

ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ ЗАДАЧІ

6.4.11. Як можна виміряти кутовий розмір зірки?

Виміряти кутовий розмір зірки можна за допомогою досліду з двома щілинами (метод Фізо) або за допомогою зоряного інтерферометра Майкельсона. Як побудовані зоряні інтерферометри та за якими принципами вони функціонують можна прочитати в [2] п. 60.

6.4.12. Розкажіть про застосування інтерференції світла в різних галузях науки і техніки.

До застосувань інтерференції в практичних дослідженнях слід віднести вимірювання: якості поверхні; малих довжин; малих товщин; малих кутів методом смуг рівної товщини; малих кутів методом зоряного інтерферометра, а також інтерференційну рефрактометрію, спектроскопію високої роздільної здатності тощо. Докладніші відомості про таке застосування, викладені в підручниках [7, розд. 4, § 5]; [1, гл. VII, § 28–32]; [12, гл. III, § 20]; [11, гл. V, § 4]; [14, гл. 6, § 6.1–6.4; гл. 7, § 7.1–7.4]; [9, § 3.6].

6.5. Приклади розв'язування задач

Приклад 6.1. Для порівняння когерентних властивостей нелазерних джерел світла та лазерів визначте, за якої максимальної оптичної різниці ходу буде спостерігатись інтерференційна картина від:

а) газорозрядної лампи (червоної лінії парів кадмію із шириною лінії $\Delta\lambda = 0,001\text{ нм}$ і довжиною хвилі $\lambda = 0,63\text{ мкм}$);

б) лазера з довжиною хвилі $\lambda = 0,63\text{ мкм}$ і шириною лінії випромінювання $\Delta\nu = 10\text{ Гц}$.

Розв'язання: а) ступінь когерентності джерела можна визначити, ввівши до розгляду, наприклад, m_{\max} – максимальний порядок інтерференції, який визначається за формулою $m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$. Для кадмієвої лампи

$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{0,63 \cdot 10^{-6}\text{ м}}{10^{-12}\text{ м}} = 6,3 \cdot 10^5.$$

Ця величина пов'язана з максимальної різницею ходу променів, за якої ще буде спостерігатись інтерференційна картина $\Delta_{\max} = m_{\max} \lambda = 6,3 \cdot 10^5 \cdot 0,63 \cdot 10^{-6}\text{ м} \approx 40\text{ см}$.

Часова когерентність джерела характеризується довжиною когерентності $L_k = \Delta_{\max}$ або часом когерентності $\tau_k = \frac{L_k}{c} = \frac{0,4\text{ м}}{3 \cdot 10^8\text{ м/с}} \approx 10^{-9}\text{ с}$;

б) оцінімо аналогічні величини для лазера. Спочатку визначимо $\Delta\lambda$ для лазера $\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda$. Отже, $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \cdot \Delta\nu}{c} = \frac{(0,63)^2 \cdot 10^{-12} \cdot 10}{3 \cdot 10^8}\text{ м} = 0,13 \cdot 10^{-10}\text{ нм}$. Як

бачимо, величина $\Delta\lambda$ для лазера майже в 10^8 разів менша від такої самої величини для кадмієвої лампи.

Таким чином, для лазера

$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{0,63 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{0,13 \cdot 10^{-19} \text{ м}} = 5 \cdot 10^{13};$$

$$\Delta_{\max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = m_{\max} \cdot \lambda = 5 \cdot 10^{13} \cdot 0,63 \cdot 10^{-6} \text{ м} \approx 30000 \text{ км} = L_{\text{к}}.$$

Час когерентності

$$\tau_{\text{к}} = \frac{L_{\text{к}}}{c} = \frac{3 \cdot 10^7 \text{ м}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} \approx 0,1 \text{ с}.$$

Ось чому лазер часто називають джерелом когерентного монохроматичного випромінювання.

Приклад 6.2. *Наявність частки некогерентного світла у випромінюванні джерела світла призводить до зменшення видимості інтерференційної картини. Оцініть, чому дорівнює видність двопроменевої інтерференційної картини, якщо γ – частка когерентного світла, однакова для обох променів. (Відповідно, частка некогерентного світла дорівнює $(1 - \gamma)$).*

Розв'язання. Нехай промені, що інтерферують, мають інтенсивність $I_1 = I_2 = I_0$. Інтенсивність кожного пучка буде складатися з когерентної та некогерентної частин $I_1 = \gamma I_0 + (1 - \gamma) I_0$. Сумарна інтенсивність некогерентної частини буде додаватися (не інтерферуючи) і дорівнюватиме $2(1 - \gamma) I_0$. Для когерентної частини світла буде спостерігатися інтерференція $I_{\text{інт}} = 4I_0 \gamma \cos^2 \frac{\delta}{2}$. Загальна інтенсивність у точці спостереження дорівнює $I = 2I_0(1 - \gamma) + 4I_0 \gamma \cos^2 \frac{\delta}{2}$, або після невеликих перетворень $I = 2I_0(1 + \gamma \cos \delta)$.

