi(B)\right)\neq f(t)=const$

$\Delta\left(\varphi(A')-\varphi(B')\right)\neq f(t)=const$

Два джерела, розміри і взаємне розташування яких дозволяють спостерігати інтерф. картину (при необхідному ступені монохроматичності світла) називаються просторово когерентними.

Умова просторової когерентності

Якими повинні бути розміри джерела, щоб інтерф. картина спостерігалась? Від яких параметрів це залежить?



S – відстань між отворами A та B

$\Delta_1 < L_к = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$

При зміщенні джерела з т.O в т.O' на відстань h з'являється додаткова різниця ходу Δ_2

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 \cdot J_2} \cdot \cos k(\Delta_1 + \Delta_2)$$

На екрані спостерігаються 2 інтерф. картини.

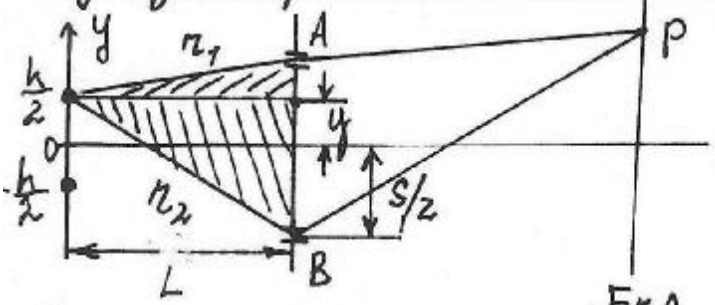


Коли $\Delta_2 \cdot k = \pi$ картинка зникає (потім знову з'являється).

$$\Delta\varphi_2 = \Delta_2 \cdot k \equiv \Delta_2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} < \pi$$

$$\boxed{\Delta_2 < \frac{\lambda}{2}}$$ – умова спостереження інт. картини від джерела довжиною h

Як розподіляється інтенсивність в інт. картині у випадку застосування не точкового (з кінечними розмірами) джерела



J_0 – інтенс. джерела висотою h

Розіб'ємо умовно джерело на смуги шириною dy

$\frac{J_0 \cdot dy}{h}$ – інт. випром., що випромінюється смугою dy

Через отвори A та B проходить світло, яке має початкову різницю фаз $\Delta\varphi_1 = \Delta_1 \cdot k$

111 111

Інтенс. світла в т. P від смуги dy

$$dJ_p = \underbrace{K_1 \frac{J_0}{h} dy}_{\text{інтенс. від A}} + \underbrace{K_2 \frac{J_0}{h} dy}_{\text{інтенс. від B}} + 2\sqrt{K_1 \cdot K_2}\, \frac{J_0}{h} \cos(k\Delta_1 + k\cdot\Delta_2)\, dy$$

$$J_p = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dJ_p$$

$$\begin{cases} r_1^2 = L^2 + \left(\frac{S}{2} - y\right)^2 \\ r_2^2 = L^2 + \left(\frac{S}{2} + y\right)^2 \end{cases}$$

$$r_1^2 - r_2^2 = \overbrace{(r_2 - r_1)}^{\Delta 2}\overbrace{(r_2 + r_1)}^{2L} = 2Sy \Rightarrow \boxed{\Delta_2 = \frac{S\cdot y}{L}}$$

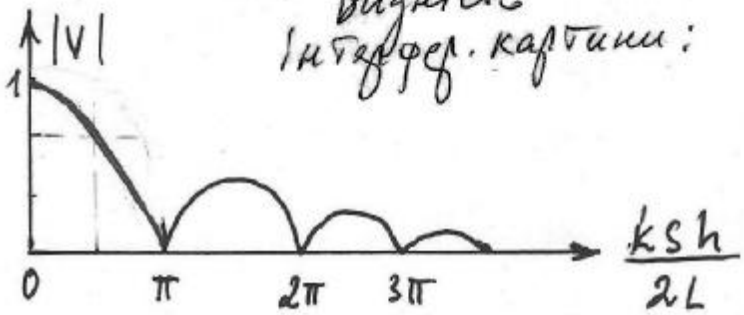
$$J_p = \int_{-\frac{h}{2}}^{h/2} dJ_p = J_1 + J_2 + 2\sqrt{K_1\cdot K_2}\cdot \frac{J_0}{h}\int_{-h/2} \cos\left(k\cdot\Delta_1 + k\,\frac{S\cdot y}{L}\right) dy$$

$$= J_1 + J_2 + 2\sqrt{K_1\cdot K_2}\cdot \frac{J_0 \sin(kSh/2L)}{\frac{kSh}{2L}} \cdot \cos k\cdot\Delta_1$$

$$V = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max} + J_{min}}$$

$$\boxed{V = \frac{\sin\frac{kSh}{2L}}{\frac{kSh}{2L}}}$$

видність інтерфер. картини:



1) $V = 0$ при $\frac{kSh}{2L} = \pi$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{kSh}{2L} = \frac{2\pi Sh}{2\lambda L} = \pi \Rightarrow \frac{S\cdot h}{\lambda\cdot L} = 1 \Rightarrow$$

При умові, що $\frac{S\cdot h}{L} = \lambda$ – інтерференції немає.

2) Якщо $\frac{k\cdot Sh}{2L} = \frac{\pi}{2}$, то $V = \frac{2}{3}$

При $J_1 = J_2$: в цьому випадку $V \sim 70\%$

$\boxed{\frac{S\cdot h}{L} < \lambda}$ Умова просторової когерентності.

Реальне джерело можна вважати точковим, якщо $Sh/L \ll \lambda$

111 111

$\frac{h}{L} = \alpha$ – кутовий розмір джерела $\Rightarrow$ $\boxed{S \cdot \alpha < \lambda}$ Умова просторової когерентн.

$S < \frac{\lambda}{\alpha}$ – умова для відстані між щілинами

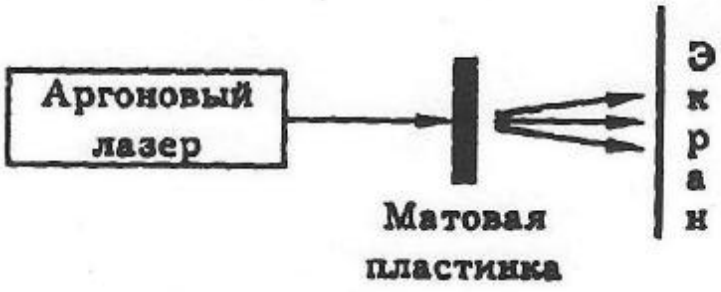
Висновки:

1. Обираючи більшу λ, можна працювати з більшими розмірами джерела (h) і з більшими величинами S
2. Чим менша відстань L між джерелом і щілинами, тим розмір джерела повинен бути меншим.
3. Чим більша відстань S між щілинами, тим меншим повинен бути розмір джерела (h).
4. Величина джерела дає виграш у світлосилі, але програш у просторовій когерентності.
5. Вводять поняття: радіус когерентності – як радіус перерізу променя, в межах якого виконується умова просторової когерентності $r_к = \frac{\lambda \cdot L}{h}$

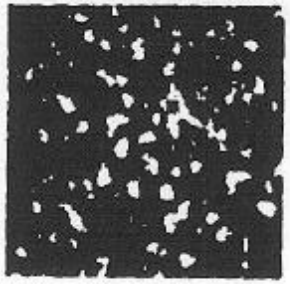
L – відстань від джерела світла до т. спостереження;
h – розмір джерела; λ – довж. світлової хвилі.
По мірі віддалення від джерела ($L\uparrow$) радіус когерент. ності зростає ($r_к \uparrow$).

- Оцінимо $r_к$ прямого сонячного світла: $L = 150$ млн км; $h = 0.7$ млн км; $\lambda = 0.5$ мкм $\Rightarrow$ $r_к = 10^{-2}$ см $= 0.1$ мм
- Для розсіяного сонячного світла (наприклад, світло в хмарний день): $L/h \approx 1$; $\lambda = 0.5$ мкм $\Rightarrow$ $r_к \sim \lambda \approx 10^{-4}$ см
- Промінь лазера може бути когерентним по всьому поперечному перерізу лазерного променя. Для отримання голограм можна використовувати широкі лазерні промені з $r_к \sim 1$ м.

Спекл-структура плями від лазерного променя - характеристика його когерентних властивостей



а)

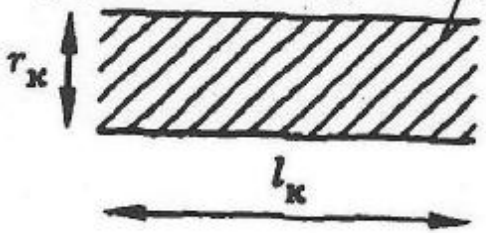


б)

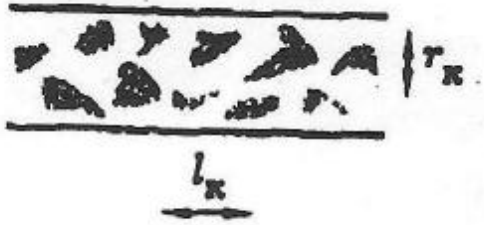
Спекли мають інтерференційне походження

Спекли свідчать про просторову когерентність вихідного променя

Некогерентне джерело спеклів не утворює



а)



б)

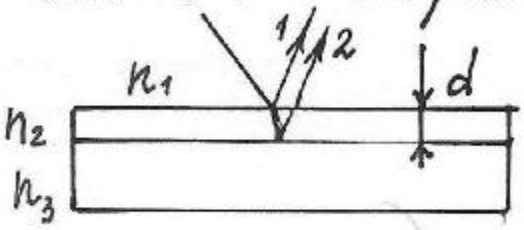
Параметри $r_к$ та $L_к$ хар-ють середні розміри областей кристалу, в межах яких хвиля має структуру, близьку до ідеально гармонічної хвилі. Можна уявити собі ідеально когерентне світло ($L_к \to \infty$, $r_к \to \infty$) - див. рис. а.

114 114

Застосування інтерференції

1. Просвітлена оптика

При нормальному падінні світла на поверхню скла відбивається 4% світла (див. формули Френеля). Опт. системи можуть складатись із десятків оптичн. елементів. Задача – зменшити долю відбитого світла



На поверхню наносять тонкий діел. шар, який може істотно зменшити відбитий потік (для визначеного діапазону $\Delta\lambda$).

$n_3 > n_2 > n_1 = 1$ (для повітря)

$$R_{12} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \qquad R_{23} = \left(\frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}\right)^2$$

Амплітуди променів 1 та 2 мають бути однакові

$$R_{12} = R_{23} \Rightarrow \boxed{n_2 = \sqrt{n_1 \cdot n_3}}$$

Для покриття, як правило, обирають MgF_2 ($n = 1.38$) або SiO_2

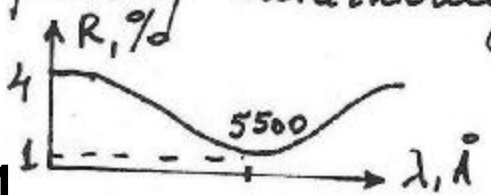
Промені 1, 2 повинні інтерферувати. Розрахуємо d:

$$2d n_2 \cos\varphi - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

$\varphi = 0$ (норм. падіння) $\Rightarrow$ $2d n_2 = \frac{\lambda}{2}$ $(m=0)$

$$\boxed{d = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n_1 \cdot n_3}}}$$

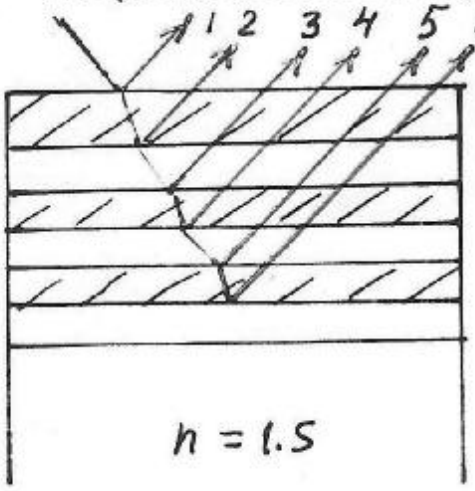
Але через те, що закони дисперсії для n_1 та n_3 різні, просвітлення оптики працює не в усьому оптичному діапазоні. Як правило, роблять в жовто-зеленому діапазоні



Роблять 3–5 шарів

114 114

2. Інтерференційне дзеркало (задача – обернена до задачі просвітлення оптики)



$n_1 = 2.3$ – сульфіт цинку ZnS
$n_2 = 1.32$ – кріоліт
n_1
n_2
n_1

$$d_1 \cdot n_1 = d_2 n_2 = \frac{\lambda}{4}$$

Промені 1, 2, 3, ... інтерферують між собою і підсилюють один одного $\Rightarrow$ $R = 96\%$ для 7 шарів, $R \approx 100\%$ для 11 шарів | Дзеркала для резонаторів в лазерах

Для інших λ таке дзеркало працює на пропускання

$$2dn\cdot\cos\varphi - \frac{\lambda}{2} = m\lambda \Rightarrow 2dn\cos\varphi = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

$d_i \cdot n_i = \frac{\lambda}{4}$ Різна товщина для різних n_i:

Чому металеве дзеркало гірше?

1) $R = 98\%$ відбивається, 2% – поглинається $\Rightarrow$ дзеркало нагрівається $\Rightarrow$ параметри „пливуть"
2) металеве дзеркало не селективне

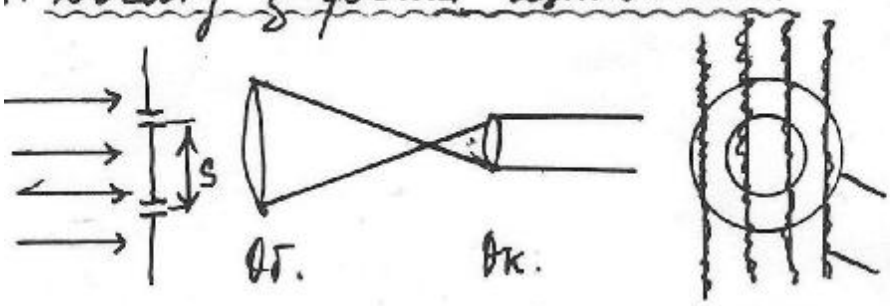
Інші використання інтерференції:

3. Вимірювання розмірів віддалених тіл (напр., зоряний інтерф. Майкельсона);
4. Визначення показн. заломл. (інтерф. Релея) Годжаєв, 111
5. Вивчення стану поверхні тв. тіл Годжаєв 104, Білий 93
6. Визначення малих кутів між поверхнями прозорих тіл Годжаєв 105, Білий 95
7. Визначення малих подовжень тіл Білий 95
8. Вивчення тонкої структури спектральних ліній Годжаєв 109–117

18.

Вимірювання діаметра зірок

1. Дослід з двома щілинами



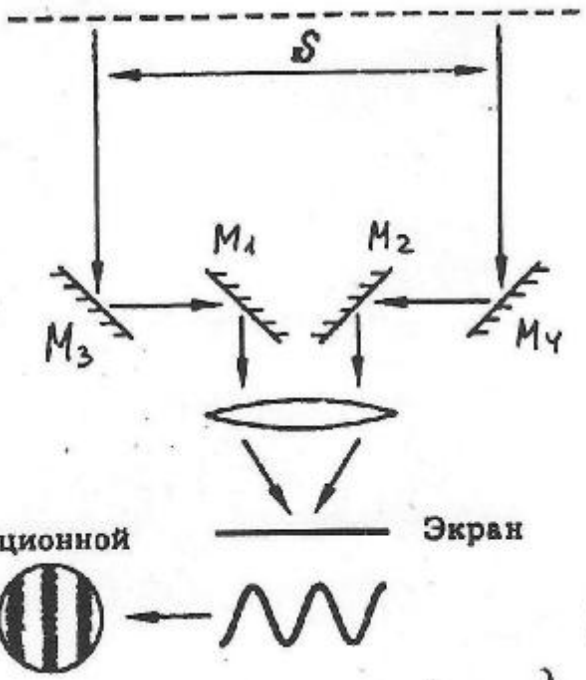
На оправі об'єктиву відбувається дифр. Дифракційні кільця інтерференційні смуги

$S \cdot \alpha < \lambda$ вигляд вихідної картинки

Якщо щілини розсувати, то контраст інтерф. картини погіршується і при деякому значенні S (коли $S \cdot \alpha = \lambda$) картинка зникне. Таким чином вимірюючи S, можна виміряти α. Реально $S \sim 1$ м

Це - метод Фізо

2. Зоряний інтерферометр Майкельсона *



Дзеркала M_1, M_2 - нерух. M_3, M_4 - можна одночасно розсувати

Період інтерф. картини визначається відстанню між M_1 та M_2

Ступінь когерентн. (видність смуг) залежить від відстані між M_3 та M_4

Вимірюють $r_к \Rightarrow$

кут. радіус зірки $\alpha = \frac{\lambda}{r_к}$ $r_к \approx 10$ м $\Rightarrow$

$\alpha \approx 0.01''$. (Кут. радіус Сонця із Землі $\sim 30' \approx 10^{-2}$ рад).

Виміряний радіус зірки Бетельгейзе: $\alpha = 0.047''$.

Відстань до зірки вимірюють по паралаксу $\Rightarrow D = 4 \cdot 10^8$ км

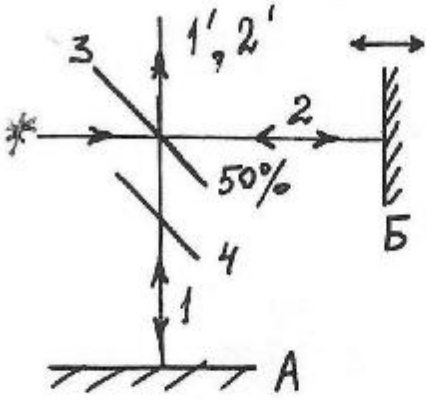
117 117

Інтерферометри

I. Двопроменеві інтерферометри

Призначення: вимірювання n, d, α (кутів), якості поверхні, λ, $\Delta\lambda$ - спектральні дослідження та дослідження когерентних властивостей джерела.

а) Інтерферометр Майкельсона



Може працювати в режимах СРН та СРТ

1) СРН: дзеркало А ⊥ дзеркалу Б

$l_1 \neq l_2 \Rightarrow \Delta = 2(l_1 - l_2)\cdot n$

Інтерф. картина у вигляді концентрич. кілець. Max порядок інтерф. - в центрі;

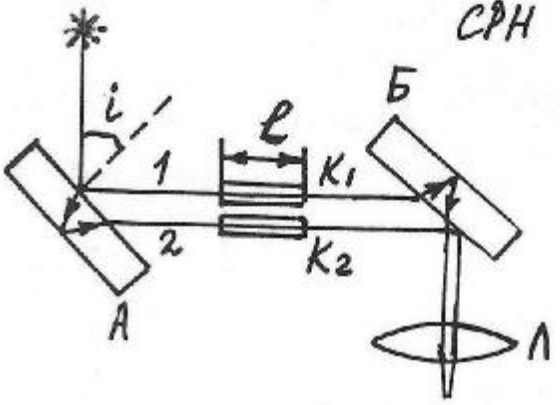
2) СРТ: дзеркала А та Б під кутом.

Зміна кута між дзеркалами створює інтерфер. картину: кільця стискаються і розширюються.

При русі дз. Б інтерф. картина може зникнути. Це відбувається, коли $\Delta = 2(l_2 - l_1) = L_к = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$.

Візуально розрізняють зміщення інтерф. картини з точністю до 1/20 смуги. У спец. випадках - до 1/1000 смуги. Це дозволяє вимірювати $\Delta l \sim 10^{-9}$ м.

б) Інтерферометр Жамена: виникає додаткова різн. ходу



СРН

$$\Delta = (n_2 - n_1)\,l$$

$$\Delta m = \frac{(n_2 - n_1)\,l}{\lambda}$$

$$n_2 = n_1 + \lambda \cdot \frac{\Delta m}{l}$$

При $l = 5$ см; $\lambda = 0.5$ мкм;

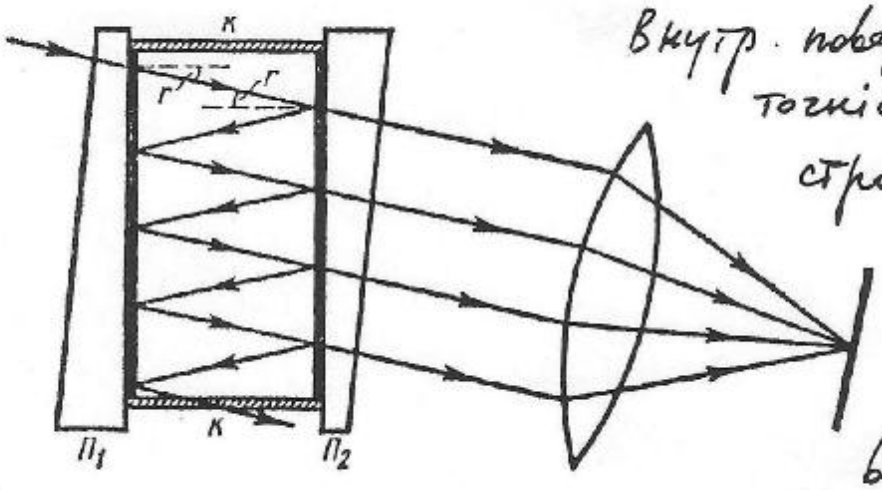
$\Delta m = 0.1 \Rightarrow \Delta n = 10^{-6}$!

117 117

118 118

II. Багатопроменеві інтерферометри

Інтерферометр Фабрі-Перо



Внутр. поверхні оброблені з точністю до $(1/200)\lambda$ і строго паралельні одна одній, покриті тонким шаром срібла з високим коеф. відбиття – (80-95)% і незначним пропусканням. Зовнішні поверхні утворюють з внутр. поверхнями кут (1-2)'. Пластинки, як правило, мають круглу форму ф 50-60 мм. Паралельність досягається за допомогою кільця з інвару (тін коеф. теплового розшир.) або кварцу.



„Кільця рівного нахилу"

Якщо відстань між відбиваючими поверхнями постійна, то такий прилад назив. еталоном Ф.-П. Якщо передбачена зміна відстані h (неперервна або набором кілець), то – спектральний прилад – інтерфер. Ф.-П. Відстань h: від 0.3 мм до 100 мм, в еталонах – до 1 м.

Характеристики: 1) Порядок інтерференції:

$2h \cdot \cos\gamma = m\cdot\lambda$; $m_{max} = \frac{2h}{\lambda}$ для $\gamma \approx 0$

Якщо $\lambda = 500$ нм; $h = 0.5$ см, то $m_{max} = 2\cdot 10^4$

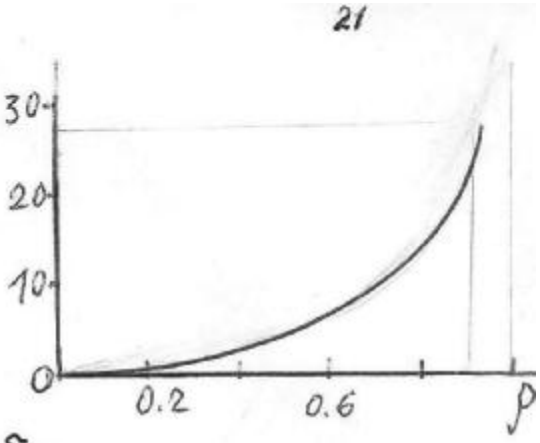
2) Різкість інтерфер. картини $T = 1-\rho$;

$$I_{пр} = \frac{E_0^2 T^2}{(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2 \Delta\varphi/2} =$$

118 118

$$= \frac{E_0^2}{1 + \frac{4\rho}{(1-\rho)^2}\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{J_0}{1 + F\cdot\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

де $F = \frac{4\rho}{(1-\rho)^2}$ – фактор різкості



3) Ширина інтерф. смуги

$2h\cdot\cos r = m\lambda \Rightarrow -2h\sin r\cdot\delta r = \lambda\cdot\delta m$

δr – кут між сусідніми max, якщо $\delta m = 1$

$$\boxed{\delta r = -\frac{\lambda}{2h\cdot\sin r}}$$

Чим більша h, тим менша δr (вужча інтерф. смуга)

Підвищуй h! До яких пір?

$m_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$. З іншого боку $m_{max} = \frac{2h}{\lambda}$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2h}{\lambda} \Rightarrow h = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$$

4) Область вільної дисперсії – спектр. інтервал, в якому можна спостерігати інтерф. картину ($\Delta\lambda$)

$L_к = m_{max}\cdot\lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{max}}$

Якщо $\lambda = 500$ нм; $m_{max} = 2\cdot10^6$, то $\Delta\lambda = 0.25$ Å!
Це для $h = 5$ см. При збільшенні h величина $\Delta\lambda$ не зменшується! Але на вході інтерф. Ф.-П. треба ставити фільтр, монохроматор або лазер.

5) Кутова дисперсія: $D_\alpha = \frac{d\alpha}{d\lambda}$, де α – кут, який відповідає напрямку на max

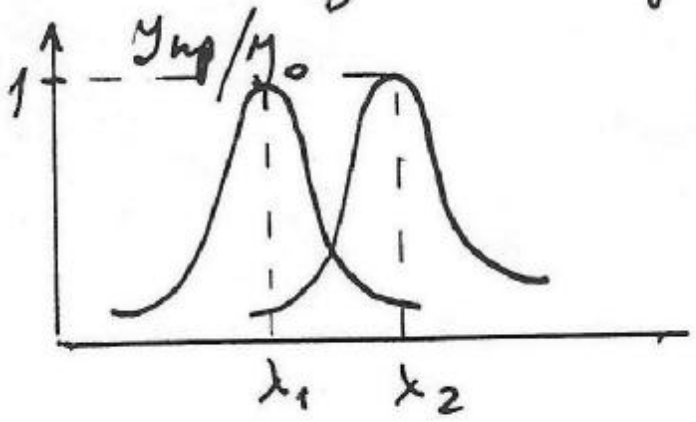
$2h\cdot\cos\alpha = m\lambda$

$-2h\sin\alpha\cdot d\alpha = m\,d\lambda$

$$D_\alpha = \frac{d\alpha}{d\lambda} = -\frac{m}{2h\cdot\sin\alpha} \overset{m=\frac{2h\cdot\cos\alpha}{\lambda}}{=} -\frac{1}{\lambda\cdot\operatorname{tg}\alpha}$$

б) Роздільна здатність (R)

Є 2 близькі спектральні лінії: λ_1 та λ_2 ($\lambda_2 - \lambda_1 = \delta\lambda$)



$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$. Можна показати, що:

$$R_{max} = \frac{2h}{\lambda} \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}$$

R_{max} – це розд. здатність інтерф.

Врахування обмеженої апертури та поглинання дає зменшення $R_{max} \sim 10^6$. Тоді

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{5000\,\text{Å}}{10^6} = 5 \cdot 10^{-3}\,\text{Å}$$

В інтерфер. Ф.-П. число променів, що інтерферують, $N \sim 30$; $m_{max} \sim 10^4 - 10^6$; $R \sim 10^5 - 10^6$

Різниця ходу $\Delta = 2h \cdot n \cdot \cos\alpha \Rightarrow \Delta_{max} = 2hn \approx$

В інтерферф. Майкельсона Δ_{max} – більша ≈ 50 см

Дифракція світла

Дифракція пов'язана з відхиленням від прямолін. розповсюдження світл. хвиль (порівняно з напрямом, передбаченим законом геом. оптики) та з просторовим перерозподілом інтенс. світла під впливом перешкод та неоднорідностей на їх шляху.

А. Зоммерфельд: „Дифр. – будь-яке відхилення у розповсюдженні світла від прямолінійного, не пов'язане з відбиттям або заломленням."

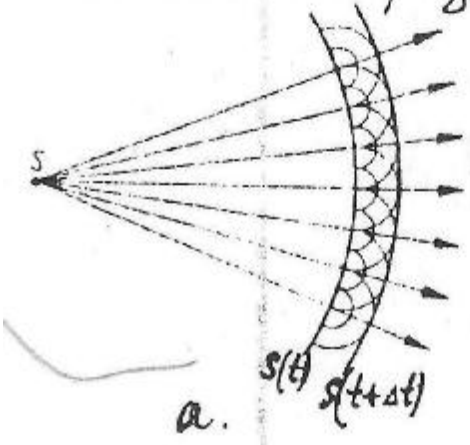
Дифракція – прояв хвильової природи світла.

Гримальді (1665 р.) описав дифр., Гюйгенс (1690 р.), Френель (1818 р.), Кірхгоф (1882 р.)

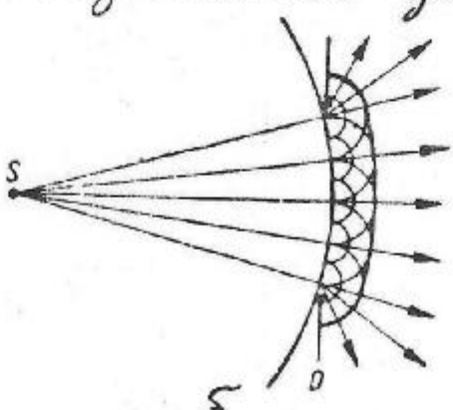
Принцип Гюйгенса: кожна т. хвил. фронту можна вважати центром вторинних елементарних світлових хвиль. Хвил. фронт у будь-який момент часу визначається як огинаюча поверхня цих елем. вторинних хвиль.

Це геом. метод побудови хвильового фронту.

О. Френель доповнив принцип Гюйг.: вторинні хвилі між собою інтерферують. Вони когерентні між собою – оскільки їх фази визначаються збудженням, яке зумовлене дією одного первинного джерела.



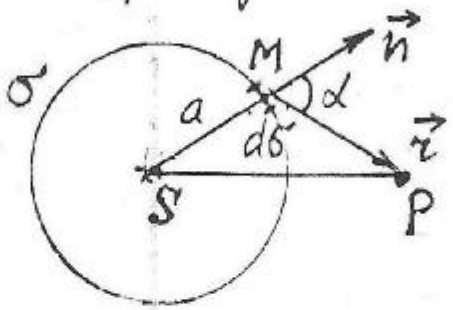
а.



б.

Дифракційний інтеграл Френеля. (Математичне формулювання принципу Гюйгенса-Френеля)

Згідно до Френеля кожний елемент поверхні хвильового фронту σ випромінює вторинну хвилю.



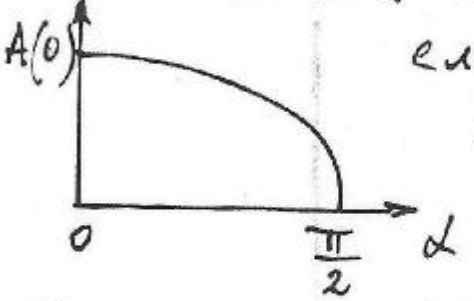
Хвильове поле в т. P (точка спостереж.) являє собою суперпозицію вторинних хвиль і визначається інтегралом (1)

Інтеграл (1) $E(P) = \iint_{\sigma} \underbrace{E_0 \frac{e^{-ika}}{a}}_{E(M)} \cdot A(\alpha) \cdot \frac{1}{r} e^{-ikr} \, d\sigma$

де $E(P)$ та $E(M)$ - комплексні амплітуди поля

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$. Множник $\frac{e^{-ikr}}{r}$ описує розподіл елементарної вторинної сферичної хвилі.

$A(\alpha)$ - „коеф. нахилу", змінюється від 1 до 0 при зміні α від 0 до $\pi/2$. Враховує той факт, що внесок елемента $d\sigma$ в результуюче поле в т. P залежить від орієнтації цього елементу поверхні відносно напрямку на т. P.



$$A(0) = 1 \; ; \quad A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

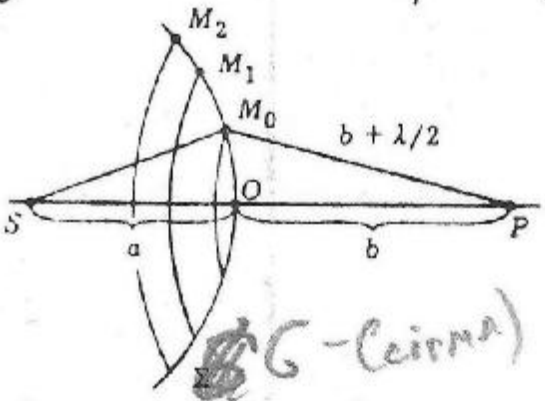
Інтеграл враховує фази вторинних хвиль, які приходять в т. P від різних елементів поверхні σ. Так враховується інтерференція вторинних хвиль.

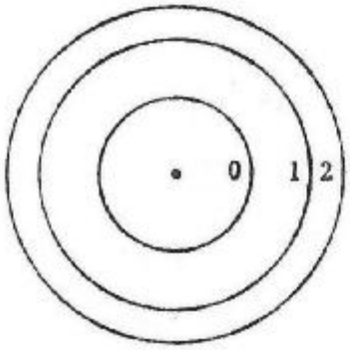
$$E(P) = \iint_{\sigma} E(M) \cdot A(\alpha) \cdot \frac{1}{r} e^{-i(kr - \omega t + \varphi_0)} \, d\sigma$$

123 123

Зони Френеля (сігма)

Оберемо на поверхні σ, яка в даному випадку обов'язково повинна бути сферичною, кільцеві зони так, щоб відстані від границь зони до т. спостереження P відрізнялись на $\frac{\lambda}{2}$. Края зон: $M_0, M_1, M_2, \ldots$



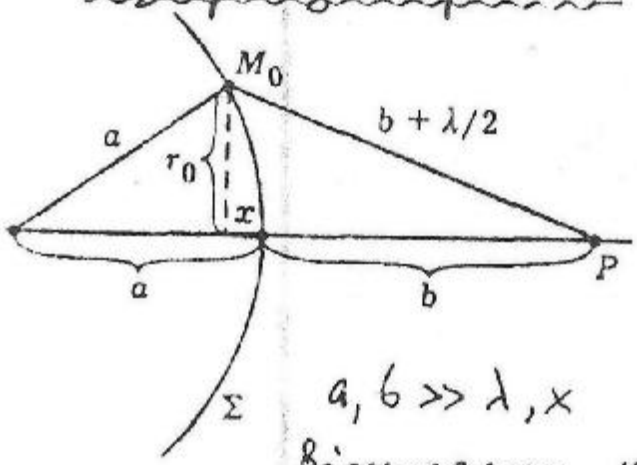


т. O – центр нульової зони Фр.

Кожну зону Фр. розглядаємо, як джерело вторинних хвиль з визначеною фазою. Дві сусідні зони Фр. діють як джерела, які коливаються у протифазі.

$$\begin{cases} M_0P = OP + \frac{\lambda}{2} \\ M_1P = M_0P + \frac{\lambda}{2} \\ \ldots\ldots \\ M_nP = M_{n-1}P + \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

Розміри зон Френеля.



Положення країв зон Фр. залежить від відстані до т. P

$$r_0^2 = a^2 - (a-x)^2$$
$$r_0^2 = \left(b + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b+x)^2$$
$$2ax = b\lambda - 2bx + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$$

$a, b \gg \lambda, x$

Відкидаємо члени $\sim x^2$ та λ^2

$$x = \frac{b\cdot\lambda}{2(a+b)} \quad \text{та} \quad r_0^2 \approx 2ax \Rightarrow \boxed{r_0 = \sqrt{\frac{\lambda\cdot a\cdot b}{a+b}}}$$

Аналогічно знаходимо:

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\boxed{r_n = \sqrt{(n+1)\frac{\lambda\cdot a\cdot b}{a+b}}}$$

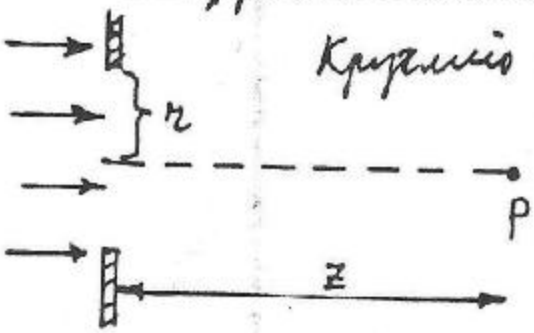
Площа n-ої зони Фр: $S_n = \pi\left(r_n^2 - r_{n-1}^2\right) = \pi\frac{\lambda\cdot a\cdot b}{a+b} \neq f(n)$

(Площі всіх зон Фр. однакові).

123 123

124
124

Дифракція плоскої хвилі



Кругліий отвір діаметром $2r$

$a \to \infty$; $b = z$

$$r_n = \sqrt{(n+1)\lambda \cdot z}$$

Площа зони Фр. $S_n = \pi(r_n^2 - r_{n-1}^2) =$

$= \pi \cdot \lambda \cdot z \neq f(n)$!

Число Френеля:

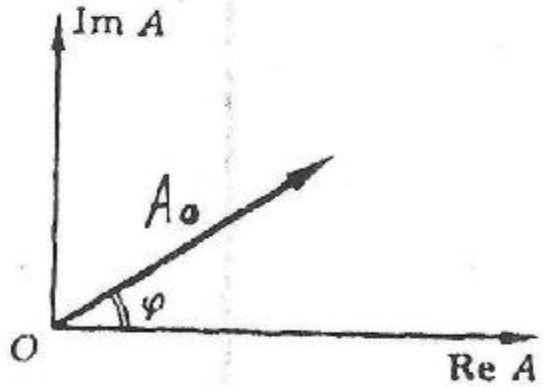
N_F - число зон Фр., яке попадає в межі отвору (число відкритих зон Фр.).

Якщо покласти $r_n = r$, $n+1 = N_F$, то $N_F = \frac{r^2}{\lambda \cdot z}$

Побудова дифракційних картин графічним способом.

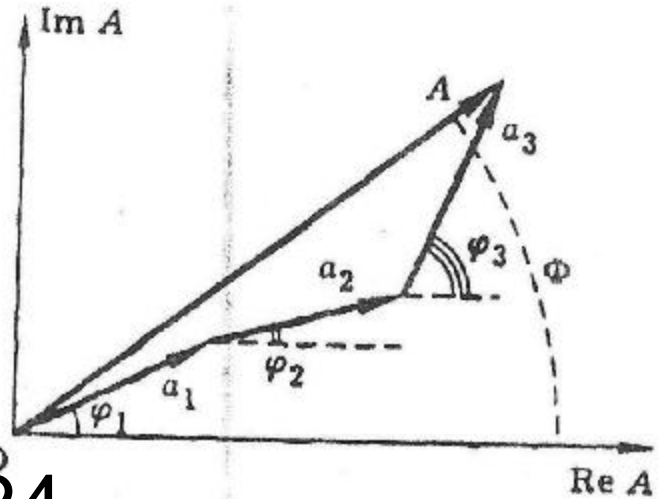
(Метод спіралі Френеля)

Векторна діаграма. Гармонічні коливання з амплітудою A_0 та фазою φ Можна представити у вигляді комплексного числа $A = A_0 \exp(i\varphi)$ або вектором на площині змінних Re A та Im A (довжина вектора – A_0, кут нахилу вектора до осі Re A - φ.



$$A = Re\,A + i \cdot Im\,A$$

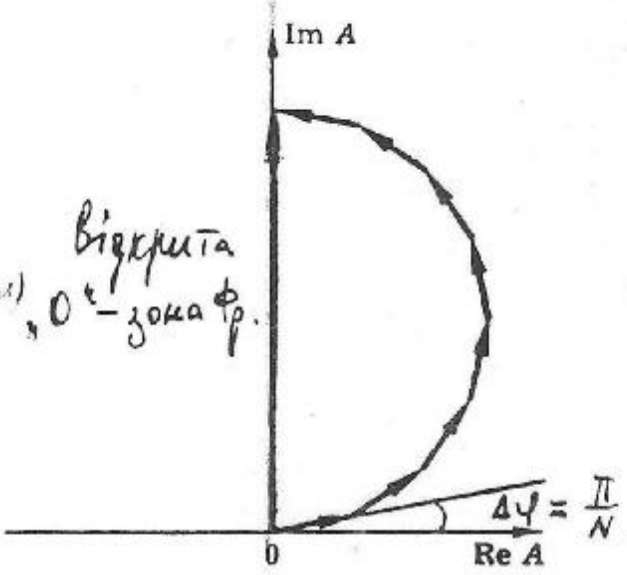
$$A = A_0 \cdot e^{i\varphi}$$



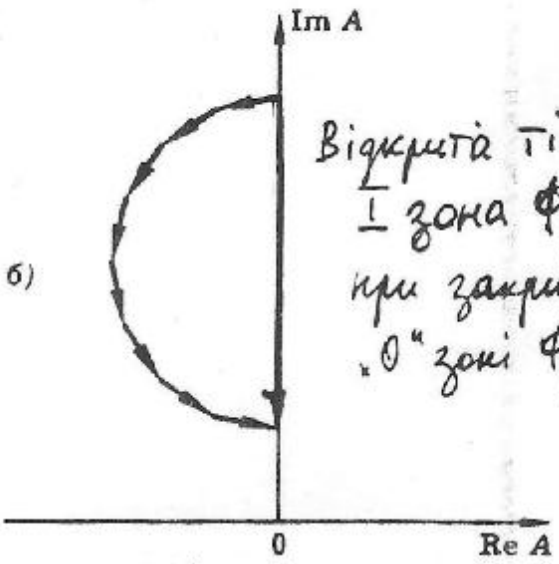
Як додати декілька гармонічних коливань частоти ω з довільними амплітудами та фазами:

$$\vec{A} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$$

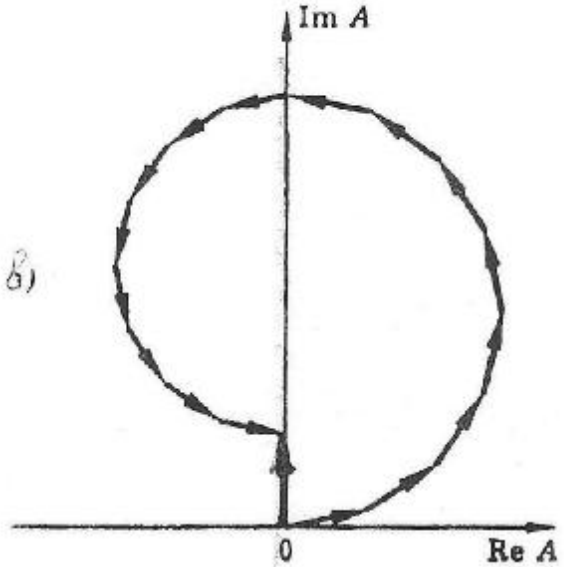
124
124



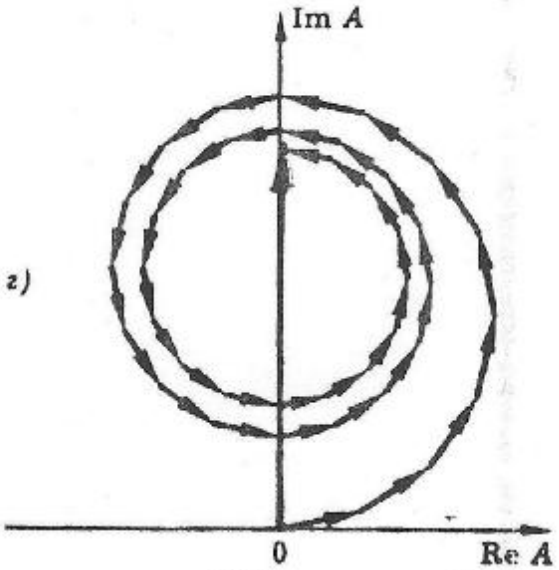
а) Відкрита „0" – зона Фр.