Урахуємо, що видність інтерференційної картини V дорівнює

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad \text{тоді} \quad V = \frac{2I_0(1 + \gamma) - 2I_0(1 - \gamma)}{2I_0(1 + \gamma) + 2I_0(1 - \gamma)} = \gamma.$$

Таким чином, видність інтерференційної картини є мірою ступеня когерентності випромінювання. Якщо $\gamma = 1$, то $V = 1$ (за умови, що $I_1 = I_2$).

Приклад 6.3. *Як залежить видність інтерференційної картини когерентних хвиль від співвідношення їх інтенсивностей $\frac{I_1}{I_2} = n$, де $n = 1, 2, 3 \dots 10$?*

Розв'язання. Урахуємо, що видність V дорівнює $V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$, а відношення

інтенсивностей $\frac{I_1}{I_2} = n$. Тоді можна одержати, що $V = 2\sqrt{n} / (n + 1)$. Підставивши

значення $n = 1, 2, 3 \dots 10$, легко підрахувати, що видність спадає від 1 до 0,57.

Приклад 6.4. У двопробеному інтерферометрі використовується жовто-гаряча лінія ртуті, яка складається з двох спектральних компонентів: $\lambda_1 = 576,97 \text{ нм}$ і $\lambda_2 = 579,03 \text{ нм}$. У якому найменшому порядку інтерференції видність (контраст) інтерференційної картини буде найгіршою?

Розв'язання. Як випливає із відповіді до запитання 6.1.13, причиною періодичного просторового погіршення інтерференційної картини є збіг максимуму інтерференції від однієї лінії з мінімумом інтерференції від іншої: $m\lambda_2 = (2m + 1)\frac{\lambda_1}{2}$.

Найменший порядок інтерференції, за якого видність інтерференційної картини буде найгіршою для дублету ліній з наведеними в умові параметрами буде

$$m = \frac{\lambda_{\text{сер}}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \approx 140.$$

Приклад 6.5 Паралельний пучок променів з довжиною хвилі $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$ падає нормально на поверхню скляного клина, кут між гранями якого $\alpha = 3'$. У відбитому світлі спостерігається система інтерференційних смуг. Знайдіть:

а) відстань Δx між сусідніми максимумами інтерференційної картини;

б) ступінь монохроматичності світла $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, якщо зникнення інтерференційних

смуг спостерігається на відстані $l \approx 1,5 \text{ см}$ від вершини клина.

Розв'язання. На рис. 6.47 наведена схема інтерференції світла на клині, у результаті якої отримуються смуги рівної товщини:

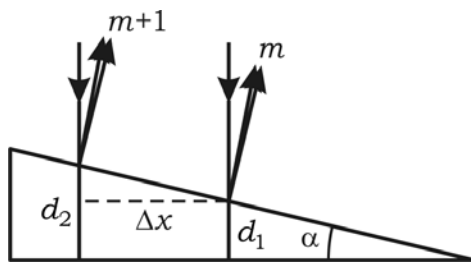


Рис. 6.47. До прикладу 6.5

а) інтерференція в даній схемі спостерігається завдяки накладанню променів, відбитих від різних поверхонь клина. Різниця ходу між інтерферуючими променями, якщо врахувати мализну кута між гранями клина, записується у вигляді

$\Delta = 2dn + \frac{\lambda}{2}$. Доданок $\frac{\lambda}{2}$ з'являється тому, що один із променів відбивається від межі з оптично більш густим середовищем.

Запишемо умову для двох послідовних максимумів інтерференції:

$$\begin{cases} 2d_2n + \frac{\lambda}{2} = (m+1)\lambda, \\ 2d_1n + \frac{\lambda}{2} = m\lambda. \end{cases}$$

Звідси $2n(d_2 - d_1) = \lambda$. Із геометричних міркувань (рис. 6.47) випливає, що $\frac{d_2 - d_1}{\Delta x} \approx \alpha$. Об'єднуючи два останні вирази, отримуємо вираз для ширини інтерфе-

ренційної смуги $\Delta x \approx \frac{\lambda}{2n\alpha} \approx 0,21 \text{ мм}$;

б) якщо в інтерференції бере участь немонохроматичне світло, то відповідну інтерференційну картину можна представити як ряд максимумів, кожен з яких відповідає своїй довжині хвилі в діапазоні від λ до $\lambda + \Delta\lambda$ (рис. 6.48). Максимум інтенсивності 0-го порядку є загальним для всіх довжин хвиль. Зі збільшенням порядку інтерференції максимуми, які відповідають різним довжинам хвиль, будуть зміщуватись один відносно одного і накладатися, що призведе до розмиття інтерференційної картини. Зникнення картини відбудеться при накладанні максимуму $(m+1)$ -го порядку для довжини хвилі λ на максимум m -го порядку для довжини хвилі $\lambda + \Delta\lambda$ (рис. 6.48). Справді, при цьому між максимумами m -го та $(m+1)$ -го порядку для довжини хвилі λ розташуються послідовно максимуми m -го порядку для всього інтервалу довжин хвиль.