б) Відкрита тільки I зона Френеля при закритій „0" зоні Фр.

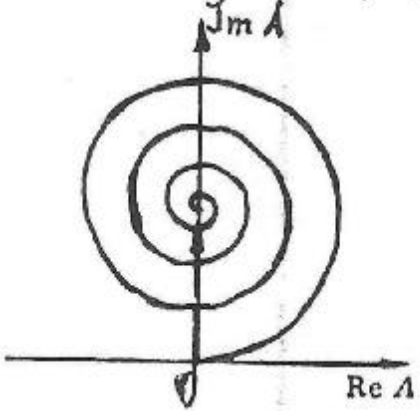


в) Відкриті „0" та „I" зони Фр.

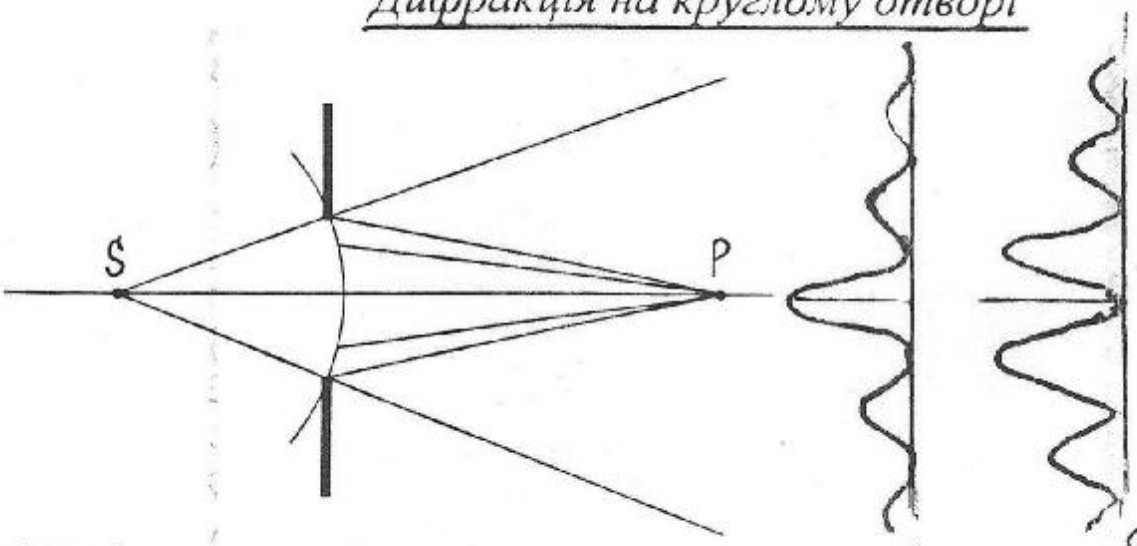


г) Відкрито 5 зон Фр.

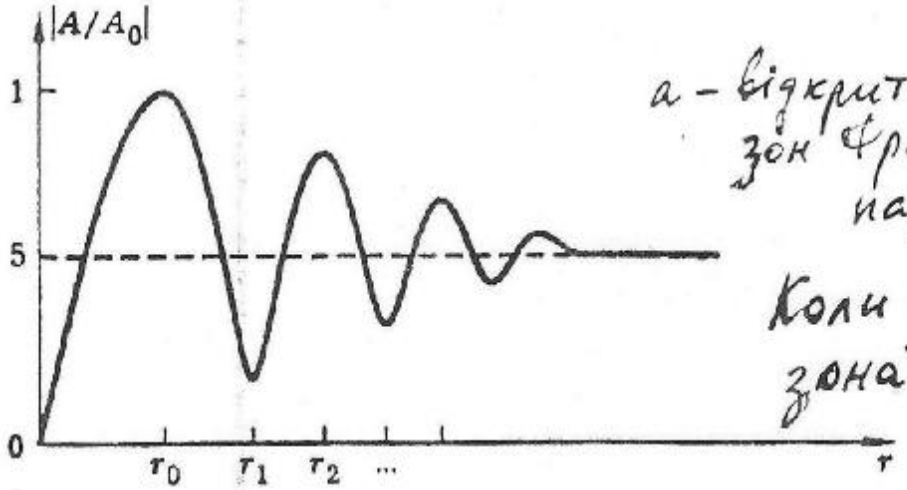
Якщо кожну зону Фр. поділити на ∞ кількість підзон ($N \to \infty$), то ламана крива перетворюється в дугу і кожній зоні Фр. відповідає піввитка спіралі



Дифракція на круглому отворі

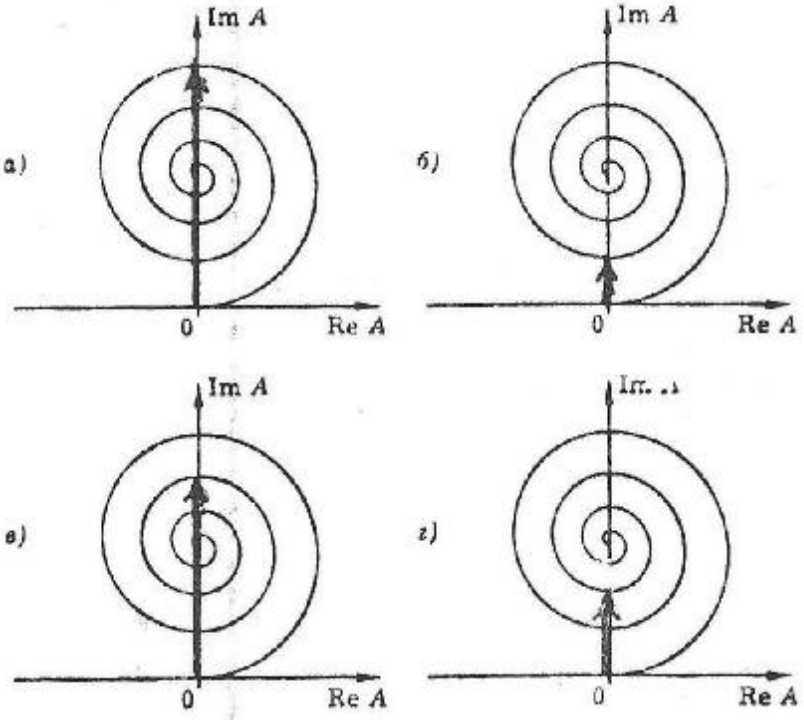


а. б.

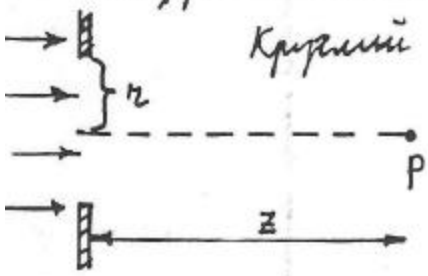


а – відкрита непарна кількість зон Френеля, б – відкрита парна кількість зон Фр.

Коли відкрита лише "0"-зона Фр., то амплітуда в т. P в 2 рази, а інтенсивність в 4 рази більша за випадок, коли відкриті всі зони Фр. (екран відсутній)



Дифракція плоскої хвилі



Круглий отвір діаметром $2r$

$a \to \infty$; $b = z$

$$r_n = \sqrt{(n+1)\lambda \cdot z}$$

Площа зони Фр. $S_n = \pi(r_n^2 - r_{n-1}^2) = \pi \cdot \lambda \cdot z \neq f(n)$!

Число Френеля: N_F – число зон Фр., яке попадає в межі отвору (число відкритих зон Фр.).

Якщо покласти $r_n = r$, $n+1 = N_F$, то $\boxed{N_F = \frac{r^2}{\lambda \cdot z}}$

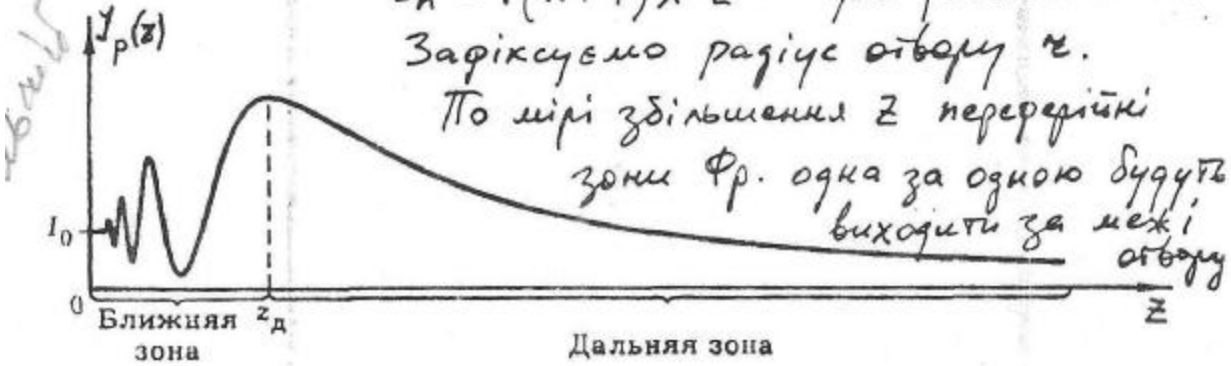
Дифракційна довжина світлового променя. Ближня та дальня зони.

Продовжимо розгляд дифр. плоскої хвилі на кругл. отворі. Як змінюється інт. світла в т.P по мірі збільшення відстані до екрану z:

$r_n = \sqrt{(n+1)\lambda \cdot z}$ – для фіксованої z.

Зафіксуємо радіус отвору r.

По мірі збільшення z перефрійні зони Фр. одна за одною будуть виходити за межі отвору



При деякому $z = z_д$ в межах отвору залишиться лише одна „0" зона Фр. В цей момент інтенсивність світла I_p досягне max, після чого монотонно почне зменшуватись по мірі збільшення z.

Для $z \ll z_д$ – ближня зона дифракції. В цій зоні:

- світл. промінь зберігає структуру, задану отвором;
- інтенс. світла в середньому приблизно дорівнює інтенс. падаючої світл. хвилі;
- в межах отвору вміщується певна кількість зон Фр.;
- поперечний переріз променя підтримується постійним (за рахунок інтерференції елементарних вторинних хвиль, які йдуть від різних зон Фр.);

128 128 128 128

Для $z \gg z_g$ – дальня зона дифракції. В цій зоні:

- інтенс. світла на осі променя набагато менша за інтенс. вихідного променя; це означає, що промінь розширюється ?!?!
- для точок дальної зони в межах отвору вміщується тільки частина (центральної) „0" – зони Фр.
- інтерференція елементарних вторинних хвиль виражена слабше. Вона не може підтримати вихідний поперечний профіль променя. Промінь стає розбіжним!

Знайдемо z_g: $r_n = \sqrt{(n+1)\lambda \cdot z} \xrightarrow{n=0} \boxed{z_g = \frac{r^2}{\lambda}}$

r – радіус променя (радіус отвору)

Вводимо число Френеля $N_F = r^2/\lambda \cdot z$. Тоді

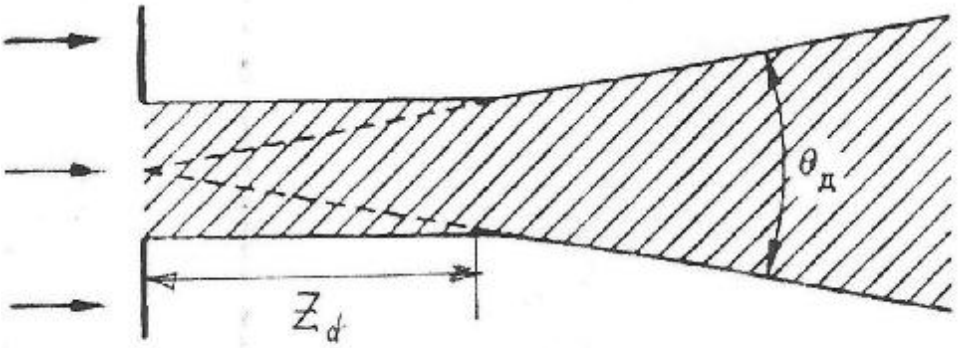
$\boxed{N_F = \frac{z_g}{z}}$

В ближній зоні $N_F > 1$

В дальній зоні $N_F < 1$

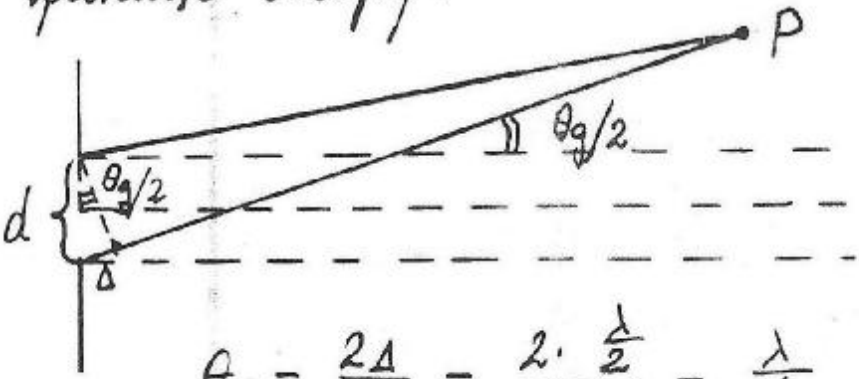
z_g – дифракційна довжина світлового променя

Дифракційна розбіжність променя в дальній зоні



Інтерференція вторинних елементарних хвиль визначає положення границі світлового променя.

Умова інтерф.: $\Delta = \frac{\lambda}{2}$, де Δ – різниця ходу 2-х променів, які приходять від протилежних границь отвору.



$\Delta \approx d \cdot \sin\frac{\theta_g}{2}$

θ_g – кут дифракційної розбіжності,

Як правило: $\theta_g \ll 1$

Тому $\Delta \approx d \cdot \frac{\theta_g}{2}$

$$\theta_g = \frac{2\Delta}{d} = \frac{2 \cdot \frac{\lambda}{2}}{d} = \frac{\lambda}{d}$$

$$\boxed{\theta_g = \frac{\lambda}{d}}$$

Діаметр променя в дальній зоні:

$$\boxed{d(z) = \frac{\lambda}{d} \cdot z}$$

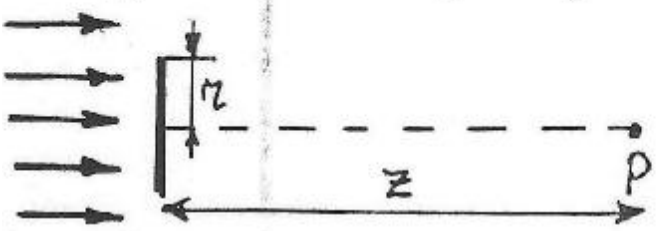
Зробимо оцінки для He-Ne лазера:

$d = 2$ мм; $\lambda = 0.63$ мкм

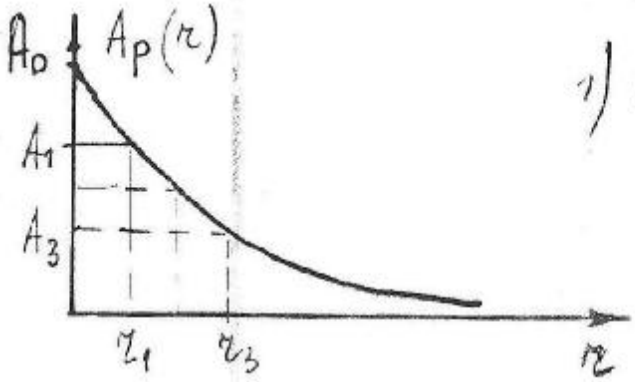
$z_g = 1.5$ м; $\theta_g = 3 \cdot 10^{-4}$ рад.

Ці розрахунки можна легко перевірити на досліді.

Дифракція на диску. Плями Пуассона

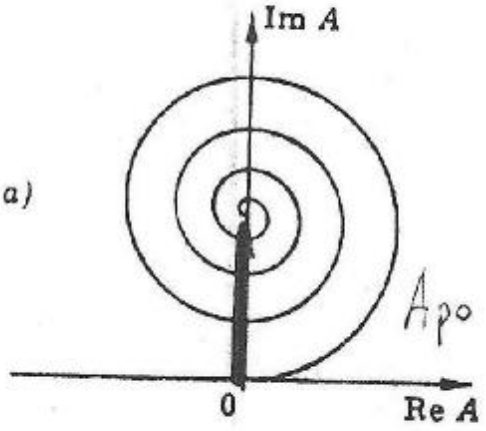


Хвиля – плоска, монохроматична

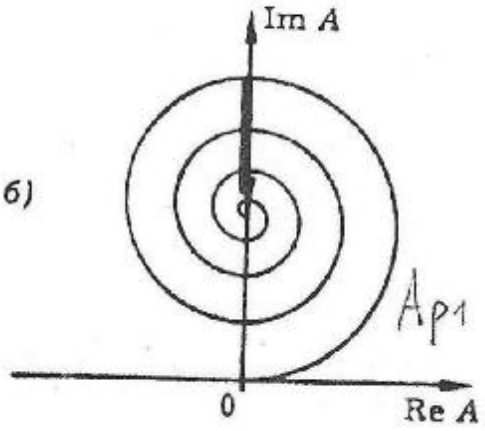


1) Амплітуда світлових коливань в т. P (A_p) залежить від радіусу диску.

2) Навіть при великому радіусі в центрі геом. тіні інтенсивність світла ≠ 0. Точка Пуасона.

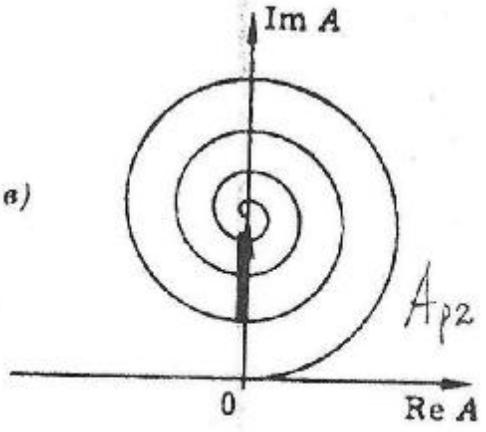


а)

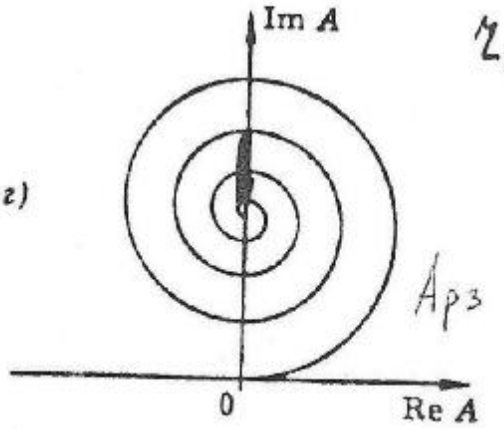


б)

Обидві властивості витікають із зведень до спіралі Фр.



в)

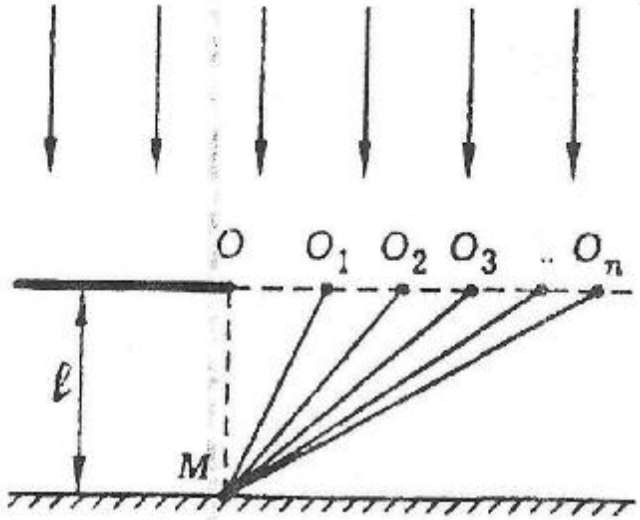


г)

$$r_n = \sqrt{(n+1)\lambda \cdot z}$$

Дифракція на краю екрана

Одна з основних задач дифракції: як відбувається перехід від світла до тіні на межі геометр. оптики та хвильової оптики. Скористаємось методом зон Френеля (у випадку циліндричної хвилі – зон Шустера).



Введемо зони Фр. для т. M_1 яка лежить на екрані точно під його краєм (межею). Зони Френеля плоскі смуги, паралельні краю екрану. Межі зон Фр. – $O_1, O_2, O_3 \dots O_n$

$$\begin{cases} OM = l \\ O_1M = l + \frac{\lambda}{2} \\ O_2M = O_1M + \frac{\lambda}{2} = \\ \dots \\ = l + 2\frac{\lambda}{2}; \end{cases}$$

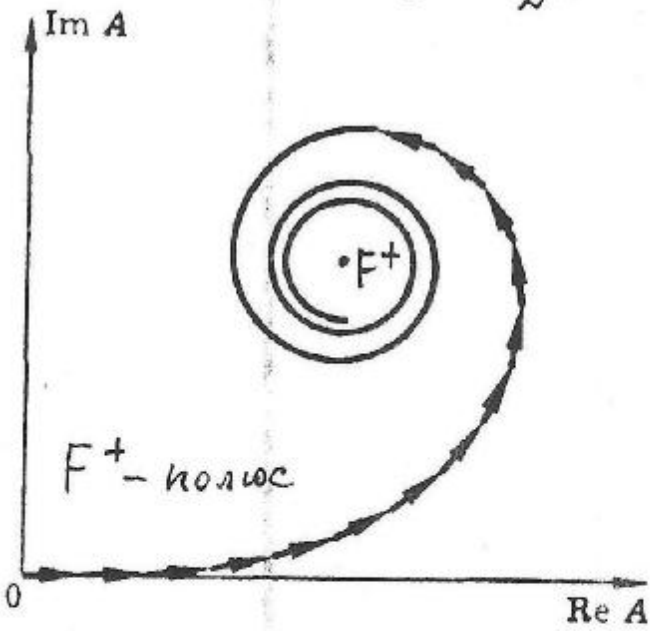
Позначимо через d_n відстань від краю екрана до початку зони Фр. з номером n

$$d_n^2 = OO_n^2 = \left(l + n\frac{\lambda}{2}\right)^2 - l^2 =$$

$$= nl\lambda + \left(n\frac{\lambda}{2}\right)^2$$

$l \gg \lambda \Rightarrow$ можна знехтувати членами $\sim \lambda^2$. Тоді

$$d_n = \sqrt{n \cdot l \cdot \lambda} \Rightarrow d_n \sim \sqrt{n}$$



Площа n-ої зони Фр.

$$S_n = (d_{n+1} - d_n) \cdot L$$

де L – довжина екрану

$$S_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot L \cdot \sqrt{\lambda l} = \frac{L \cdot \sqrt{\lambda \cdot l}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \approx \frac{L}{2}\sqrt{\frac{\lambda \cdot l}{n}} \Rightarrow$$

$S_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ Нагадаємо, що раніше (при розгляді дифракції на круглому отворі, круглому екрані) $S_n \approx const \neq f(n)$.

Ділять кожну із зон Фр. на велике (аж до ∞) число підзон.

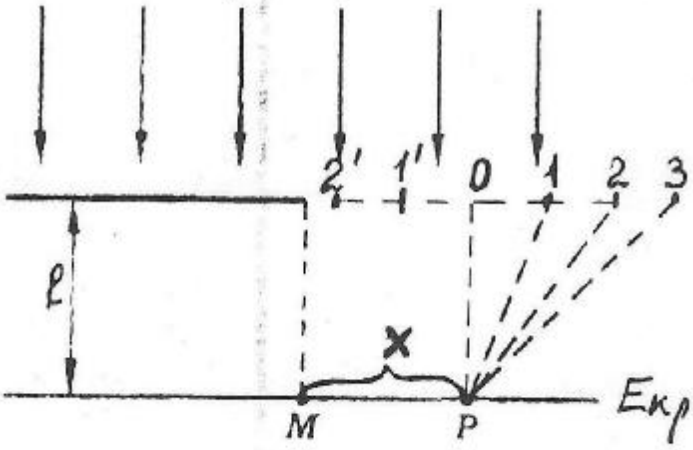
Для визначення інтенс. продифрагованого світла потрібно просумувати коливання, які створюються в т. P елементарними вторинними хвилями, які приходять від всіх відкритих зон та підзон.

Сумування проводять методом векторних діаграм.

Через те, що ширина зони і її площа по мірі віддалення від краю екрану весь час зменшуються, то довжина вектора, який зображає внесок окремої зони (підзони), буде весь час зменшуватись; тим більше, чим далі розташована зона (підзона) від краю екрану.

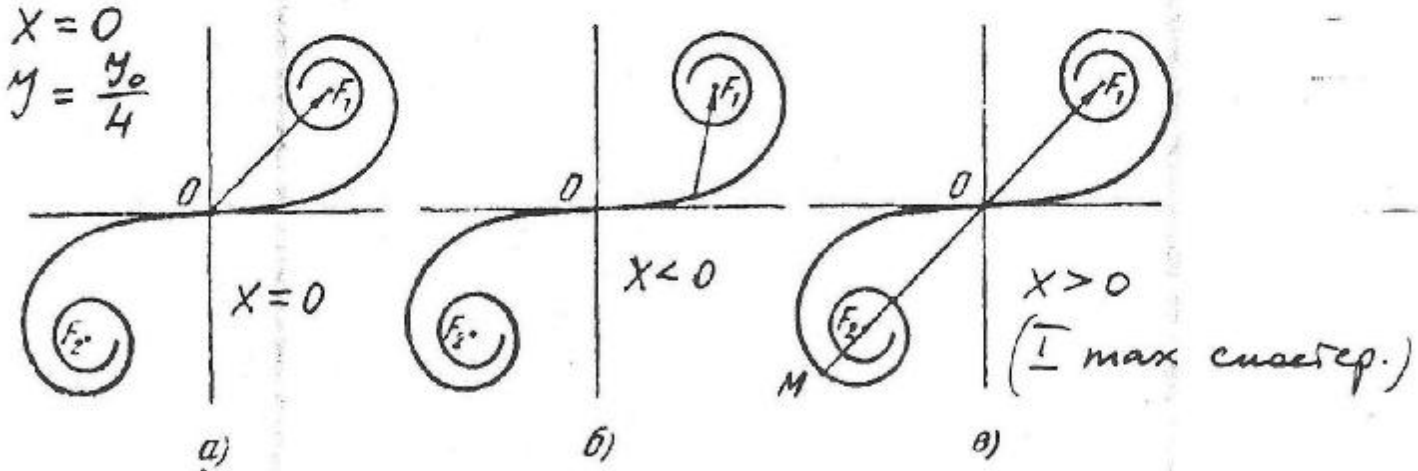
133

Як користуватись спіраллю Корню: (зонний метод ?)

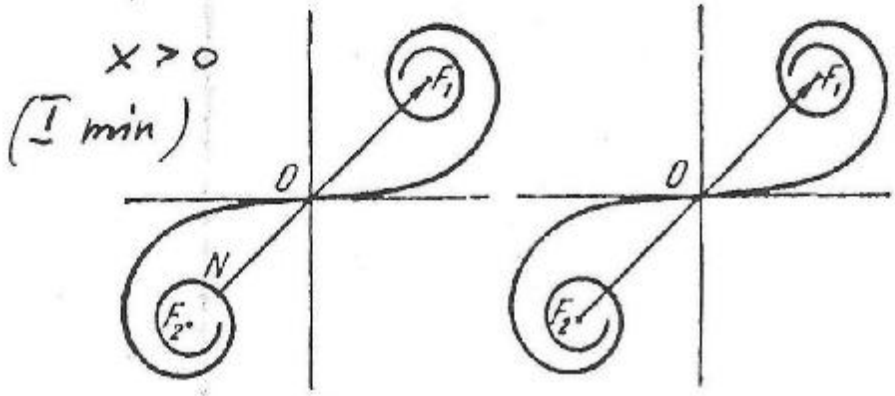


Зони з номерами т та т' мають однакову ширину. Коливання від нештрихованих зон описуються правим завитком спіралі. За коливання від штрихованих зон відповідає лівий завиток спіралі Корню.

1. Якщо т. P лежить на межі геом. тіні, то коливання від нештрихованих зон (штриховані зони закриті) дадуть результ. вектор, початок якого - в т. O, а кінець - в т. F_1 (рис. а): $J = \left(\frac{1}{2} E_0\right)^2 = \frac{1}{4} J_0$



а) б) в)



г)

повністю відкриті всі зони (екрану немає).

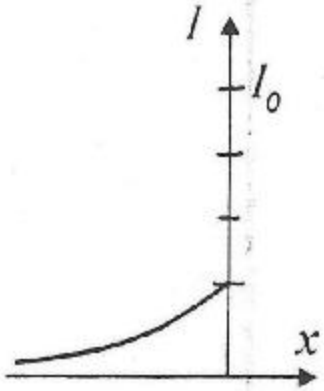
$J = J_0 = A_0^2$

д)

133

134

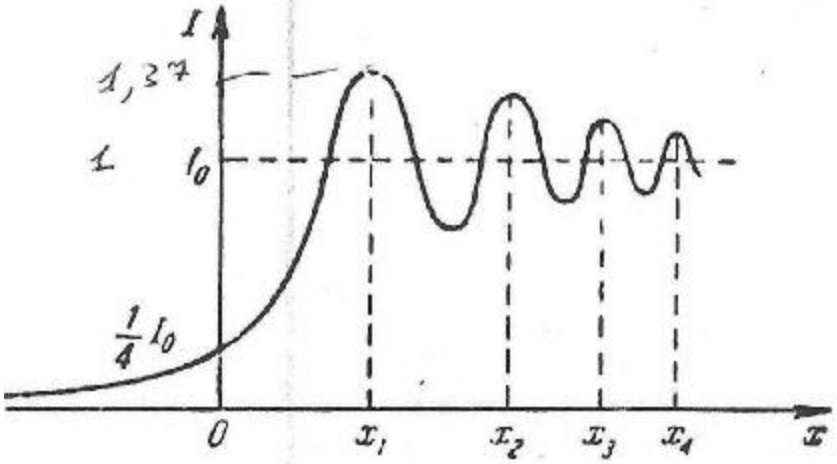
14.



2) При зміщенні т.Р в обл. геом. тіні (x<0, рис.б) напівплощина почне закривати все більше нештрих. зон. Тому початок результуючого вектора з т.О почне переміщуватись по правому завитку, наближаючись до полюсу F_1 . В результаті амплітуда монотонно прямує до нуля (див. рис).

3) Для x>0: т.Р зміщується від границі геомет. тіні вправо. Додатково до нештрих. зон додаються (відкриваються) весь час зростаюче число штрих. зон. Початок результуючого вектора сковзає по лівому завитку спіралі в напрямку полюсу F_2 . В результаті амплітуда проходить через ряд максимумів. Перший з них відповідає довжині відрізку MF_1 (рис. *в*). Перший мінімум дорівнює довжині відрізку NF_1 (рис. *г*). При повністю відкритій хвильовій поверхні амплітуда хвилі в точці спостереження дорівнює відрізку F_2F_1 (рис. *д*). В останньому випадку амплітуда в 2 рази більша за амплітуду на межі тіні (інтенсивність в 4 рази більша).

В результаті отримуємо залежність *I(x)*, яка показана на рис.



Правий завиток спіралі відповідає зонам, розташованим справа від т.О. лівий – зліва від т.О.

Кожній точці спіралі Корню відповідає параметр v:

$$v = x \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda \cdot L}}.$$

L - відст. від екр. до ел.

Цей параметр пропорційний довжині дуги спіралі, яка починається з т.О. ***Значення параметра v вказане на спіралі.***

Приклад: Дано:L=100 см; λ=500 нм; I_0- інтенсивність падаючого світла.

Знайти відстань Δx між першими двома максимумами на екрані та інтенсивність першого максимуму.

134

15.

Враховуючи, що $x = \upsilon\sqrt{\frac{\lambda \cdot L}{2}}$, маємо

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (\upsilon_2 - \upsilon_1)\cdot\sqrt{\lambda \cdot L/2}$$

По графіку із спіраллю Корню знаходимо, що

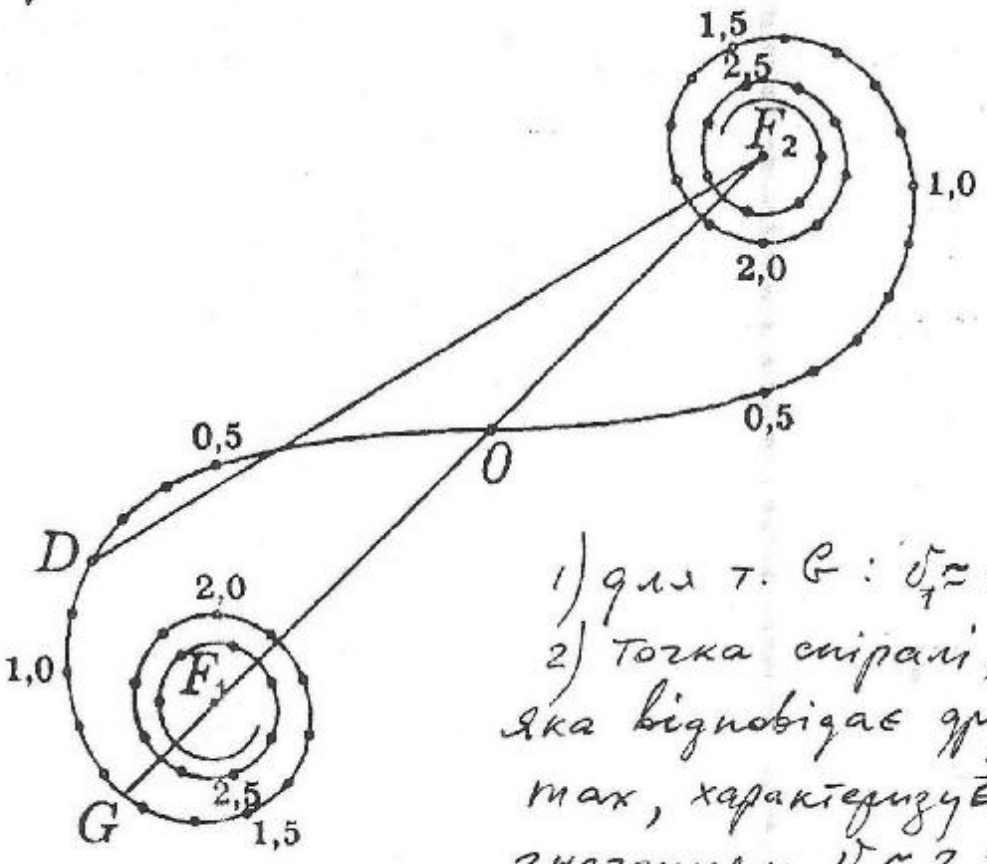
$\upsilon_2 = 2.35$; $\upsilon_1 = 1.25$ для 2-х перших максимумів.

$$\Delta x = (2.35 - 1.25)\cdot\sqrt{\frac{500\cdot10^{-9}\cdot 1}{2}} = 5.5\cdot10^{-4}\,м = 0.55\,мм$$

За допомогою графіка і лінійки знаходимо, що відношення амплітуди 1-го max (тобто відстань між точками GF_2) до амплітуди падаючого світла (довжина F_2F_1)

$$\eta = \frac{GF_2}{F_2F_1} = \frac{94}{80} \approx 1.17$$

Тобто $J_1 = \eta^2 J_0 = 1.37\,J_0$



1) для т. G: $\upsilon_1 \approx 1.25$

2) точка спіралі, яка відповідає другому max, характеризується значенням $\upsilon_2 \approx 2.35$

Дифракція Фраунгофера

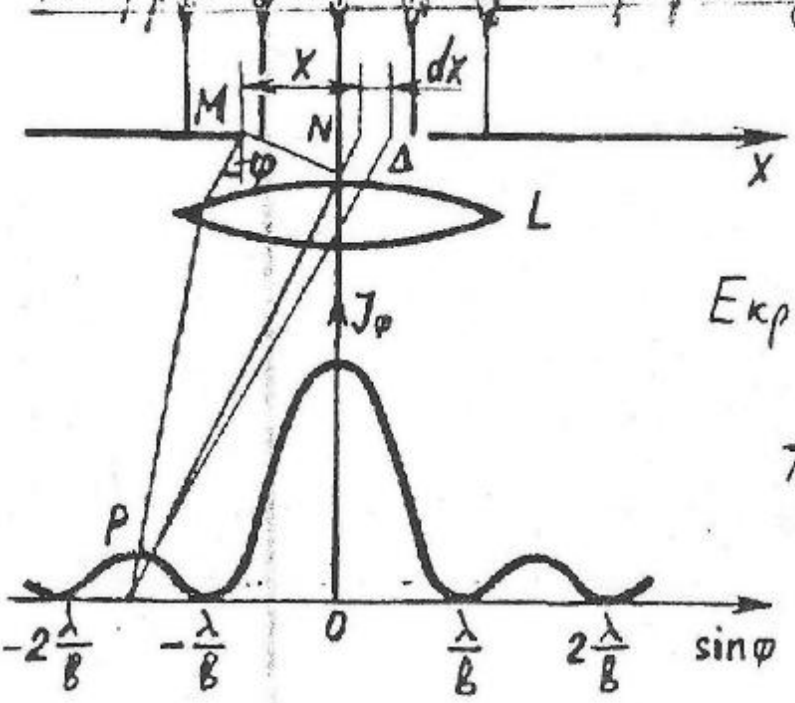
Д. в дальній зоні.

Д. в паралельних променях.

Д., що спостерігається на таких відстанях, для яких кутові розміри неоднорідностей $\ll$ відношення λ до розмірів цих неоднорідностей

Між Д. Френеля і Д. Фраунгофера не існує принципової різниці і різкої межі.

Дифракція Фраунгофера від прямокутної щілини



Ширина щілини – b.

$b \ll$ довжина щілини.

Плоска монохр. хвиля.

Екран із зображен. – у фокальній площині лінзи L.

Подільмо відкриту частину хвильового фронту на елементарні зони завширшки dx, паралельні довжині щілини.

Вторинні хвилі від цих зон збираються лінзою у т. P.

Амплітуда хвилі від ел. зони dx

$$dE = c \cdot dx \cdot \cos \omega t \quad \text{де } c \text{ – стала.}$$

Амплітуда сумарної хвилі від всієї щілини

$$E_0 = \int_0^b c \cdot dx = c \cdot b \Rightarrow c = E_0 / b$$

Отже: $$dE = \frac{E_0}{b} \cdot dx \cdot \cos \omega t$$

$$\Delta = x \cdot \sin\varphi \Rightarrow \delta = k \cdot x \cdot \sin\varphi = 2\pi \frac{1}{\lambda} x \cdot \sin\varphi$$

$= E_0\left(-\frac{\lambda}{2\pi\sin\varphi}\right)\cdot$
$\sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} b\sin\varphi) -$
$\sin\omega t);$
$\sin\omega t - \sin(\omega t -$
$\frac{2\pi}{\lambda} b\sin\varphi) =$
$2\sin\frac{\pi b\sin\varphi}{\lambda}\cdot\cos(\omega t -$
$\frac{\pi}{\lambda} b\sin\varphi);$
$= E_0\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b\sin\varphi\right)}{b\cdot\frac{\pi}{\lambda}\sin\varphi}\right]$
$\cos(\omega t - \frac{\pi}{\lambda} b\sin\varphi) =$
$A_\varphi\cdot\cos(\omega t - \frac{\pi}{\lambda} b\sin\varphi)$
$A_\varphi = E_0\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b\sin\varphi\right)}{b\frac{\pi}{\lambda}\cdot\sin\varphi}$

A_φ – ампл. хвилі в напрямку φ

$$dE_\varphi = \frac{E_0}{b}dx\cos(\omega t - kx\cdot\sin\varphi)$$

$$E_\varphi = \int_0^b \frac{E_0}{b}\cos(\omega t - kx\cdot\sin\varphi)\,dx = E_0\frac{\sin\left[\frac{kb}{2}\sin\varphi\right]}{\frac{kb}{2}\sin\varphi}\cdot$$
$$\cdot\cos\left(\omega t - \frac{kb}{2}\sin\varphi\right)$$

(K)

Амплітуда коливань
$$A_\varphi = E_0\frac{\sin\left[\frac{kb}{2}\cdot\sin\varphi\right]}{\frac{kb}{2}\sin\varphi} = \frac{E_0\cdot\sin\left[\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi\right]}{\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi}$$

$$\boxed{I_\varphi = I_0\frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi\right)^2}} \quad (A)$$

I_0 – інт. світла від всієї щілини в напрямку $\varphi = 0$

Аналіз (A): 1) $I_{-\varphi} = I_\varphi$: дифр. картина симетрична відносно головної оптичної осі лінзи.

2) Дослідимо (A) на екстр.:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ – відома границя.

Тоді для $\varphi = 0$ (в центрі дифр. картини) буде max. (головний, а краще – „нульовий" max).

3) Умова для „нульового" max не залежить від λ, „Нульовий" max не розкладається в спектр.

4) Мін інтенсивності спостерігаються для кутів дифр., коли $\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi = \pm m\cdot\pi$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$

(*) $\boxed{b\cdot\sin\varphi = \pm m\lambda}$ – умова мін – умова однакова

5) Між мін розміщені max інтенсивності, кути дифр. яких знаходять, розв'язуючи трансцендентне рівняння $\operatorname{tg} u = u$, де $u = \frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi$, тобто для кутів

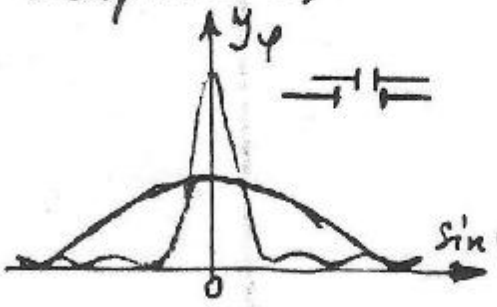
$\sin\varphi_1 = \pm 1.43\frac{\lambda}{b}$; $\sin\varphi_2 = \pm 2.46\frac{\lambda}{b}$; ...