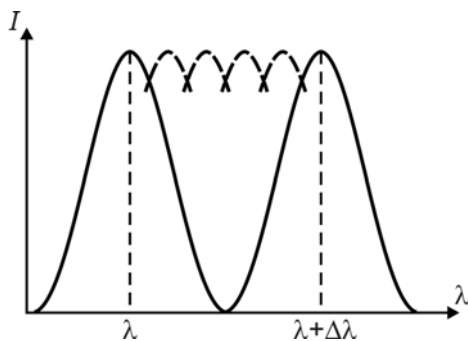


Рис. 6.48. До прикладу 6.5

Умову зникнення інтерференційної картини можна записати як $(m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda)$ (порівняйте цей вираз з умовою погіршення видимості інтерференційної картини з прикладу 6.4). Ця умова дозволяє отримати можливу макси-

мальну кількість видимих інтерференційних смуг $m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, яка обумовлюється часовою когерентністю схеми. З іншого боку, цю саму кількість можна отримати, знаючи з умови прикладу, що інтерференційна картина з періодом Δx зникає на відстані l від вершини клина $l = m_{\max} \cdot \Delta x \Rightarrow m_{\max} = \frac{l}{\Delta x}$.

Прирівнюючи обидва вирази для m_{\max} , отримаємо ступінь монохроматичності світла $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\Delta x}{l} = \frac{\lambda}{2n\alpha \cdot l} = 0,014$.

Приклад 6.6. Відстані від біпризми Френеля до джерела світла у вигляді вузької щілини і до екрана з інтерференційною картиною дорівнюють $a = 25\text{ см}$ та $b = 25\text{ см}$, відповідно. Біпризма скляна із заломлюючим кутом $\theta = 20'$. Знайдіть довжину хвилі світла, якщо ширина інтерференційної смуги на екрані становить $\Delta x = 0,55\text{ мм}$.

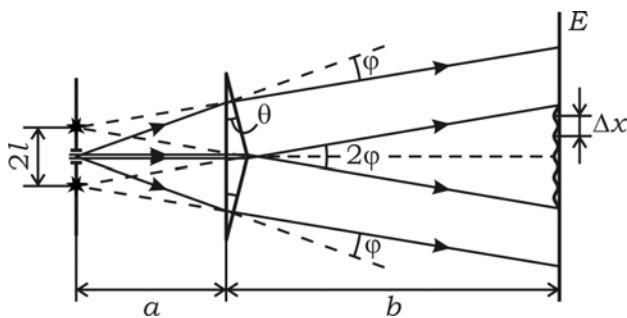


Рис. 6.49. До прикладу 6.6

Розв'язання. Ширина інтерференційної смуги для схем двопроменевої інтерференції визначається виразом (6.49) $\Delta x = \frac{\lambda}{\Omega}$, де λ – довжина хвилі світла в інтерферуючих пучках, Ω – кутова відстань між уявними джерелами, виміряна з центра інтерференційної картини у схемах двопроменевої інтерференції. Для схеми з біпризмою Френеля (рис. 6.49) величина $\Delta x = \frac{\lambda(a+b)}{2l}$. Тут через $2l$ позначено відстань між уявними джерелами світла, які утворюються в результаті відхилення променів на кут ϕ при проходженні світла крізь біпризму. Для призм з малим заломлюючим кутом θ кут відхилення $\phi = (n-1)\theta$. Із рис. 6.49 видно, що $2l = 2\phi \cdot a = 2a(n-1)\theta$.

Тепер можемо записати вираз для ширини інтерференційної смуги $\Delta x = \frac{\lambda(a+b)}{2a(n-1)\theta}$. Звідси можна визначити довжину хвилі світла в інтерферуючих пучках:

$$\lambda = \frac{2a(n-1)\theta}{(a+b)} \Delta x = 0,6 \text{ мкм}.$$

Насамкінець зазначимо, що метод дослідження інтерференції історично був першим, який дозволив експериментально визначити довжину хвилі світла.

Приклад 6.7. Плоска світлова хвиля з $\lambda = 0,7 \text{ мкм}$ падає нормально на основу скляної біпризми ($n = 1,52$) із заломлюючим кутом $\theta = 5^\circ$. За біпризмою (рис. 6.50) розташована плоско-паралельна скляна пластинка того самого типу скла, що і біпризма, а простір між ними заповнено бензолом ($n' = 1,50$). Знайдіть ширину інтерференційної смуги на екрані, розташованому за цією системою.

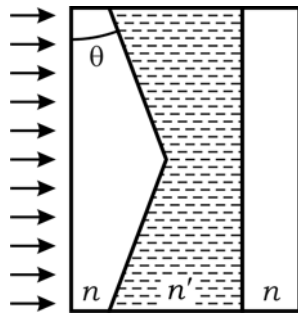


Рис. 6.50. До прикладу 6.7

Розв'язання. Розглянемо проходження окремого променя світла через таку систему. Промінь відхиляється в результаті заломлення на задній поверхні біпризми (рис. 6.51). Враховуючи мализну кутів, закон Снеліуса можна записати як $n\theta = n'\theta'$. Тоді кут відхилення $\varphi = \theta' - \theta = \left(\frac{n}{n'} - 1\right)\theta$.

Плоско-паралельна пластинка не вносить змін у напрямок поширення променів після біпризми, але за рахунок того, що вона розділяє два середовища з різними показниками заломлення (бензол і повітря), спостерігатиметься заломлення вихідного променя. Остаточний кут відхилення $\alpha = n'\varphi = \theta(n - n')$.

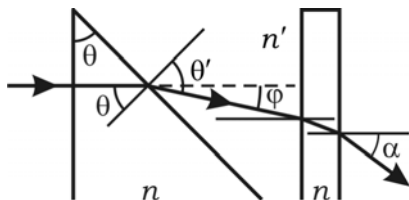


Рис. 6.51. До прикладу 6.7

Таким чином, на екрані інтерферуючі промені сходяться під кутом 2α . Відповідно, ширина інтерференційної смуги становить $\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{\lambda}{2(n-n')\theta} = 0,2 \text{ мм}$.

Для чого потрібен такий складний метод реалізації інтерференційної схеми з біпризмою Френеля? У попередньому прикладі 6.6 ми розглянули більш просту, традиційну схему з біпризмою Френеля. Оцінімо величину заломлюючого кута біпризми, необхідного для отримання інтерференційної картини з таким самим періодом,

як у даному прикладі. Формула $\Delta x = \frac{\lambda(a+b)}{2a(n-1)\theta}$ (див. приклад 6.6) з урахуванням

паралельності падаючого пучка ($a \rightarrow \infty$) перетворюється на $\Delta x = \frac{\lambda}{2(n-1)\theta}$. Звідси

$\theta = \frac{\lambda}{2(n-1)\Delta x} \approx 3,4 \cdot 10^{-3} \approx 0,19^\circ$. Виготовлення біпризми з таким малим заломлю-

ючим кутом викликає значні технічні труднощі. Водночас для схеми, описаної в цьому прикладі, величина $\theta = 5^\circ$ має цілком прийнятне значення.

Приклад 6.8. Плоско-опукла скляна лінза з радіусом кривини сферичної поверхні $R = 12,5 \text{ м}$ притиснута до скляної пластини. Діаметри 10-го та 15-го темних кілець Ньютона у відбитому світлі дорівнюють $d_{10} = 1,0 \text{ см}$ і $d_{15} = 1,5 \text{ см}$. Визначте довжину хвилі світла.

Розв'язання. Зазначимо, що в умові задачі лінза до пластини притиснута. Це означає, що місце стикування цих елементів установки вже не є математичною точкою, тому в результаті деформації отримаємо область контакту з реальними фізичними розмірами.

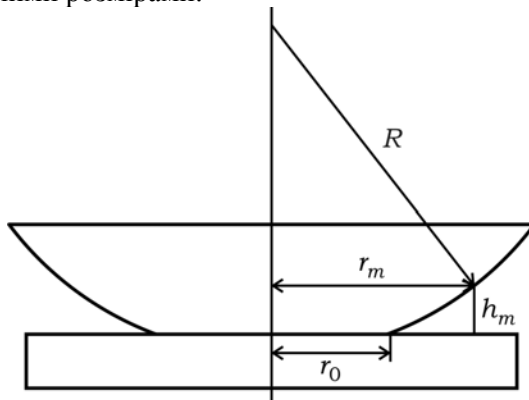


Рис. 6.52. До прикладу 6.8

Розглянемо рис. 6.52. Інтерференційні смуги рівної товщини локалізуються на поверхні повітряного клина між сферичною поверхнею лінзи і пластинною. Темні кільця утворюються в місцях, де товщина клина h_m відповідає умові інтерферен-

ційного мінімуму: $2h_m + \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$. Додаткова різниця ходу $\frac{\lambda}{2}$ між інтерферуючими променями з'являється за рахунок відбиття одного з них від оптично більш густого середовища.