6) З збільшенням φ інтенс. max швидко спадає:
$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 : \ldots = 1 : 0.045 : 0.016 : 0.008 : \ldots$
Основна частина світла зосереджена в головному („нульовому") max ($m = 0$) $m = \pm 1$
5% св. ен. припадається на два перших max і 2% - на два других max ($m = \pm 2$)

7) Для немонохроматичного (наир., „білого") світла: гол. max не зміщується (він - „білий"); вторинні max ($m = 1, 2, 3, \ldots$) - кольорові: для кожної λ - свій кут φ. Фіолетова частина розміщена ближче до „нульового" max, а червона - далі.

8) З (4) видно, що дифр. картина залежить від в-ширини щілини: при $b \uparrow$ величина $\varphi \downarrow$ (для $m = 1$)
З умови min (*):

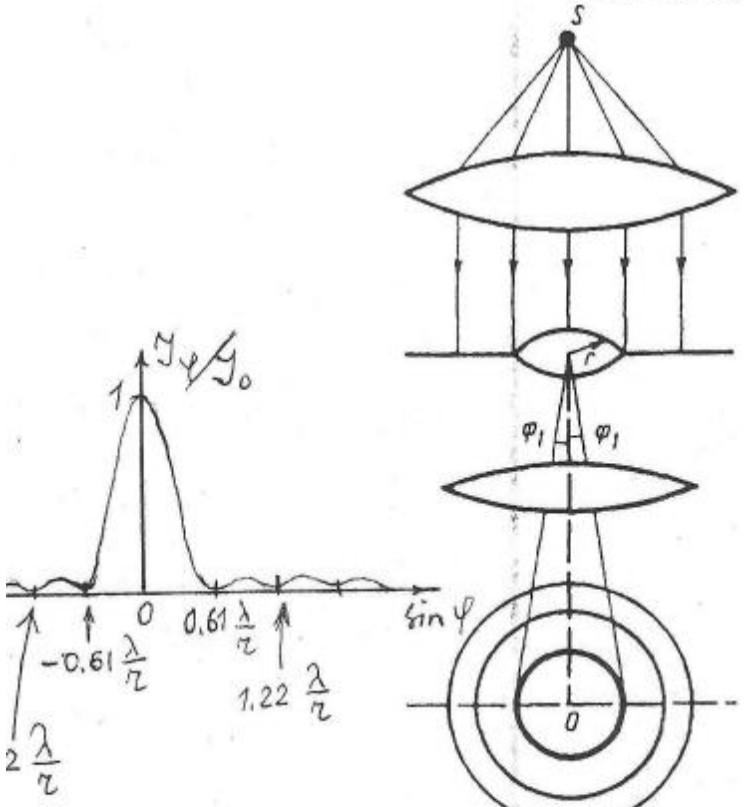
9) При $b = \lambda \Rightarrow \sin\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ головний max в цьому разі охоплює всю область екрану.



10) Для $b > \lambda$ кутова відстань між першими max зменшується, а головний max стає більш різким.

11) Коли $b \gg \lambda$, то в центрі дифр. картини буде чітке зображення джерела, що відповідає прямолінійному розповсюдженню світла.

Дифракція світла на круглому отворі



Принципово не важливо:
плоска або сферична хвиля ⇐ лінза

1) У центрі дифр. картини – світла пляма (завжди!).

2) Розподіл інтенсивності в дифракц. картині виражається через спеціальну ф-цію Бесселя I порядку $J_1(u)$,
де $u = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r \cdot \sin\varphi$
r – радіус отвору;
φ – кут дифракції.
Корінь цієї ф-ції, що відповідає I тіні (визначає кутові розміри центральної світлової плями), визначається з умови $\boxed{\sin\varphi_1 = 0.61\,\frac{\lambda}{r}}$ (**).
Це дуже важлива формула
Її можна записати і так: $\boxed{\sin\varphi_1 = 1.22\,\frac{\lambda}{D}}$
Розподіл інтенсивності в дифракц. картині описується залежністю $\boxed{J_\varphi = J_0\left[\frac{2J_1(u)}{u}\right]^2}$
Наближена формула для визначення напрямків на насічки ($m = \pm 2, \pm 3, \ldots$) тіні:

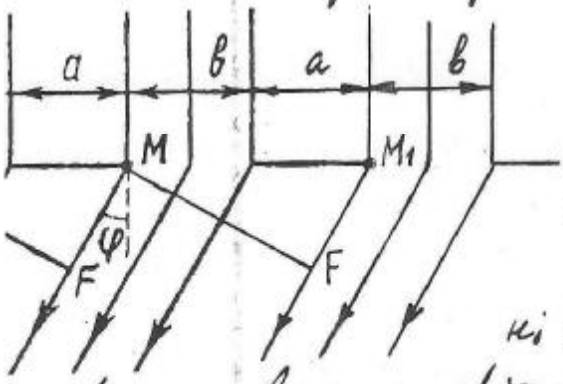
$$\sin\varphi_m \approx m \cdot 0.61 \cdot \frac{\lambda}{r}$$

Наприклад: $\sin\varphi_2 = 1.12\,\frac{\lambda}{r}$; $\sin\varphi_3 = 1.62\,\frac{\lambda}{r}$

$\sin\varphi_4 = 2.12\,\frac{\lambda}{r}$

Дифракція світла на двох щілинах

1 щілина переміщується паралельно самій собі на відстань a. Результуюча картина м.б. визначена шляхом додавання хвиль, які йдуть від обох щілин.



В тих напрямках, в яких ні від однієї із щілин не розповсюджувалось світло, теж будуть спостерігатись тіні.

Інша справа відбувається з тах: вони вже не будуть спостерігатись в тих же напрямках, що і у випадку 1 щілини. Це пов'язане з взаємною інтерференцією хвиль від 2 щілин ⇒ в деяких напрямках вони будуть компенсуватись ⇒ виникають додаткові тіні, напрямки на які визначаються умовою:

умова тіні: $\Delta = MF = MM_1 \sin\varphi = m\lambda + \frac{\lambda}{2} \equiv (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ (1)

$m = 0, 1, 2, \ldots$

Дія 1 щілини буде підсилюватись дією іншої щілини, якщо $M_1F = MM_2 \cdot \sin\varphi = m\lambda$ (2)

умова тах:

(2) – умова головних тах.

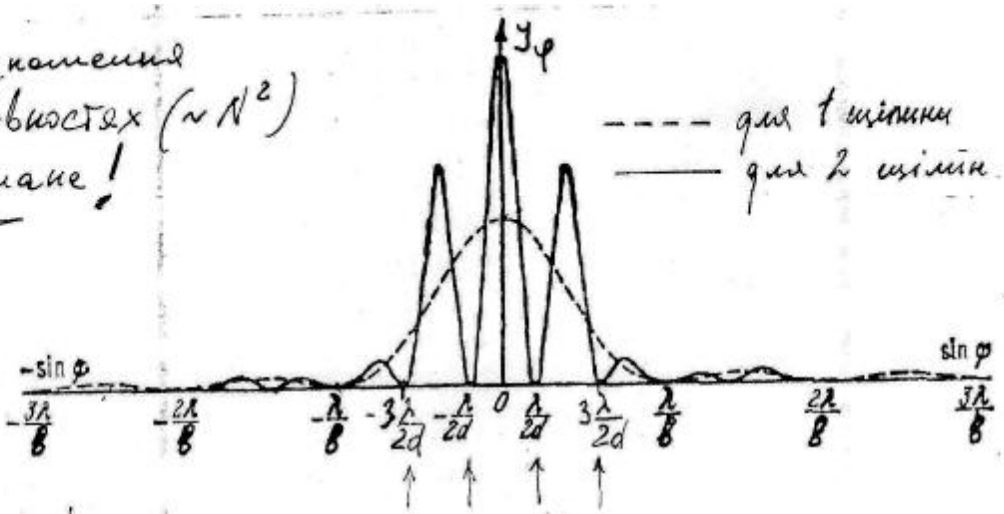
Якщо $a + b = d$, то (1) і (2) перепишуться:

$d \cdot \sin\varphi = (2m+1)\lambda/2$ – умова додаткових тіні

$d \cdot \sin\varphi = m\lambda$ – умова додаткових тах

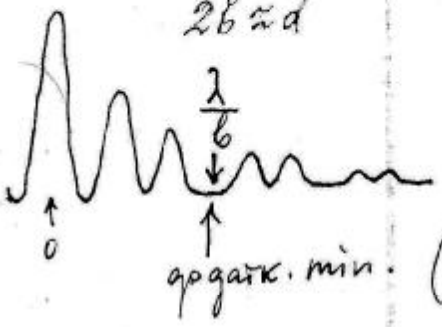
Комишні тіні спостерігались в напрямках, яким задовольняє умова $b \cdot \sin\varphi = m\lambda$ – умова комишніх тіні (для 1 щілини шириною b).

Співвідношення по інтенсивностях ($\sim N^2$) не витримане!



Для 2-х щілин:

$2b \approx d$



Для 2-х щілин між двома головними max існує 1 додатковий мін.

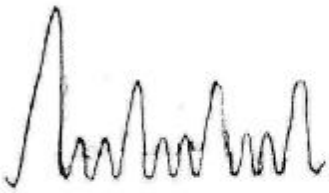
Для 3-х щілин — 2 дод. мін, для N щілин — $(N-1)$ дод. мін.

(для 2-х щілин максимумів — немає: $N-2 = 2-2 = 0$).

Для 3-х щілин:



Для 4-х щілин:



Для 3-х щілин є 1 додатк. max: $(N-2) = 3-2 = 1$

Для 4-х щілин є 2 додатк. max: $N-2 = 4-2 = 2$

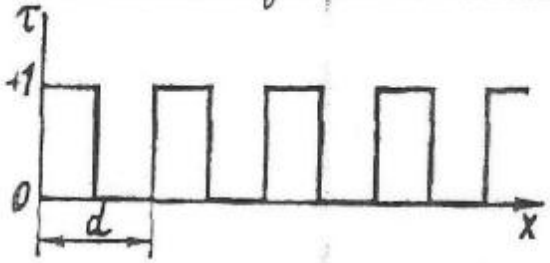
Повна картина від дифракції на 2-х щілинах визначається з умови (при $d = 2b$):

головні мінімуми	$b \cdot \sin\varphi =$	λ	2λ	3λ	...
додаткові мінімуми	$d \cdot \sin\varphi =$	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{3}{2}\lambda$	$\frac{5}{2}\lambda$	...
головні максимуми	$d \cdot \sin\varphi =$	λ	2λ	3λ	...

7.

Дифракція світла на багатьох щілинах

По аналогії із дифр. на 2-х щілинах приходимо до висновку, що у випадку з 3-ма щілинами між сусідніми max спостерігається 2 додаткових min; у випадку з N щілинами число додаткових min, які спостерігаються між сусідніми max, дорівнює $N-1$.



Період $d = a + b$

τ - коеф. пропускання (змінюється стрибком)

В напрямку $\varphi = 0$ результ. амплітуда від N щілин $E_0 = NE_{01}$, де E_{01} - амплітуда коливань від 1-ї щіл.

Інтенсивність в напряму $\varphi = 0$ $I_0 = cN^2E_{01}^2$

де c - коеф. пропорц. $I_0 \sim N^2$!

Min буде спостерігатись в тому випадку, коли коливання від 1 і останньої щілин будуть відрізнятись по фазі на 2π: $N \cdot \delta = 2\pi$, де δ - різниця фаз коливань від сусідніх щілин $\Rightarrow \delta = 2\pi/N$.

З іншого боку $\delta = k \cdot \Delta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta l$, де Δl - різниця ходу променів від сусідніх щілин.

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{\lambda}{N}.$$

Умова додаткових min, розташованих між головними max:

$$\boxed{d \cdot \sin\varphi = m\lambda + p \cdot \frac{\lambda}{N}} \quad (B)$$ де $p = 1, 2, \ldots, N-1$

Між двома сусідніми головними max знаходяться $(N-1)$ додаткових min та $(N-2)$ додаткових max.

Продифер. (B): $d \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = \frac{\lambda}{N} \cdot dp$; $dp = 1$. $\Rightarrow$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{\lambda}{N \cdot d \cdot \cos\varphi} = \frac{\lambda}{L \cdot \cos\varphi}} \quad (C)$$ Кутова ширина головного max

L - ширина періодичної структури.

143

Аналіз (с): 1) При малих кутах дифракції $\cos\varphi \simeq 1$. Тоді $\Delta\varphi = \frac{\lambda}{N \cdot d}$. При $d = const$ із збільшенням числа щілин (N), крім збільшення інтенсивності I_φ ($\sim N^2$), відбувається різке ($\sim \frac{1}{N}$) звуження головних max (для max невеликих порядків, коли $\cos\varphi \simeq 1$).

2) Величина $\Delta\varphi$ залежить не від d і N окремо, а від $d \cdot N$, тобто від L.

3) З ростом кута дифракції φ ширини головних max збільшуються.

4) Головні max будуть тим вужчими, чим більша ширина періодичної структури (L) та менший кут дифракції (φ).

143

Розподіл інтенсивності в дифракційній картині від N щілин

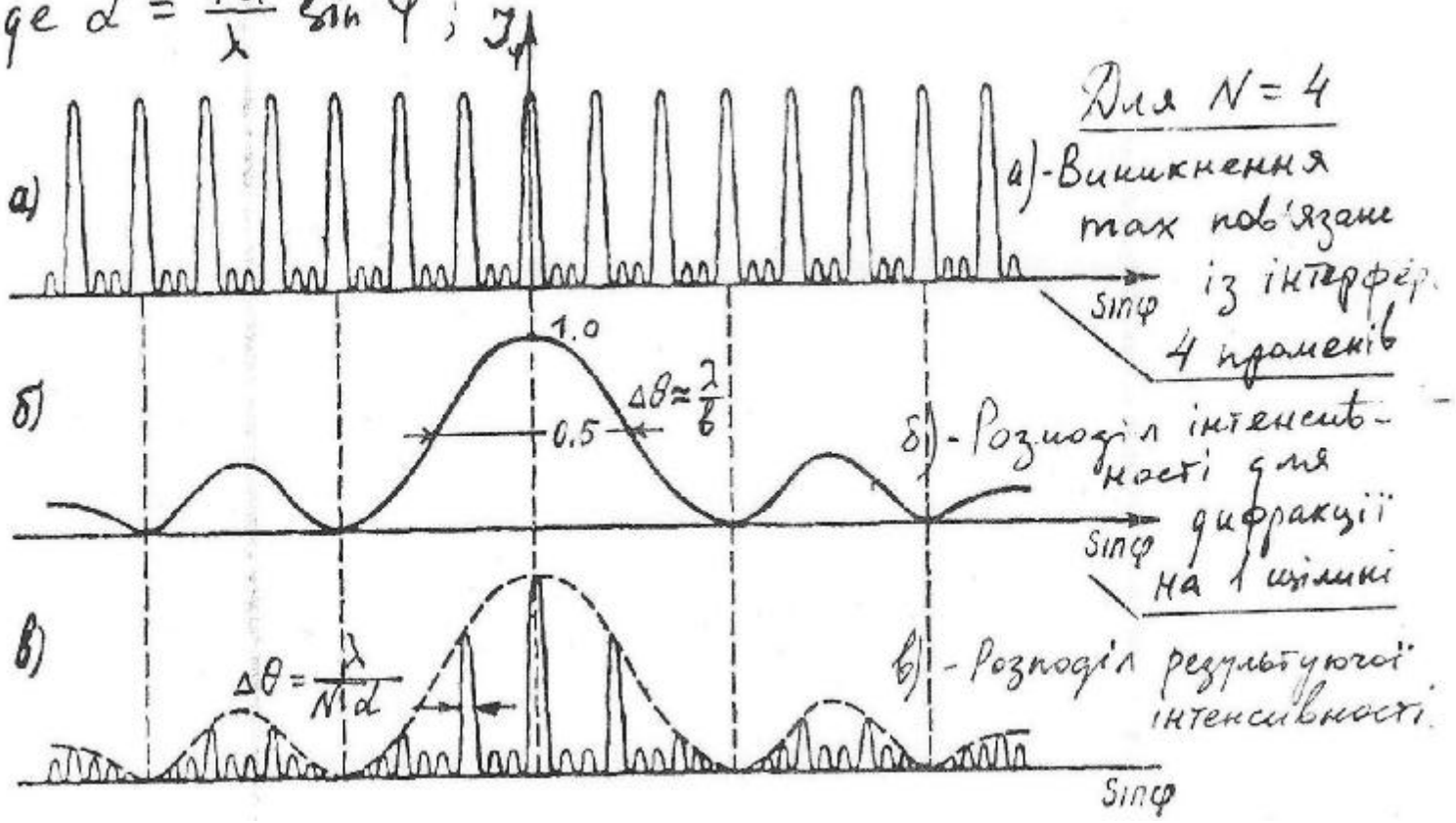
Для 1 щілини було знайдено

$$J_\varphi = J_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi\right)^2} = J_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$

де $u = \frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi$; J_0 – інтенсивність від всієї щілини в напрямку $\varphi = 0$

Для N щілин: $\boxed{J_\varphi = J_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}$

де $\alpha = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\varphi$;



Для N = 4

а) - Виникнення max пов'язане із інтерф. 4 променів

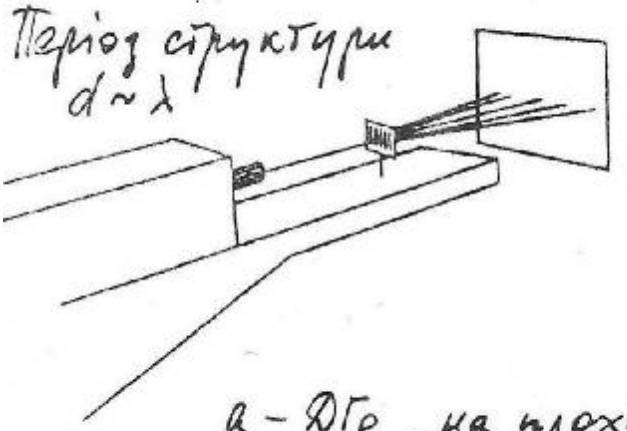
б) - Розподіл інтенсивності для дифракції на 1 щілині

в) - Розподіл результуючої інтенсивності

145
145

Дифракційна ґратка (ДГр)

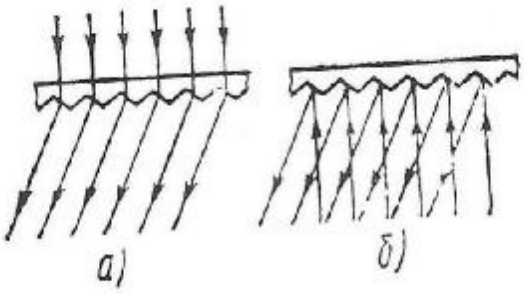
Період структури $d \sim \lambda$



Типи періодичних структур



а – ДГр „на прохід"
б – ДГр „на відбиття"

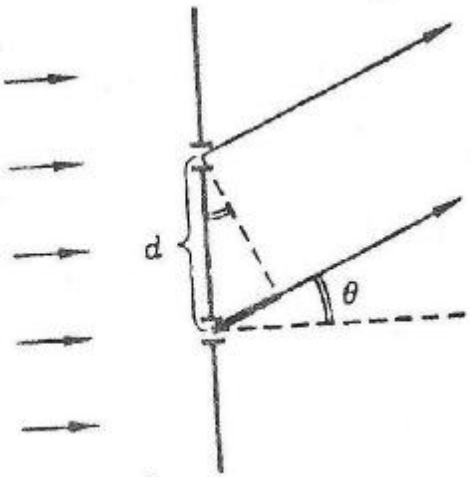


Рівняння ДГр

$\Delta = d \cdot \sin\theta$ – з рис.

$\Delta = m \cdot \lambda$ – умова max (за визначенням)

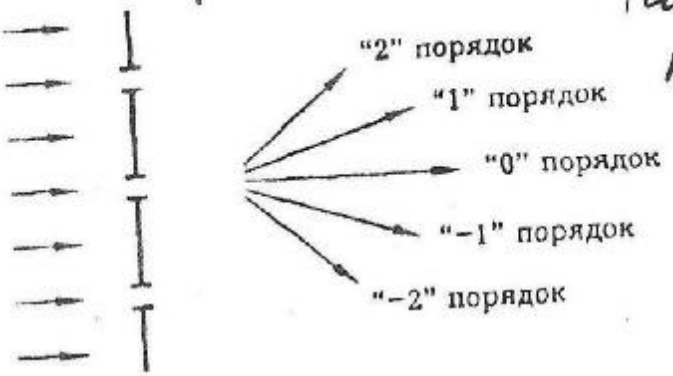
$$\boxed{d \cdot \sin\theta = m\lambda} \quad (1) \qquad m = 0; \pm 1; \pm 2 \ldots$$



$\sin\theta = m\frac{\lambda}{d}$ Аналіз (1):

1) $d \sim \lambda \cong 10^{-4}$ см $= 1$ мкм

При цьому max і min будуть помітними під значними кутами φ. З цього також витікає, що ДГр повинна мати число штрихів $\sim 10^2 \div 10^3$/мм

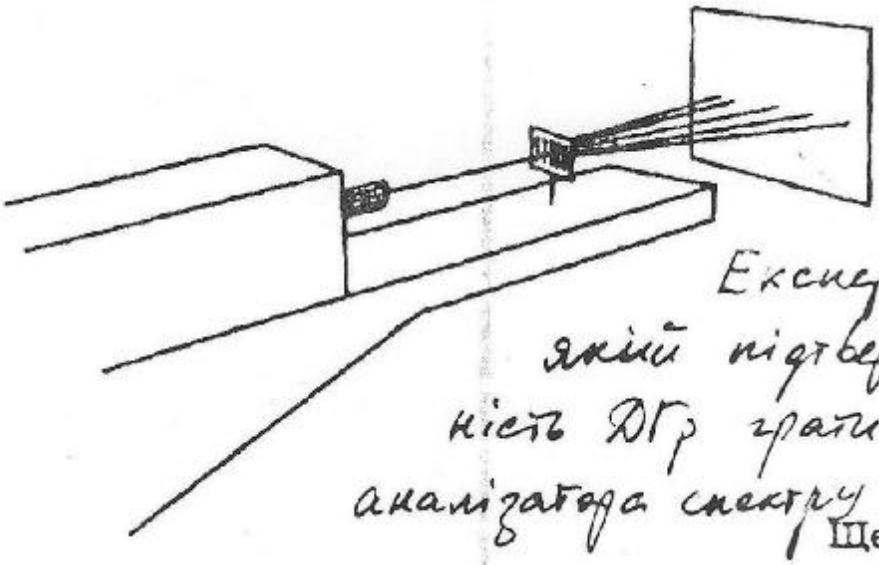


2) Якщо $d < \lambda$, то при $m = 1$ $\sin\theta = \frac{\lambda}{d} > 1$ – NO!

Залишається лише $m = 0$. Це означає, що дифракції немає.

3) Положення max залежить від $\lambda \Rightarrow \theta(\lambda) \Rightarrow$ ДГр – спектральний прилад та аналізатор спектру.

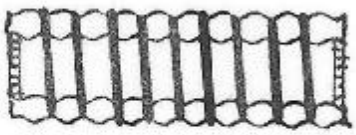
145
145



Експеримент, який підтверджує здатність ДГр грати роль аналізатора спектру



Як виготовити ДГр



1) 1821 р. Фраунгофер: 2 гвинта з намотаним дротом: 40–340 штр/дюйм. Визначив довж. хвилі D-лінії Na: $\lambda = 5886$ Å

2) Метод гравіровки на склі або на плівці Au, яка нанесена на скляну підкладку: 8000 штр/дюйм, $d = 3$ мкм; $L = 0.5$ дюйм

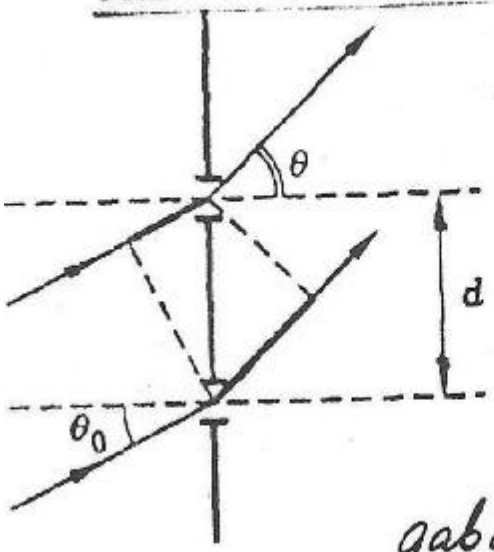
3) Роуланд: вгнуті ДГр – до 20 тис. штр/дюйм $L = 10$ см.

4) Сучасні ДГр: а) на відбиття, профіль штриха – трикутник – ешелетти. В ненульовий max „перекачується" до 70-80% світлової енергії: $\lambda = 1$ мкм $\div$ 0.1 мкм і навіть для рентгенівської обл. ($\lambda \cong 1$ нм); $L = 40$ см; $4 \div 3600$ штр./мм

б) копії з гравіраних ДГр – репліки.

в) голографічні ДГр.

Нахилене падіння променів на дифракційну гратку



$\Delta = d(\sin\theta - \sin\theta_0)$

$\Delta = m\lambda$, де $m = 0, \pm1, \pm2 \ldots$

$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda$

При скользящому падінні, коли $\theta_0 \to \frac{\pi}{2}$, навіть груба ДГр (з періодом $d \gg \lambda$) може давати помітну дифракцію

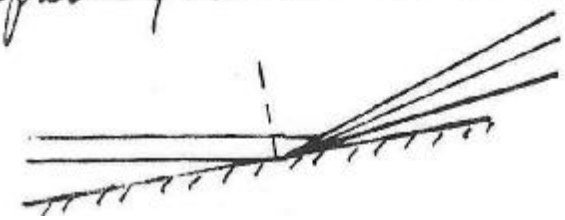
$\theta \approx \theta_0 \Rightarrow \sin\theta - \sin\theta_0 = 2\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}\cdot\cos\frac{\theta+\theta_0}{2} \approx$

$\approx (\theta-\theta_0)\cdot\cos\theta_0$

$(\theta-\theta_0)\cdot\cos\theta_0 = \frac{m\lambda}{d} \Rightarrow \frac{m\lambda}{d\cdot\cos\theta_0} = \frac{m\lambda}{d_{ef}} = \theta-\theta_0$

Через те, що $\theta_0 \approx \frac{\pi}{2} \Rightarrow d_{ef} \ll d$

Дифракцію світла можна спостерігати навіть на грамофонній платівці з $d \sim 100$ мкм



Скользяче падіння білого світла

Характеристики ДГр як спектрального приладу

1) Кутова дисперсія: $D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$ де $\delta\varphi$ - кутова відстань між двома спектральними лініями, які відстоять одна від одної на $\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$

2) Лінійна дисперсія: $D_\ell = \frac{d\ell}{d\lambda}$; $D_\ell = f \cdot D_\varphi$

де f - фокусна відстань лінзи, яка проектує спектр на екран.

Для ДГр max спостерігається, коли $d \cdot \sin\varphi = m \cdot \lambda$

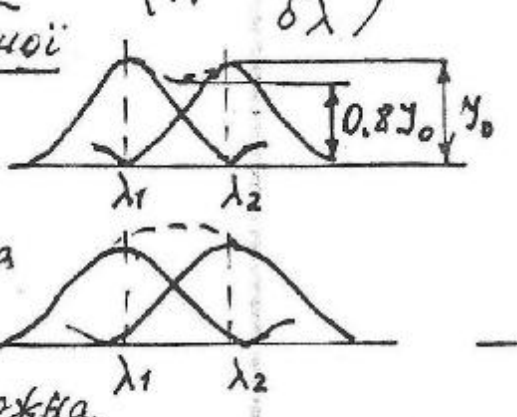
$$d \cdot \cos\varphi \cdot \delta\varphi = m \cdot \delta\lambda \Rightarrow D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cdot \cos\varphi}$$

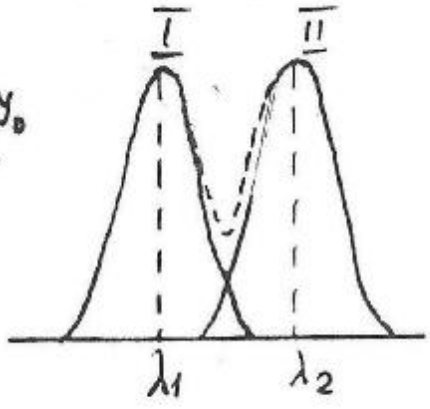
I. D_φ (а значить і D_ℓ) $\sim m \Rightarrow$ збільшуй m!

II. $D_\varphi \sim \frac{1}{d} \Rightarrow$ зменшуй d!

3) Роздільна сила $\left(A = \frac{\lambda}{\delta\lambda}\right)$

Принцип роздільної здатності Релея: мінімальна відстань між двома спектральними лініями, які можна розділити (розрізнити як дві), відповідає випадку, коли max I лінії співпадає із min II лінії





max m-го порядку для променів з λ_1 та λ_2 спостерігаються відповідно під кутами $\varphi_m^{(1)}$ та $\varphi_m^{(2)}$

$$\begin{cases} d \cdot \sin\varphi_m^{(1)} = m\lambda_1 \\ d \cdot \sin\varphi_m^{(2)} = m\lambda_2 \end{cases}$$

Перехід від max до сусіднього мін х-ється різницею ходу $\Delta = \frac{\lambda}{N}$, де N – загальна кількість штрихів в ДГр. Тоді m-ий мін для λ_1 буде задовольняти умові: $d \cdot \sin\varphi^{(1)}_{мін} = m\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{N}$

Відповідно до критерію Релея, розділення ліній має місце, коли $\varphi^{(1)}_{мін} = \varphi^{(2)}_{m} \Rightarrow m\cdot\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{N} = m\lambda_2$

(A) $\boxed{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = m \cdot N = A}$ роздільна сила "чим більше, тим краще"

Аналіз (A): 1) $A \sim m$ (якіцмедсія $\mathcal{D}_\varphi \sim m$).

2) $A \sim N$ $(\mathcal{D}_\varphi \sim n)$ N – загальна кількість штрихів; n – число штрихів на од. довжини ДГр $n = N/L$.

3) Знайдемо max значення A (A_{max}):

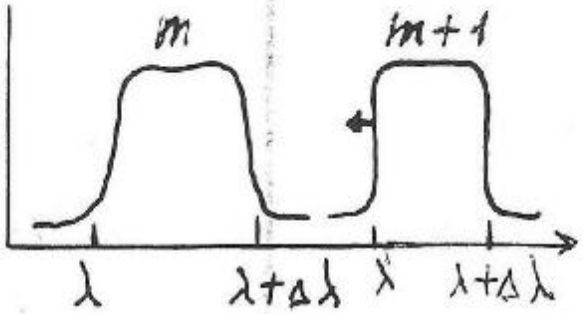
$d\cdot\sin\varphi = m\lambda \Rightarrow m = d\cdot\sin\varphi/\lambda \Rightarrow m_{max} = \frac{d}{\lambda}$

$A_{max} = m_{max}\cdot N = \frac{d}{\lambda}\cdot N = \frac{L}{\lambda}$ $\cdots$ $N\cdot d = L$ – робоча довжина ДГр

4) Якщо є декілька ДГр з різними d_i, але однаковими $L = N_1 d_1 = N_2 d_2 = \ldots$, то ці ДГр мають однакову A. Але тоді треба дивитися на n – кількість штрихів на 1 од. довжини $n = \frac{N}{L} = \frac{L/d}{L} = \frac{1}{d}$

Намагаються виготовити ДГр з великим розміром робочої довжини $L = 8 - 15 - 20$ см. Сучасні ДГр мають $A = 10^5 - 2\cdot10^5$ (у інтерфером. Ф.-П. A до 10^6).

Дисперсна область (G) – максимальна ширина спектрального інтервалу, при якому ще не відбувається перекриття спектрів сусідніх порядків, що відповідають початку і кінцю інтервала.



Спектр. прилад може розділити окремі довжини хвиль і ідентифікувати їх, якщо правий край спектру m-го порядку розташований лівіше, ніж лівий край спектру (m+1)-го порядку.

Умовою межі ідентифікації спектральних ліній буде співпадання (m+1)-го max для довжини хв. λ з m-тим max для довж. хвилі (λ + Δλ):

$$d \cdot \sin\varphi_m = m(\lambda+\Delta\lambda); \quad d \cdot \sin\varphi_{m+1} = (m+1)\lambda$$

$\varphi_{m+1} = \varphi_m$ – за визначенням G

$$m(\lambda+\Delta\lambda) = (m+1)\lambda \Rightarrow G = \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

$G \sim \frac{1}{m}$! Для ДГр m-мале (~2, 3..)
Тому $G \sim \left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}\right)\lambda$! $G \sim 2000$ Å.

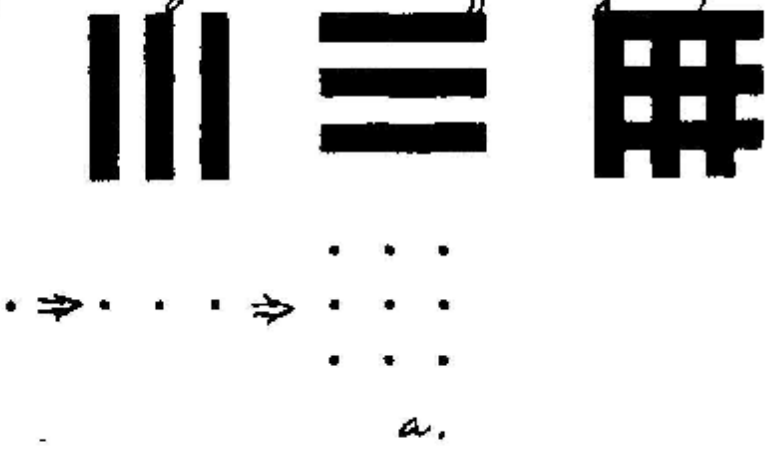
Для порівняння: інтерфер. спектроскопи (інтерфер. Фабрі-Перо) мають $m = 10^5 \div 10^6 \Rightarrow G = \frac{\lambda}{10^6} = \frac{5000\text{ Å}}{10^6} = 0.005$ Å. Для дослідження тонкої і надтонкої структури спектр. ліній.

Для ДГр дуже велика дисп. область. Це добре: стає можливим проведення спектр. аналізу в широкому діапазоні спектру (навіть білого світла).

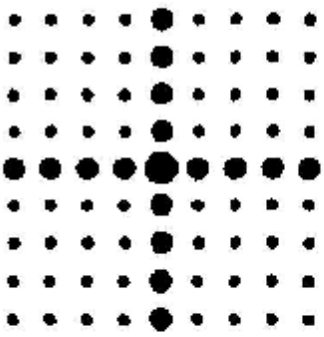
Питання: „G – краще більше, чи краще менше?"
Відповідь: „Дивлячись для чого!"

Дифракція на двовимірній періодичній структурі

Накладають 2 дифр. гратки так, щоб їх щілини були взаємно перпендикулярні:



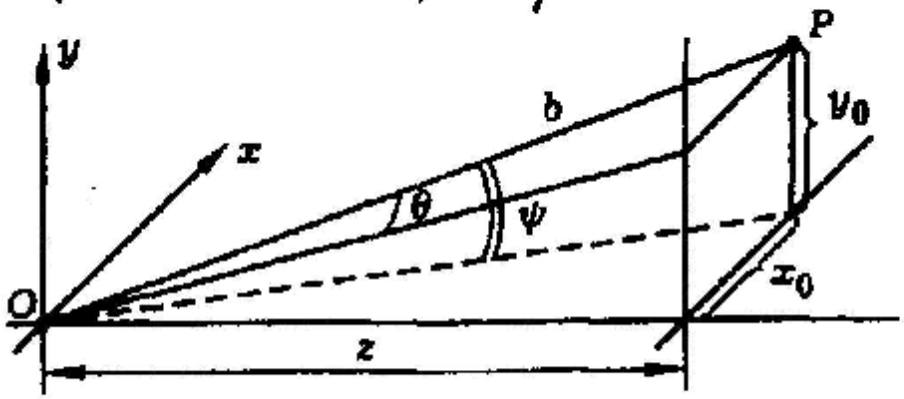
а.



б.

В результаті виникає дифр. картина (рис. б).

Знайдемо напрямки на головні дифр. max дифракц. картини, яка отримується на 2-вимірній структурі:



P – точка спостер. має декартові координ. x_0, y_0 та кутові координ. θ та ψ.

По аналогії з 1-вимірною періодичною структурою:

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= m_1 \lambda / d_1 \\ \sin\psi &= m_2 \lambda / d_2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Умови головних максимумів

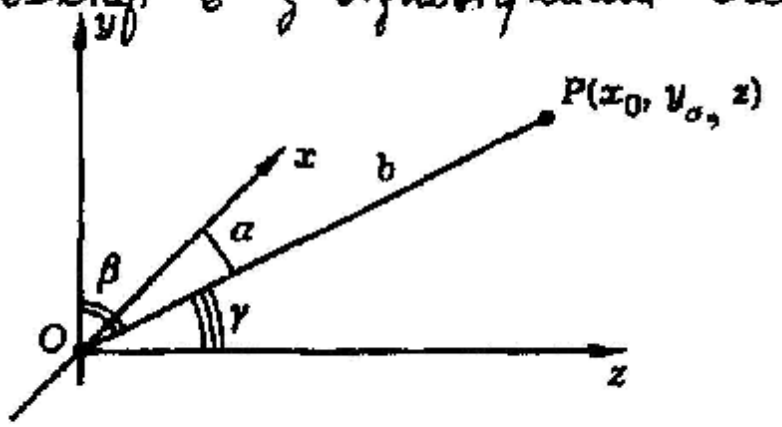
де d_1, d_2 – періоди дифр. ґратки вздовж осі x та осі y, відповідно;

m_1, m_2 – цілі числа: $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

З рис. видно, що $\sin\theta = \frac{x_0}{b}$; $\sin\psi = \frac{y_0}{b}$

152

Введемо 3-вимірну систему відліку: координата т. $\vec{P}$ запишемо через кути α, β, γ, які складає радіус-вектор $\vec{b}$ з відповідними осями (див. рис.):



$$\cos\alpha = \frac{x_0}{b} = \sin\theta$$

$$\cos\beta = \frac{y_0}{b} = \sin\psi$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{b}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

В цих змінних напрям на головні максимуми буде виражений формулами:

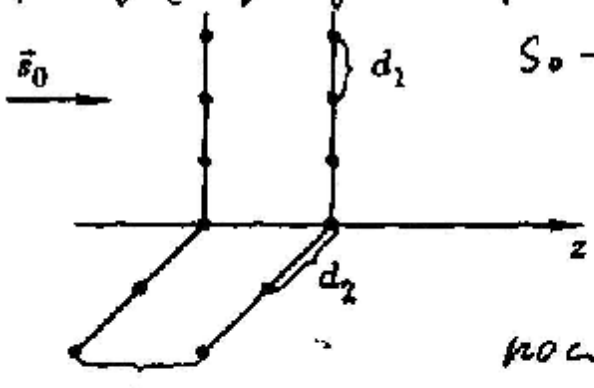
$$\boxed{d_1 \cos\alpha = m_1 \cdot \lambda; \qquad d_2 \cdot \cos\beta = m_2 \cdot \lambda} \quad (2)$$

Дифракція на тривимірній періодичній структурі. Дифракція рентгенівських променів в кристалах.

Для кристалів $d \sim 1$ Å. Світло має $\lambda \sim 10^4$ Å. $\Rightarrow$ Дифракції бути не може.

Але для рентген. випромінювання $\lambda \sim 1$ Å!

Будемо вважати, що елементарна комірка кристала має форму прямокутного паралелепіпеда з довжиною ребер (періодами решітки): d_1, d_2, d_3 (див. рис.):



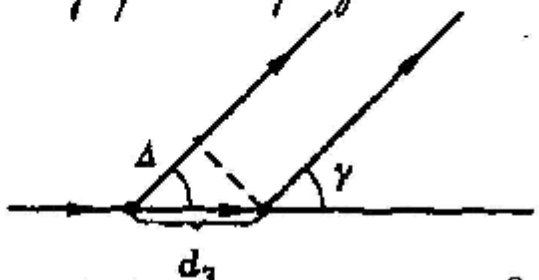
$\vec{s}_0$ – одиничний вектор напрямку падаючої хвилі

3-вимірну кристалічну ґратку можна розглядати як послідовність 2-вимірних плоских ґраток, які відстоять одна від одної на відстані d_3

152

Скористатись (2) можна, але це ще не дає гарантій, що у відповідних напрямах α та β будуть виникати дифр. max. Це буде ще залежати від того, як будуть інтерферувати між собою хвилі, які дифрагують на різних атомних площинах.

Умова інтерференц. підсилення хвиль, які йдуть від двох сусідніх атомних площин, має вигляд



$$\Delta = d_3 - d_3 \cdot \cos\gamma = m_3 \cdot \lambda \quad (3)$$

Якщо виконується (3), то хвилі будуть додаватись у фазі та підсилюватись.

Повна система рівнянь для кутів α, β, γ, які визначають напрямки на головні max для плоскої хвилі:

$$(4)\begin{cases} d_1 \cdot \cos\alpha = m_1 \cdot \lambda \\ d_2 \cdot \cos\beta = m_2 \cdot \lambda \\ d_3 (1 - \cos\gamma) = m_3 \cdot \lambda \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \end{cases} \Leftarrow (2)+(3)$$

Рівняння Лауе для випадку, коли хвиля падає на кристал і розповсюджується вздовж осі z, яка ⊥ атомній площині кристалу

Для довільного напрямку падаючої хвилі $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ відносно осей x, y, z рівняння Лауе має вигляд:

$$(5)\begin{cases} d_1 (\cos\alpha - \cos\alpha_0) = m_1 \cdot \lambda \\ d_2 (\cos\beta - \cos\beta_0) = m_2 \cdot \lambda \\ d_3 (\cos\gamma - \cos\gamma_0) = m_3 \cdot \lambda \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \end{cases}$$

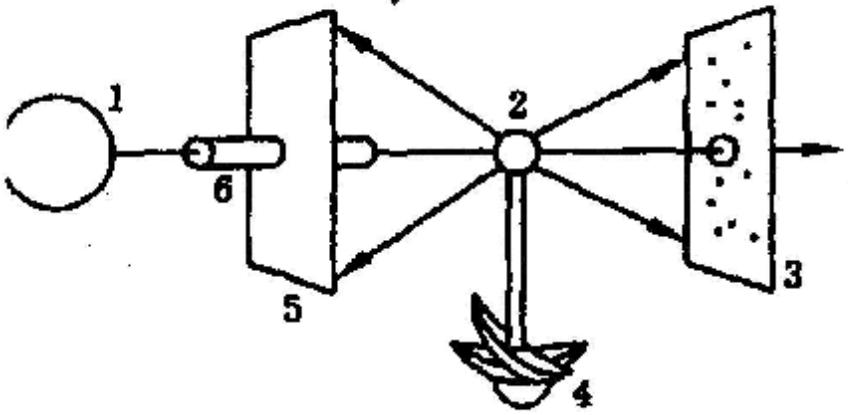
Можна вилучити із (5) кути α, β, γ. Отримуємо:

$$\left(\frac{m_1 \cdot \lambda}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2 \cdot \lambda}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{d_3 - m_3 \cdot \lambda}{d_3}\right)^2 = 1 \quad (6)$$

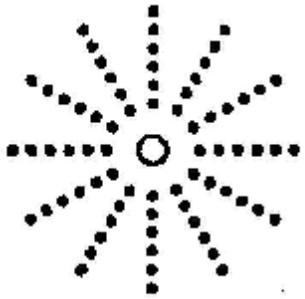
4.