Виходячи з геометричних міркувань, запишемо товщину повітряного клина, яка відповідає певному кільцю радіуса r_m : $h_m = \left(R - \sqrt{R^2 - r_m^2}\right) - \left(R - \sqrt{R^2 - r_0^2}\right)$. Тут r_0 – радіус області фізичного контакту між лінзою та пластиною. Скористаємось тим, що $R \gg r_m, r_0$. За такої умови підкореневі вирази можна привести до вигляду

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2} \quad (\alpha \ll 1). \text{ Тоді вираз для } h_m \text{ набуде вигляду } h_m \approx \frac{r_m^2}{2R} - \frac{r_0^2}{2R}.$$

Запишемо умови мінімумів для двох темних кілець:

$$\frac{r_m^2 - r_0^2}{R} = m\lambda, \quad \frac{r_k^2 - r_0^2}{R} = k\lambda.$$

Звідси $r_m^2 - r_k^2 = (m - k)\lambda R$. Перейдемо від радіусів кілець до їх діаметрів і запишемо вираз для довжини хвилі світла $\lambda = \frac{d_m^2 - d_k^2}{4R(m - k)}$:

$$\lambda = \frac{(2,25 - 1) \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 12,5(15 - 10)} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,5 \text{ мкм}.$$

Зверніть увагу на те, що розв'язок задачі не залежить від розмірів області контакту r_0 . Це означає, що експериментальне визначення довжини хвилі світла у схемі кілець Ньютона дає правильний результат, незалежно від деформації лінзи та пластини в області їх контакту.

Приклад 6.9. Знайдіть для еталона Фабрі–Перо, товщина якого $d = 2,5$ см : а) максимальний порядок інтерференції світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,50$ мкм ; б) дисперсійну ділянку $\Delta\lambda$, якщо дослідження проводити поблизу $\lambda = 0,50$ мкм.

Розв'язання: а) максимальний порядок інтерференційної картини (m_{\max}) можна визначити, застосувавши формулу (6.11): $m_{\max} = \frac{\Delta_{\max}}{\lambda}$. Якщо простір між пластинами заповнений повітрям ($n_2 \approx 1$), то у визначенні оптичної різниці ходу $\Delta = 2d \cos \theta$ її значення буде максимальне, якщо величина $\cos \theta = 1$. Тоді $m_{\max} = \frac{2d}{\lambda}$. Для даних з умови цього прикладу $m_{\max} = \frac{2 \cdot 2,5 \cdot 10^4}{0,5} = 10^5$;

б) дисперсійна ділянка (її ще називають ділянкою (областю) вільної дисперсії) G , якою характеризується будь-який спектральний прилад, у тому числі й інтерфе-

рометр Фабрі – Перо, – це певної ширини спектральний діапазон $\Delta\lambda$, у межах якого ще не перекриваються спектри сусідніх порядків.

Визначимо, чому дорівнює G . Перекриття спектрів сусідніх (m -го з $(m+1)$ -м) порядків вказує на те, що під одним кутом θ спостерігаються (накладаються) два максимуми. Умова цього така:

$$2d \cos \theta = (m+1)\lambda \quad \text{та} \quad 2d \cos \theta = (\lambda + \Delta\lambda)m. \quad (6.58)$$

Прирівнюючи праві частини виразів з (6.58), маємо

$$(m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda) \Rightarrow \lambda = m \cdot \Delta\lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$$

Тобто, якщо при роботі зі спектральним приладом (зокрема, інтерферометром Фабрі–Перо) є намагання працювати з найвищим порядком інтерференції (при цьому отримується максимальна роздільна здатність), дисперсійна ділянка дорівнює

$$G = \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}}. \quad (6.59)$$

Як бачимо, величина дисперсійної ділянки обернено пропорційно залежить від максимального значення інтерференційного порядку. Чим більше значення m_{\max} , тим менша величина G . Вимоги розширення дисперсійної ділянки та підвищення роздільної здатності суперечать одна одній. Оскільки в інтерферометрі Фабрі–Перо зазвичай використовують спектри високих порядків, то величина G мала. Для інтерферометра Фабрі–Перо, для якого визначено, що $m_{\max} = 10^5$, параметр G становить величину

$$G = \frac{0,5 \text{ мкм}}{10^5} = 0,05 \text{ \AA}.$$

Примітка: продовжуючи розгляд (6.59), отримаємо величину частотної дисперсійної ділянки (через діапазон частот):

$$G_v = \Delta\nu = \frac{\Delta\lambda \cdot c}{\lambda^2} \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{m\lambda} = \frac{c}{2d}. \quad (6.60)$$

Як видно з (6.60), частотна дисперсійна ділянка є сталою величиною, однозначно пов'язаною лише з товщиною d інтерферометра і не залежить від порядку інтерференції m . Завдяки цій властивості інтерферометр Фабрі–Перо можна використовувати як еталон частоти. У цьому разі його називають еталоном Фабрі–Перо.

Приклад 6.10. Дослід проводиться на інтерферометрі Майкельсона зі світлом, яке складається з випромінювання двох близько розташованих спектральних ліній. Для зміщення інтерференційної картини на 100 смуг від її початкового положення, яке спостерігається за рівних плечей приладу, необхідно перемістити рухоме дзеркало на відстань $d_1 = 2,9 \cdot 10^{-3}$ см. При переміщенні дзеркала на відстань $d_2 = 14,4 \cdot 10^{-3}$ см від його початкового положення інтерференційна карти-

на зникає. Знайдіть різницю довжин хвиль спектральних ліній світла, що використовується в досліді.

Розв'язання. Інтерферометр Майкельсона належить до приладів, робота яких заснована на використанні двопрменевої інтерференції. Його схему наведено на рис. 6.17. Почнемо з умови, пов'язаної з розмиттям інтерференційної картини.

Якщо спектральний склад випромінювання містить дві близько розташовані спектральні лінії, то видність інтерференційної картини, яку дає інтерферометр Майкельсона залежно від величини оптичної різниці ходу між двома променями буде

змінюватись за законом $V = \left| \cos \frac{\Delta \cdot \delta k}{2} \right|$, показаним на рис. 6.53.

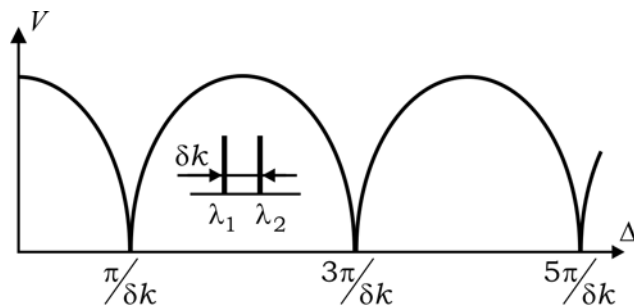


Рис. 6.53. Залежність величини видності V інтерференційної картини від різниці ходу Δ променів. (Відстань між спектральними лініями з довжинами хвиль λ_1 та λ_2 записана у вигляді величини $\delta k = k_2 - k_1 = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)$, де k – хвильовий вектор)

Перше розмиття інтерференційної картини буде спостерігатись у разі збігу максимуму інтерференційної картини, яка утворюється від першої спектральної лінії з довжиною хвилі λ_1 , з мінімумом інтерференційної картини від другої спектральної лінії з довжиною хвилі λ_2 . Умова такої збіжності записується у вигляді рівностей

$$\Delta_2 = 2d_2 = m_2 \lambda_1 = (m_2 + 1/2) \lambda_2. \quad (6.61)$$

Із (6.61) знаходимо, що розмиття інтерференційної картини відбувається в порядку інтерференції з числом m_2 :

$$m_2 = \frac{2d_2}{\lambda_1}. \quad (6.62)$$

Окрім того, із (6.61), маємо

$$(m_2 + 1/2) \lambda_2 = m_2 \lambda_1 \Rightarrow m_2 (\lambda_1 - \lambda_2) = \lambda_2 / 2 \Rightarrow \Delta \lambda = \frac{\lambda_2}{2m_2}. \quad (6.63)$$

Підставимо (6.62) у (6.63):

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{4d_2} \approx \frac{\lambda_{cp}^2}{4d_2}, \quad (6.64)$$

де $\lambda_{\text{сер}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$. Заміна добутку $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ на значення $\lambda_{\text{сер}}$ припустима тому, що спектральні лінії розташовані одна від одної порівняно з відстанню d_2 дуже близько. Значення $\lambda_{\text{сер}}$ залишається поки невідомим.

Перейдемо до умови, пов'язаної з переміщенням інтерференційної картини на смуги. Цьому переміщенню відповідає додаткова різниця ходу $\Delta_1 = 2d_1$, де $d_1 = 2,9 \cdot 10^{-3}$ см. Умова інтерференційного максимуму для цього випадку має вигляд $\Delta_1 = 2d_1 = m_1 \lambda_{\text{сер}}$, де $m_1 = 100$ (з умови прикладу). Таким чином, маємо

$$\lambda_{\text{сер}} = \frac{2d_1}{m_1}. \quad (6.65)$$

Підставивши (6.65) у (6.64), отримуємо

$$\Delta\lambda = \frac{4d_1^2}{m_1^2 \cdot 4d_2} = \frac{(2,9)^2 \cdot 10^{-6}}{14,4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4} \text{ см} = 5,83 \text{ Å}.$$

За формулою (6.62) знайдемо величину періоду інтерференції m_2 , за якої інтерференційний максимум для λ_1 збігається з інтерференційним мінімумом для λ_2 :

$$m_2 = \frac{2 \cdot 14,4 \cdot 10^{-3}}{0,58 \cdot 10^{-4}} \approx 500.$$

Приклад 6.11. Чому дорівнює радіус m -го кільця ($m=10$) в інтерферометрі Фабрі–Перо, якщо відстань між дзеркалами інтерферометра, заповненого повітрям, дорівнює $d=5$ см, а кільця спостерігаються на екрані, який розташований у фокальній площині лінзи із фокусною відстанню $f=1$ м. Довжина хвилі світла становить $\lambda=500$ нм.