Система (5) має розв'язок лише для деяких визначених значень λ та визначених напрямків падаючої хвилі відносно осей кристалу.

Тому на практиці використовують рентген. випром. з широким спектром або обертають кристал відносно монохроматичного джерела за допомогою гоніометра. (див. рис. а). Отримуємо лауеграму (див. рис. б).

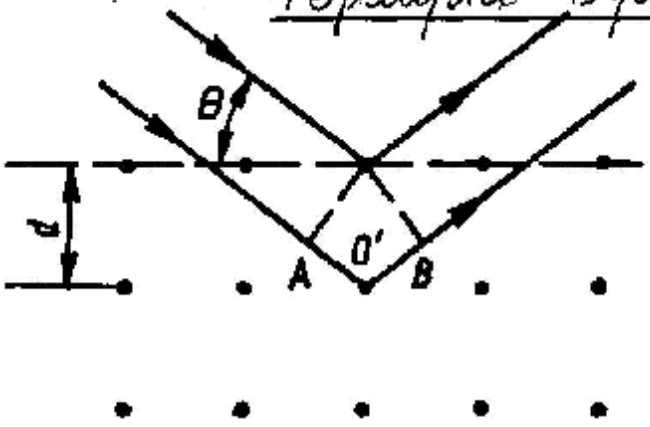


а.



б.

Формула Вульфа - Бреггів.



θ - кут ковзання (кут, доповнюючий кут падіння до 90°)

Різниця ходу $\Delta = AO' + O'B = 2d \cdot \sin\theta$

Для інтерференційного підсилення необхідно, щоб

(7) $\boxed{\Delta = 2d \cdot \sin\theta = m\lambda}$ Формула Вульфа-Бреггів

$m = 1, 2, 3, \ldots$

При довільному падінні монохроматичного променя на кристал дифракція не виникає. Необхідно, повертаючи кристал, знайти такий кут θ.

Наприклад: кристал кальцита $CaCO_3$ з $d = 3.029$ Å; падає випромін. з $\lambda = 1.54$ Å; для max I порядку

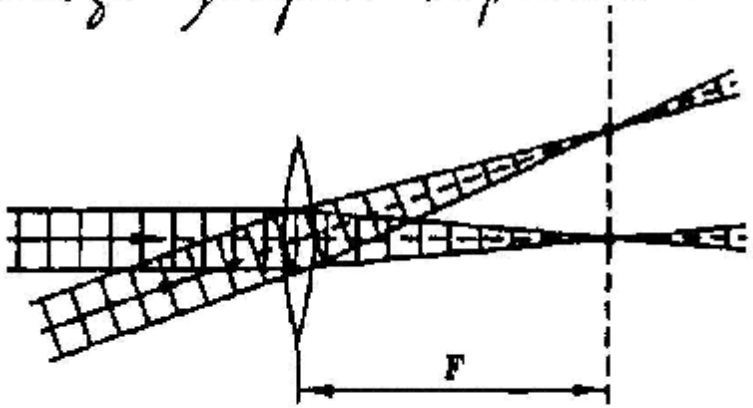
$\theta = \arcsin(\lambda/2d) \approx 14°40'$

2 напрямки застосування (7):

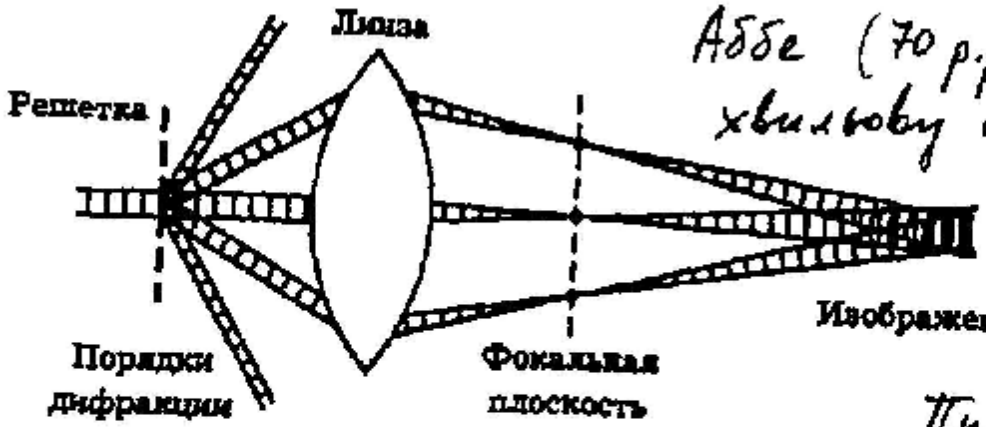
1. Рентгеноструктурний аналіз: по відомій λ визначають θ та m і розраховують d – міжплощ. відстань.
2. Рентгеноспектроскопія: по відомій кристалічній сталій (d) визначають θ та m і розраховують невідому λ падаючого випромінювання.

Лінза, як елемент, який виконує просторове перетворення Фур'є

Лінза збирає паралельні промені світла в точку, яка розташована в фокальній площині. Розподіл світла в фокальній площині набуває форму просторового спектру поля, яке падає на лінзу.



Формування оптичного зображення. Теорія Аббе



Аббе (70 р.р. XIX ст.) ввів хвильову оптику в прикладну оптику.

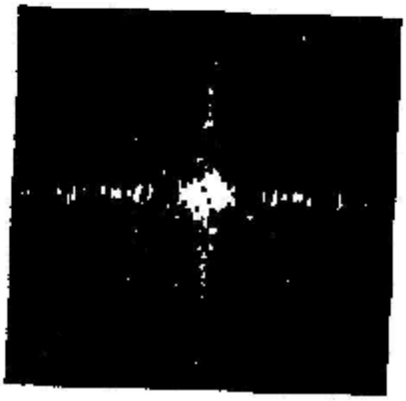
За Аббе:

Процес формування лінзою опт. зображення можна розділити на 2 етапи:

- фур'є-аналіз хвильового поля об'єкта;
- фур'є-синтез зображення.



а.



б.

а - оптичне зображення;

б - просторовий спектр цього зображення.

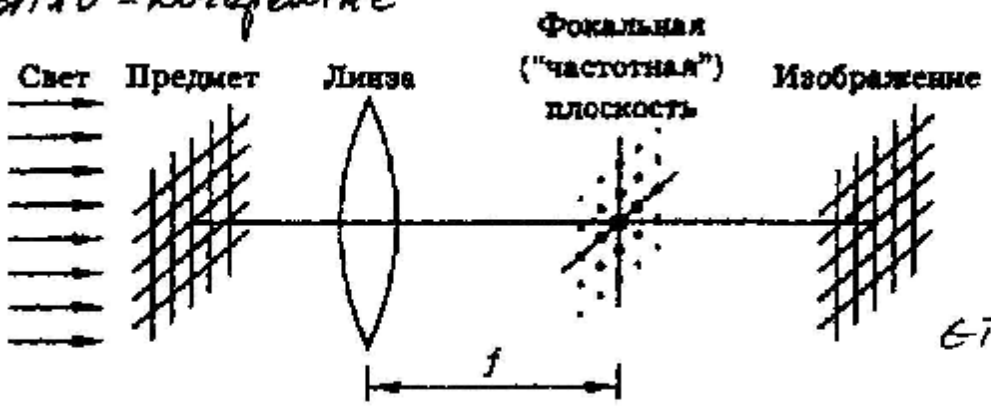
Важливу роль грає фокальна площина, в якій утворюється просторовий спектр поля, яке падає на лінзу.

Теорія Аббе несе в собі ідею обробки зображення шляхом дії на просторовий спектр зображення:

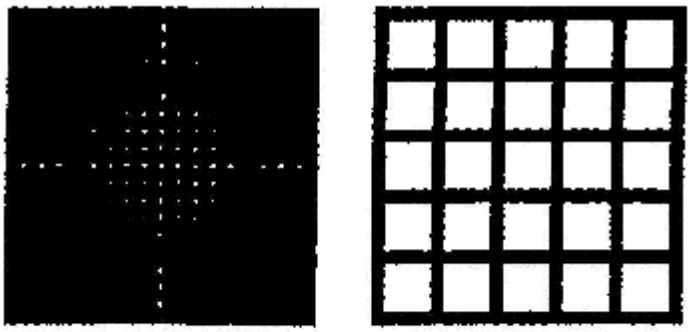
- розміщення в фокальній площині лінзи діафрагми або екрану відповідної форми може привести до такого перетворення Фур'є-спектру зображення, при якому потрібні деталі зображення будуть підкріплені, а завади усунені. Ця операція нелін. просторово частотною фільтрацією оптичних полів.

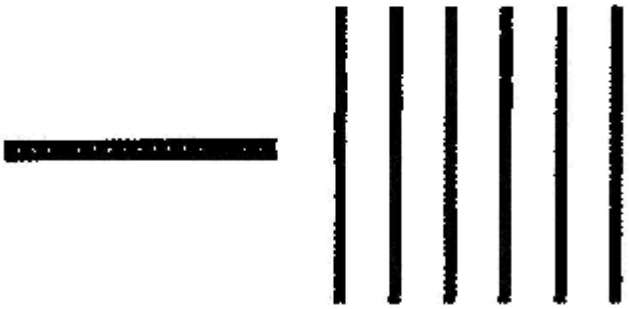
Дослід Аббе-Портера

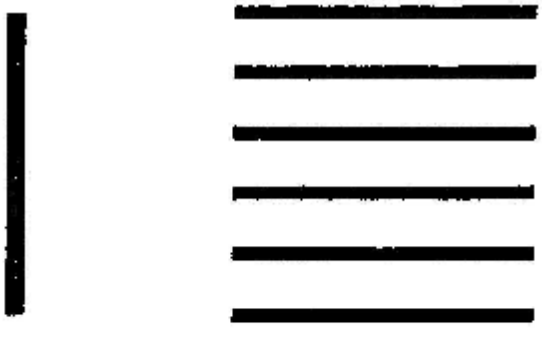
Світло - когерентне



Фур'є-спектр має систему плям. Розмір окремої плями визначається розміром гратки, а відстань між плямами - періодом гратки.



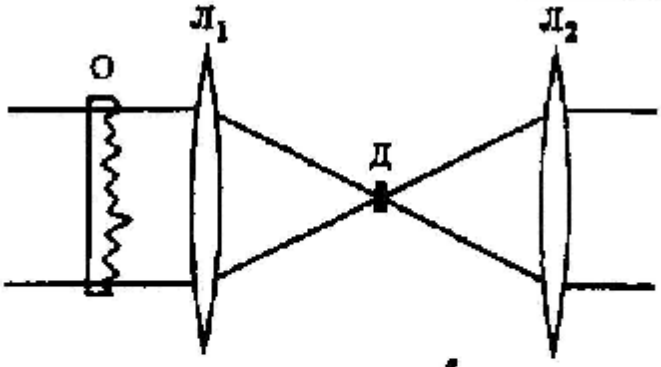




Спектр може фільтруватись за допомогою:

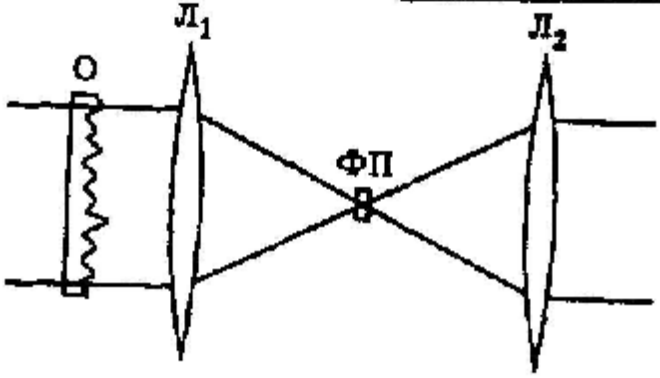
1) горизонтальної щілини;
2) вертикальної щілини;
3) ірисової діафрагми: проходить лише основна фур'є компонента спектру. При розширенні діафрагми можна прослідкувати етапи Фур'є-синтезу зображення;
4) круглий екран, який закриває центральну частину Фур'є спектру: отримується зображення з обернутим контрастом

Метод темного поля (метод свілей)



О-об'єкт прозорий
Внесення непрозорого диску Д призводить до того, що освітленість екрану сильно зменшується: виникає „темне поле". На фоні „темного поля" стає видним структура об'єкту

Метод фазового контрасту



Фриц Цернике, 1935 р.
Фазова платівка (ФП) призводить до того, що фазовий рел'єф → амплітудний рел'єф.

ФП здійснює зміну фази на $\frac{\pi}{2}$
Фонова хвиля, фаза якої зсунута на π/2, та сигнальна хвиля інтерферують, в результаті чого формується зображення структури об'єкта.

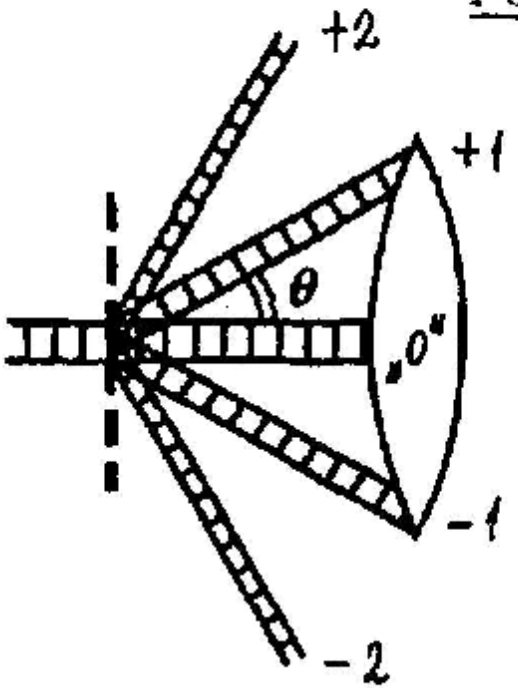
Метод косого падіння променів

$d \cdot \sin\varphi = m \cdot \lambda \Rightarrow$ При зменшенні d величина кутів дифракції збільшується.

При роботі із мілкими деталями предмета необхідно працювати із променями, які відхиляються на значний кут дифракції

159 159 159 159 159 159

Роздільна здатність лінзи



Мілкі деталі структури ґратки будуть створені через те, що інформація про них міститься в другому і більш високих порядках дифракції.

Тін період ґратки, який м.б. розділений за допомогою лінзи, відповідає випадку, коли дифр. max I порядку напрямлений точно на край лінзи.

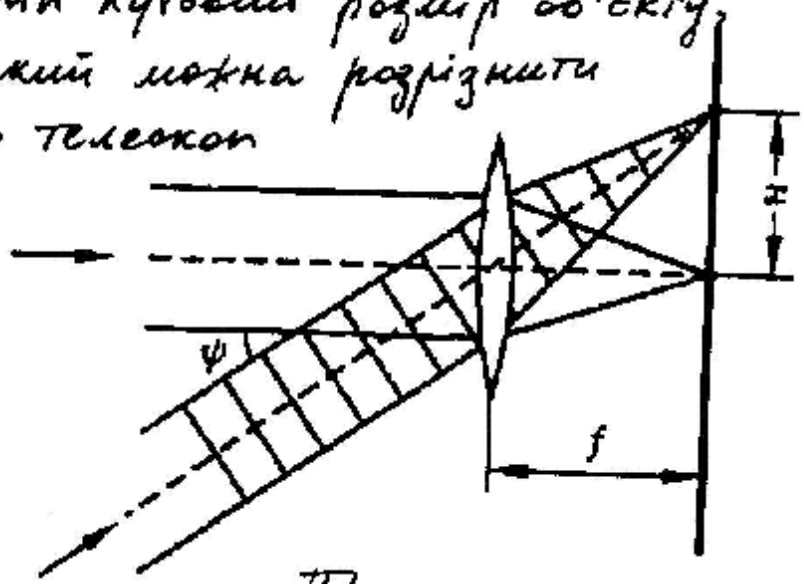
Висновок: - збільшуй ф лінзи; - розміщуй предмет ближче до лінзи.

якщо $\theta_{max} = \pi/2$, то в лінзу I max ніколи не попаде $\Rightarrow$ $d \cdot \sin\varphi = m\lambda$ $\quad m = 1$; $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$$\boxed{d_{min} = \lambda}$$

Роздільна здатність телескопу – Ψ_{min}

мін кутовий розмір об'єкту, який можна розрізнити в телескоп



Діафрагма призводить до того, що пляма в фокальній площині для кожного із променів має кінцевий розмір: $d = \theta_d \cdot f = \frac{\lambda}{D} f$

При малих кутах Ψ зображення зірок почнуть накладатись.

Розмір фокальної плями $d = \frac{\lambda \cdot f}{D}$ (1)

D - апертура об'єктиву

З рис. видно, що $x_{min} = d$ (2) – розмір фокальн. плями

$x_{min} = f \cdot \Psi_{min} \Rightarrow \Psi_{min} = \frac{x_{min}}{f} \underset{(2)}{=} \frac{d}{f} \underset{(1)}{=} \frac{\lambda}{D}$

$$\boxed{\Psi_{min} = \frac{\lambda}{D}}$$

Якщо $D = 6$ м, то $\Psi_{min} = 10^{-7}$ рад

$\lambda = 600$ нм

Оптична голографія

Holos (грецьк.) – весь, повний;
graphо (грецьк.) – пишу, малюю.

Ідея Г. належить Д. Габору (1948 р.)

Фотографія – плоске зображення предмета на ФПл. Реєструється та відтворюється амплітуда світлової хвилі, за допомогою якої записувалась або відтворюється інф. про тривимірний предмет, спроектована на площину.

Голографія (Г.) базується на використанні хвильових властивостей світла – законах інтерференції та дифракції: Г. дозволяє реєстр. та відтворювати амплітуду та фазу (+ поляризацію) світлової хвилі:

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01} \cdot E_{02} \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Розподіл інтенсивності в інтерф. картині визначається і амплітудою, і різницею фаз хвиль, що інтерферують.

Для реалізації Г. потрібно дві хвилі: сигнальна (предметна) та опорна, які когерентні між собою.

Два етапи: реєстрація (запис) Г. та відтворення (відбудова, реконструкція) Г.

1) Хвиля (предметна) відбивається, а також дифрагує на деталях предмета (модулюється по амп. та по фазі).
2) Предметну хвилю складають (застабляють проінтерферувати) із когерентною опорною хвилею.
3) За допомогою вже тільки опорної хвилі відтворюють із інтерф. картини предметну хвилю.

Г. – зареєстрована (записана) інтерференц. картина, отримана при накладанні опорної та предметної хвиль.

2.

Схеми практичної реалізації голографії

Схема Д.Габора

1) для голографування тільки прозорих предметів; 2) опорний та предметний промені розповсюджуються в одному напрямі.

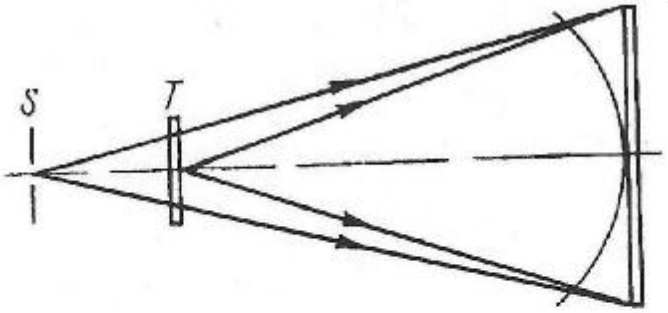
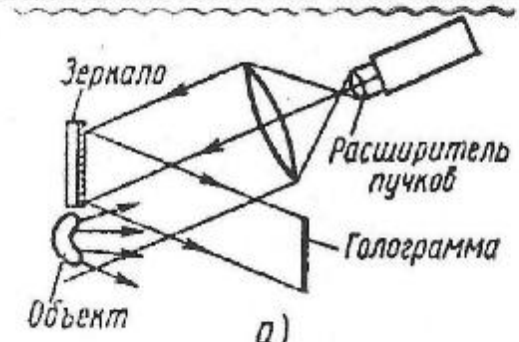
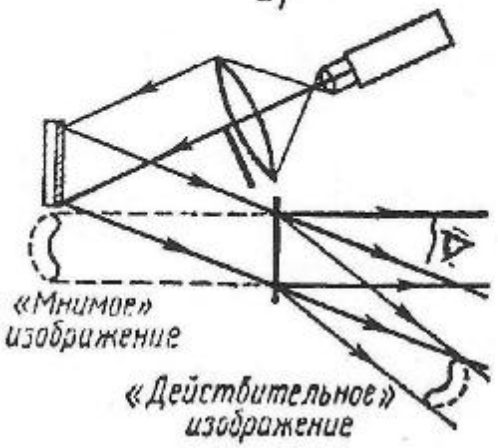


Схема Е.Лейта та Ю.Упатниекса

1) застосовується розсіяне світло (дифузне); 2) метод:
- 2-х променів;
- нахиленого опорного променя;
- позаосьовий.
- відтворення предметної хвилі: відбувається дифракція опорної хвилі на Г.;
- „дійсне" дображ. має протилежний рел'єф ніж предмет;
- і „дійсне" і „уявне" дображ. спостерігаються неозброєн. оком;
- Г. відтворює ту із хвиль (будь-яку з 2-х!), яка приймала участь у запису Г.



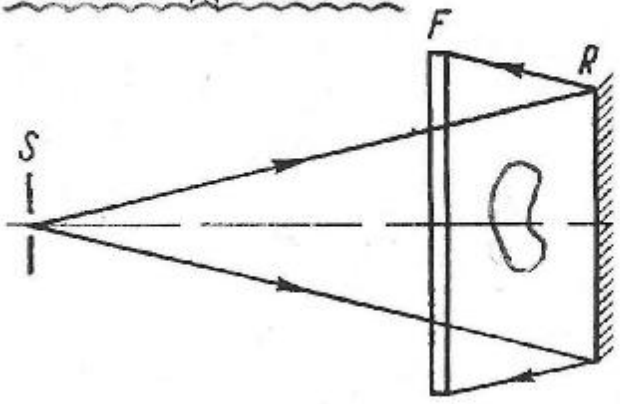
а)



б)

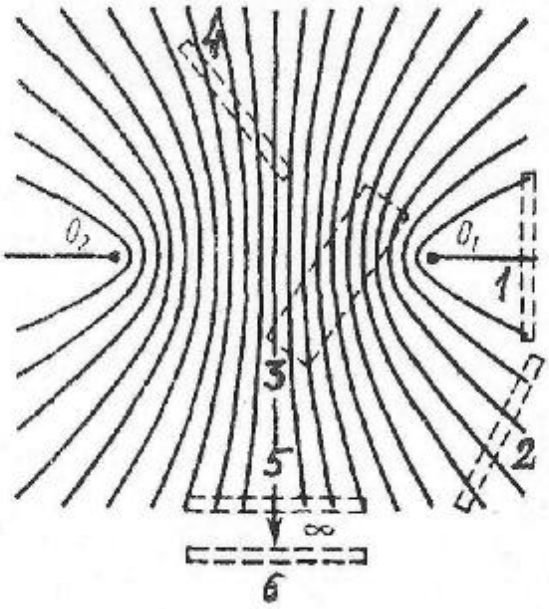
Схема Ю.Денисюка

Г. на ФПл з товстою емульсією: $d \sim 15 \div 20$ мкм (або ~30-40 довж. хв. зеленого світла. Фотошар (F) прозорий. R-дзеркало. Відтворення предметної хвилі відбувається розбіжним променем „білого" світла: багатопроменева інтерференція.



3.

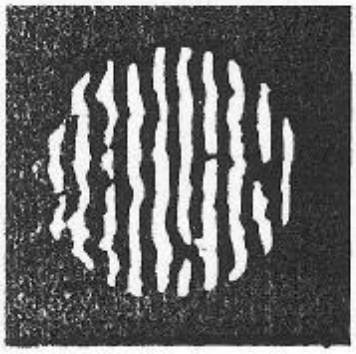
Положення ФПл при голографуванні.



ФПл можна розмістити в будь-якому місці стоячої хвилі Г. На прикладі інтерф. картини, яка створена від двох когерентних джерел: 1- по Габору; 2- по Лейту і Упатниексу; 3- по Денисюку; 4- з оберненим хвильовим фронтом; 5- Фур'є Г.; 6 – Г. Фраунгофера.

Г. записується, як правило, на звичайну ФПл, або реєструється будь-яким іншим методом, який дозволяє зареєструвати амплітуду хвилі.

Зовнішній вигляд Г. в мікроскоп в некогерентному світлі при великому збільшенні:



а.



б.

а- найпростішого предмета. Відстань між сусідніми смугами 5-20 мкм; б- складної сцени (зернистість фотоемульсії при такому збільшенні мікроскопу ще не спостерігається)

Розсіяна предметом хвиля виникає при відбитті від поверхні предмета і дифракції на її деталях. Реальна Г. являє собою дуже складну і заплутану інтерфер. картину з дуже мілкими деталями без будь-якої помітної під мікроскопом або неозброєним оком закономірності, хоча в закодованій формі Г. містить повну інформацію про амплітуду та фазу розсіяної хвилі.

Відтворення (реконструкція, відбудова) предметної хвилі: тим же лазером та під тим же кутом освітлення Г., що і ФПл при її експонуванні. Відбувається дифракція опорної хвилі на Г.

Вимоги до умов отримання Г.

1) *нерухомість* (~ долей λ) всіх деталей установки (мех., жорсткість, інакше не буде високої контрастності ("розмитість" гологр. зображення).

4.

2) Для Г. потрібні ФПл з високою *розд. здатністю.* Сучасні мілкозернисті ФПл – 10^3-10^4 ліній/мм. Коли розд. здатність ↑, чутливість ↓.

3) *Роль когерентності.* Різниця ходу між опорною та предм. хвилями дуже велика (до декількох метрів). Тому час когерентн. $\tau_к > 10^{-5} - 10^{-7}$ с, а $L_к \sim 1$-10 м.

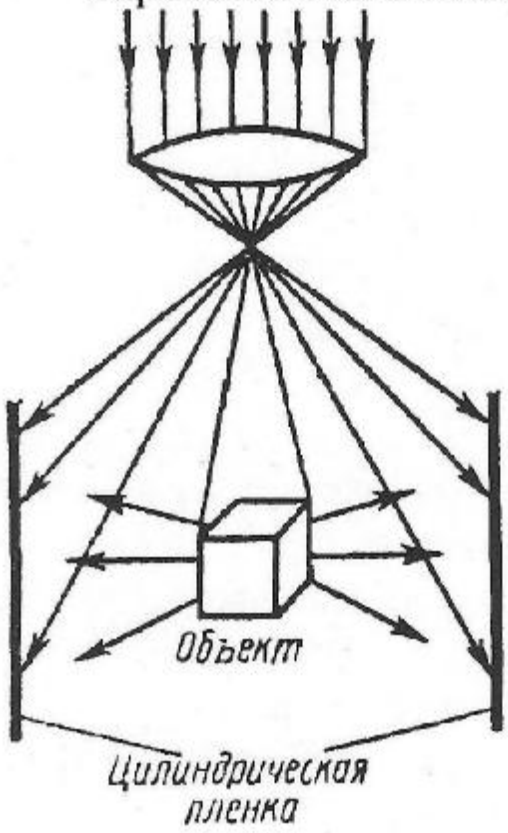
$\frac{\lambda}{\delta\lambda} \geq m_{max}$, де $m_{max} \sim \frac{L}{\lambda}$, L - лін. розмір предмету.

$\delta\lambda < \lambda^2 / L$. Якщо L~10 см, а λ=500 нм, то $\delta\lambda < 10^{-3}$ нм.

Для ртутної лампи $\delta\lambda \sim 30$ нм. Тільки лазер!

Властивості голографії

1. ***Г. – без лінзовий спосіб*** отримання опт. зображення.
2. Зображення, яке дає Г., - ***тривимірне і панорамне*** (з ефектом паралактичного зміщення)





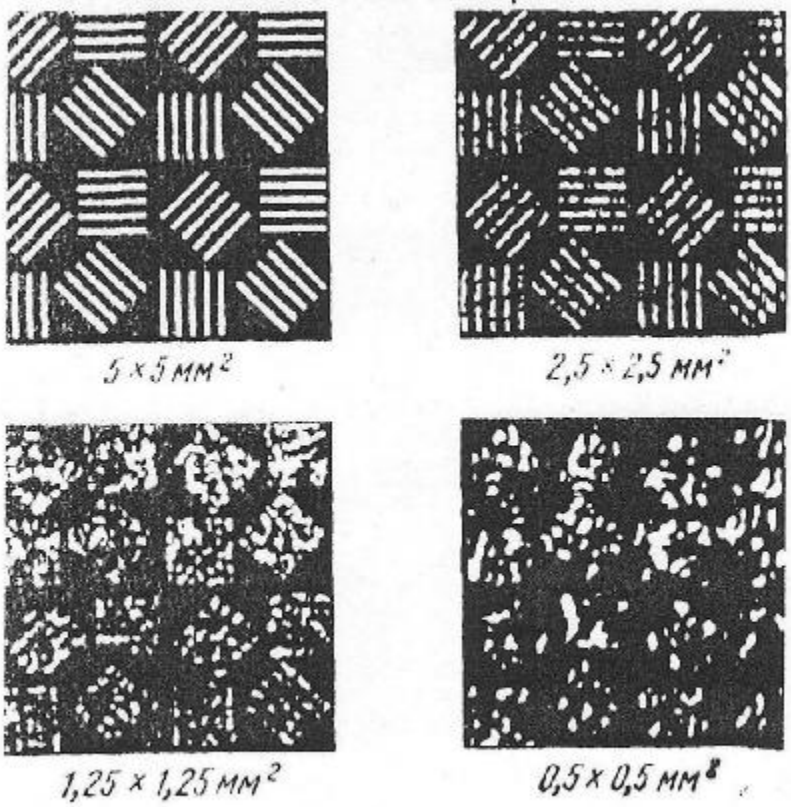
3. На одній ФПл можна зареєструвати ***декілька*** (реально до 100). ***накладених одне на друге зображень*** без помітного взаємного впливу.

4. Можна отримати ***кольорове зображення***, освітлюючи Г. трьома різними лазерами (Г. на чорно-білій ФПл. !).

165

5. *Частина Г. діє як ціла Г.*

5.



6. Г. має ***асоціативний характер*** *Г.* При реєстрації об'єкту O_1 об'ємної Г. випромінювання кожної його точки можна розглядати, як опорне відносно до всіх інших точок O_1. Якщо отриману таким способом голограму відтворити випромінюванням *частини* точок записаного на ній об'єкту (наприклад, випромінюванням вістря об'єкта O_1), то це випромінювання відтворить зображення *всіх* точок об'єкта, відносно яких воно було опорним, тобто зображення об'єкта в цілому. Таким чином, тривимірна голограма за фрагментом записаної на ній інформації здатна "згадати за асоціацією" всю інформацію про об'єкт у цілому.

7. Поляризаційна Г. Г. здатна реєструвати та відтворювати не лише амплітуду, фазу і довжину хвилі, а і стан поляризації об'єктної хвилі. При запису Г. поляризації опорної та об'єктної хвиль можуть бути різними аж до їх взаємної ортогональності. Інтерференційна картина в такому випадку характеризується модуляцією стану поляризації поля, голограму якого записують. Неозброєне людське око не розрізняє ці стани. Але якщо таку картину зареєструвати на світлочутливому середовищі, яке реагує на стан поляризації випромінювання, наприклад, анізотропією коефіцієнта поглинання, то можна записати поляризаційну Г. На ній одночасно записуються

165

дві періодичні структури, які зсунуті на 1/2 періоду інтерференційної картини і відповідають взаємно ортогональним лінійним станам поляризації. Це неначе дві голограми, записані на одному носієві. Відповідно при реконструкції поляризаційної Г. відтворюються дві об'єктні хвилі, які зсунуті на 1/2 періоду і поляризовані ортогонально одна до одної і під кутом 45^0 відносно до поляризації опорної хвилі. У поляризаційній Г. відтворюється повна інформація про об'єкт, включаючи стан поляризації розсіяного ним поля. Тим самим практично завершилась побудова основ голографії, як метода запису та відтворення всіх без виключення характеристик хвильового поля.

8. Динамічна Г. на відміну від статичної Г. існує лише на момент дії опорного та предметного променів, вона не потребує процедури фіксації зображення. Динамічну Г. формують у нелінійному світлочутливому середовищі безпосередньо в момент, коли на нього діє хвильове поле. При цьому використовується зворотний зв'язок між хвилями, що записуються, та голограмою, що ними записується. Іншими словами, у процесі запису відбувається і зчитування інформації. Записана інформація зразу ж, спонтанно починає стиратись, що дозволяє записувати і зчитувати нову інформацію. Суттєвим у динамічній Г. є запізнення в ній зворотного зв'язку між променем запису та записаною голограмою. Інформація, яка міститься у деякій момент часу в промені, визначає характеристики середовища, які в свою чергу впливають на параметри наступної у часі частини променя. Це створює можливість динамічного, в реальному часі управління параметрами як світлових променів, так і інформації, яку вони несуть. На основі динамічних голографічних перетворень розробляються логічні елементи комп'ютерів з швидкодією до 10^{-12} с, що наближається до граничного значення цієї характеристики, яке пов'язане з порядком періоду світлової хвилі (10^{-14} - 10^{-15} с).

9. "Хвилеводна Г." пов`язаний з безпосереднім використанням хвилеводних мод тонкоплівкових хвилеводів як опорного, сигнального та відтворюючого пучків. При цьому взаємодія мод з реєструючим середовищем відбувається безпосередньо, без етапу перетворення їх у випромінювання вільного простору. Саме реєструюче середовище є елементом тонкоплівкового хвилеводу,

воно розташоване вздовж напрямку розповсюдження хвилеводних мод.

10. Г. принципово ***менш чутливі до дефектів*** порівняно із неголографічним побітовим або аналоговим записом інформації. Це пов'язане з однією з основних властивостей Г., яка характеризує тільки цей спосіб запису - не тільки вся субголограма, але і кожний її фрагмент має властивість відтворювати записану на ній інформацію. Однак при цьому, слід мати на увазі, що, чим більша частина субголограми використовується для відтворення, тим вища точність відтворення. Обмеження Г. за площею призводить до зменшення розділення мілких деталей, а обмеження за глибиною знижує точність спектрального (кольорового) відтворення. При наявності на Г. пилу, подряпин, інших дефектів інформаційні втрати проявляються у вигляді зменшення чіткості границь та кількості градацій яскравості між окремими елементами зображення. Це дозволяє казати про надзвичайно високу ***перешкодостійкість та надійність*** голографічного запису;

11. Виконуються не послідовні, а ***паралельні процеси запису та зчиту-вання інформації*** у вигляді окремих субголограм розміром ~ 10^4 . 10^5 біт;

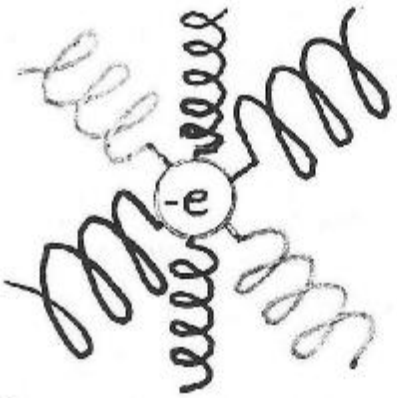
12. ***Час звертання*** до будь-якої з субголограм складає ~1 мкс;

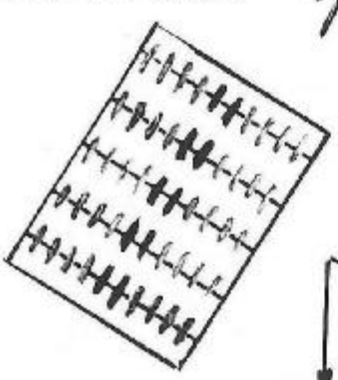
Оптика анізотропних середовищ.

I. Експеримент

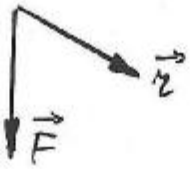
В природі існують речовини, розповсюдження хвиль в яких відбувається за законами, відмінними від тих, якими описується поведінка ізотропних середовищ: формулами Френеля і законом Снелліуса.

Це - анізотропні середовища. Їх властивості обумовлені: - особливостями їх молекул (атомів);
- особливостями їх кристалічної гратки.





Рахівниця - модель анізотр. середовища

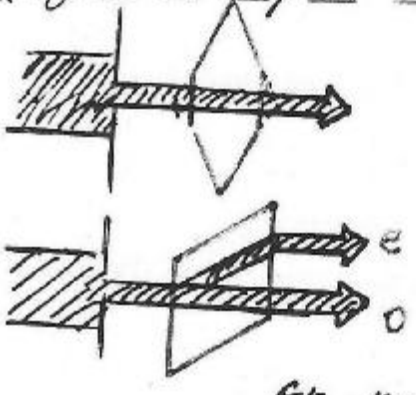


Модель, яка пояснює анізотропні властивості електрона в кристалі

Основні експериментальні факти

1670 р. - Бартоліні, 1690 р - Гюйгенс „Трактат про світло"

1) Незвичайне заломлення в кристалах „із Ісландії" - $CaCO_3$



2) Навіть при нормальному падінні світла на межу відбувається заломлення - незвичайний („e") промінь.

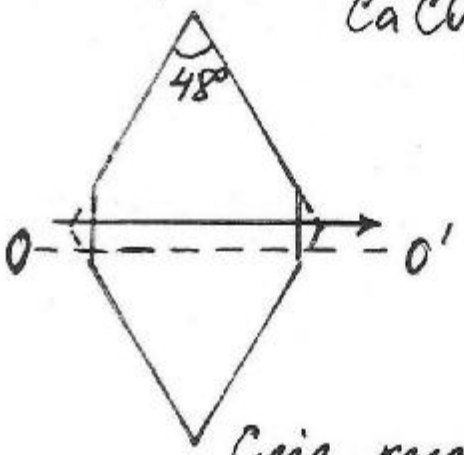
В кристалах з кубічною симетрією кристал. гратки двопроменев. не відбув.

3) „e" промінь може не лежати в площині падіння.

4) В кристалі існує оптична вісь (OO'), вздовж якої двопроменезаломлення відсутнє.

Площина, в якій лежить OO' і падаючий промінь, називається головною площиною (або головним перерізом).

$CaCO_3$



В природі існують кристали з однією та з двома OO': одновісні та двовісні кристали. Слюда – двовісний кристал. Ісландський шпат ($CaCO_3$) – одновісний кристал.

Слід казати про OO' як про напрямок, а не як про лінію!

5) Для „o" променя показник заломл. $n_o \neq n_o(i)$ де i – кут падіння.

Для „e" променя $n_e = n_e(i)$.

Для $\lambda = 5893$ Å (жовтий дублет Na) в $CaCO_3$:

$n_o = 1.658$; $1.486 < n_e < 1.658$ (верхня межа n_e дорівнює значенню n_o).

6) Обидва промені („o" і „e") повністю поляризовані. Їх поляризації ортогональні.



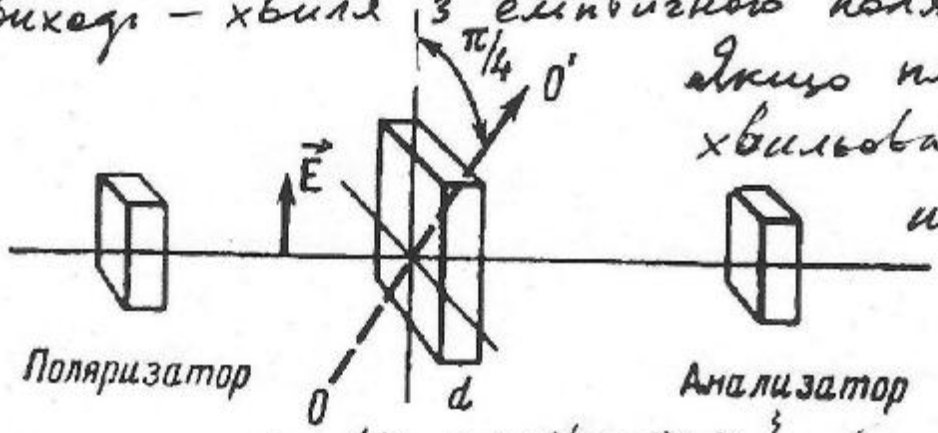
Коливання вектора $\vec{E}$ в „o" промені перпендикулярні до площ. головного перерізу.

„e" – Промінь поляризован в головній площині

7) При розповсюдженні променя в напрямку, перпендик. до OO', двопроменезаломлення відсутнє (як і для напрямку $\parallel$ OO'), хоча $|n_e - n_o|$ набуває max значен.

Це означає, що в одному напрямку розповсюджуються дві лін. поляризовані хвилі ($\vec{E_o} \perp \vec{E_e}$) з різними фазовими швидкостями: $v_o = \frac{c}{n_o}$ та $v_e = \frac{c}{n_e} \Rightarrow v_o \neq u_e$. В залежності від товщини (d) пластівки промені вийдуть із неї з деякою різницею фаз (δ).

Якщо $\delta = 0, \pi, \dots$, то результуюча хвиля буде лінійно поляризованою. Для інших значень δ на виході – хвиля з еліптичною поляризацією.



Якщо пластівка – „чвертьхвильова" ($\lambda/4$) – така, що $\Delta = d(n_o - n_e) = \left(m + \frac{1}{4}\right)\cdot\lambda$, то

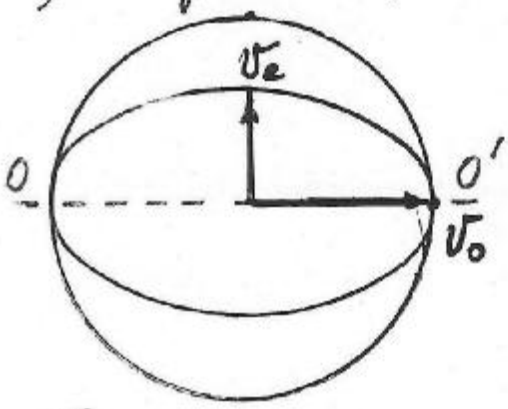
$\delta = \Delta \cdot k =$

$\Delta = d(n_o - n_e) = (4m+1)\lambda/4$ $\Big\}$ $= (4m+1)\frac{\lambda}{4}\cdot\frac{2\pi}{\lambda} =$

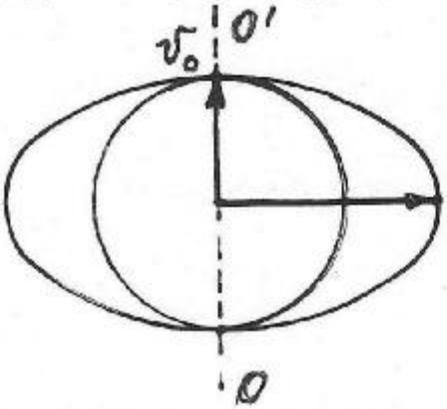
$\widehat{\vec{E}, OO'} = 45°$, щоб $|\vec{E_o}| = |\vec{E_e}|$ $\Big\}$ $= (4m+1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$

Лінійно поляриз. світло на вході → циркулярно поляризоване світло на виході.