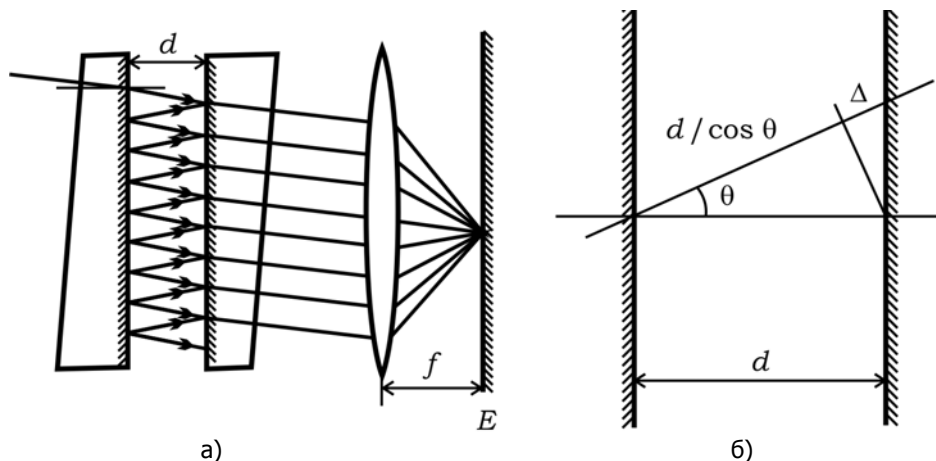


Рис. 6.54. Схема інтерферометра Фабрі–Перо (а); до прикладу 6.12 (б)

Розв'язання. Схема інтерферометра Фабрі–Перо зображена на рис. 6.54, а. Інтерферометр складається із двох однакових пластин з паралельними відбиваючими поверхнями, розділеними повітряним проміжком товщиною d . Екран, на якому спостерігається інтерференційна картина, розташований у фокальній площині лінзи.

На рис. 6.54, б видно, що різниця ходу Δ , яка відповідає напрямку на інтерференційне кільце, порядок якого m , що для смуг рівного нахилу задається кутом θ , дорівнює

$$\Delta = \frac{d}{\cos \theta} - d = \frac{d}{\cos \theta} (1 - \cos \theta) = \frac{2d}{\cos \theta} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

або, враховуючи, що кут θ малий, маємо

$$\Delta \approx d \cdot \frac{\theta^2}{2}.$$

У відрізок інтерференційної картини, якому відповідає оптична різниця ходу Δ , вміщуються m інтерференційних смуг загальною довжиною $m\lambda$, тобто

$$d \cdot \frac{\theta^2}{2} \approx m\lambda \Rightarrow \theta \approx \sqrt{\frac{2m\lambda}{d}}. \quad (6.66)$$

Радіус m -го кільця дорівнює $r_m = f \cdot \theta$. З урахуванням (6.66) отримаємо

$$r_m = f \sqrt{\frac{2m\lambda}{d}} = 1 \text{ м} \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-2}}} \approx 1,4 \text{ см}.$$

Максимальний порядок інтерференції для інтерферометра Фабрі–Перо спостерігається в центрі інтерференційної картини і може становити величину 10^5 . Тому розмір кільця $r_m \approx 1,4$ см з порядком $m = 10$ виглядає правдоподібним.

Приклад 6.12. Визначте показник заломлення та найменшу товщину просвітлювального покриття для лінзи зі скла марки Ф6 ($n_2 = 1,6$), яка працює у видимій області спектра. На скільки відсотків знизяться втрати світла в лінзі за рахунок відбиття після просвітлення? (Середня довжина хвилі видимого діапазону $\langle \lambda \rangle = 0,55$ мкм).

Розв'язання. Показник заломлення матеріалу просвітлювального покриття визначається за формулою (6.55): $n_1 = \sqrt{1,6} = 1,265$, а його мінімальна товщина – за формулою (6.56) за умови, що $m = 0$:

$$d_{\min} = \frac{\lambda_0}{4n_1} = \frac{0,55}{4 \cdot 1,265} = 0,11 \text{ мкм}.$$

Коефіцієнт пропускання лінзи до просвітлення визначається за формулою (4.13):

$$T_1 = (1 - R_{02})^2 = \left[1 - \left(\frac{n_0 - n_2}{n_0 + n_2} \right)^2 \right]^2 = \left[1 - \left(\frac{1 - 1,6}{1 + 1,6} \right)^2 \right]^2 = 0,8964.$$

При цьому втрати на відбиття становлять $R_1 = 1 - T_1 = 0,1036$. Коефіцієнт пропускання лінзи після просвітлення дорівнює

$$\begin{aligned} T_1' &= (1 - R_{01})^2 (1 - R_{12})^2 = \left[1 - \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \right)^2 \right]^2 \left[1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \right]^2 = \\ &= \left[1 - \left(\frac{1 - 1,265}{1 + 1,265} \right)^2 \right]^2 \left[1 - \left(\frac{1,265 - 1,6}{1,265 + 1,6} \right)^2 \right]^2 = 0,9437. \end{aligned}$$

При цьому втрати на відбиття становлять $R_1' = 1 - T_1' = 0,0537$.