8) Є кристали, в яких $n_o > n_e$ і в яких $n_o < n_e$



Додатній аніз. кристал: $v_o > v_e$
$Кварц, TiO_2, Hg_2S$



Від'ємний анізотропний кристал: $v_o < v_e$ ($n_o > n_e$)
$CaCO_3$, турмалін, апатит

$v = \frac{c}{n}$! Не плутати n_e та v_e !

$v_o \neq v_o(\varphi)$

$v_e = v_e(\varphi)$

$\varphi = \widehat{\vec{k}\,\vec{OO'}}$

Оптика анізотропних середовищ. (Кристалооптика). II. Теорія.

Структура світлової хвилі в анізотропному середовищі.

В лінійному середовищі (незалежно від того – ізотропне воно чи анізотропне) визначається рівняннями Максвелла:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \operatorname{rot}\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{D} &= 0 & \operatorname{div}\vec{H} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Для плоскої хвилі: $\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к.с}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2}\vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к.с.} \\ \vec{D} &= \frac{1}{2}\vec{D}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к.с.} \end{aligned}\right| \quad (2)$$

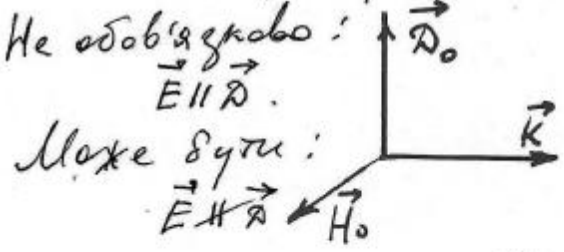
де $\vec{E}_0, \vec{H}_0, \vec{D}_0$ – комплексні амплітуди.

$(2) \to (1)$: $[\vec{k}, \vec{E}_0] = \frac{\omega}{c}\vec{H}_0$; (3)

$$[\vec{k}, \vec{H}_0] = -\frac{\omega}{c}\vec{D}_0 \quad (4)$$

$$(\vec{k}, \vec{D}_0) = 0 \quad (5) \qquad (\vec{k}, \vec{H}_0) = 0 \quad (6)$$

Із (4)-(6) видно, що $\vec{D}_0, \vec{H}_0, \vec{k}$ утворюють праву трійку взаємно перпендикулярних векторів:

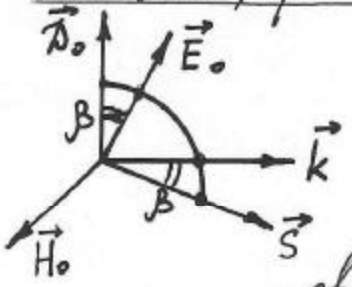


Залишається вектор $\vec{E}_0$, який фігурує тільки в (3).

$\vec{E}_0 \perp \vec{H}_0 \Rightarrow$ вектор $\vec{E}_0$ лежить в площині векторів $\vec{D}_0$ і $\vec{k}$, але, взагалі кажучи, $\vec{E}_0 \nparallel \vec{D}_0$!

Примітка: відомо, що $\vec{E}$ входить в вектор Умова-Пойнтінга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}]$. Вектори $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$ складають праву трійку векторів.

Всі 4 вектори: $\vec{D}_0, \vec{E}_0, \vec{k}, \vec{S}$ лежать в одній площині, до якої вектор $\vec{H}_0$ перпендикулярний.



Кут $\beta = \vec{D}_0\vec{E}_0 = \vec{k}\vec{S}$ – кут анізотропії;
$\vec{k}$ – нормаль до хвильового фронту;
$\vec{S}$ – напрям світлового променя.

Непаралельність векторів $\vec{E}_0$ та $\vec{D}_0$ світлової хвилі обумовлює специфічні оптичні властивості анізотропних кристалів

В анізотропному середовищі при розповсюдженні в ньому світл. хвилі на електрони діють зовн. сили, напрямлені вздовж $\vec{E}$ хвилі. Однак електрони зміщуються в іншому напряму, який визначається структурою кристалу – вздовж $\vec{D}$ та $\vec{P}$ $(\vec{D} \parallel \vec{P})$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E} + 4\pi\chi_{ij}(\omega)\cdot\vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_{ij}(\omega)\cdot\vec{E}$$

$\varepsilon_{ij}(\omega)$ – тензор діел. проникності лінійного анізотр. середовища

Якщо декартову СК обрати не довільно, а спеціально $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ (така СК існує завжди), то тензор ε_{ij} можна діагоналізув.

1) коли $\vec{D} \parallel \vec{E}$, ε – скаляр $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$

2) коли $\vec{D} \nparallel \vec{E}$, ε – тензор

Такі осі x, y, z назив. головними осями координат. Одна з головних осей направлена вздовж $\vec{P}$, а напрямок 2-х інших – довільний.

В головних осях співвідношення такі:
$\vec{D}_x = \varepsilon_{xx}\vec{E}_x$; $\vec{D}_y = \varepsilon_{yy}\vec{E}_y$; $\vec{D}_z = \varepsilon_{zz}\vec{E}_z$

В залежності від співвідношень між ε_{ii} кристали діляться: – ізотропні $(\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz})$;
– одновісні $(\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz})$; – двовісні $(\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz})$

В обл. прозорості кристали характеризуються тим, що $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Одновісний кристал має 2 головних показника заломл. $n_o = \sqrt{\varepsilon_{xx}} = \sqrt{\varepsilon_{yy}}$; $n_e = \sqrt{\varepsilon_{zz}}$

Двовісний кристал має 3 головних показника заломл.: $n_x = \sqrt{\varepsilon_{xx}}$; $n_y = \sqrt{\varepsilon_{yy}}$; $n_z = \sqrt{\varepsilon_{zz}}$

В одновісному кристалі, якщо $n_o < n_e$ – кристал додатній; якщо $n_o > n_e$ – кристал від'ємний.

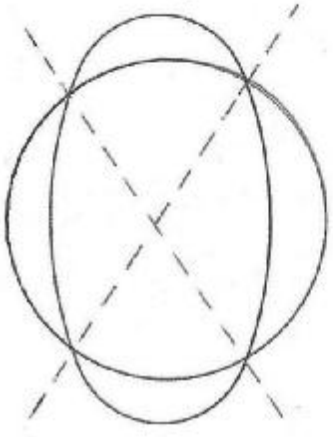
Наприклад: 1) Одновісні кристали

Додатні:	n_o	n_e	Від'ємні:	n_o	n_e
Лід	1.309	1.310	$LiNiO_3$	2.300	2.208
Кварц	1.544	1.553	$NaNO_3$	1.587	1.336
Рутил	2.616	2.903	Пруспит	3.019	2.739

2) Ізотропні кристали: CdTe $n = 2.69$

NaCl $n = 1.544$; Алмаз $n = 2.417$; GaAs $n = 3.40$

3) Двовісні кристали	n_x	n_y	n_z
Гіпс	1.520	1.523	1.530
Польовий шпат	1.522	1.526	1.530
Слюда	1.552	1.582	1.588
Топаз	1.619	1.620	1.627

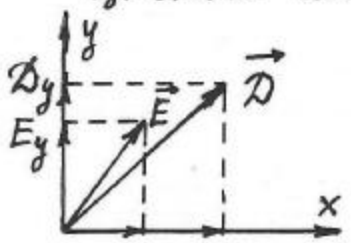


Про двовісні кристали можна прочитати: Білий... с. 249-251
Таджаєв ... с. 259

Власні стани поляризації світлової хвилі в анізотропному середовищі

Можна показати, що світлова хвиля з довільним станом поляризації ($\vec{D}$ не напрямлений вздовж ні однієї з головних осей) в анізотропному кристалі нестійка: вона розпадається на дві лінійно поляризовані, ортогональні хвилі, які розповсюджуються із різними фазовими швидкостями.

Ці стани поляризації назив. власними станами пол.



$\vec{D} = \vec{x}_0 D_x + \vec{y}_0 D_y$

x_0, y_0 – орти

По мірі розповсюдження хвилі в кристалі різниця фаз між ортогональними компонентами поля буде змінюватись. Тобто: вздовж хвиля буде поляризована по еліпсу і параметри власних еліпсу будуть змінюватись.

станів Як аналітично описати цю залежність? Для одно-поляризацій вісного кристалу:

V Якщо $\vec{k} \parallel OO'$ (опт. вісь) $\parallel OZ$ (головна вісь кристалу), то хвиля зберігає свою поляризацію і розповсюджується з однією швидкістю; $\vec{D} \parallel \vec{E}$; вектори $\vec{E}, \vec{D}, \vec{k}$ лежать в одній площині (в силу рівнянь Максвелла).

W Якщо $\vec{k} \nparallel OO' \parallel OZ$, то:

1) $D_x = \varepsilon_{xx} E_x$; $D_y = \varepsilon_{yy} E_y$; $D_z = \varepsilon_{zz} E_z$, або
$D_x = n_o^2 E_x$; $D_y = n_o^2 E_y$; $D_z = n_e^2 E_z$ (1)

2) змішаний добуток $(\vec{k}[\vec{E}\vec{D}]) = 0$ (2) – випікає з рівняння Макс.

(1) та (2) незалежні один від одного.

Обидва ці рівняння виконуються не для будь-яких хвиль, а лише для вибраних поляризацій, які наз. власними

$$[\vec{E},\vec{D}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ E_x & E_y & E_z \\ n_0^2 E_x & n_0^2 E_y & n_e^2 E_z \end{vmatrix}$$

$OO' \parallel Oz \Rightarrow [\vec{E},\vec{D}] \perp Oz \Rightarrow (\vec{z}_0 [\vec{E},\vec{D}]) = 0 \Rightarrow$
$\vec{z}_0, \vec{E}, \vec{D}$ – компланарні.

Умови (1) та (2) виконуються у двох випадках:

1) якщо $\vec{D} \parallel \vec{E} \Rightarrow [\vec{E},\vec{D}] = 0$ (3)

2) якщо $\vec{D}$ лежить в пл. векторів $\vec{z}_0$ та $\vec{k}$, то це математично можна записати у вигляді $(\vec{z}_0 [\vec{k},\vec{D}]) = 0$.

Вводять поняття головної площини – пл., в якій лежать вектори $\vec{z}_0$ та $\vec{k}$ (опт. вісь та хвильовий вектор).

Висновки (підсумки):

1) для будь-якого $\vec{k}$ в одновісному анізотропному кристалі існує 2 дозволених („власних") напрямки світлової хвилі. Один з них $\perp$ головній пл., другий – їй паралельний;

2) хвиля з довільним станом поляризації розкладається в кристалі на 2 лінійно поляриз. хвилі із взаємно ортогональними поляризаціями („власними" поляр.);

3) швидкості розповсюдження цих („власних") хвиль різні;

4) швидкість звичайної хвилі не залежить від напрямку розповсюдження і дорівнює $\vartheta_0 = c/n_0$

5) швидкість незвичайної хвилі залежить від напрямку розповсюдження в кристалі і лежить у межах між c/n_o та c/n_e.

Швидкість розповсюдження незвичайної хвилі. Еліпсоїд показника заломлення

Незвич. хвиля розповсюдж. вздовж $\vec{k}$. Вектор $\vec{k}$ не співпадає ні з одним із напрямків головних осей.

Задача: визначити $v = v(\vec{k})$.

Без доведення: 1) Для звичайної хвилі $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = n_o^2 \vec{E}$

$$n_o = c \cdot \frac{k}{\omega} = c \frac{1}{v_o} \Rightarrow v_o = \frac{c}{n_o}$$

Для звичайної хвилі фазова шв. не залежить від напрямку.

2) Для незвичайної хвилі: $\vec{D} \not\parallel \vec{E}$; $(\vec{E}, \vec{k}) \neq 0$

Якщо напрямок розповсюдження хвилі х-ти кутом φ, де φ - кут між $\vec{k}$ та OO' кристалу, то

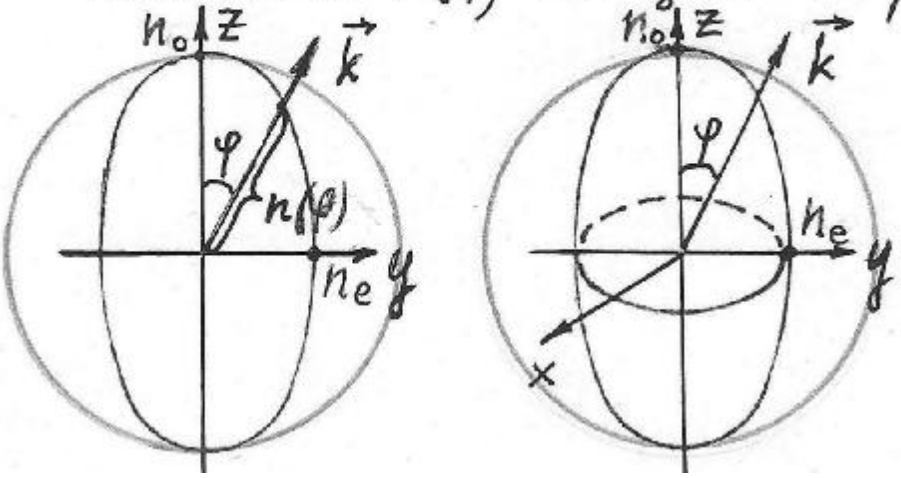
$$\frac{\sin^2\varphi}{n_e^2} + \frac{\cos^2\varphi}{n_o^2} = \frac{1}{n^2(\varphi)}$$

Значення n_o та n_e визначаються вздовж головних осей.

(A) $$\boxed{n(\varphi) = \frac{n_o \cdot n_e}{\sqrt{n_e^2 \cdot \cos^2\varphi + n_o^2 \cdot \sin^2\varphi}}}$$

Знаючи $n(\varphi)$, розраховують $v(\varphi) = \frac{c}{n(\varphi)}$

Залежність $n(\varphi)$ показана на рис.

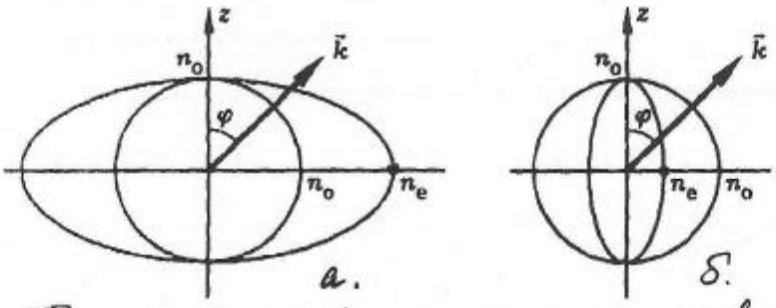


Еліпс і еліпсоїд показника заломл. На півосі – n_o та n_e

від'ємний анізотр. кристал

Подвійне променезаломлення світла на границі з анізотропним середовищем

Перерізи сфери і еліпсоїду показників заломлення для додатного (а) і від'ємного (б) одновісного анізотропного кристалу



Граничні умови для ел.м. поля вимагають неперервності tg- (тобто паралельних границі поділу) компонент ел.м. поля: $E_{t_1} = E_{t_2}$; $H_{t_1} = H_{t_2}$ (1)

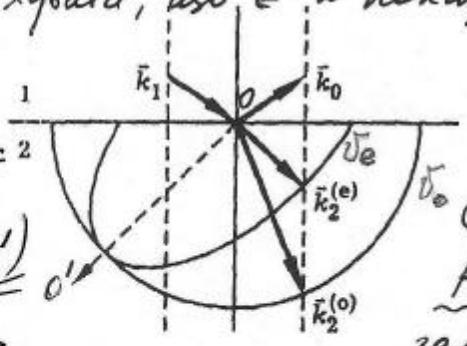
Як і у випадку з ізотропними середовищами, з (1) витікає рівність tg-компонент хвильових векторів відбитої та заломленої хвиль: $k_{1x} = k_{0x} = k_{2x}$ (2)

Закон відбиття залишається в силі: $\theta_1 = \theta_0$.

Закон заломлення теж залишається, але треба враховувати, що є 2 показника заломлення n_o та n_e:

$$\begin{cases} n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2^{(o)} \cdot \sin\theta_2^{(o)} \\ n_1 \sin\theta_1 = n_2^{(e)}(\theta_2) \cdot \sin\theta_2^{(e)} \end{cases}$$

Додатний одновісний кристал



Опт. вісь OO' лежить в пл. падіння.

$$k_{1x} = k_{0x} = k_{2x}^{(e)} = k_{2x}^{(o)} \quad (2')$$

$$\begin{cases} \text{Кут } \theta_2^{(e)} = \widehat{\vec{k}_2^{(e)}\,\vec{n}} \\ \theta_2^{(e)} \neq \widehat{\vec{S}_2^{(e)}\,\vec{n}} \end{cases}$$

Аналіз: 1) Як видно з рис., кути заломлення для „o" та „e" променів різні. 2) Вектор Умова-П. $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}]$ не співпадає за напрямком з $\vec{k}$. Саме цим пояснюється ефект заломлення в анізотр. крист. при нормальному падінні (див. наступний рис.).

3) Випадок нормального падіння світла на межу: ізотропне середовище – анізотропний кристал

$K_{1x} = K_{ox} = K_{2x} = 0$ – умова збереження tg-склад.

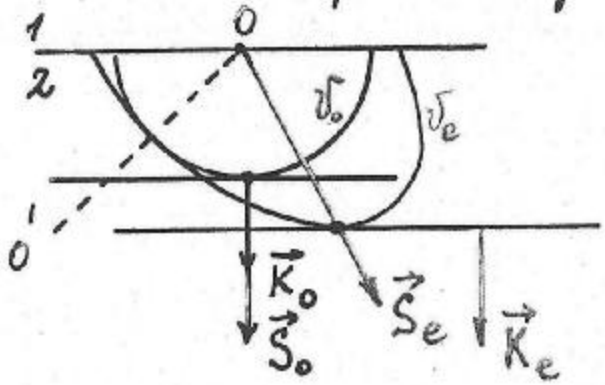
Це означає, що хвильові вектори в кристалі, як і хвильовий вектор падаючої хвилі, напрямлені перпендикулярно до межі поділу.

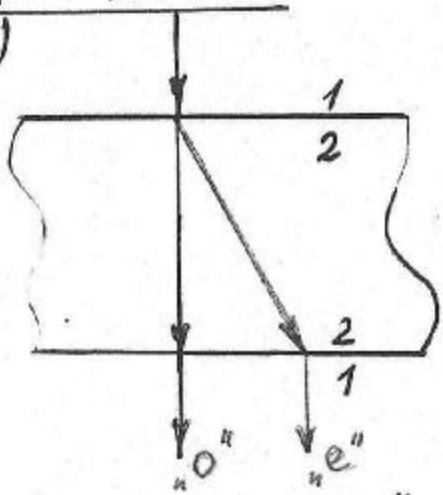
Напрямок „o" хвилі співпадає з напрямком нормалі до хвильового фронту: $\vec{K}_o \parallel \vec{S}_o$

Для „e" хвилі: $\vec{K}_e \not\parallel \vec{S}_e$.

Як знайти напрямок „e" хвилі:

(кристал-від'ємний)



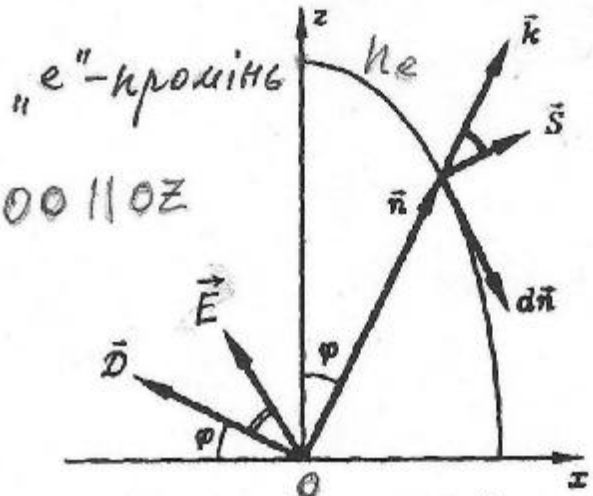


Закон заломлення Снелліуса „працює" для „o" променя. Він „працює" і для „e" променя, але лише для хвильових векторів, як для $\vec{S}_e$!

4) Випадок, коли OO' не лежить в пл. падінні.

Заломлений „e" промінь в цьому випадку теж не лежить в пл. падіння – ще одна, дуже цікава властивість анізотропних середовищ!

5) Як визначити напрямок „e"-променя при довільному куті падіння променя (φ) на межу розділу? (п. 3 стосувався нормального падіння).



Відповідь: В одновісному анізотропному кристалі „e"-промінь напрямлений по нормалі до еліпсоїду показника заломлення: вектор $\vec{S} = 4\pi/c\,[\vec{E}, \vec{H}] \perp$ до дотичної в точці $n(\varphi)$ (див. рис.).

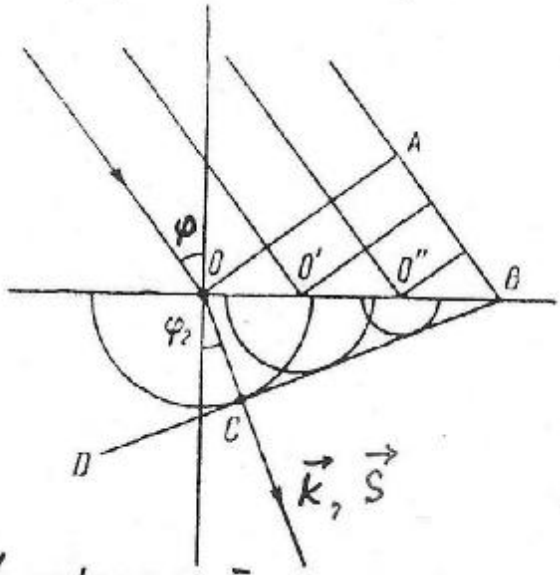
З рис., крім того, видно, що:

- кут $\vec{k}\hat{\vec{S}}$ = кут $\vec{D}\hat{\vec{E}}$ – кут анізотропії;
- $\vec{S} \perp \vec{E}$; $\vec{k} \perp \vec{D}$;
- $\vec{E} \parallel d\vec{n}$ ($\vec{S} \perp d\vec{n}$), де $d\vec{n}$ – дотична до еліпсоїду показника заломлення в точці $n(\varphi)$. Фізичний зміст $d\vec{n}$ пов'язаний із приростом вектора $\vec{n}$, який виникає при збільшенні кута φ на величину $d\varphi$.

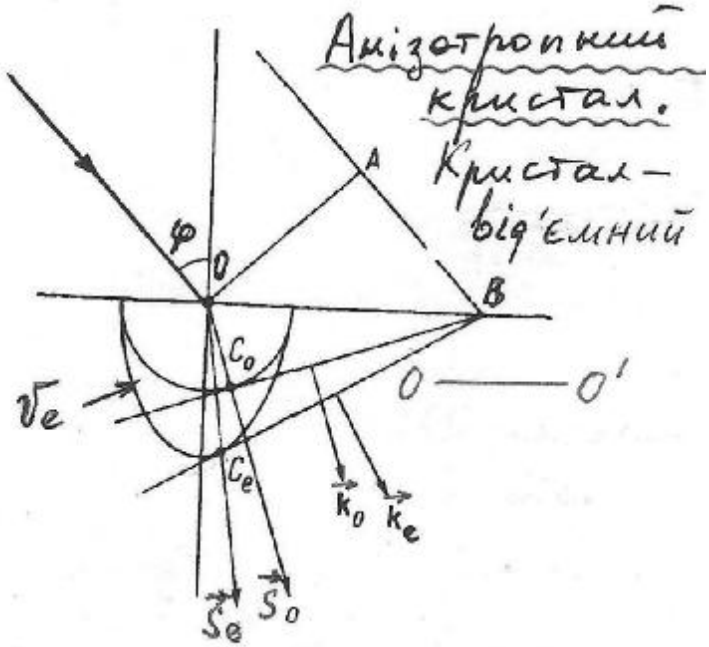
180 180

Побудова Гюйгенса

Гюйгенс постулював, що кожна точка, до якої доходить світлове збудження, може розглядатись, як центр відповідних вторинних хвиль. Для побудови хвильового фронту в наступні моменти часу слід побудувати огинаючу цих вторинних хвиль.

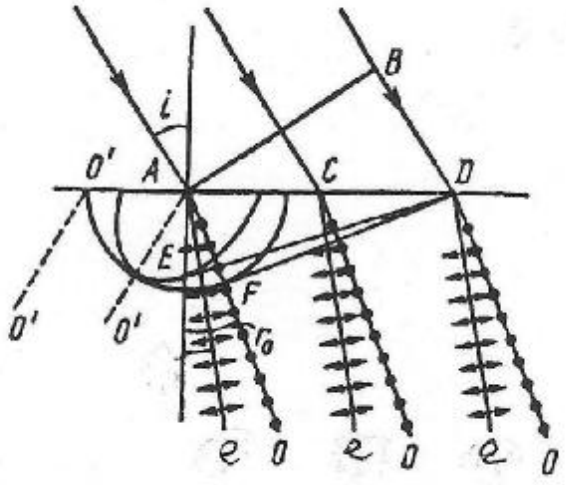


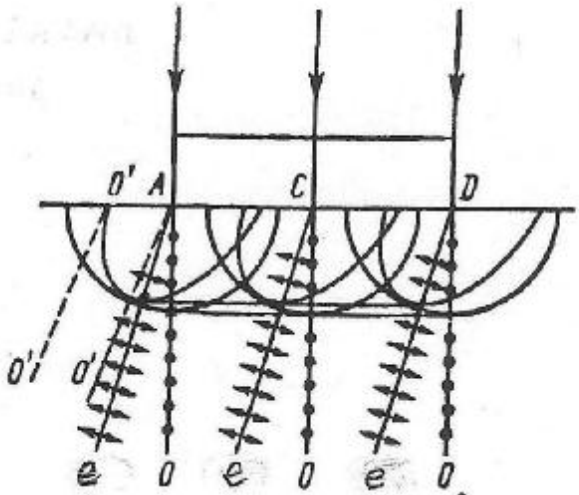
Ізотропний кристал



Головна площина співпадає з площиною малюнку

Як знайти поляризацію хвиль в анізотропному кристалі? Вектор $\vec{E}$ для "е"-хвилі завжди лежить в головній площині. Вектор E для "о"-хвилі – перпендикулярний до головної площини.



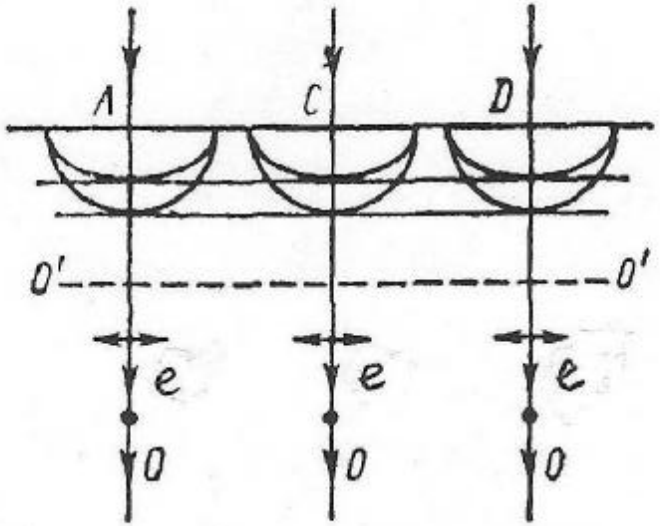


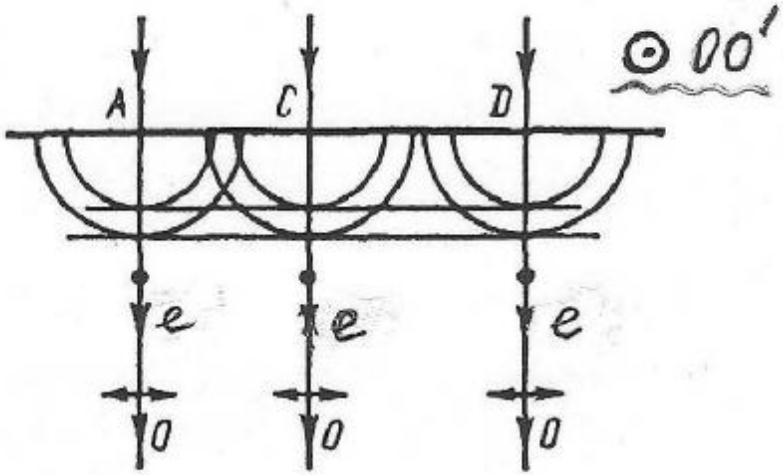
"е" – промінь не перпендикулярний до хвильового фронту! $\vec{S}_e \nparallel \vec{k}_e$

"о" промінь завжди перпендикул. до хвил. фронту!

$\vec{S}_o \parallel \vec{k}_o$ завжди!

180 180





$V_o > V_e$ – для додатнього кристалу

Зауваження: 1) Побудова Гюйгенса дає напрямок $\vec{k}$ (положення хвильового фронту, нормалі до нього) і напрямок променів (напрямок $\vec{S}$). 2) На досліді ми спостерігаємо безпосередньо за поведінкою променів, а не за нормаллю до хвилі. 3) Треба враховувати, що побудова Гюйгенса – проста і наглядна, в ряді випадків надзвичайно полегшує правильний розв'язок задачі. 4) Можна враховувати, що кут між $\vec{k}$ та $\vec{S}$ – невеликий.

Поляризоване світло: отримання, властивості, аналіз, використання

Поляризатори – пристрої для перетворення природного або частково поляризованого світла в лінійно поляризоване.

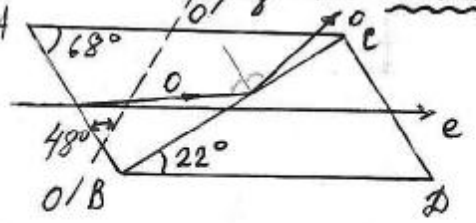
Поляризатори і аналізатори.

За принципом дії: 1) відбивання під кутом Брюстера; 2) заломлене світло – частково поляризоване ⇒ Стопа Столетова; 3) явище дихроїзму в деяких анізотропних середовищах (плівках) – поляроїди; 4) поляризаційні призми, основані на явищі двопроменезаломлення.

Поляризаційні призми

а) однопроменеві:

Першу поляриз. призму винайшов Ніколь (1828р.). На його честь, названа ніколем



З ісландського шпату: $CaCO_3$

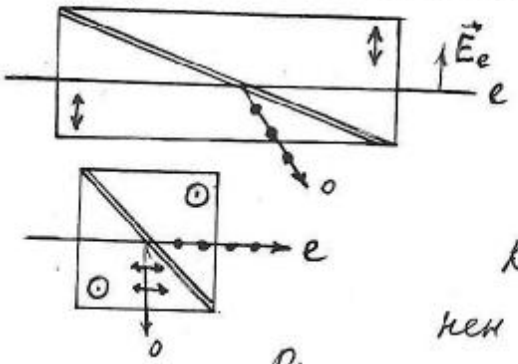
$\frac{AB}{AC} = 3.65$

Склейка по BC ізотропним канадським бальзамом $n = 1.550$ для $\lambda = 589$нм (жовта лінія)

Для „o" променя виконуються умови повного відбиття ($n_o > n$)

Для „e" променя ($n_e < n$) – ПВВ немає.

Призма Глана (Глана-Фуко)



$n_e < n_{склей} < n_o$

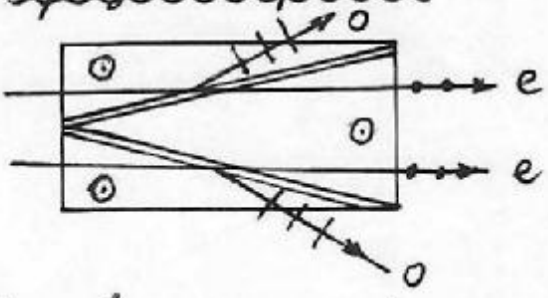
В якості склейки – гліцерін (УФ), Канадський бальзам (видиме світло), Масло, повітря.

Кут падіння на поверхню розділу повинен бути більшим за граничний кут ПВВ.

Різниця кутів нахилу між крайніми променями падаючого пучка, які задовольняють такі умови, визначає апертуру повної поляризації призми.

Для призми Фуко умови ПВВ виконуються для „o" і для „e" променів: $n_{гр} < n_e < n_o$. Тому призму Фуко роблять короткою для того, щоб кут падіння „e" променя на поверхню поділу був меншим від граничного кута ПВВ, а для „o" променя – більшим за нього. При цьому апертура повної поляризації становить всього 8°.

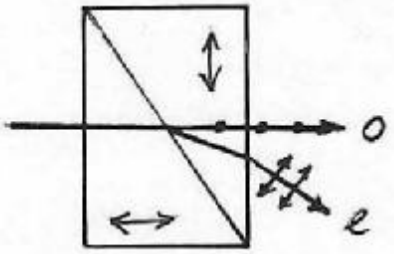
Призма Аренса



Використовується для підсвітки в поляриз. мікроскопах: дає широкий промінь.

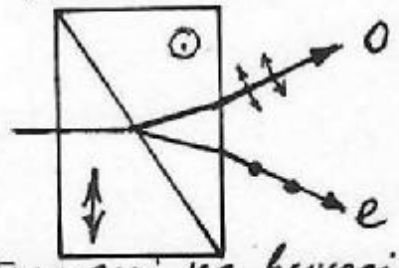
б) двопроменеві поляризаційні призми:

Призма Томсона



„o" промінь – ахроматичний
Кут відхилення „e" променя залежить від кольору світла.

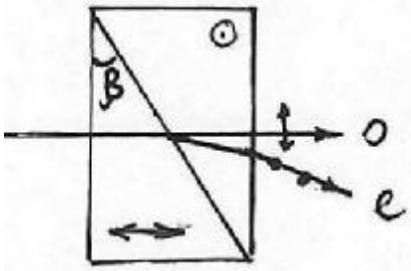
Призма Волластона



Промені на виході – симетричні

Через те, що OO' в різних половинах призми перпендикулярні, промінь звичайний в I половині стає незвичайним в II половині призми.

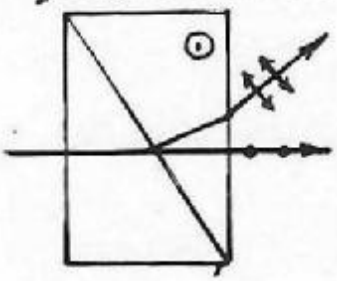
Призма Рошона



„e" промінь виходить під кутом

$$\theta = (n_o - n_e) \cdot tg\,\beta$$

Призма, яка виготовлена із скла та ісландськ. шпату



Близькість показників заломлення скла (1.49) та $n_e = 1.486 \Rightarrow$ промінь проходить через призму практично не заломлюючись; $n_{склей} \approx n_e$

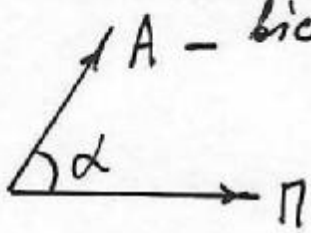
Матеріали для поляризаційних призм:
ісландський шпат, кварц, турмалін

Турмалін: - від'ємний кристал, одновісний;
- має сильне селективне поглинання одного з променів (звичайного). Для $d \sim 1$ мм з кристалу виходить практично один (незвичайний) промінь - дихроїзм.

Характеристики поляризаційних призм

1) з якого матеріалу зроблена (це визначає спектр. область);
2) коеф. пропускання ($T \sim 40\%$; $T_{max} = 50\%$);
3) ступінь поляризації ($p \sim 98\%$);
4) апертура - max кут розходження падаючого променя, коли призма дає 100% теоретичну ступінь поляризації.

Закон Малюса

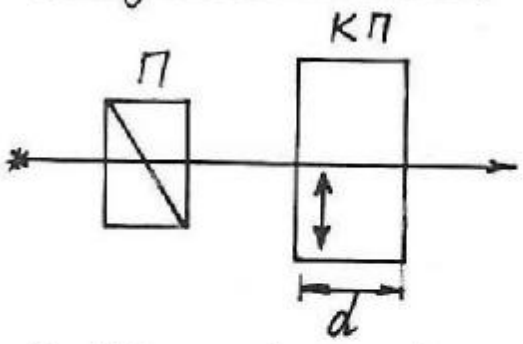


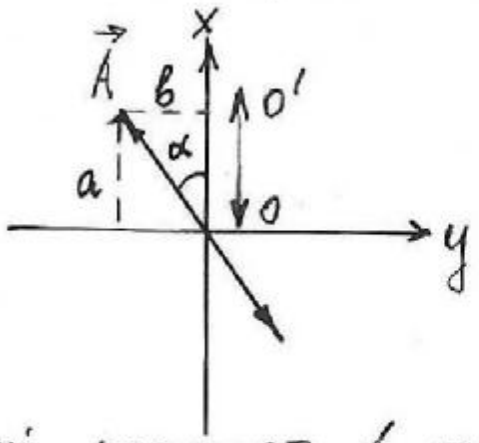
J_0 - інтенс. лін. поляр. світла, що виходить з поляризатора;
$J_{пр}$ - інтенс. світла, що виходить з аналіз.

$$J_{пр} = J_0 \cos^2 \alpha$$

Якщо на поляризатор падає природне світло з інтенс. $J_{вх}$, то після аналізатора $J_{пр} = \frac{1}{2} J_{вх} \cos^2 \alpha$

Взаємодія ортогонально поляризованих променів. Фазові платівки





В КП „o" і „e" промені проходять в одному напрямку, але з різними швидкостями.

Після П площина коливань $\vec{E}$ утворює кут α з OO'.

Ампл. звич. хвилі $a = A \cdot \cos\alpha$

Ампл. незвич. хвилі $b = A \cdot \sin\alpha$

де A – ампл. коливань хвилі, що падає на КП

$$\Delta = (n_o - n_e) \cdot d$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e) \cdot d$$

На виході з КП: $x = a \cdot \cos\omega t$; $y = b \cdot \cos(\omega t - \varphi)$

$y = b(\cos\omega t \cdot \cos\varphi + \sin\omega t \cdot \sin\varphi)$ та $\cos\omega t = \frac{x}{a}$ (1)

$y = b\left(\frac{x}{a}\cos\varphi + \sin\omega t \cdot \sin\varphi\right)$

$$\sin\omega t \cdot \sin\varphi = \frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\varphi \qquad (2)$$

Підносячи до квадрата (1) та домноживши зліва і справа на $\sin^2\varphi$, маємо:

$$\cos^2\omega t \cdot \sin^2\varphi = \frac{x^2}{a^2} \cdot \sin^2\varphi \qquad (1')$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cdot \cos\varphi = \sin^2\varphi}$$

Результуюче коливання після КП буде еліптичним.

Форма і орієнтація еліпсу залежить від α і φ.

Світло після КП – еліптично поляризоване.

$\alpha = \widehat{\vec{A}\,\vec{OO'}}$; φ – зсув фаз між „o" і „e"

$\lambda/4$ – фазова платівка

Якщо товщина d платівки задовольняє умові $(n_o - n_e)\cdot d = \lambda/4$ або $(n_o - n_e)\, d = \left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda$ де m – ціле число, то $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2m\cdot\pi$

Тоді рівняння еліпсу набуває вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тобто воно зведене.

Якщо при цьому $\alpha = 45°$, то $a = b$ і $x^2 + y^2 = a^2$.

В цьому випадку світло поляризоване по кругу (колу). Потрібно, щоб додавались дві когерентні хвилі з однаковими амплітудами, поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах з різницею фаз, що дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

В залежності від того, компонента вздовж ox випереджає компоненту вздовж oy або відстає від неї на $\frac{\pi}{2}$ за фазою, кажуть про обертання результуючого вектора проти годинникової стрілки або за нею. Розрізняють ліву і праву кругову (еліптичну) поляризацію.

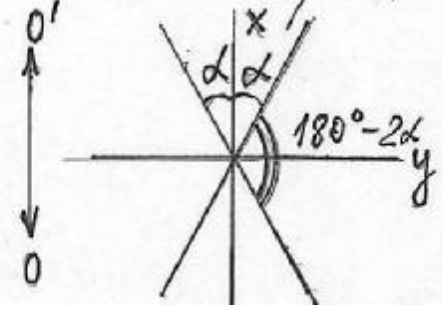
$\lambda/2$ – фазова платівка.

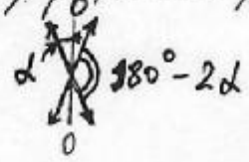
Товщину d підбирають так, що $(n_o - n_e)\cdot d = \frac{\lambda}{2}$ або $(n_o - n_e)\cdot d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow \varphi = \pi$.

При умові, що $\varphi = \pi$ еліпс вироджується в дві прямі, що збігаються: $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$

$y = -\frac{b}{a}\cdot x$

Світло залишається лінійно поляризованим, але орієнтація площини коливань $\vec{E}$ змінюється від такої, яка визначається кутом α, до такої, що визначається кутом $180° - 2\alpha$





Фазова платівка у цілу довжину хвилі задовольняє умові: $(n_o - n_e)d = \lambda$ або $(n_o - n_e)d = m\lambda$, що дає $\varphi = 2\pi$. При цьому еліпс вироджується у пряму

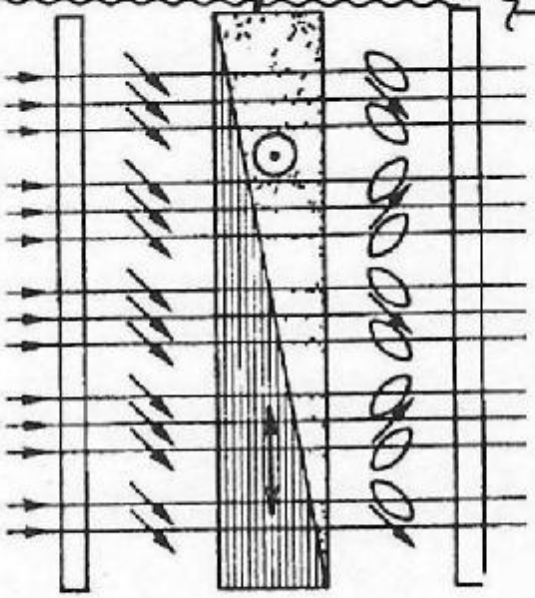
$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{a} \cdot x$$

Світло залишається лінійно поляризованим без зміни площини поляризації.

Аналіз стану поляризації

Треба вміти розрізнити і вимірять параметри: лінійно поляризованого світла, циркулярно- та еліптично поляризованого, світла природного та циркулярно поляр., еліптично- та частково-поляризов.

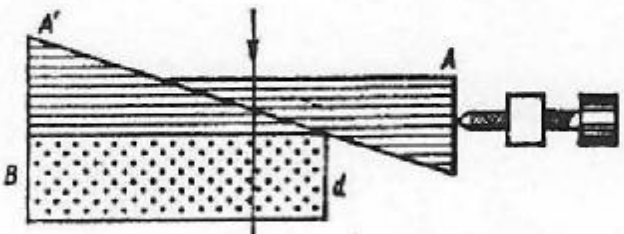
Компенсатор Бабіне



2 клина, виготовлені із кварцу із взаємно перпендикул. ОО'. Промінь світла проходить в клинах різні шляхи: d_1 та d_2. Звичайний промінь в I клину стає незвичайним променем в II клину. і навпаки. Додаткова різниця ходу $\Delta = (n_o - n_e)d_1 + (n_e - n_o)d_2 = (n_o - n_e)(d_1 - d_2)$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)(d_1 - d_2)$$

$(n_o - n_e)$ – табульовано;

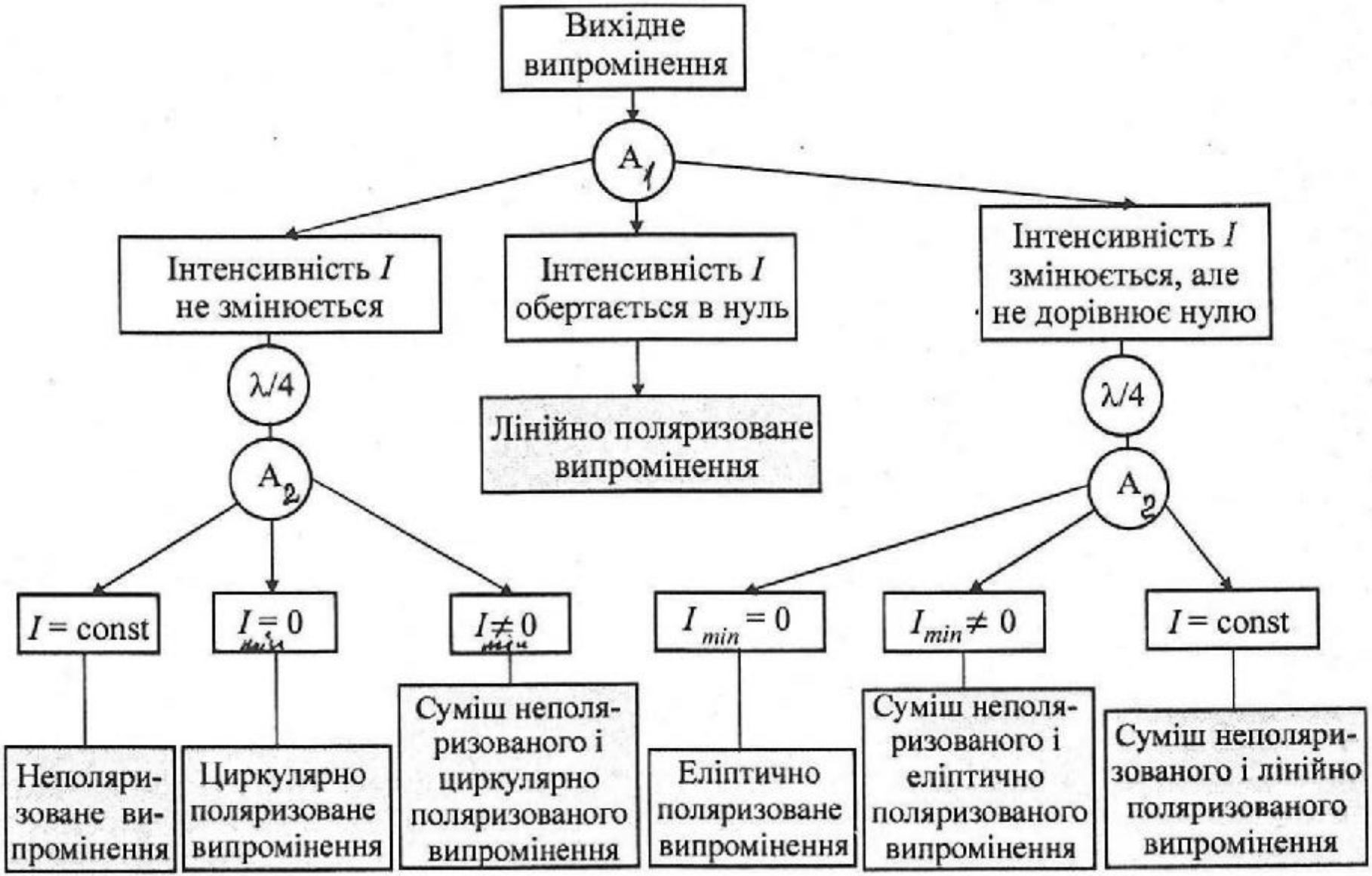


Компенсатор Солейля

$(d_1 - d_2)$ – вимірюємо; $\Delta\varphi$ – знаходимо

188 188 188 188

Схема аналізу стану поляризації світлового променя

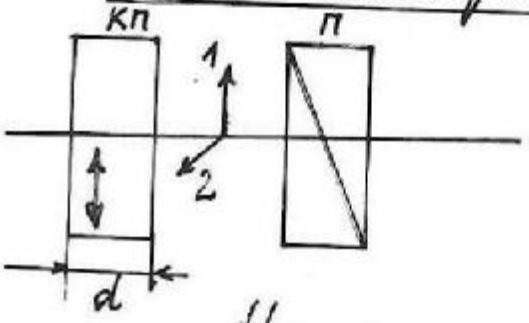


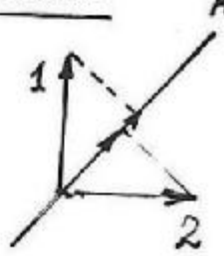
Інтерференція лінійно поляризованих хвиль

Якщо хвилі поляризовані ортогонально, то вони ніколи не можуть утворити інтерференційну картину. Тобто: „е" та „о" промені, між якими виникає різниця фаз, не можуть інтерферувати між собою через те, що $\vec{E}_o \perp \vec{E}_e$, хоча $\Delta\varphi = \text{const}$.

Але набіг фаз між „е" та „о" променями в анізотр. кристалі, не змінюючи інтенсивність, впливає на поляризацію променя на виході. Зміну поляризації за допомогою аналізатора можна трансформувати в зміну інтенсивності.

Схема спостереження





Після виходу із КП промені втратили право наз. „е" та „о": стали 1 та 2

Напрямок коливань в двох променях, спочатку поляризованих у взаємно перпендикулярних напрямках, можна звести в одну площину за допомогою поляризатора, площина пропускання якого не співпадає з площиною коливань ні одного із променів.

Дослід показав, що: 1) якщо на КП падає природне світло, то на виході КП - не когерентні промені (інтерферувать вони не можуть);

2) якщо на КП падає лін. поляр. світло, то промені 1 та 2 – когерентні.

Пояснення: ... див. Савельєв ... § 31 (с. 172)

Після КП світло буде еліптично-поляризованим. Форма і орієнтація еліпса залежить від товщини (d). Якщо КП в різних місцях має різну товщину, то для кожної з цих товщин (d_i) буде своя форма еліпсу. При цьому інтенсивність світла, що пройшло через КП в різних її місцях, – однакова. Але такий розподіл різко зміниться після проходження світла через поляризатор П. Цей поляризатор пропускає тільки ті складові променів 1 та 2, які співпадають з напрямком пропускання П.

Якщо світло, яке падає на КП, монохроматичне, то інтерф. картина після П складається із світлих і темних плям, які відповідають різним товщинам КП.

При обертанні П на 90° місце мінімумів займають max, і навпаки.

У білому світлі інтерф. картина буде кольоровою (n(1)). При обертанні П на 90° кольори картини переходять у додаткові: черв→голубе; зелен→фіол.; сине→жовте.

Інтерференції не буде, якщо поляризація одного з променів (1 або 2) співпадає з площиною пропускання поляризатора П.

Якщо на КП направити неполяризоване світло або забрати поляризатор (аналізатор), то інтерф. карт. зникає.

Якщо у якості екрана використати не амплітудно чутливу фотоплатівку, а середовище, чутливе до поляризації (ще краще до фази) хвилі, то інтерф. – без П!

191 191

Оптична активність

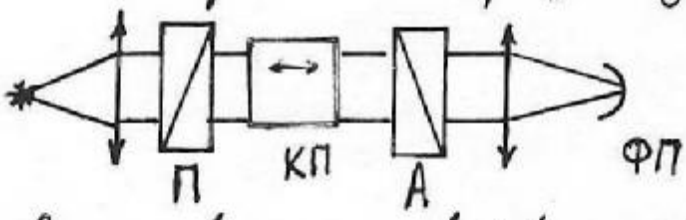
О. а. – природна (не штучна).

О. а. ≡ гіротропія.

О. а. ≡ обертання площини поляризації світла при проходженні світла крізь певні речовини. Такі речовини наз. гіротропними, або природно активними. Їх гіротропні властивості пов'язані (визначаються) із структурою молекул або кристалічною структурою.

О. активними м.б. рідини, розчини і кристали.

Водний розчин цукору та кварц. Кварц – кристалічний (не плавлений). Кварц – анізотропний одновісний кристал і, разом з тим, оптично акт. кристал.



КП - кварцева платівка

П ⊥ А

Без К на ФП – нуль.

Якщо в схему вставити К, то на ФП з'являється сигнал, який можна скомпенсувати (виміряти) аналізатором А.

$\Delta\varphi = \alpha_0 \cdot d$ α_0 – обертальна здатність.

Для кварцу $\alpha_0 = 21{,}7$ °/мм для $\lambda = 560$ нм

$\alpha_0 \sim \frac{1}{\lambda_0^2}$ – сильна залежність: $\begin{cases} \Delta\varphi_{\text{жовт}} = 20° \\ \Delta\varphi_{\text{фіол.}} = 50° \end{cases}$

Кварц має дві модифікації: „правий кварц" та „лівий кварц"

О. а. рідини. Біо встановив, що $\varphi = [\alpha] \cdot d \cdot c$

$[\alpha]$ – стала обертання; c – концентрація розчину ($г/см^3$);

Для водних розчинів цукору при $t = 20°C$; $\lambda = 5893$ Å

$[\alpha] = 66.46$ °/дм · $\frac{г}{см^3}$; d – товщина шару розчину (дм).

191 191

Оптична активність як особливий випадок двопроменезаломлення. (Теорія Френеля)

За Френелем існує $n_э$ та $n_д$ ($n_л$ та $n_п$)

$\Delta n = n_п - n_л$ – різниця пок. заломлення для кругового (циркулярного) двопроменезаломлення.

Будь-яке лін. коливання можна представити у вигляді суми 2-х кругових коливань:

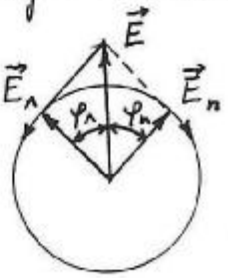
$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos\omega t \\ E_y &= E_0 \sin\omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_л = E_x + iE_y \quad \text{ліве обертання}$$

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_0 \cdot \cos\omega t \\ E_y &= -E_0 \sin\omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_п = E_x - iE_y \quad \text{праве обертання}$$

а) – оптично неактивна речовина

б) – оптично активна речовина

а)

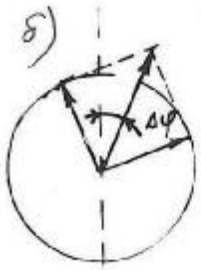


$n_л = n_п$

$v_л = v_п$

$\Delta\varphi = 0$; $\varphi_л = \varphi_п$

б)



$|\vec{E}| = const$ – середовище не поглинає

$$\begin{cases} E_л = E_0 e^{i\omega t} \\ E_п = E_0 e^{-i(\omega t - \Delta\varphi)} \end{cases}$$

$n_л \neq n_п$ ($n_п < n_л$)

$v_п > v_л$

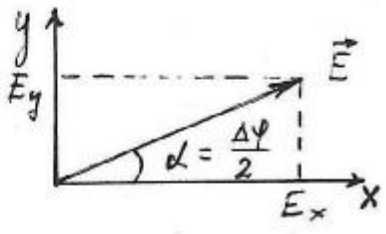
$\Delta\varphi = \varphi_п - \varphi_л$

$$E_л + E_п = E_0 e^{i\omega t} + E_0 e^{-i(\omega t - \Delta\varphi)} =$$

$$= e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot E_0 \left[e^{i(\omega t - \Delta\varphi/2)} + e^{-i(\omega t - \Delta\varphi/2)} \right] = \quad \leftarrow \text{формула Ейлера}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$= 2E_0 e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$



$$\begin{cases} E_x = 2E_0 \cos\frac{\Delta\varphi}{2} \cos\left(\omega t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \\ E_y = 2E_0 \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \cos\left(\omega t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

Кут повороту (α) залежить від різниці фаз ($\Delta\varphi$)

11.

Фаза „правої" хвилі $\varphi_п = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} n_п \cdot d$

Фаза „лівої" хвилі $\varphi_л = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_л \cdot d$

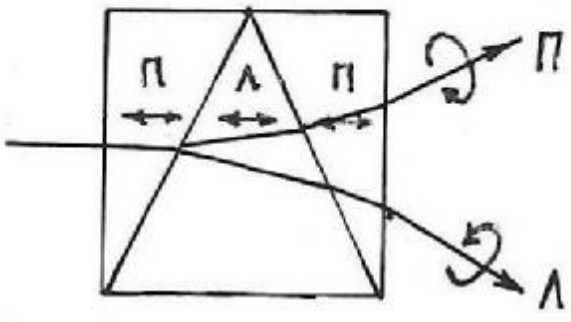
$$\Delta\varphi = \varphi_п - \varphi_л = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_л - n_п)d = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot c\left(\frac{1}{\upsilon_л} - \frac{1}{\upsilon_п}\right) \cdot d$$

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{\lambda_0}(n_л - n_п) \cdot d$$

Якщо $n_л > n_п \Rightarrow \upsilon_л < \upsilon_п$ — правий кристал

Якщо $n_л < n_п \Rightarrow \upsilon_л > \upsilon_п$ — лівий кристал

Френель перевірив своє припущення за допомогою досліду з призмою Френеля:

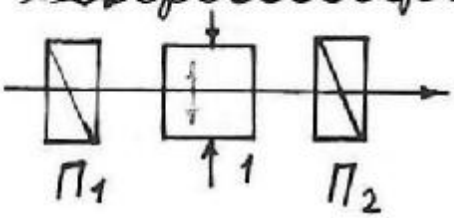


Складна призма із 3-х кусків кварцу (п-л-п).
Об' всіх 3-х кусків ⊥ основі призми, щоб не було природн. двопроменезаломл.

На границі I і II призм промінь роздвоюється через те, що $n_л \neq n_п$. Те ж саме на границі II і III призм.
На виході – 2 променя з лівою та правою цирк. поляризацією.

Штучна оптична анізотропія

Анізотропія при механічній напрузі (фотопружність)



1 - зразок (куб) з плавленого кварцу, органскла, ...

$n_o - n_e = k \cdot P$

k - стала Брюстера (константа речовини)

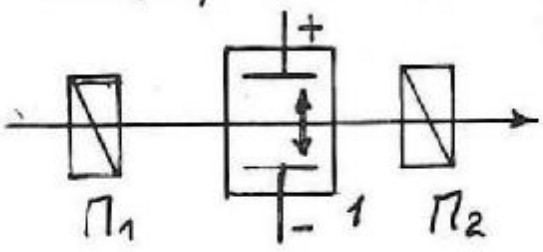
$P = F/S$ - тиск

Тиск (стискання або розтяг) м.б. двостороннім ⇒ зразок стає оптично двовісним

Використовується для виявлення залишкових мех. напруг в прозорих тілах (кінескопи, лампи тощо).

Для непрозорих конструкцій - моделювання з певним коефіцієнтом подібності.

Анізотропія в електричному полі (ефект Керра)



1 - Кювета з рідиною та ел. конденс.

вкл. ел. поля призводить до появи сигналу в системі

$П_1 \perp П_2$

Оптична вісь напрямлена вздовж силових ліній ел. поля.

Є рідини з $n_e > n_o$; $n_e < n_o$; $n_e = n_o$ (ефекту Керра немає) - експеримент.

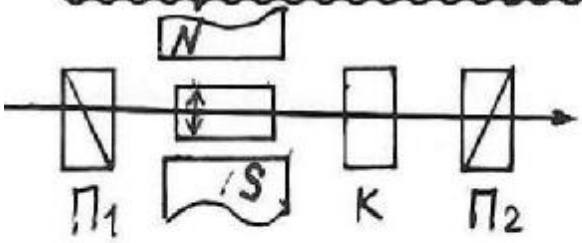
$$\Delta n = B \cdot \lambda \cdot E^2 \Rightarrow \Delta = l \cdot \Delta n \Rightarrow \Delta\varphi = k \cdot \Delta$$

Через те, що $\Delta n \sim E^2$, знак різниці фаз не залежить від напрямку ел. поля.

а) Для неполярних рідин (теорія Ланжевена) величина коеф. Керра $B > 0$. - додатній „квазікристал).

б) Для полярних рідин (теорія Борна, 1915 р.):
Диполі орієнтуються по полю: $\vec{P} = \alpha \vec{E}$
Для нітробензолу $B = 2.2 \cdot 10^{-5}$ CGSE $(B > 0)$
Для кювети з $l = 5$ см, $d = 1$ мм, $U = 1500$ В $\Rightarrow$
$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$! ($\frac{\lambda}{4}$ платівка!)
Час перемикання для нітробензолу $\tau \sim 0.5 \cdot 10^{-11}$ с

Анізотропія в магнітному полі (ефект Коттона–Мутона)



К – компенсатор (для дослідження зсуву фаз)

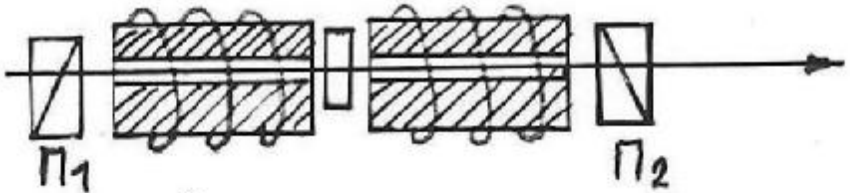
$$\Delta n = D \cdot B^2$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta n \cdot l = 2\pi C_0' \cdot l \cdot B^2$$

B – м. індукція; C_0' – стала Коттона–Мутона, яка залежить від природи речовини.
Для нітробензолу $C_0' = 2.25 \cdot 10^{-2}$ м$^{-1}$ · Тл$^{-2}$.
Для $B = 1$ Тл та $l = 1$ м $\Rightarrow$ $\Delta\varphi = 0.14$ рад.

Ефект Фарадея (1846 р.)

В попередніх ефектах був індукований зсув фаз (ефект двопроменезаломлення). В ЕФ – обертання площини поляризації $\Delta\theta = V \cdot l \cdot B$



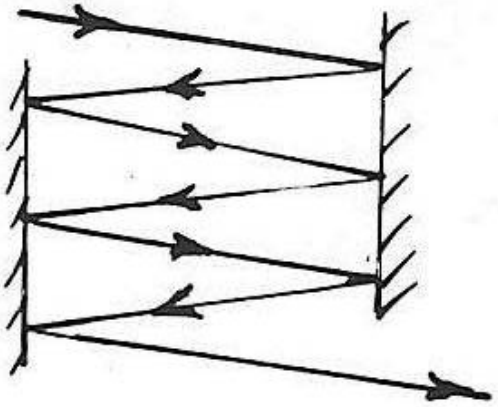
V – стала Верде;
l – довжина зразка;
B – індукція магнітного поля.

Є речовини з $V > 0$ (правообертаючі, або позитивні), речовини з $V < 0$ – лівообертаючі (негативні). додатні від'ємні

Напрям обертання площини поляризації в ЕФ для кожної речовини визначається лише напрямом магнітного поля і не залежить від напряму світла.

Час запізнення (інерція ЕФ) – $\sim 10^{-9}$ с.

Підсилення ЕФ шляхом багаторазового проходження світлом робочого зразку:



Стала Верде $V \sim \frac{1}{\lambda^2}$

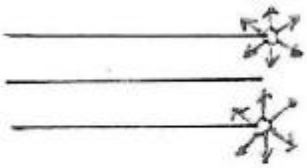
Для спец. сорту скла – важкого флінту $V = 0.08$ см$^{-1}$. Ерст

Розсіювання світла

Розсіювання світла в оптично неоднорідному середовищі

Оптично однорідне середовище – таке, для якого $n = const$ як у просторі, так і у часі. Для такого середовища р.с. не спостерігається.

При поширенні світла в опт. середовищі електр. поле хвилі викликає вимушені коливання оптичних електронів. ⇒ Ці



електрони випромінюють ел.м. хвилі тієї ж частоти, що і частота падаючої хвилі.

Ці хвилі – вторинні. Якщо вони когерентні, то вони інтерферують. Єдиний напрям, в якому немає гасіння, це напрям падаючої хвилі. В цьому напрямі буде перевипромінюватись вторинна хвиля без гасіння і буде поширюватись хвиля.

Якщо в середовищі є неоднорідності (середовище – не гомогенне), то світло буде поширюватись у напрямах, відмінних від напряму поширення падаючої хвилі. Це і є розсіювання світла.

Неоднорідності середовища пов'язані із змінами показника заломлення.

Розподіл неоднорідностей розглядається як (неупорядкований) нерегулярний.

Види макроскопічних неоднорідностей: 1) тверді частинки в газі (дим); 2) рідина, в якій наявні краплинки іншої нерозчиненої рідини (емульсії); 3) тверді частинки в рідині (суспензії).

Такі середовища наз. каламутними (рос. і „мутные среды").

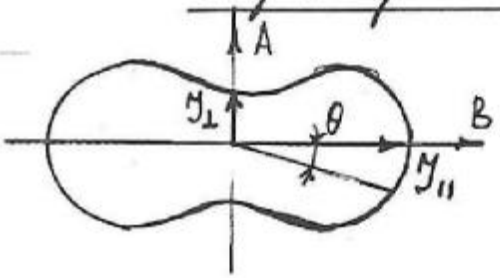
В цьому випадку відбувається дифракція на опт. неоднорідностях.

Ефекти розсіювання залежать від розмірів частинок:

I. Для $d < \lambda$ ($d \sim 0.1\lambda$) – релеївське розсіювання. (Експериментально досліджв Тіндаль (1869 р.) та Релей (1899 р.)).

Властивості: 1) інтенс. розс. світла $J_{розс} \sim 1/\lambda^4$ – закон Релея; 2) $J_{розс.} \sim N$; 3) $J_{розс} \sim V_{част.}$; 4) $J_{розс} = f(T, °C)$.

Індикатриса розсіювання 5) розс. світло частково або повністю поляриз.



$$J_\theta = J_\perp (1 + \cos^2\theta)$$

Інт. світла, що пройшло через середовище з розсіюванням, в напрямку поширення падаючої хвилі в 2 рази більша за $J_\perp$:

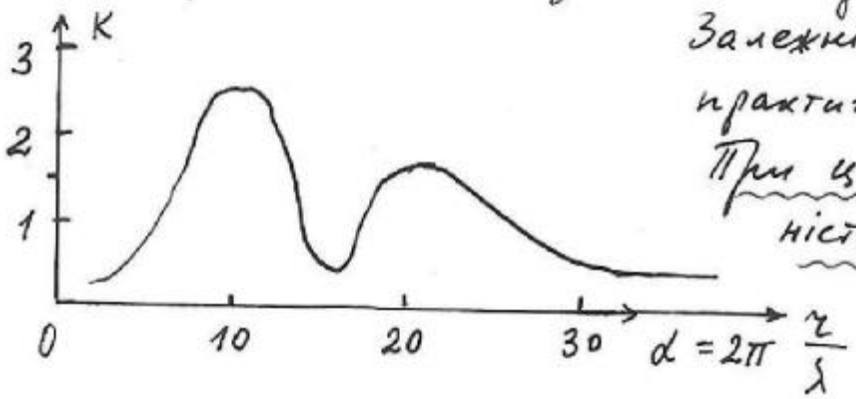
$$2J_\perp = J_\parallel$$

II. Для $d >> \lambda$. Таке розсіювання пояснюється відбиттям, заломленням та дифракцією світла на цих частинках.

Властивості: 1) $J_{розс} \neq f(T, °C)$; 2) $J_{розс.} \neq f(\lambda)$; Тому туман має білий колір; 3) $J_{розс} \neq f(d)$

Внаслідок розсіювання світла оптично каламутними середовищами з такими частинками ($d >> \lambda$) інтенсивність $J_{розс.}$ зменшується за законом поглинання світла: $J_{розс} = J_0 \cdot e^{-2\pi N r^2 \cdot K x}$

N – кількість частинок в 1 $см^3$; r – радіус частинки; K – коефіцієнт, який залежить від відношення r/λ.



Залежність коеф. K від $\alpha = 2\pi \frac{r}{\lambda}$ практично зникає для $\alpha > 40$. При цьому зникає і залежність $J_{розс}$ від λ.

III. Для $d \sim \lambda$ – розсіювання Мі (дифракційне розсіюв.).

$\gamma_{розс} = f(\lambda)$; $\gamma_{розс.} \neq f(T, °C)$; $\gamma_{роз}$ – частково поляриз.

Молекулярне розсіювання світла

Р.с. спостерігається і в середовищах, в яких відсутні сторонні частинки.

Спочатку думали, що справа у забрудненості атмосфери. Але в горах небо ще синіше!?

Тоді таке Р.с. пояснили оптичними неоднорідностями, пов'язаними із флуктуаціями. Останні пов'язані із тепловим рухом молекул і їх нерівномірним розподілом у просторі.

В малому об'ємі δ_0 випадково (завдяки тепл. руху молекул) зібралось $N_0 + \Delta N$ частинок, де N_0 – число частинок в тому * об'ємі δ_0 при ідеально рівномірному розподілу молекул в об'ємі δ_0. В результаті такого накопичення Δ частинок об'єм δ_0 випромінює хвилю амплітуди $\vec{E}_0 + \vec{E}'$, де $\vec{E}_0$ – ампл. хвилі, що випромінює об'єм δ_0 з числом частинок N_0. На відміну від випадку абс. рівномірного розподілу частинок, в цьому випадку розсіювання не буде гаситись знищуватись інтерференцією ні в одному з напрямків. Напруженість поля світлової хвилі, розсіяної малим об'ємом δ_0, буде обумовлена полем $\vec{E}'$.

Об'єм, де відбуваються флуктуації, $\delta_0 \ll \lambda^3$. Тобто цей вид Р.с. відбувається за законами релеївського розсіювання.

В результаті теплова флуктуація призводить до того, що в деякому малому об'ємі δ_0 зібралось $N_0 + \Delta N$ частинок.

200 200

Відповідно до цього густина речовини $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$

$\overline{\Delta\rho^2} = \frac{m^2 N_0}{V_0}$ – це відомо з молек. фізики.

$\overline{\Delta\rho^2}$ – абс. величина середнього значення квадрата флуктуації густини;

m – маса молекули; N_0 – середнє число молекул в одиниці об'єму речовини; V_0 – об'єм флуктуації.

$\Delta\rho \Rightarrow$ виникає ΔP – додатковий дипольний момент

$$\Delta P = \Delta\varepsilon \cdot E \cdot V_0 \cdot \frac{1}{4\pi} \quad (1)$$

Це є джерелом випромінювання вторинних хвиль.

У класичній теорії ел.м. випромінювання доведено, що ампл. напруж. ел. поля E_0, яке випромінюється диполем, в точці, що знаходиться на відстані r від диполя, дорівнює:

(2) $E_0 = \frac{\omega^2 P_0}{c^2 \cdot r} \cdot \sin\theta$ де P_0 – ампл. коливань дип. момента

θ – кут між $\vec{P}$ та $\vec{r}$

E_θ – ампл. розсіяної хвилі, яка випромінюється об'ємом V_0 з флуктуацією $\Delta\varepsilon$ в напрямку θ.

(1) → (2): $E_\theta = \frac{\omega^2 \cdot \Delta\varepsilon \cdot E_0 \cdot V_0}{c^2 \cdot r \cdot 4\pi} \cdot \sin\theta$

Інтенс. розсіяного світла:

$$I_\theta = \frac{1}{2}\frac{c}{4\pi} E_\theta^2 \Rightarrow \boxed{I_\theta = \frac{c\omega^4 \cdot \Delta\varepsilon^2 \cdot E_0^2 \cdot V_0^2}{8\pi c^4 r^2 \cdot (4\pi)^2} \sin^2\theta} =$$

E_0 – ампл. падаюч. хвилі

$$= \frac{c}{8\pi} \cdot E_0^2 \frac{V_0^2}{(4\pi r)^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \cdot \Delta\varepsilon^2 \cdot \sin^2\theta = I_0 \frac{\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} V_0^2 \cdot \Delta\varepsilon^2 \cdot \sin^2\theta$$

Інтенс. розсіяного світла в об'ємі V дорівнює

$$I_{розс} = \frac{V}{V_0} \cdot I_\theta = I_0 \frac{\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} V_0 \cdot V \cdot \Delta\varepsilon^2 \cdot \sin^2\theta$$

Через те, що $\varepsilon - 1 = c \cdot \rho \Rightarrow \Delta\varepsilon = c \cdot \Delta\rho = c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} = (\varepsilon - 1)\delta$

$$\delta = \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

200 200

$\Delta\varepsilon^2 = (\varepsilon-1)^2 \cdot \delta^2$

Для ідеального газу $\delta^2 = \frac{1}{N \cdot v_0}$

Тоді $I_{розс.} = I_0 \frac{\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot v_0^2 (\varepsilon-1)^2 \frac{1}{N \cdot v_0} \cdot \sin^2\theta =$

$= I_0 \frac{\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{v_0}{N} (\varepsilon-1)^2 \sin^2\theta$ — формула Релея

$\varepsilon - 1 = n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = 2(n-1)$

$n \approx 1$ для газу

Тому $I_{розс} = I_0 \frac{4\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} (n-1)^2 \frac{v_0}{N} \cdot \sin^2\theta$ — формула Релея

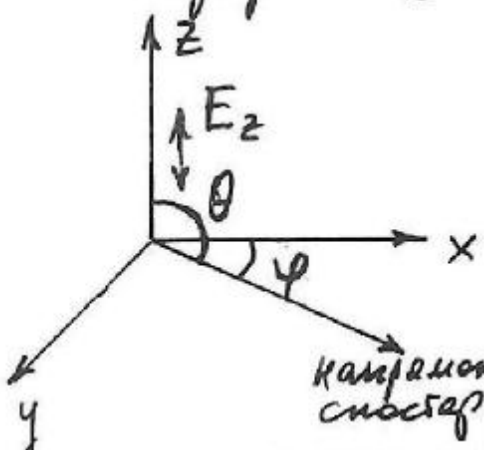
Для ідеального газу $\overline{\Delta N^2} = N$

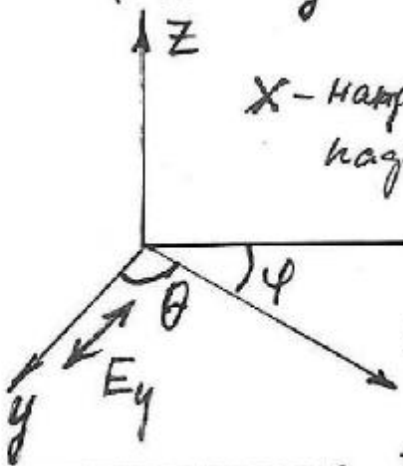
Через те, що $\varepsilon - 1 = n^2 - 1 \sim N$, то $I_{розс} \sim \frac{N^2}{N} = N$

Для природного світла:

Розкладаємо на 2 компоненти із ортогональними складовими: E_z ($\perp$ пл. падін.) та E_y (в пл. падіння):

$I_{прир} = I_z + I_y$ $\left(I_z = I_y = I_{прир} \cdot \frac{1}{2}\right)$.





X – напрямок розповсюдж. падаючої хвилі

$$I_\varphi = I_0 \frac{2\pi^2}{r^2 \lambda^4} (n-1)^2 \frac{v_0}{N} (1+\cos^2\varphi)$$

Полярна діаграма розподілу інтенсивн. розсіяного світла

φ – кут розсіювання (кут між напрямом спостереження і напрямом розповсюдження).

Висновки:

1) Колір неба пояснюється тільки молекул. Р.с.

2) Вимірювання $I_{роз}$ дало можливість за формулою Релея визначити число молекул в од. об'єму: $N_1 = \frac{N}{\delta_0}$ та число Авогадро.

3) Формула Релея перестає бути справедливою, якщо розміри розсіюючих частинок стають $> \frac{\lambda}{20}$. В цьому випадку: а) $I_{розс} \sim \frac{1}{\lambda^2}$; б) розс. світло - частково поляриз.; в) індикатриса стає несиметричною відносно OX; г) індикатриса стає $\perp$ до OX.

4) Розглянута теорія справедлива для ізотропних середовищ. Анізотропія молекул призводить до того, що в речовині виникають флуктуації орієнтації, які викликають деполяризацію розсіяного світла.

5) В критичному стані спостерігається max флуктуації. Величина δ_0 при цьому сильно збільшується і стає більшою за λ: $\delta_{0кр} > \lambda$. Таке середовище стає каламутним і непрозорим для падаючого світла, дуже сильно розсіює світло всього діапазону спектра. Це розсіювання наз. опалесценцією.

Розсіювання Мандельштама – Бріллюена

При релеївському і при молекулярному Р.с. частота розсіяного світла не змінюється. Але є такі види Р.с., за яких ω змінюється. До них належать Р.М.-Б. Воно спостерігається в оптичному середовищі, в якому поширюються акустичні хвилі – відбувається так зване розсіювання на фононах. Акуст. хвилі створюють неоднорідності густини, на яких і відбувається розсіювання світла.

Акуст. хвилі: $A = A_0 \cos(\Omega t - qx)$, де $q = \frac{2\pi}{\Lambda}$

Зміна числа молекул в од. об'єму $\Delta N = N_0 \cos(\Omega t - qx)$

Світлові хвилі: $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$, де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\vec{P} \sim N \cdot \vec{E} = (N_0 + \Delta N)\vec{E} = \underbrace{N_0 E_0 \cos(\omega t - kx)}_{\text{релеївська хв.}} + \frac{1}{2} E_0 \cdot \Delta N \cdot \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \frac{1}{2} E_0 \cdot \Delta N \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

де $\omega_1 = \omega + \Omega$ $\quad \omega_2 = \omega - \Omega$

$k_1 = k + q$ $\quad k_2 = k - q$

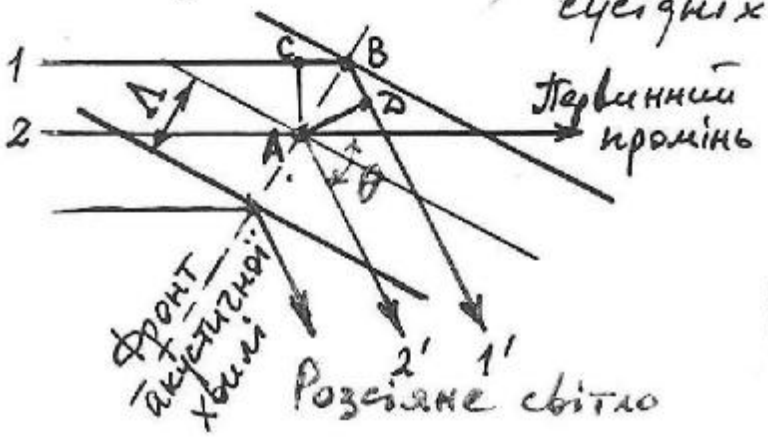


Тонка структура релеївської лінії

Для того, щоб розсіяні хвилі інтерферували і давали max інтенсивності в напрямі, який утворює кут θ з напрямом падаючої хвилі, необхідно, щоб опт. різниця ходу $\Delta = CB + BD$ сусідніх падаючих (1,2) і розсіяних (1',2') променів дорівнювала б. т λ:

$$\boxed{\Delta = 2n \cdot \Lambda \sin\frac{\theta}{2} = \lambda}$$

де $\Lambda = AB$ – довжина пружної хвилі.



Розсіювання М.-Б. еквівалентне модуляції світла падаючого променя з частотою пружної хвилі

$\Lambda = v \frac{1}{\Delta\nu}$; $\lambda = c \frac{1}{\nu}$ $\quad \Lambda = \frac{v}{\Omega}$

$\Delta = 2n \frac{v}{\Delta\nu} \cdot \sin\frac{\theta}{2} = c \frac{1}{\nu} \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = 2n \frac{v}{c} \sin\frac{\theta}{2}$

$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Omega}{\omega}$; $\boxed{\frac{\Omega}{\omega} = 2n \frac{v}{c} \sin\frac{\theta}{2}}$ Формула Мандельштама-Бріллюена

Зауваження:

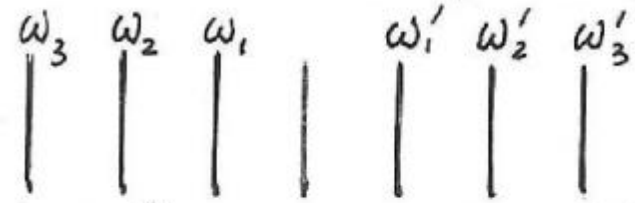
1. Ситуація ускладнюється тим, що в кристалах у кожному напрямку може розповсюджуватись три акустичних хвилі (1-поздовжня і 2-поперечних). У тому ж напрямку може поширюватись дві світл. хвилі, поляризовані в перпендик. напрямках. Тому в розсіяному світлі – 24 компоненти (6 груп по 4 лінії), але роздільної сили спектр. приладів вистачає, щоб розрізнити тільки 6 зміщених компонент.
2. Р.с. М.-Б. можливе також і на інших колективних збудженнях: магнонах, екситонах, дефектах крист. ґратки, поляронах, плазмонах тощо.
3. Р.с. М.-Б. відноситься до ефектів лінійної оптики.
4. Під дією потужного лазерного випром. на середовище в ньому може виникнути вимушене М.-Б. розс. світла, яке використовується для генерації потужних гіперзвук. хвиль у кристалах. Інтенс. розсіяного світла в цьому випадку може бути рівною інтенс. падаючого світла.
5. Якщо частота падаючого світла ≈ власній частоті поглинання речовини, то спектр. резонансне Р.с. М.-Б.

Комбінаційне розсіювання світла. (Ефект Рамана).

КР виникає в результаті модуляції опт. хвилі власними коливаннями молекул.

1928 р.: Мандельштам та Ландсберг на $CaCO_3$ та кварці, Раман та Кришнан – на рідинах (бензол, толуол).

Експеримент: кожна спектр. лінія супроводжується виникненням системи додаткових ліній, які називаються супутниками (сателітами) із значно більшими значеннями частоти, ніж компоненти М.-Б. розсіювання.



$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_0 - \Omega_1\\ \omega_2 &= \omega_0 - \Omega_2\\ \omega_3 &= \omega_0 - \Omega_3\end{aligned}\right\}\ \text{стоксові компон.}$$

$$\left.\begin{aligned}\omega_1' &= \omega_0 + \Omega_1\\ \omega_2' &= \omega_0 + \Omega_2\\ \omega_3' &= \omega_0 + \Omega_3\end{aligned}\right\}\ \text{анти-стокс. компоненти}$$

Властивості:

1. Супутники супроводжують кожну лінію первинного світла. При переході від однієї спектр. лінії первинного променя до другої сукупність значень $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$ залишається для певної величини незмінною.
2. Кожному сателіту з частотою ω_i^s відповідає сателіт із частотою ω_i^{as}; $\Omega_i = \omega_0 - \omega_i^s = \omega_i^{as} - \omega_0$.
3. Частоти Ω_i лежать в ІЧ діапазоні і відповідають частотам коливань молекул.

КР виникає в результаті модуляції опт. хвилі власними коливаннями молекул.

На молекулу, яка має власну частоту коливань (Ω) падає опт. хвиля $E = E_0 e^{i\omega t}$. У молекулі

виникає дип. момент $p(\omega') = \alpha \cdot E(\omega)$, де α – коеф. поляризації молекули.

Вважаємо, що ω попадає в обл. прозорості середовища. Тоді α – дійсна величина.

Зв'язок між атомами, які складають молекулу, зумовлений електронами. Електронна поляризація спричиняє збурення сил зв'язку, в рез-ті чого відбувається збудження коливань атомів молекули. Будемо вважати, що $\alpha = \alpha_0(1 + A\cos\Omega t)$

$$p(\omega') = \alpha_0(1 + A\cos\Omega t)\cdot E_0 e^{i\omega t} =$$

$$= \alpha_0 E_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\alpha_0 A E_0 e^{i(\omega+\Omega)t} + \frac{1}{2}\alpha_0 A E_0 e^{i(\omega-\Omega)t}$$

↑ скористались формулою Ейлера: $\cos\Omega t = \frac{1}{2}(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})$

I доданок описує релеївське Р.е;

II та III доданки описують КР.

Модуляція за рахунок коливань молекул.

Якщо падає на середовище монохром. світло, то в спектрі розсіяного світла спостер. три лінії:

1) основна (на частоті ω первинного світла);

2) стоксова компонента (на частоті $\omega - \Omega$, утворюється за рахунок втрати енергії кванта падаючої хвилі);

3) антистоксова компонента (утворюється за рахунок збільшення енергії кванта падаючого випром.).

Стоксова і антистоксова компоненти мають різні інтенсивності. Різниця в інтенсивностях залежить від температури. Пояснення – квантовомеханічне.

4. Спектр КР - характеристика речовини. За спектрами КР можна проводити структурні і аналітичні дослідження.

5. Інтенсивності стоксової і антистокс. компонент у спектрі КР становлять 10^{-5} - 10^{-6} від інтенсивності збуджуючої лінії. Крім того, вони спостерігаються на порівняно сильному суцільному (не дискретному) фоні релеївського Р.с. та люмінесценції.

6. При дії на середовище потужного оптичного випромінювання (гігантського лазерного імпульсу) виникає нелінійне явище - вимушене КР (ВКР).

Оптичні явища, зумовлені розсіюванням світла в атмосфері (денне світло, райдуга, гало, вінці)

Тема виноситься на самостійну роботу

Кучерук, Горбачук ... с. 219 - 222.

208

1.

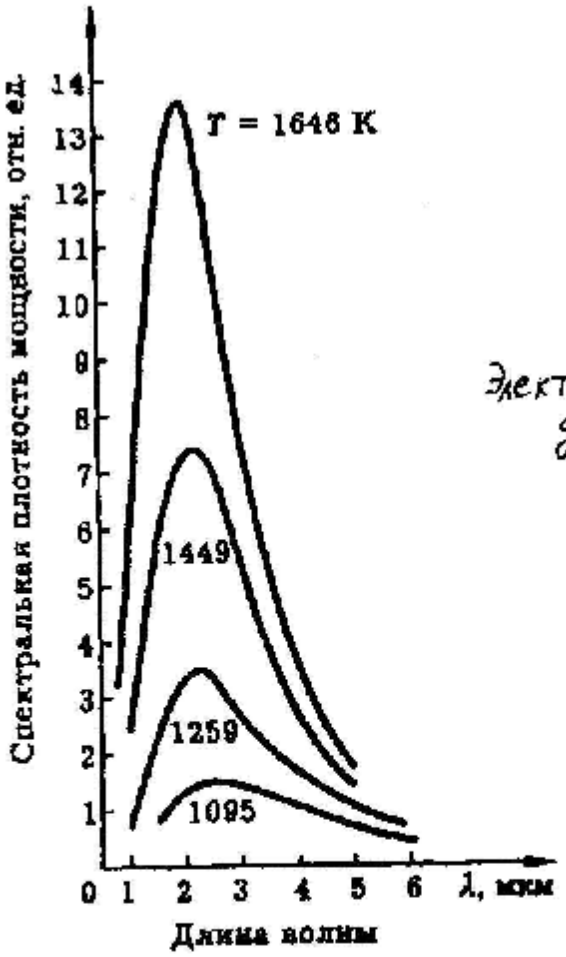
Теплове випромінювання

Т.в. – це світло (не обов'язково – видиме, і в основному – невидиме людським оком), яке випромінюється нагрітим тілом (сонячне світло, полум'я свічки, Ч випромінювання тіла людини, паяльника, світло і тепло від лампи розжарювання, ел. дуги тощо).

Основні експериментальні факти:

1) Нагріті тіла світяться. Яскравість світіння збільшується із збільшенням температури (Т). Від Т залежить і колір світла, що випромінюється.

2) Світло від нагрітого тіла має широкий, суцільний спектр.





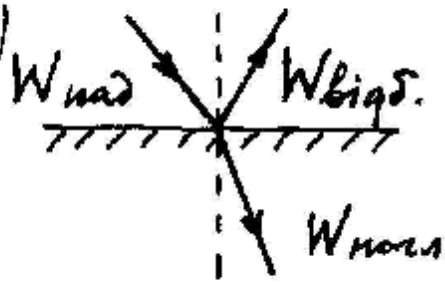
Люммер та Прингсгейм. 1899 р.

Потужність теплового випромінювання вимірюють, наприклад, за допомогою термопари або болометра

208

Поглинальна здатність тіл

Погли. здатність $\alpha = \dfrac{dW_{погл.}(\nu, \nu+d\nu)}{dW_{пад.}(\nu, \nu+d\nu)}$ W - енергія світл. потоку

1) α - безрозмірна величина
2) $0 \le \alpha \le 1$
3) $\alpha = \alpha(\nu, T)$
4) У різних тіл функції $\alpha(\nu, T)$ - різні
5) Коли $\alpha = 0$ - „абс. біле тіло"
   Коли $\alpha = 1$ - „абс. чорне тіло" (а.ч.т.)
6) 

$W_{пад.} = W_{погл.} + W_{відб.}$

Абсолютно чорне тіло

А.ч.т. - тіло, здатне поглинати все падаюче на нього випромінювання довільної λ при довільній температурі (T).

Для а.ч.т. $\alpha(\nu, T) = 1$ для довільних ν та T.

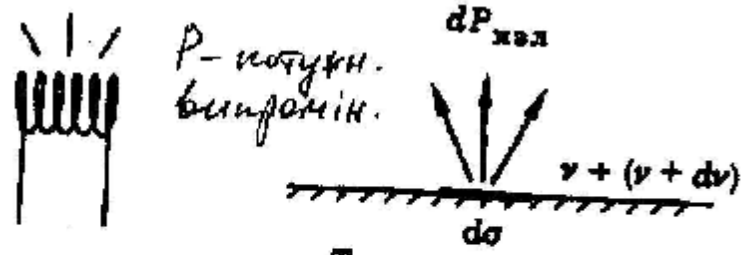
В природі а.ч.т. не існує. А.ч.т. - ідеалізація, але можна знайти дуже близькі за своїми властивостями до а.ч.т. тіла: сажа, чорний оксамит, корувати тіла. В основі - багаторазове відбиття, яке



забезпечує сильні поглинаючі властивості. Маленький отвір в порожнині з ідеально відбиваючими поверхнями, які не прозорі для ел.м. випромінювання. На виході випромінювання має майже нульову потужність.

210 210

Випромінювальна здатність тіл



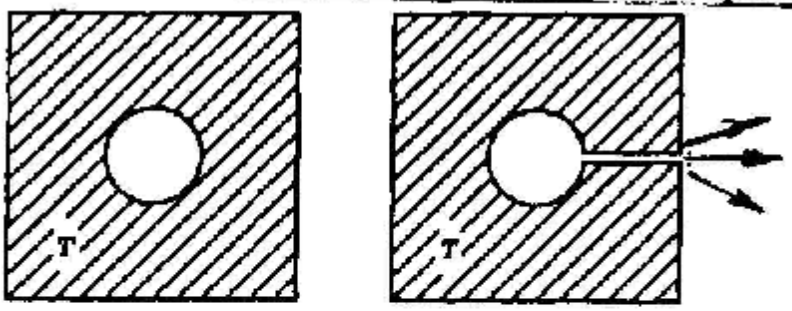
$$\left.\begin{aligned} dP_{випр.} &\sim dV \\ dP_{випр} &\sim d\sigma \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$dP_{випр} = \varepsilon \cdot dV \cdot d\sigma$$

ε – випромінювальна здатність тіла.

Дослід показує, що $\varepsilon = \varepsilon(\nu, T)$ (як і поглинальна здатність). Але $\varepsilon(\nu,T)$ – розмірна величина (на відміну від $\alpha(\nu,T)$): $[\varepsilon] = Вт \cdot с / см^2$.

Рівноважне теплове випромінювання



в стаціонарних умовах, коли T тіла підтримується постійною, в порожнині (рос. „полость") характеристики теплового випром. знаходяться в рівновазі із нагрітим тілом (самою порожниною, в даному випадку). Рівноважне теплове випромінювання – таке, що знаходиться в тепловій рівновазі з нагрітим тілом. Отвір зроблений для вимірювання х-ик випромінювання.

Порушення рівноважного стану означає, що тіло починає нагріватись або охолоджуватись.

Закон Кірхгофа

В 1859 р. Кірхгоф встановив, що в стані теплової рівноваги відношення $\frac{\varepsilon(\nu,T)}{\alpha(\nu,T)}$ не залежить від природи тіла:

$$\frac{\varepsilon(\nu,T)}{\alpha(\nu,T)} = f(\nu,T) = inv$$

210 210

$f(\nu, T)$ – універсальна (однакова для всіх тіл) функція частоти (ν) та температури (T).

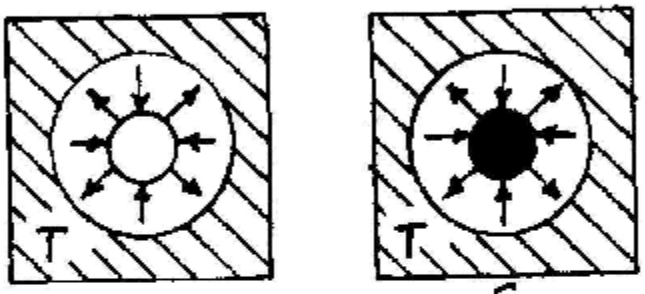
$\rho(\nu, T)$ – випромінювальна здатність а.ч.т.

Це витікає з того, що для а.ч.т. $\alpha(\nu, T) = 1$.

Значить $\rho(\nu, T) = \varepsilon(\nu, T)$ для а.ч.т.

Закон Кірхгофа, виведений спочатку із уявлень т/дин. теоретично, потім підтверджений експериментально.

Уявний експеримент, що демонструє справедливість закону Кірхгофа



а. б.

а – біла крейда в порожнині;
б – чорний вугіль в порожн.
В стані теплової рівноваги

$$dW_{погл} = dW_{випр.} \quad (1)$$

За визначенням:

$$\left.\begin{aligned} dW_{погл} &= \alpha \, dW_{пад} \\ dW_{випр} &= \varepsilon \cdot d\nu \cdot d\sigma \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$(2) \to (1)$: $\alpha \cdot dW_{пад} = \varepsilon \cdot d\nu \cdot d\sigma \quad (3)$

Пробне тіло (білу крейду) замінили на будь-яке інше тіло такого ж розміру і форми, але з іншого матеріалу, наприклад, з чорного вугілля.

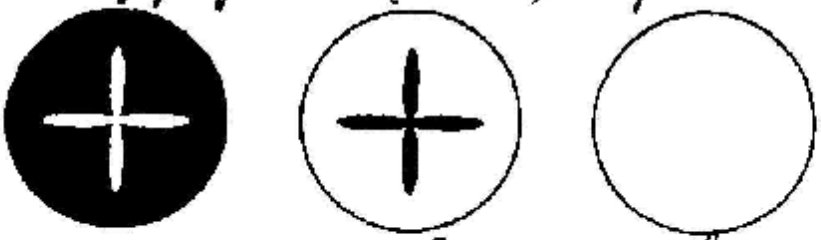
Х-ки тепл. випромінювання залишаються незмінними: пробні тіла мають розміри достатньо малі порівняно з термостатом і не впливають на х-ки тепл. випр. в порожнині.

В II випадку на елемент поверхні $d\sigma$ тіла в межах тієї ж смуги частот $d\nu$ падає випромін. тієї ж потужності $dW_{пад}$, що і в I випадку. Формули (2), (3)

залишаються в силі, хоча і з іншими значеннями коеф. α та ε. Але тоді, щоб (2), (3) залишались інв, необхідно, щоб $\frac{\varepsilon}{\alpha} = \text{інв}$, що і складає зміст закону Кірхгофа.

Експеримент, що демонструє зв'язок між випромінювальною та поглинальною здатністю

Фарфорова (біла) тарілка з малюнком (темний хрест).



а. б. в.

а – світіння капіталі в муфельній печі до $T \sim 1000\,^\circ C$ в затемненій аудиторії;

б – вигляд тієї ж тарілки при 300 К;

в – вигляд тарілки у печі.

Висновок: $\alpha \sim \varepsilon$. Це витікає із закону Кірхгофа і підтверджує його.

Закон Стефана – Больцмана

1879 р. Стефан встановив, що експериментально визначена величина інтегральної (проінтегрованої по всіх частотах) випромінюючої здатності

$$\varepsilon(T) = \int_0^\infty \varepsilon(\nu, T)\, d\nu = \sigma T^4 \quad (A)$$ закон Стеф.–Больцм.

де σ – стала

Больцман в 1884 р. довів, що формула (А) має місце не для всіх тіл, а лише для а.ч.т. Із досліду було визначено $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-4}$ $\frac{Вт}{см^2 \cdot град^4}$

Формула Віна і закон зміщення Віна

1893 р. Він, спираючись на закони т/дин та ел/дин, визначив х-ер залежності для випромін. здатності а.ч.т.

$$\boxed{E(\nu,T) = C' \cdot \nu^3 \cdot F\left(\frac{\nu}{T}\right)} \quad (B)$$ формула Віна (I)

де C' – стала; $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$ – деяка функція, вигляд якої віну не був відомий.

Висновки: ① Введемо функцію $E(\lambda,T)$.

$E(\nu,T)\cdot d\nu = E(\lambda,T)\cdot d\lambda = d\Phi$ – світловий потік, який припадає на інтервал $d\nu$ або відповідно на інтервал $d\lambda$

$$\nu = \frac{c}{\lambda}; \quad d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda; \quad \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$$

$$E(\lambda,T) = E(\nu,T)\cdot\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{c}{\lambda^2}\cdot E(\nu,T) \quad (1)$$

Тобто при переході від кривої $E(\nu,T)$ до кривої $E(\lambda,T)$ вигляд кривої змінюється (трансформується) $\Rightarrow$

Не можна записати: $\nu_{max} = \frac{c}{\lambda_{max}} \Rightarrow \nu_{max} \neq \frac{c}{\lambda_{max}}$

(B) → (1):

$$\boxed{E(\lambda,T) = C'\frac{c^4}{\lambda^5}\cdot F\left(\frac{c}{\lambda\cdot T}\right)} \quad (B')$$ формула Віна (II)

Продиф. (B'):

$$\frac{dE(\lambda,T)}{d\lambda} = -C'\frac{5\cdot c^4}{\lambda^6}\cdot F\left(\frac{c}{\lambda\cdot T}\right) - C'\frac{c^5}{\lambda^7\cdot T}\cdot F'\left(\frac{c}{\lambda\cdot T}\right)$$

Досліджимо на extr.: $\frac{dE(\lambda,T)}{d\lambda} = 0$

$$5\cdot F\left(\frac{c}{\lambda_m\cdot T}\right) + \frac{c}{\lambda_m\cdot T}\cdot F'\left(\frac{c}{\lambda_m\cdot T}\right) = 0 \quad (2)$$

де λ_m – значення довж. хв. випр., при якому випромін. здатність приймає max значення.

(2) – диф. рівняння I порядку. Його розв'язок:

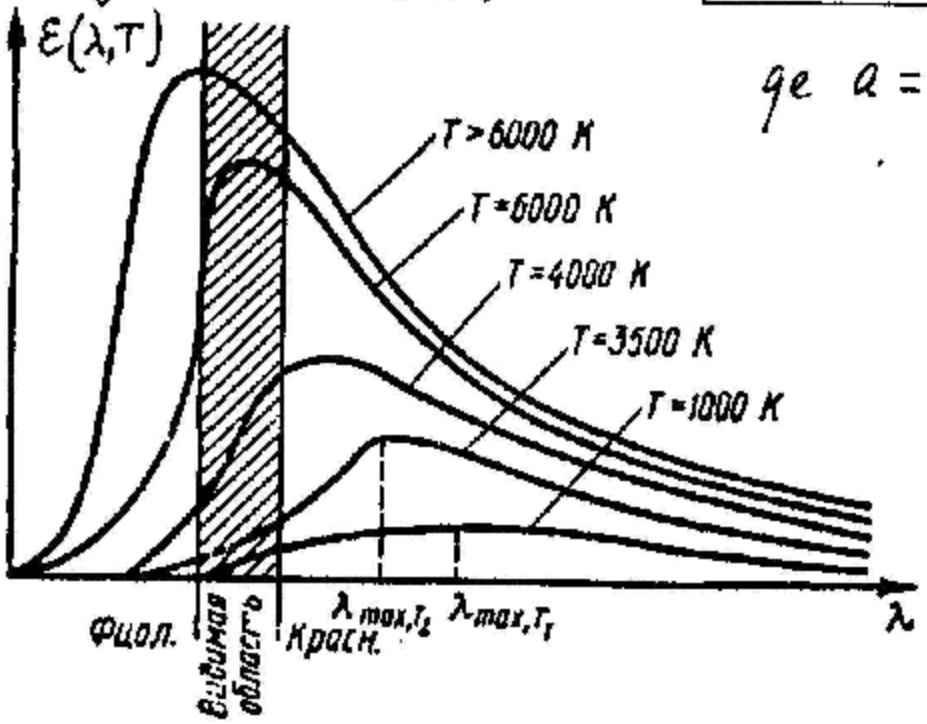
$$\frac{c}{\lambda_m \cdot T} = const \Rightarrow \boxed{\lambda_m \cdot T = b}$$ Закон зміщення (3)

② Отримаємо макс. значення випромін. здатн. (ε_m).

$(3) \to (b')$: $\varepsilon_m(\lambda_m, T) = \frac{c^4}{\lambda_m^5} \cdot F\left(\frac{c}{\lambda_m \cdot T}\right) \cdot \alpha =$

$= \frac{c^4}{b^5} \cdot T^5 \cdot F\left(\frac{c}{b}\right) \cdot \alpha = \boxed{a \cdot T^5 = \varepsilon_m(\lambda_m, T)}$ (4)

де $a = \alpha \cdot \frac{c^4}{b^5} \cdot F\left(\frac{c}{b}\right) = const.$



Спектральна густина рівноважного теплового випромінювання

$u(\omega, T) = \frac{dW}{V \cdot d\omega}$; $u(\omega, T)$ – ен. рівноважн. тепл. випромінювання при темп. T, яка припадає на од. об'єму простору в елементарному інтервалі частот $d\omega$ поблизу ω;

dW – ен. тепл. випр. в об'ємі V і смузі частот від ω до $\omega + d\omega$.

Закон випромінювання Релея-Джинса.

Підхід Релея до вивчення теплового випромінювання – з статистичної фізики (не з термодинаміки, як у всіх).

Умова стоячої хвилі $L = m\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{m}$

$\lambda = \frac{v}{\nu} \Rightarrow \frac{v}{\nu} = \frac{2L}{m} \Rightarrow \nu = m\frac{v}{2L}$

За Релеєм число власних частот, які вкладаються в інтервалі $\nu, \nu + d\nu$ пропорц. об'єму порожнини V, квадрату n-ти ν^2 та ширині інтервалу $d\nu$:

$$dN \sim V \cdot \nu^2 \cdot d\nu$$

На одну коливальну ступінь свободи в клас. фізиці припадає ен. kT ($\frac{1}{2}kT$ – на кін. ен. і $\frac{1}{2}kT$ – на потенц. ен.): $u(\omega, T) \sim \omega^2 \cdot kT$

Джинс продовжив ідею Релея, знайшов коеф. і визначив, що

$$\boxed{u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT}$$

Формула Релея-Джинса (закон випромінювання Релея-Джинса)

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^2} \cdot kT$$

Узгоджується з експериментом в обл. низьких частот.

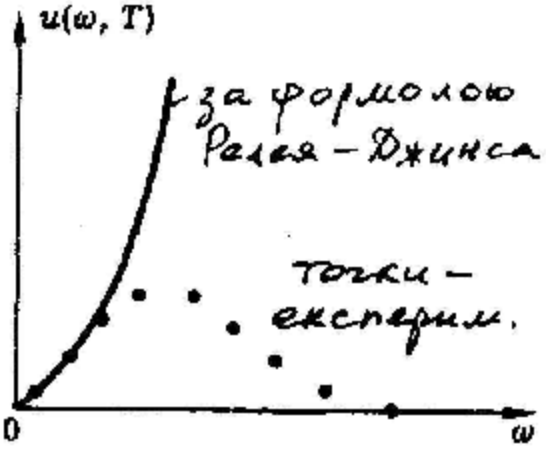
Закон випромінювання Віна

В. Він (1896 р.) припустив, що випромінювання має розподіл за частотами, аналогічний максвелівському розподілу швидкостей молекул в газі:

$$u(\omega, T) = C_1 \cdot \omega^3 \exp\left(-\frac{\gamma \cdot \omega}{T}\right)$$ де C_1 та γ – сталі коеф.

Ця функція має max і добре узгоджується із експериментом в області високих частот (далеко від max).

"Ультрафіолетова катастрофа"



$u(\omega,T) \sim \omega^2$

Необмежений зріст спектр. густини тепл. випр. в обл. високих частот – абсурд!

Абсурд і те, що получається

$$\int_0^\infty u(\omega,T)\,d\omega = \infty$$

Формула Планка

Наприкінці 1900р. в дослідженнях тепл. випромін. склалась така ситуація: були проведені точні експерим. вимірювання $u(\omega,T)$ Люммером та Прингсгеймом, були відомі ф-ла Релея-Джинса, яка описувала поведінку $u(\omega,T)$ в обл. НЧ, та формула Віна, яка добре узгоджувалась з експер. в обл. середніх та високих частот:

$$u(\omega,T) \sim \begin{cases} \omega^2 T, & \text{коли } \omega \to 0 \quad \text{(закон Релея-Дж.} \\ \omega^3 e^{-\beta\omega/T}, & \text{коли } \omega \to \infty \quad \text{(закон Віна).} \end{cases}$$

М. Планк намагався побудувати (вивести) вираз, який об'єднував би НЧ та ВЧ області спектра. Планк придумав декілька формул, які задовольняли би цій умові, серед яких була одна, яка вражала своєю красотою та незвичайністю. В сучасних позначеннях, ця формула має вигляд

$$u(\omega,T) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Формула Планка

$h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-27}$ ерг·с

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Висновки із формули Планка

① Атоми, які утворюють стінки нагрітої порожнини, в котрій знаходиться рівноважне теплове випром., здатні випромінювати і поглинати світло даної частоти ω не в будь-якій кількості, а лише дискретними порціями (квантами) з ен. $E_0 = \hbar\omega = h\nu$.

② Розв'язується парадокс Релея-Джинса („УФ катастрофа").

ВЧ світло ($\omega \to \infty$) може випромінювати лише достатньо великі порції (кванти) енергії. В умовах, коли $\hbar\omega \gg kT$, в стінках порожнини не знаходиться атомів, здатних випромінювати ВЧ кванти: теплової ен. атомів, яка має порядок kT, буде для цього надто мало. Таким чином, при $\omega \to \infty$ спектр. густина випр. $u(\omega, T) \to 0$. Це знаходить у повній відповідності з експериментом.

В НЧ обл. спектра, коли $\hbar\omega \ll kT$, дискретність випромінювання не буде грати суттєвої ролі. Ось чому в НЧ обл. спектра (коли $\omega \to 0$) справедлива класична теорія.

③ Середнє значення енергії осцилятора, яка припадає на 1 ступінь свободи, в дійсності, не є величиною сталою, як в класичній фізиці для коливань – kT, а залежить від частоти ω. Із збільшенням ω ця енергія змінюється.

④ Із формули Планка можна вивести закон Релея-Джинса: в обл. малих частот і/або великих температур, коли $h\nu \ll kT$, експоненту можна розкласти в ряд: $e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \dots$

Тоді $u(\nu,T) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{h\nu^3}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} =$ 2.

$= \frac{kT}{\pi^2 c^3} \cdot \nu^2$ – закон Релея-Джинса

⑤ Із формули Планка можна вивести закон Стефана-Больцмана: $\frac{dW}{dV} = \int_0^\infty u(\omega,T)\,d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} =$

$= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \cdot \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \text{const} \cdot T^4$ $\qquad u(T) = \sigma \cdot T^4$

$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$ табл. інтегр.

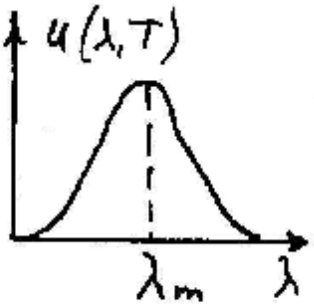
$\sigma = \frac{\pi^2 \cdot k^4}{15 \hbar^3 c^3} = 7.55 \cdot 10^{-15}$ ерг·см$^{-3}$·К$^{-4}$

⑥ Із формули Планка можна вивести закон зміщення Віна: $u(\omega,T) \cdot d\omega = u(\lambda,T) \cdot d\lambda$ (1)

$u(\lambda,T) = u(\omega,T) \cdot d\omega/d\lambda$ (2)

Підставимо формулу Планка в (2):

$u(\lambda,T) = \frac{8\pi c h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$



$\frac{\partial u(\lambda,T)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1} = 5$ (3)

де $x = \frac{hc}{kT\lambda_m}$. Розв'язком трансцендент. р-ня (3) є:

$x = 4{,}965$. Таким чином, $\lambda_m = \frac{hc}{4{,}965\,kT} = \frac{0.29\ \text{см}\cdot\text{К}}{T(\text{К})}$

Світловий квант

$E = h\nu$ – тіл порція енергії коливань (хвилі) з частотою ν, яка м.б. поглинена або випромінена при переході осцилятора із одного енергетичного стану в інший.

Квант енергії прямо пропорційний частоті світла.

М. Планк (1900 р.) приписав цю властивість середовищу. А. Ейнштейн (1905 р.) розвинув цю ідею і поширив квантованість енергії і на випромінювання (світло). Він ввів поняття фотон – квант світла. Не тільки енергія $E = h\nu$, але і імпульс $p = h\nu/c$.

Зв'язок між хвильовими (ν та λ) та корпускулярними (E та p) х-ками. Дуалізм хвиля-частинка.

Луї де Бройль (1924 р.) узагальнив дуалізм на всі матер. тіла: кожному тілу з масою m, яке рухається із швидкістю v, можна співставити довж. хвилі $\lambda_Б$

$\lambda_Б = h/mv = h/p$.

Девісон та Джермер (1927 р.) експериментально спостерігали дифракцію електронів.

Оптичні переходи. Квантова модель атома.

Н. Бор (1913 р.) сформулював 2 постулати:

1. Існують стаціонарні стани атомів, в яких вони не випромінюють і не поглинають. В цих станах атоми мають енергії, які утворюють дискретний ряд W_1, W_2, ... (енергетичні рівні).

2. Світло, яке поглинається або випромінюється атомом при переході із стаціонарного рівня енергії W_m на рівень з енергією W_n, є монохроматичним,

220 220

а його частота ω визначається з умови

$$W_m - W_n = \hbar\omega$$

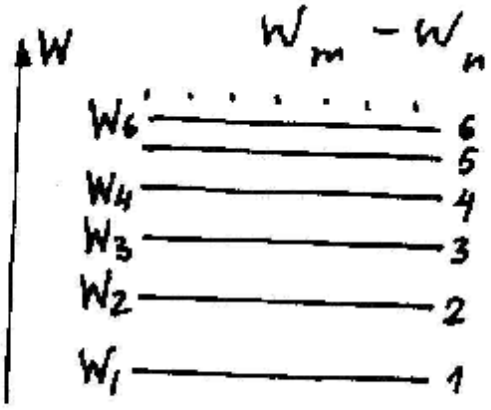
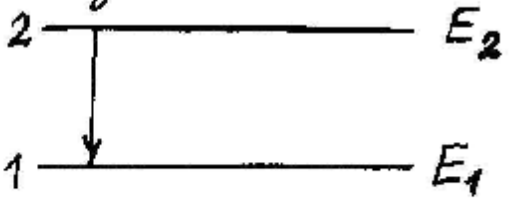


Схема енергетичних рівней атома.

Якщо атом змінює свою енергію з більшої на меншу ($m > n$), то відбувається випромінювання світла. Якщо перехід відбувається з нижнього рівня на вищий рівень ($m < n$), то він викликаний поглинанням світла ззовні. Такі переходи називаються оптичними переходами.

Спонтанне та вимушене випромінення, поглинання

Позначимо число атомів, які знаходяться в стані



з енергією E_1 через N_1, а число атомів з ен. E_2 через N_2. В стані теплової рівноваги заселеності рівнів підпорядковані розподілу Больцмана $N_i = \text{const} \cdot e^{-E_i/kT}$ (1)

Дворівнева система взаємодіє із випромінюванням, частота якого підпорядкована умові Бора

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega \qquad (2)$$

За Ейнштейном (1915 р.) можливі такі типи радіаційних процесів:

1. Спонтанне випромінення

В момент часу t збуджений атом знаходиться на енерг. рівні E_2. Через деякий час Δt атом може залишитись у збудженому стані або може

220 220

221 221

самодовільно (спонтанно) перейти в нижній ен. стан з ен. E_1. При цьому випромінюється фотон з ен. $h\nu = E_2 - E_1$.

Спонтанне випромінення здійснюється незалежно від дії зовнішнього випромінювання. Не можна бути впевненим, що перехід відбудеться, про це можна стверджувати лише з певною достовірністю.

Спонтанний перехід – випадкова подія.

Ймовірність спонт. переходу в од. часу – $A_{21}^{спонт}$.

$$A_{21}^{спонт} = 1/\Delta t \quad (3)$$

Δt – середня тривалість життя атома в стані E_2

Спонтанні переходи одного і того ж атома в різні моменти часу, а також різних атомів в один і той же момент часу ніяк не пов'язані між собою: між фазами та амплітудами спонтанно випромінених хвиль не існує ніякої закономірності, тобто спонтанне випромінення – некогерентне.

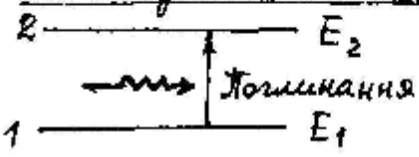
$Z_{21}^{спонт}$ – число спонтанних переходів атома з верхнього рівня 2 на нижній рівень 1 за одиницю часу пропорційно числу атомів на верхньому рівні:

$$Z_{21}^{спонт} = A_{21} \cdot N_2 \quad (4)$$

де A_{21} – коеф. Ейнштейна ≡ ймовірність спонтанних переходів

Примітка: Крім оптичних переходів, є неоптичні переходи (рос. – „безизлучательные"), коли перехід атому з одного енерг. стану в інший здійснюється при співударах атомів і ніяке випромінювання в цьому не задіяне.

2. Вимушене поглинання



Поява випромінювання (його дія на атом) може привести до переходу

221 221

222 222

атома у збуджений стан. Цей процес наз. поглинанням індукованим, або вимушеним. Коло ІНТЕНСИВНІСТЬ пропорційна густині випромінення, що викликало цей перехід

$$Z_{12}^{інд} = B_{12} \cdot N_1 \cdot u(\omega, T) \qquad (5)$$

Коеф. B_{12} теж наз. коеф. Ейнштейна ≡ ймовірність поглин.

Вимушене (індуковане) випромінення

Ейнштейн постулював опт. переходи з верхнього енерг. рівня на нижній рівень під дією зовнішнього випромінення.



Такі опт. переходи називаються вимушеними, або індукованими переходами з випромінюванням.

Дослід показує, що ел.м. випр., яке викликане вимушеним переходом, повністю тотожне випромінюванню, яке викликало цей перехід; тобто в обох випадках частота, напрямок розповсюдження та поляризація однакові. Вимушене і вимушуюче випромінення – когерентні.

Ймовірність цього процесу $Z_{21}^{інд} = B_{21} \cdot N_2 \cdot u(\omega, T)$. (6)

В стані рівноваги переходи, що супроводжуються випромінюванням і поглинанням квантів світла, повинні врівноважувати один одного (за визначенням):

$$Z^{спонт}_{21} + Z^{інд}_{21} = Z_{12}^{інд} \qquad (7)$$

(4), (5), (6) → (7): $A_{21} \cdot N_2 + B_{21} \cdot N_2 \cdot u(\omega, T) = \qquad (8)$

З урахуванням (1) та (2) із (8): $\zeta = B_{12} \cdot N_1 \cdot u(\omega, T)$

$$u(\omega, T) = \frac{A_{21}/B_{21}}{\frac{B_{12}}{B_{21}} \cdot e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1} \qquad (9)$$

222 222

Відношення коеф. Ейнштейна можна знайти із розгляду граничних випадків:

а) Якщо $T \to \infty$, то $u(\omega, T) \to \infty$, а населеності рівнів будуть вирівнюватись: $N_1 \to N_2$.

При цих умовах із (8) витікає, що $B_{12} = B_{21}$ (10)

б) Якщо $\omega \to 0$, то $\hbar\omega \ll kT$, тобто квантова структура не проявляється і для спектр. густини випромінення справедлива класична формула Релея–Дж.:

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT \qquad (11)$$

При умові $\omega \to 0$ із (9), враховуючи, що $B_{12} = B_{21}$, витікає:

$$u(\omega, T) = \frac{A_{21}}{B_{21}} \cdot \frac{kT}{\hbar\omega} \qquad (12)$$

Порівнюючи (11) та (12), знаходимо, що

(13) $$\boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}}$$

(10), (13) → (9):

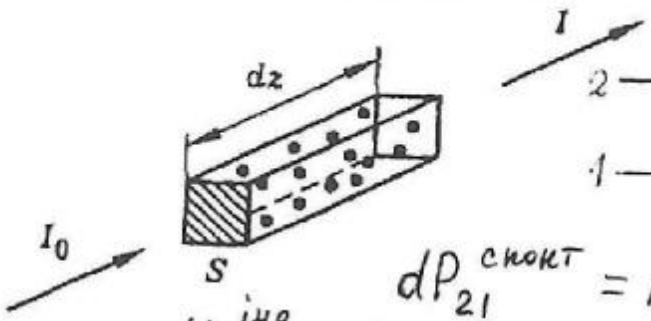
$$\boxed{u(\omega, T) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}}$$

Це є формула Планка. Ми вивели формулу Планка. (Формулу Планка вивів Ейнштейн. Планк її вгадав, підібрав і відібрав із всіх можливих).

224 224

Лазер

Laser – абревіатура фрази "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation" – "Підсилення світла за рахунок емісії вимушеного випромінювання"



$dV = S \cdot dz$

$dN = N \cdot dV$

$dN_2 = N_2 \cdot dV$

$dN_1 = N_1 \cdot dV$

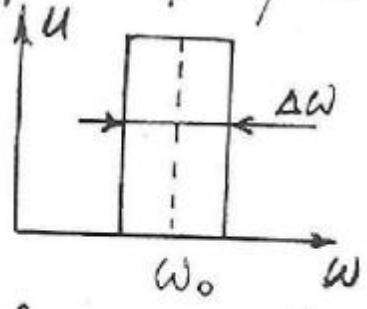
$$\left.\begin{aligned} dP_{21}^{\text{спонт}} &= A_{21} \cdot \hbar\omega \cdot dN_2 \\ dP_{12}^{\text{інд}} &= B_{12} \cdot \hbar\omega \cdot u(\omega)\, dN_1 \\ dP_{21}^{\text{інд}} &= B_{21} \cdot \hbar\omega \cdot u(\omega) \cdot dN_2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$u(\omega)$ – спектральна густина падаючого випромінювання.

Повна потужність випромінюв. даного елементу на частоті ω

$$dP = dP_{21}^{\text{сп}} + dP_{21}^{\text{інд}} - dP_{12}^{\text{інд}} \quad (2)$$

Будемо вважати, що спектр випромінювання має прямокутну апроксимацію



$$J = C \cdot u \cdot \Delta\omega$$

$$dJ = \frac{dP}{S}$$

$$dJ = \left[A_{21} N_2 + \left(B_{21} N_2 - B_{12} \cdot N_1\right) \frac{J}{C \cdot \Delta\omega}\right] \hbar\omega \cdot dz \quad (3)$$

Взаємодія світла з атомами відбувається в двох зустрічних напрямках:

1) Атоми, які знаходяться в осн. стані W_1, поглинаючи зовнішнє випромін. з ен. $\hbar\omega = W_2 - W_1$, переходять у збуджений стан. Ймовірність такого процесу ~ B_{12}.

2) Атоми, які знаход. у збудж. стані W_2, під дією зовн. випромін. з ен. $\hbar\omega = W_2 - W_1$ вимушеним чином переходять в основний стан, тобто випромінюють квант $h\nu = W_2 - W_1$. Ймовірність цього процесу ~ B_{21}.

224 224

Будемо вважати, що інтенс. світла досить велика, щоб знехтувати спонтанним випромінюванням $\Rightarrow A_{21} = 0$

Позначимо $B_{12} = B_{21} = B$

Тоді $dJ = B(N_2 - N_1) \cdot \frac{J}{c \cdot \Delta\omega} \cdot \hbar\omega \cdot dz = G \cdot J \cdot dz$ (4)

де $\boxed{G = B(N_2 - N_1) \cdot \frac{\hbar\omega}{c \cdot \Delta\omega}}$ (5)

З (4): $J(z) = J_0 e^{Gz}$ (6)

Висновки: 1) інтенсивність $J(z)$ змінюється по exp;

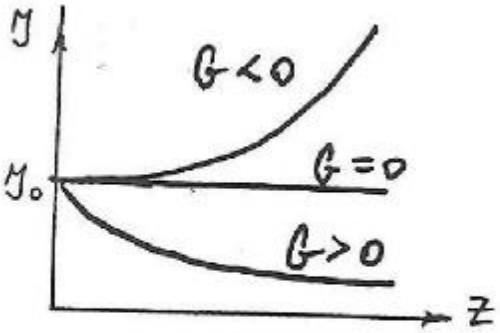
2) знак показника exp залежить від знаку $(N_2 - N_1)$.

Якщо середовище знаходиться в стані теплової рівноваги, то $\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$ (за Больцманом) (7)

Якщо $T = 300K$; $\omega = \frac{2\pi \cdot c}{\lambda}$; $\lambda = 0.5$ мкм, то $\frac{\hbar\omega}{kT} \sim 10^3 \Rightarrow$ заселеність верхнього рівня, яку він набуває в результаті теплової рівноваги, можна знехтувати: $N_2 = 0$. Будемо вважати, що $N_1 = N$. Тоді:

$\boxed{J(z) = J_0 \cdot e^{-|G| \cdot z}}$, де $|G| = N \cdot B \cdot \frac{\hbar\omega}{c \cdot \Delta\omega}$ (8)

(8) - закон поглинання (закон Бугера - Ламберта).



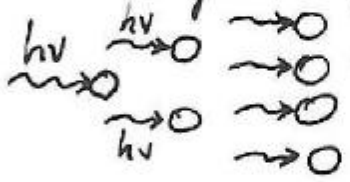
Для $G > 0$ проходження світла через середовище призводить до послаблення світла. В класичній оптиці завжди $G > 0$ — поглинання світла.

Для $G < 0$ при проходженні світла через середовище відбувається підсилення світла. („від'ємне поглинання")

З (5) видно, що $G<0$, коли $N_1 < N_2$.

Стан, коли $N_2 > N_1$, наз. інверсним станом, або станом із „від'ємною температурою". Ця формальна назва походить із того, що із (7) → $T = \frac{W_1 - W_2}{k \cdot \ln \frac{N_2}{N_1}}$ (9)
якщо $N_2 > N_1$ (при тому, що $W_1 - W_2 < 0$), то має місце умова, що $T<0$ („від'ємна" т-ра).
Середовище із інверсною заселеністю назив. активним.
Для 2-хрівневої системи за допомогою оптичної накачки отримати інверсну заселеність не можна.

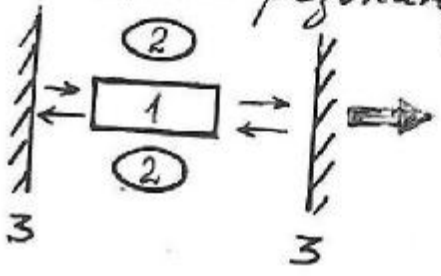
Через те, що в активному середовищі переважають акти вимушеного випромінювання, число фотонів зростає лавиноподібно:



Інвертований стан створюють різними способами: оптична накачка, електр. розряд, електр. струм, хімічна реакція

Інвертовану заселеність застосовують в лазерах (для генерації або підсилення світла).

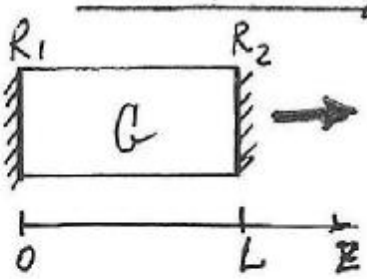
Щоб із режиму підсилення перейти до режиму генерації світла, потрібно використати зворотній зв'язок. В лазерах зворотній зв'язок здійснюється за допомогою оптичного резонатора.



1 – активний елемент;
2 – система накачки;
3 – оптичний резонатор.

227 227

Умови самозбудження лазера



1) підсилення світла за рахунок вимушеного (індукованого) випромінювання в інвертованому середовищі повинно перевищувати величину втрат: $R_1 \cdot R_2 \cdot e^{G \cdot L} \geq 1$

2) необхідно щоб, для виконання фазових умов,

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

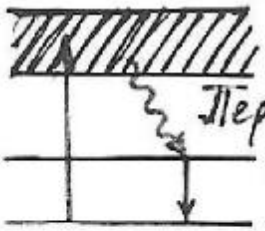
При цьому фазовий набіг світлової хвилі при подвійному проходженні через р-р кратний величині 2π, що забезпечує оптичні умови для підсилення світла.

Типи лазерів

1. Рубіновий лазер (1960 р., Мейман)

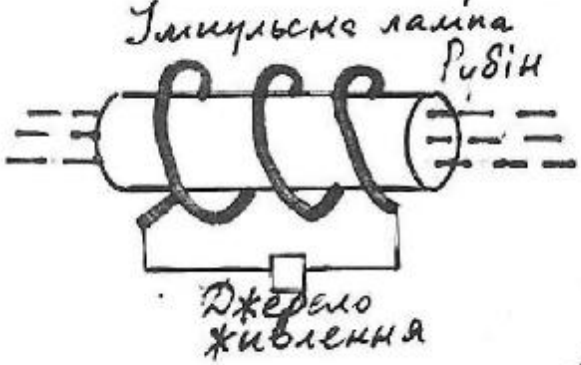
$Al_2O_3 : Cr^{3+}$ 0.05 % Cr

"Трирівнева" схема



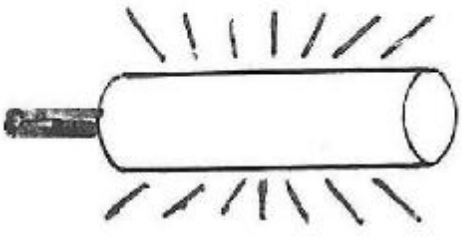
Рівень 2 – метастабільний час життя на ньому $\sim 10^{-3}$ с

$\lambda = 6943$ Å



Конструкція лазера Меймана

Дослід з люмінесценцією



Кристал рубіна просвічується зеленим променем Ar-лазера вздовж осі кристалу.

227 227

12.

Потужність імпульсної лампи накачки (оцінка)

Концентрація атомів Cr $N = 10^{19}\ см^{-3}$

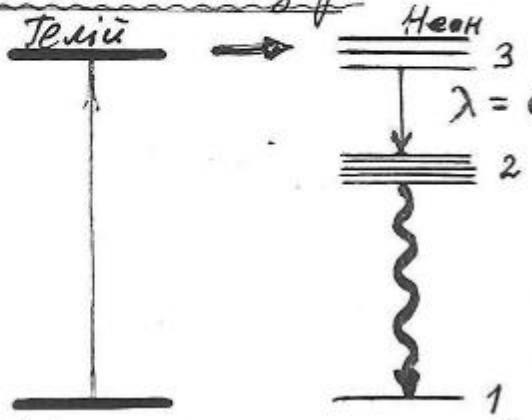
Для збудження генерації необхідно, щоб, принаймні, половина атомів Cr ($5\cdot10^{18}\ см^{-3}$) перейшла на рівень 3. На перехід 1 атому витрачається ен. $W_3 - W_1 = h\nu = 4\cdot10^{-12}$ ерг/атом. Повна ен.: $2\cdot10^{7}\ эрг\cdot см^{-3}$. Атоми повинні перейти $3 \to 2$ за час $\Delta t \leq$ час життя атомів на рівні W_2 ($\sim 2\cdot10^{-3}$ с). Інакше спонтанне випромін. та релаксац. процеси будуть руйнувати інверсію заселеності.

Потужність, що поглинається $P = \dfrac{2\cdot10^{7}\ эрг}{см^3 \cdot 2\cdot10^{-3}\ с} =$

$= 10^{10}\ \dfrac{эрг}{см^3\cdot с} = 2\cdot10^{3}\ Вт/см^3 = 2\ кВт$ на $1\ см^3$.

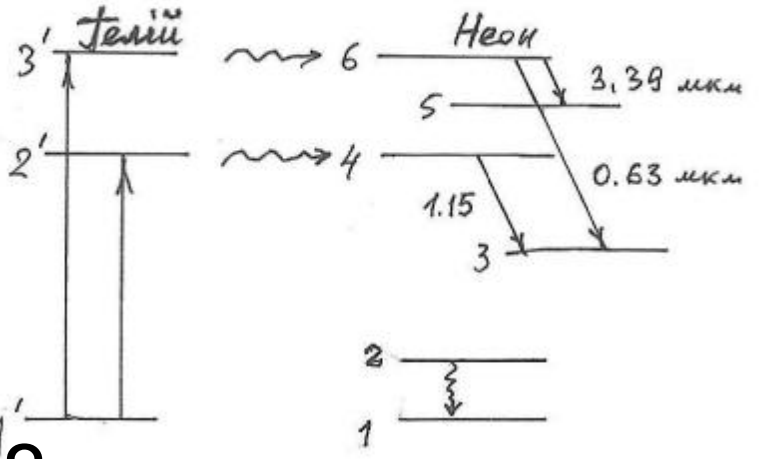
При $V = 10\ см^3$ необхідна потужність лампи накачки $P = 20$ кВт. Енергія смуги в білому світлі, необхідна для насичення переходу $1 \to 3$, складає 15%. Тому повна потужність лампи накачки $P \sim 200$ кВт.

2. He-Ne лазер



„Чотирирівнева" схема
$\lambda = 632.8$ нм Суміш He та Ne.
Активна речовина – Ne.
Гелій грає допоміжну роль.
В трубці із сумішшю He-Ne підтримується постійний електричний розряд.

Рівень 2 знаходиться високо і практично пустий. Це полегшує створення інверсії. Тому – неперервна генерація.

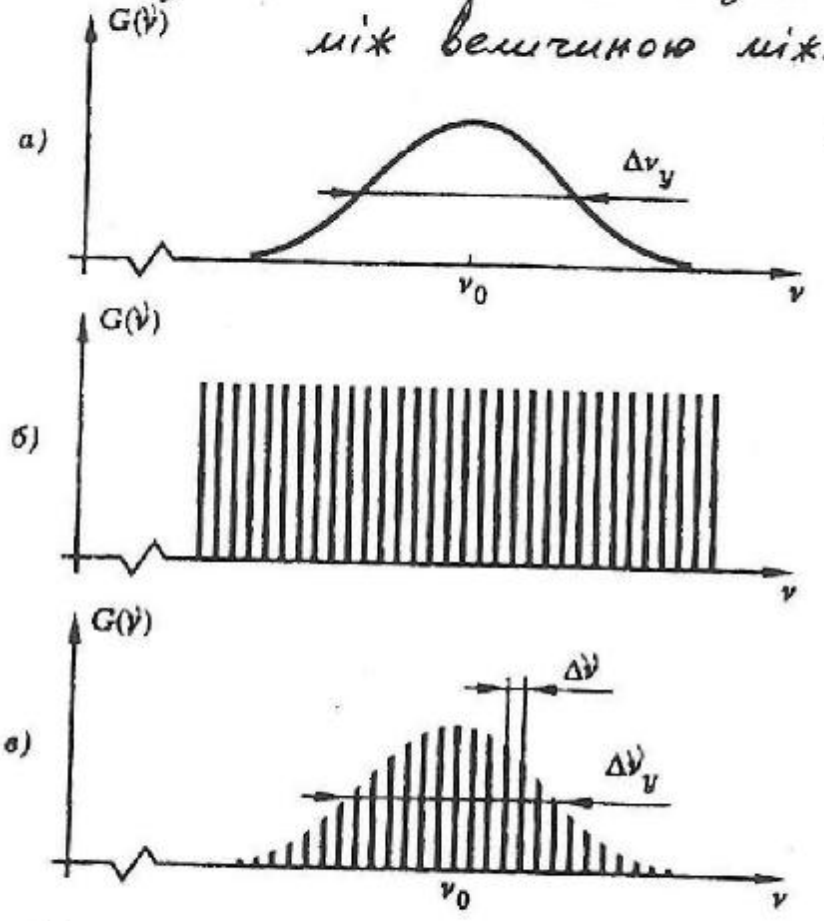


Механізм інверсії рівнів в He-Ne лазері див. Сивухин... стр. 724

Спектральний склад лазерного випромінювання

$\Delta\nu = \frac{c}{2L}$, $\nu_n = n \cdot \Delta\nu$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

ν_n – власні моди резонатора (через те, що вони залежать від довжини р-ра L). Кількість збуджених власн. мод залежить від L та визначається співвідношенням між величиною міжмодового інтервалу ($\Delta\nu$) і шириною спектральної смуги підсилювача лазера ($\Delta\nu_y$):



$$M = \frac{\Delta\nu_y}{\Delta\nu}$$

$\Delta\nu_y$ співпадає з шириною спектральної лінії поглинання активного елементу лазера у відсутності інверсії заселен.

Для He-Ne лазера $\Delta\nu_y$ визначається доплеровським уширенням спектральної лінії і складає величину $\Delta\nu_y \sim 0.04\ см^{-1}$.

Для рубінового лазера $\Delta\nu_y = (2-4)\ см^{-1}$

Для лазера на склі з Nd $\Delta\nu_y \sim 10^3\ см^{-1}$

Якщо $L = 50\ см$, то $\Delta\nu = \frac{1}{2L} = 10^{-2}\ см^{-1}$

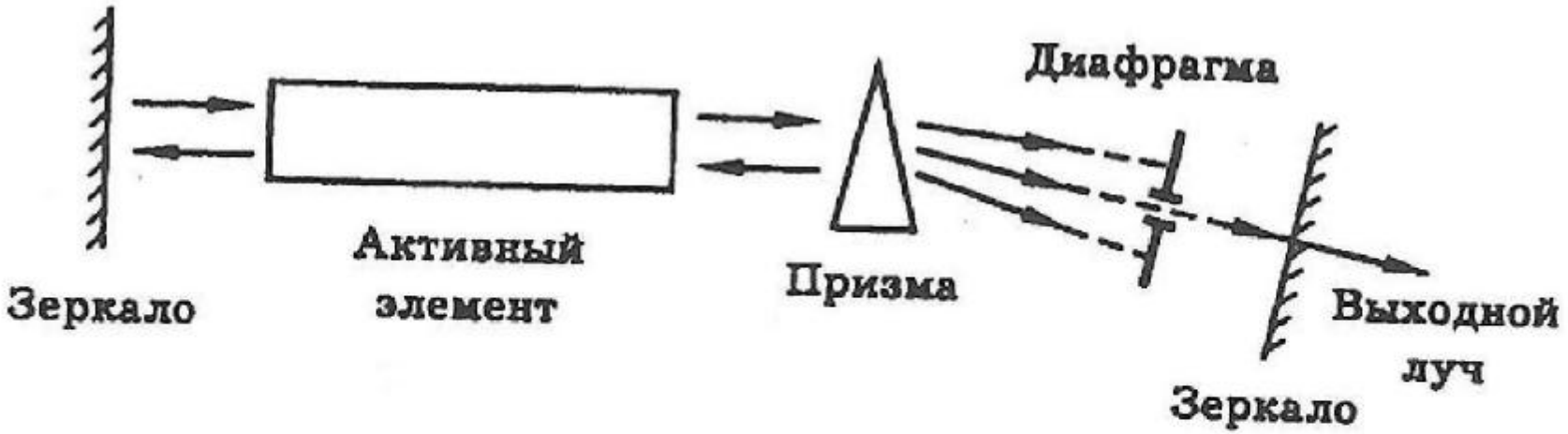
He-Ne лазер	$M = 4$
Рубін. лазер	$M = 100$
Скло з Nd	$M = 10^4$

Склад лазерного випромінювання – багатомодовий!

230 230 230 230

Одномодовий лазер

Частотний фільтр із дисперсійного елементу (призма, ДГр, еталон Ф.-П.) + діафрагма дозволяють отримати одномодовий режим генерації лазера.



Найбільш вузькосмуговий лазер – He-Ne : $\Delta\nu \sim 100$ Гц

$$Q = \frac{\nu}{\Delta\nu} = 10^{13}$$

Нелінійна оптика

НО вивчає процеси взаємодії світла із середовищем, характер протікання яких залежить від інтенсивності світла.

Чи малі поправки як в 1925 р. в експер. вавілова, а принципово нові ефекти

Нелінійна поляризація

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0; \qquad \operatorname{div}\vec{H} = 0; \qquad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

Для ізотропн. серед.: $\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \qquad (1)$$

(1) – хвильове рівняння для анізотропн. середовища

$\vec{E}$ – напруженість ел. поля світл. хвилі

$\vec{P}$ – поляризація середовища, яка виникає під дією світл. хвилі і яка, в свою чергу, є джерелом вторинних світлових хвиль: Поляризація середовища є джерелом світлового поля.

(1) справедливе і для лінійних і для нелін. середовищ. $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$. Крім того, $\vec{P}$ визначається властивостями середовища.

Матер. рівн-ня для нелін. серед: $P = \chi E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \dots$ (2)

Рівноважна поляризація серед. є нелін. ф-ція $\vec{E}$. Це є причиною порушення принципу суперпоз. для світл. хвилі в нелін. середовищі.

Для нелінійної ізотропн. середов. $\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{P}_л}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{P}_{нл}}{\partial t^2}$

χ – лін. оптична сприйнятливість;

$\chi^{(i)}$ – нелін. опт. сприйн. i-го порядку.

$$\vec{P} = \vec{P}_л + \vec{P}_{нл} \qquad (3)$$

Для ізотропного нелін. середовища найнижчою нелінійною, відмінною від нуля, є кубічна нелінійність:

$$P = \chi E + \chi^{(3)}E^3 \qquad (4)$$

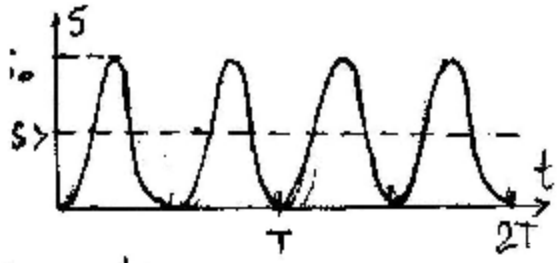
в цьому наближенні $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E} = n^2\vec{E}$. Звідки:

$$n = \sqrt{1 + 4\pi\frac{P}{E}} = n_0 + \frac{2\pi}{n_0}\chi^{(3)}E^2, \text{ де } n_0 = \sqrt{1+4\pi\chi}$$

232

$$S_0 = \frac{c}{4\pi} E^2$$

$$\langle S \rangle \equiv J = \frac{c}{8\pi} E^2$$



Інтенс. хвилі $J = \frac{c}{8\pi} E^2$; по-лін. показн. заломл.

$n = n_0 + n_2 J$ де $n_2 = \frac{16\pi^2}{n_0 c} \chi^{(3)}$ (5)

(5) показує, що в середовищі з кубічною нелінійністю показник заломл. (n) залежить від інтенсивн. (J) світла. Це призводить до самофокусування світл. променя і т.і.

Величина n_2 має розмірність, обернену до розмірн. інтенсивності світла. Наприклад, для кристалу кварца $n_2 = 3 \cdot 10^{-16}$ см^2/Вт.

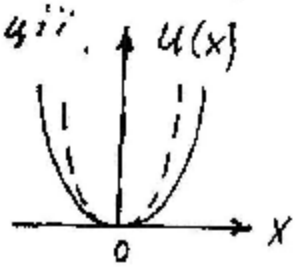
Механізми нелінійності $\vec{P}$

Причини нелінійності типу (2) м.б. різні. Наприклад:

1) Електрострикція в світловому полі призводить до появи тиску, який змінює густину (ρ) середовища, а, значить, і показн. заломл. (див. лекцію „Дисперсія світла"

2) в рідинах сильне світл. поле призводить до орієнтації (повороту) анізотропних молекул рідини в залежності від інтенсивності і поляризації світла. При цьому середовище стає анізотропним, а $\langle n \rangle$ зростає. Цей ефект називається „ВЧ ефектом Керра", оскільки такий же механізм лежить в основі двопроменезаломл. наведеного постійним ел. полем (див. „Ефект Керра").

3) Добавка до показн. заломл., яка залежить від J, м.б. пов'язана з нелінійністю електронної поляризації.



Модель середовища – ансамбль осциляторів. В околі т. рівноваги ел-на ($x=0$), потенціальна енергія його коливань

$$U(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{3}\beta x^3 + \dots$$

$$F_{возвр} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\alpha x - \beta x^2 + \dots$$

232

233 233

4) зміна n за рахунок нагріву середовища потужним лазерним променем.

Оцінки лінійної і нелінійної сприйнятливості

- Лін. сприйн. – χ; $n^2 = 1 + 4\pi\chi$

  $n = 1.5 \Rightarrow \chi = 0.1$

- Квадрат. сприйн. – $\boxed{\chi^{(2)} = \frac{\chi}{E_{at}}}$ (6)

Хар-ним полем в середовищі є напруженість внутрішньоатомного ел. поля $E_{at} = \frac{e}{a^2}$, де e – заряд електрона; a – розмір атома (діаметр 1 боровської орбіти);

$a = 0.5 \cdot 10^{-8}$ см; $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ СБСЕ.

$E_{at} = 2 \cdot 10^7$ СГСЕ $\Rightarrow \chi^{(2)} = \frac{0.1}{2 \cdot 10^7} = 5 \cdot 10^{-9}$ СГСЕ

Експеримент для KDP дає $\chi^{(2)} = 3 \cdot 10^{-9}$ СГСЕ.

Розмірність $[\chi^{(2)}] = \frac{1}{[E]} = г^{-1/2} \cdot см^{1/2} \cdot с = эрг^{-1/2} \cdot см^{3/2}$

Долазерний період: джерела мають $E \sim 0.1 - 10$ В/см $\Rightarrow$ матер. рівняння – лінійне!

В лазерах: $E \sim 10^6 - 10^7$ В/см

Кубічна сприйнятливість:

$$\boxed{\chi^{(3)} = \frac{\chi}{E_{at}^2}} = \ldots = 2.5 \cdot 10^{-16} \text{ СГСЕ} = 2.5 \cdot 10^{-16} см^3/эрг \quad (7)$$

Експеримент дає, наприклад, для кристалу кварца $\chi^{(3)} = 10^{-14}$ $см^3/эрг$. Однак є матеріали, які мають $\chi^{(3)}$ значно більшої величини, $см^3/эрг$:

Si – 10^{-8}; рідинні кристали – 10^{-3}; InSb – 1 (77K); AlGaAs – $6 \cdot 10^{-2}$.

Оцінки лінійної та нелінійної поляризацій

$$P = P_л + P_{нл}^{(2)} = \chi E + \chi^{(2)} \cdot E^2$$

$$\frac{P_{нл}^{(2)}}{P_л} = \frac{\chi^{(2)} \cdot E^2}{\chi E} = \frac{\chi^{(2)} \cdot E}{\chi} = \frac{E}{E_{at}} \quad (8)$$

Аналогічним шляхом: $\frac{P_{нл}^{(3)}}{P_л} = \left(\frac{E}{E_{at}}\right)^2$ (9)

233 233

4.

Оцінимо величину $\left(\frac{E}{E_{ат}}\right)$: якщо $J = 10^9$ Вт/см^2

$$J = \frac{c}{8\pi} E^2 \Rightarrow E = \sqrt{\frac{8\pi J}{c}} = 3 \cdot 10^3 \text{ СГСЕ}$$

$$\frac{E}{E_{ат}} = \frac{3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^7} \sim 10^{-4} \Rightarrow E \ll E_{ат} \Rightarrow \chi^{(2)} \text{ та } \chi^{(3)} -$$

малі величини, але за рахунок накопичення в процесі розповсюдження світл. хвилі нелінійно-опт. ефекти м.б. сильними.

Оптичне детектування („випрямлення" світла). Генерація другої гармоніки

$$E = E_0 \cdot \cos(\omega t - kx), \quad \text{де } k = \frac{\omega}{c} \cdot n \qquad (10)$$

$$P = \chi E_0 \cos(\omega t - kx) + \chi^{(2)} \cdot E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) + \chi^{(3)} E_0^3 \cdot \cos^3(\omega t - kx)$$

$$P_{нл}^{(2)} = \chi^{(2)} E_0^2 \cdot \cos^2(\omega t - kx) =$$

$$= \frac{1}{2} \chi^{(2)} E_0^2 + \frac{1}{2} \chi^{(2)} E_0^2 \cdot \cos(2\omega t - 2kx) \qquad (11)$$

$$\left| \begin{array}{l} \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \cdot \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

(11) $\Rightarrow P_{нл}^{(2)}$ для середовища складається із двох доданків: сталої та змінної із подвійною частотою.

1. Оптичне детектування.

Електрони середовища перевипромінюють світл. ен. із змінною частотою. Тому I (постійний) доданок в (11) не призводить до перевипромін., а призводить до перетворення відповідної частини світлової енергії на енергію сталої поляризації середовища $\Rightarrow$ випрямлення, детектування ел.м. світлового поля.

Постійна поляризація призводить до появи постійного ел. поля в середовищі, яке можна зареєструвати та виміряти

Схема досліду по спостереженню оптичного детектування



Цей ефект можна використовувати для вимірюв. $\chi^{(2)}$

2. Генерація другої оптичної гармоніки (ГДГ).

Подвоєння частоти ($\omega \to 2\omega$) світла при розповсюдженні потужного лазерного променя в кристалі.

Механізм ГДГ пов'язаний з нелінійністю елементарного атомного осцилятора.

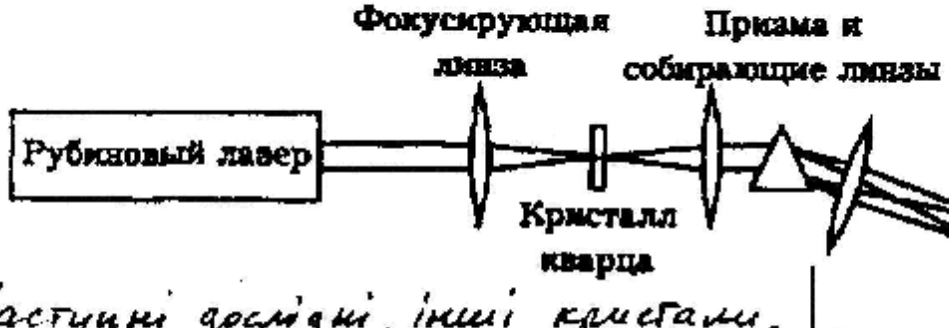
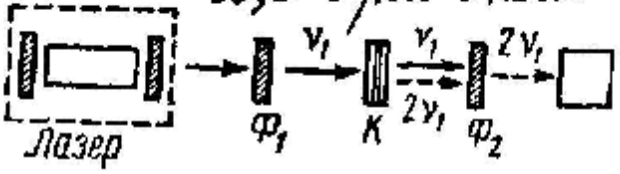


Схема досліду Франкена по ГДГ (1961 р.)

Ефективність перетворення була $\sim 10^{-8}$

Наступні дослідні, інші кристали, інші методи $\Rightarrow$ ефективність $\sim 100\%$

Ще одна схема спостереження ГДГ.



Фільтр Φ_1 – прозорий для випромінювання з λ_1

Фільтр Φ_2 прозорий для випром. з $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}$.

Часто використовується $NbLiO_3$, $NbBaO_3$, KDP.

Особливості ГДГ: 1) залежність ефективності перетворення від орієнтації кристалу (виконання умов синхронізму – див. далі); 2) потрібна достатньо висока інтенс. випромін.

236 236

Феноменологічна модель ГДГ

Другий доданок в (11) обумовлює виникнення змінної поляризації на частоті 2ω і з амплітудою $\sim E_0^2 \chi^{(2)} \sim I \cdot \chi^{(2)}$.

Електрон, який приведений у коливання з такою (2ω) частотою, стає джерелом ел.м. хвилі

$$E = \frac{1}{2}\chi^{(2)} \cdot E_0^2 \cdot \cos(2\omega t - 2kx) = E_0' \cdot \cos(2\omega t - k_2 x)$$

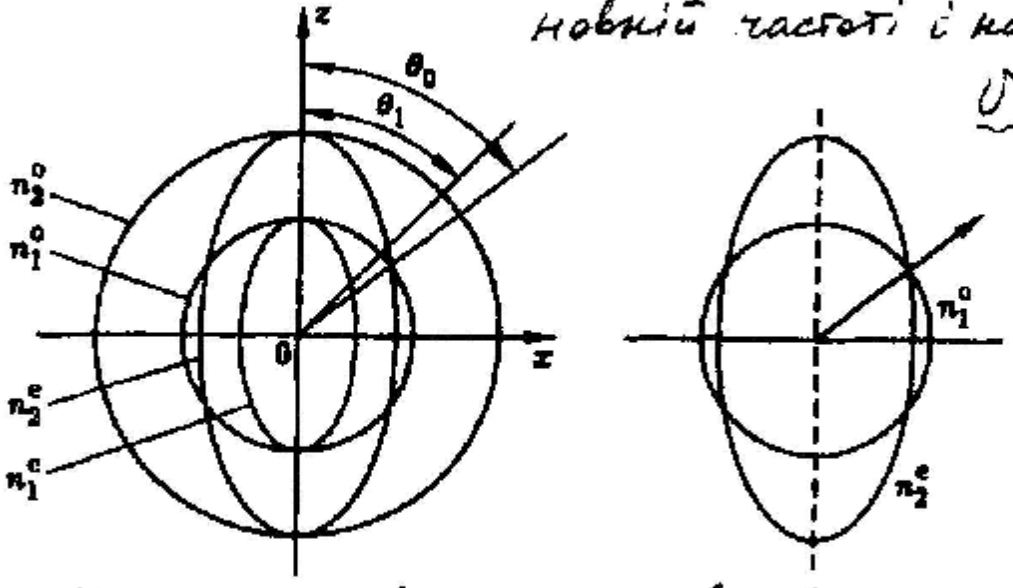
де $E_0' = \frac{1}{2}\chi^{(2)} \cdot E_0^2$; $\quad k_2 = 2k = \frac{2\omega}{v_\phi(2\omega)}$

Хвильовий синхронізм

$\frac{P_{нл}}{P_л} \approx \frac{E}{E_a} \sim 10^{-4} \Rightarrow$ Локальний нелінійний ефект несильний (невеликий). Але в процесі розповсюдження світл. хвилі в кристалі нелін. ефект накопичується.

При ГДГ умова синхронізму (УС) полягає у співпаданні фазових швидкостей світл. хвиль на основній частоті і на частоті гармоніки

$$\bar{v}(\omega) = \bar{v}(2\omega).$$



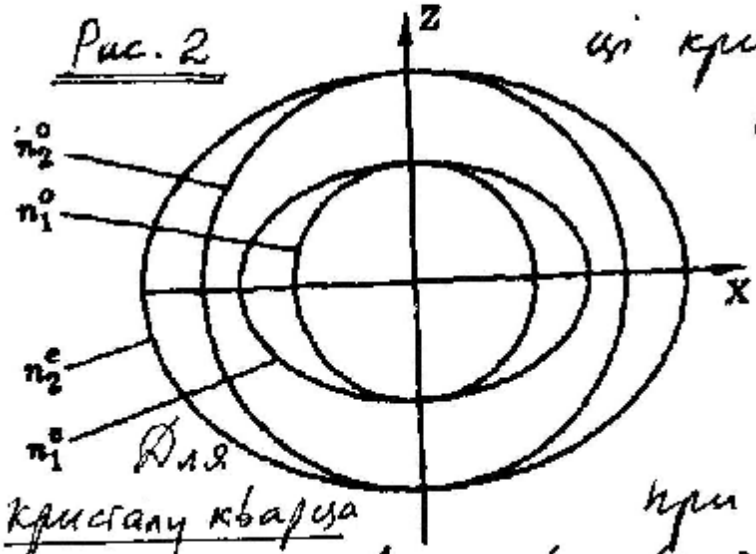
В 1962 році було запропоновано для виконання УС використовувати явище двопроменезал.

Напрямки в кристалі, вздовж яких еліпсоїд n_e для гармоніки перетинає коло n_o для накачки, називається напрямком синхронізму.

236 236

$v(\omega) = v(2\omega) \Rightarrow$ Оптимізація фазових співвідношень між хвилею, що генерує даний атом (на ч-ті 2ω), та хвилею, що вийшла на атом від попередньої ділянки кристалу (теж на ч-ті 2ω).

Рис. 2

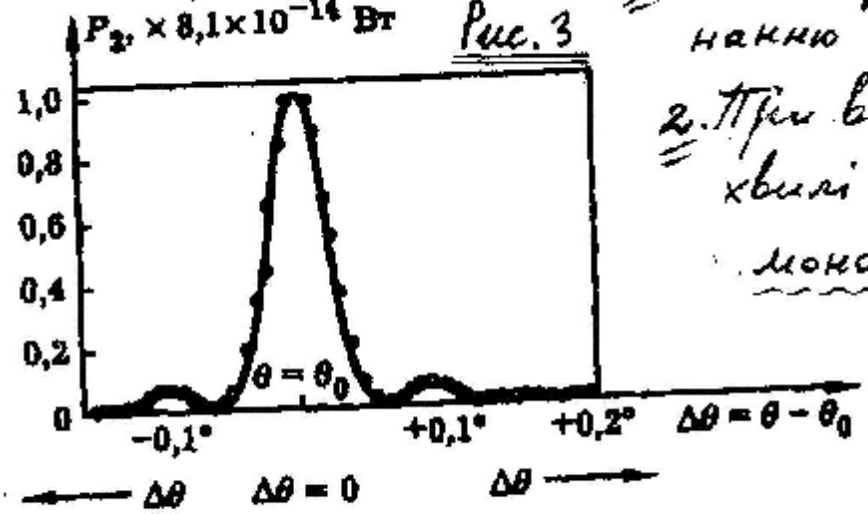


Для кристалу кварца

В результаті відбувається конструктивна (виконується умова max) інтерференція хвиль. Амплітуда гармоніки зростає і при достатній довжині кристала можливе повне (100%) перетворення випромінювання.

Зауваження:

Рис. 3



1. Явище дисперсії заважає виконанню УС.

2. При виконанні УС потужність хвилі на ч-ті 2ω зростає монотонно.

3. Для кристалу кварца УС не може бути виконана ні для яких напрямків (див. рис. 2).

4. Кутова ширина синхронізму досить мала. Для кристалу KDP вона складає ~ 0.1° (див. рис. 3).

Зміна показника заломлення. Генерація третьої гармоніки.

В (10) третій доданок:

$$P_{нл}^{(3)} = \chi^{(3)} \cdot E_0^3 \cdot \cos^3(\omega t - kx) = \qquad (12)$$

$$= \frac{3}{4}\chi^{(3)} \cdot E_0^2 \cdot E_0 \cos(\omega t - kx) + \frac{\chi^{(3)} \cdot E_0^2}{4} E_0 \cdot \cos 3(\omega t - kx)$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$$

$$\cos^3\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha$$

Перший доданок в (12) призводить до зміни показника заломл., який в цьому випадку визначається, як

$$n^2 = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 E_0^2, \text{ де } \varepsilon_0 = 1 + 4\pi\chi; \quad \varepsilon_2 = 3\pi\chi^{(3)}$$

(Про явище самофокусування та інші наслідки залежності $n = n(E)$ див. далі).

Другий доданок в (12) призводить до перевипромінювання хвилі з частотою 3ω, тобто – до ГТГ (1963 р.).

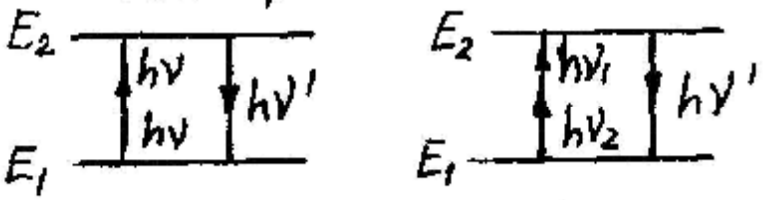
Таким же чином, врахування нелін. сприйнятливості IV порядку ($\chi^{(4)}$) призводить до генерації четвертої гармоніки; врахування $\chi^{(5)}$ – до генерації V гармон.

Експериментально IV гарм. була зафіксована в 1974 р., а V гарм. – в 1973 р.

Багатокаскадні помножувачі частот дозволили отримати в аргоні 12-у гармоніку Nd-лазера ($\lambda_{12} = 887$ Å). Ефекти перетворення частоти можна пояснити також, виходячи із квантової теорії багатофотонного (нелінійного) поглинання.

239
239

Багатофотонне (нелінійне) поглинання



Спостерігається при великих інтенсивностях світла – нелінійні процеси.

Приклади двофотонного поглинання:

$h\nu + h\nu = E_2 - E_1$

$h\nu_1 + h\nu_2 = E_2 - E_1$

$h\nu' = 2h\nu$ або $h\nu' = h\nu_1 + h\nu_2$ – „зникло" 2 фотони ⇒ „народився" 1 фотон. Процес „зникнення" і появи („народження") відбувається миттєво, без затримки. Це призводить до того, що хвилі із частотою ν' когерентні і інтерферують між собою. Цим пояснюється строго визначений напрямок розповсюдження хвилі з подвійною (потрійною і т.д.) частотою. Це принципово відрізняє багатофотонні процеси від однофотонних, наприклад, від флуоресценції.

I.

II відміна: однофотонні переходи м.б. заборонені з т. зору кв. механіки навіть коли енергія фотона співпадає з різницею енергій між цими рівнями. Багатофотонні процеси можливі і в тому випадку, коли навіть перехід між відповідними станами заборонений.

II

III. Однофотонні переходи (збудження атома) відбуваються часто: в середньому через кожні 10^{-7}–10^{-8} с. Двофотонне поглинання відбувається не частіше ніж 1 раз в 10^{-3} с. Щоб здійснити 2-фотонне поглинання, потрібно створити потужний потік фотонів, використати інтенсивний потік світла. Інтенсивність багатофотонного поглинання є $f(J_{нак})$.

III

IV. Для спостереження процесів більш високого порядку (3-фотонного і вище) потік фотонів повинен бути більшим, ніж у випадку 2-фотонного поглинання.

IV

239
239

240 240

В основі – передача ен. потужної світл. хвилі (накачки) з частотою $\omega_н$ малопотужним хвилям на частотах ω_1 та ω_2, які задовольняють умові: $\omega_1 + \omega_2 = \omega_н$ (1)

Енергію таким способом можна передавати у випромінювання із плавною зміною частоти.

Квадратично нелін. середовище $P = \chi E + \chi^{(2)} \cdot E^2$ (2)

$$\left.\begin{aligned} E_н &= A_н \cdot \cos(\omega_н t - k_н z) \\ E_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 z); \quad E_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 z) \\ \omega_н &= \omega_1 + \omega_2 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Хвилі з частотами ω_1 та ω_2 стають зв'язаними:

$$\left.\begin{aligned} P_{нл}(\omega_1) &= \chi A_н A_2 \cos[\omega_1 t - (k_н - k_2) z] \\ P_{нл}(\omega_2) &= \chi A_н \cdot A_1 \cos[\omega_2 t - (k_н - k_1) z] \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

За рахунок взаємодії хвиль на частотах $\omega_н$ та ω_2 виникає поляризація середовища і, як наслідок, перевипромінювання світла на частоті ω_1.

За рахунок взаємодії хвиль на ч-тах $\omega_н$ та ω_1 – перевипромінювання на ч-ті ω_2.

Зсув фаз між хвилею нелін. поляризації $P_{нл}(\omega_1)$ та світловою хвилею частоти ω_1 буде зберігатись однаковим, якщо $k_н - k_1 = k_2$. Теж саме – для $P_{нл}(\omega_2)$.



Виникає генерація на частотах ω_1 та ω_2.

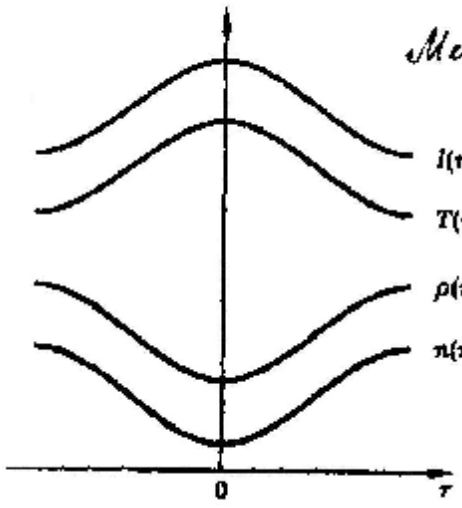
Частоти, для яких виконуються УС, визначаються вибором напрямку розповс. хвиль.

$$\vec{k}_н(\omega_н) = \vec{k}_1(\omega_1) + \vec{k}_2(\omega_2)$$

Умова синхронізму: $\vec{k}_н = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ → для одновимірної параметричної взаємодії. → $\omega_н = \omega_1 + \omega_2$ – частотне співвідн.

240 240

Самофокусування світла



Механізм тепловий самофокусування світла в слабопоглинаючій світло рідині:

r – координата в поперечному перерізі світлового променя;

I – інтенсивність світла;

T – температура середовища;

ρ – густина середовища;

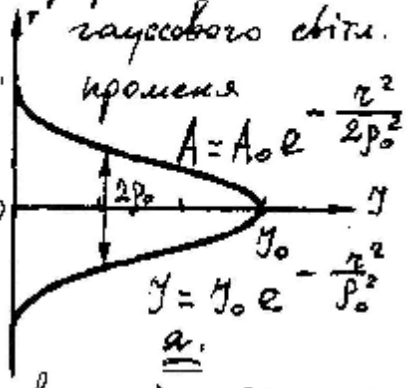
n – показник заломлення.

визначення гауссового розподілу інтенсивності

а – профіль інтенсивності гауссового світл. променя

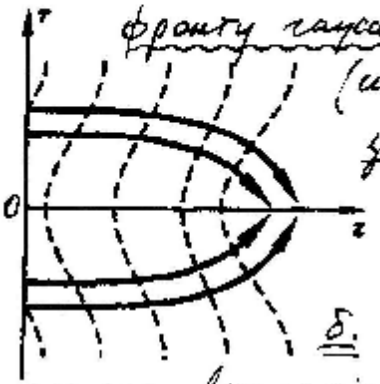
$$A = A_0 e^{-\frac{r^2}{2\rho_0^2}}$$

$$I = I_0 e^{-\frac{r^2}{\rho_0^2}}$$



а.

б – викривлення хвильового фронту гаусового променя (штрихові лінії) за рахунок нелінійності середовища при $n_2 > 0$



б.

n_2 – нелін. показн. заломл. 2-го порядку

В полі потужного лазерного випромінювання середовище набуває фокусуючу (лінзову) якість.

В результаті – світл. промінь „стягується" в тонку нитку або розпадається на декілька тонких ниток.

Поперечний розмір гаусового променя характеризується ρ_0 (напівшириною) по рівню інтенсивності, що дорівнює $\frac{1}{e} I_0$.

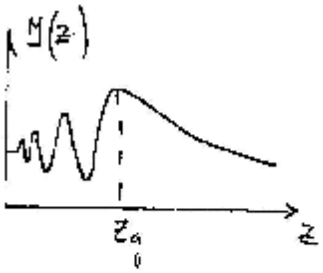
$\rho_0 = HWe^{-1}M$: ρ_0 дорівнює напівширині (радіусу) променя по рівню інтенсивності e^{-1} відносно максимуму „half width e^{-1} maximum" ($HWe^{-1}M$).

Дифр. довж. променя $z_g = k \cdot \rho_0^2$ (Число Френеля $N_F = \frac{z_g}{z}$).

$$n = n_0 \sqrt{1 + \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^2 \cdot E_0^2} \approx n_0 + n_2' \cdot E_0^2$$

Промінь відхиляється в бік більшого показника заломлення $\Rightarrow$ ефект повного внутрішнього відбиття (ПВВ)

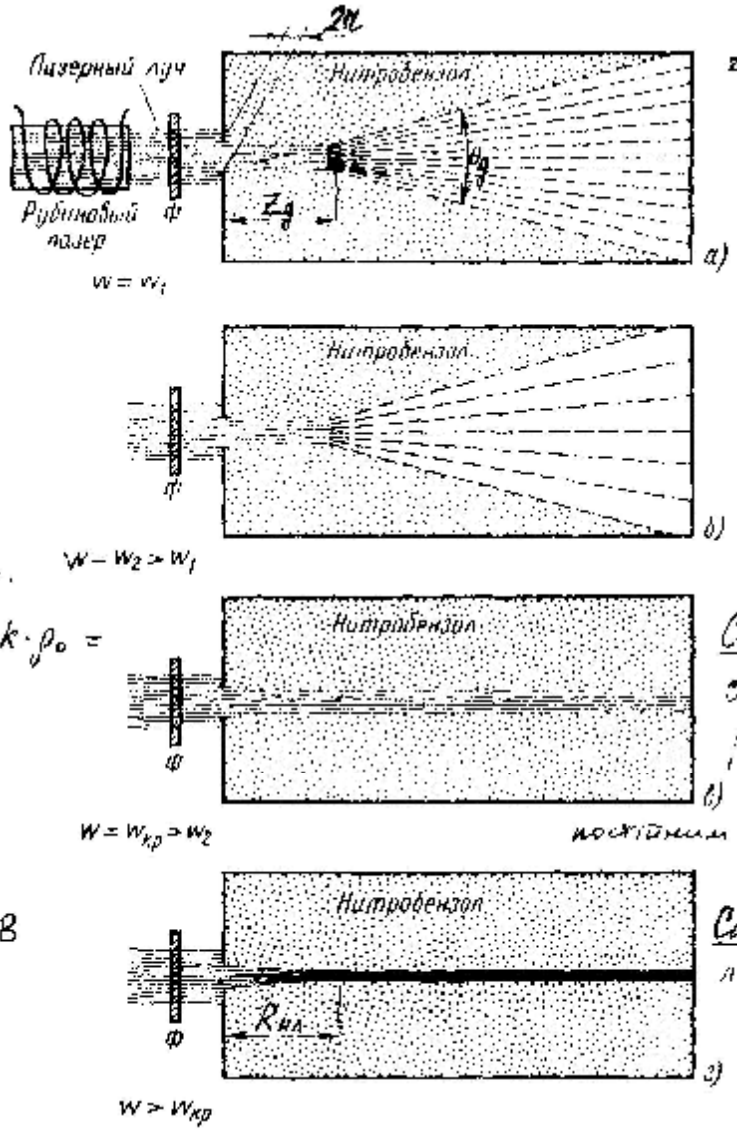
242



При $z = z_g$ в межах отвору вміщується одна („мульова") зона Френеля. В цей момент інт. світла досягає max.

Крім того, $z_g = k \cdot \rho_0 =$

$= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot HWe^{-1}M$



z_g – дифр. довж. променя

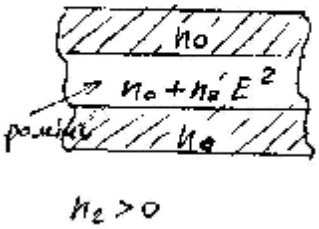
$z_g = \frac{r^2}{\lambda}$

r – радіус отвору (радіус променя на виході з лазера)

$N_F = \frac{z_g}{z}$

N_F – число Френеля (число відкритих зон Френеля).

Самоканалювання: світл. промінь поширюється з плоским фронтом і постійним поперечним перерізом



Самофокусування: має лавинний х-ер

$R_{нл}$ – радіус кривизни хвильового фронту, обумовлений нелінійною дифракцією (довжина самофокусування).

R_g – радіус дифракц. розбіжності променя в дальній зоні

$R_g = z_g^2/z$, де z_g – дифракц. довжина променя.

При умові $R_{нл} = R_g$ нелінійна рефракція компенсує дифракційну розбіжність ⇒ режим самоканалювання

$$R_g = R_{нл} = \frac{\pi z}{\lambda}\sqrt{\frac{n_0}{2n_2' E_0^2}}$$

Рідини: нітробензол, сірковуглець.

CS_2 : $n_0 = 1.62$; $n_2 = 2 \cdot 10^{-11}$ од. СГСЕ;

Якщо $W = 0.77 \cdot 10^6$ Вт та $2R = 0.5$ мм, то

$R_{нл} = 10$ см

242

243 243

Вимушене комбінаційне розсіювання (ВКР)

В полі потужного лазерн. випром. середовище генерує інтенсивне випромінюв., зсунуте по частоті відносно ν_0 на величину, рівну частоті молекулярних коливань. Механізм той же, що і при спонтанному розсіюванні - модуляція світла молекулярними коливаннями (див. лекцію „Розсіювання світла"). ← Ефект Рамана

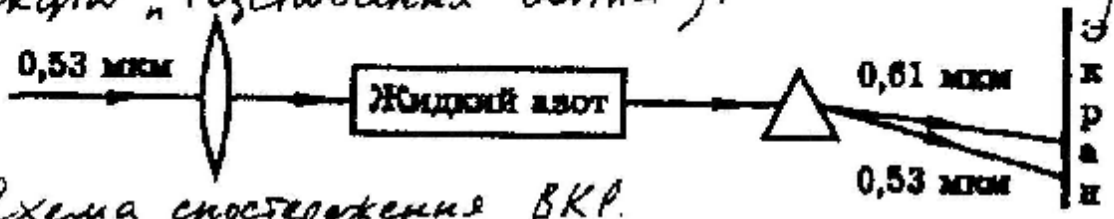


Схема спостереження ВКР.

Особливості ВКР: 1) На відміну від спонтанного КР, яке є слабким і направленим в усі сторони, ВКР нагадує ГЗГ: потужність і направленість випромінювання від ВКР співрозмірні з параметрами лазерного випром. накачки.

2) ВКР відбувається не на хаотичних теплових коливаннях молекул, а на їх коливаннях, які збуджені і сфазовані світлом у великому об'ємі середовища.

3) Перехід від спонтанного КР до ВКР відбувається при збільшенні інтенсивності лазерн. випром. до деякого порогового значення $J_{пор}$, яке наз. порогом ВКР.

Вперше ВКР спостерігали Вудбері і Нг (1962 р.) на рубіновому лазері ($\lambda_0 = 0.69$ мкм), добротність відкритого р-ра якою модулювалась кюветкою з нітробензолом. Була спостережена поява IV компоненти, частота якої була на 1345 $см^{-1}$ менша за частоту накачки ν_0. Ця частота співпадала з однією із власних частот коливань молекул нітробензолу.

243 243