Втрати світла в лінзі за рахунок відбиття після просвітлення знизились на $\Delta R_1 = R_1 - R_1' = 0,0499$ ($\approx 5\%$). До просвітлення коефіцієнт відбиття дорівнював $R_1 = 1 - T_1 \approx 0,10$ ($\approx 10\%$). Зменшення втрат на відбиття вдвічі вважається суттєвим.

ДИФРАКЦІЯ ЗАДАЧІ

положення межі світлового променя, виражена слабкіше. Вона не може підтримувати вихідний поперечний профіль променя, і він стає розбіжним.

7.5. Приклади розв'язування задач

Приклад 7.1. На діафрагму з круглим отвором діаметра $D = 6 \text{ мм}$ нормально падає плоска монохроматична хвиля ($\lambda = 600 \text{ нм}$). За діафрагмою на відстані $b = 3 \text{ м}$ розташований екран спостереження. Знайдіть:

- а) скільки зон Френеля вміщується в отворі діафрагми?
- б) яким буде центр дифракційної картини на екрані: світлим чи темним?
- в) інтенсивність світла у центрі картини порівняно з інтенсивністю за відсутності екрану;
- г) за якого радіуса отвору діафрагми у центрі картини буде найбільш темна пляма?
- д) яким буде центр тіні на екрані, якщо діафрагму з отвором замінити непрозорим диском такого самого діаметра?
- е) у який бік і на яку відстань необхідно змістити точку P спостереження від диска, щоб інтенсивність світла у плямі Пуассона була збільшена до максимуму?

Розв'язання. Приклад стосується дифракції Френеля на отворі (діаметр отвору $D = 2r_m = 6 \text{ мм}$; відстані $a = \infty$ і $b = 3 \text{ м}$; довжина хвилі $\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$):

- а) кількість зон Френеля m , які вміщуються в отворі діафрагми, знайдемо із формули (7.6):

$$m = \frac{r_m^2}{b\lambda} = \frac{(3 \cdot 10^{-3})^2}{3 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} = 5;$$

- б) амплітуду поля в точці P за $m = 5$ знаходимо за формулою (7.2) $A(P) \approx \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_5$. Оскільки дві амплітуди додаються, то в точці P буде спостерігатися світла пляма;

- в) зважаючи на отримане значення $A(P)$ і виходячи з того, що $A_1 \approx A_5$, маємо $A(P) \approx A_1 \Rightarrow I(P) \approx I_1$, де $I(P)$ – інтенсивність світла в точці P спостереження; I_1 – інтенсивність світла в точці P у випадку відкритої першої зони Френеля. Із теорії дифракції Френеля на круглому отворі відомо, що $I_1 = 4I_0$, де I_0 – інтенсивність світла на поверхні перешкоди. Таким чином, інтенсивність світла в точці P у разі відкритих п'яти зон Френеля дорівнює $I(P) \approx I_1 = 4I_0$, тобто інтенсивність $I(P)$ більша майже в 4 рази за інтенсивність світла на поверхні перешкоди;

- г) згідно із формулою (7.1) у точці P буде темно, коли в отворі розміщується парна кількість зон ($m = 2, 4, \dots$), а найбільш темно в точці P буде за $m = 2$ тому,

що $A_2 < A_4 < A_6 < \dots$. При цьому радіус отвору визначається за формулою (7.6)

$$r_2 = \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

д) результуюча амплітуда в центрі дифракційної картини за непрозорим диском за $m = 5$ закритих ним зон Френеля визначатиметься згідно з (7.2):

$$\begin{aligned} A(P) &= -A_6 + A_7 - A_8 + A_9 - \dots = \\ &= [A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + \dots] - [A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5] \approx \\ &\approx \frac{1}{2} A_1 - \left[\frac{1}{2} A_1 + \left(\frac{1}{2} A_1 - A_2 + \frac{1}{2} A_3 \right) + \left(\frac{1}{2} A_3 - A_4 + \frac{1}{2} A_5 \right) + \frac{1}{2} A_5 \right]. \end{aligned}$$

Згідно з методом Шустера значення виразів у круглих дужках дорівнює нулю. Тоді останнє співвідношення можна записати у вигляді

$$A(P) \approx \frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{2} A_5 = -\frac{1}{2} A_5.$$

Оскільки A_5 не набагато менше від A_1 , то в точці P буде спостерігатися світла пляма (пляма Пуассона) з інтенсивністю, трохи меншою від I_0 ;

е) оскільки амплітуди A_m хвилі у плямі Пуассона зменшуються зі зростанням m , то інтенсивність світла у плямі Пуассона також буде повільно зменшуватися. Тому інтенсивність у плямі Пуассона буде більша, якщо $m < 5$. Відповідні значення відстаней від диска до екрана, визначені за формулою (7.6) як $b_m = \frac{R^2}{m\lambda}$, дорівнюють

$$b_5 = \frac{(3 \cdot 10^{-3})^2}{5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} = 1,0 \text{ м}; \quad b_4 = 3,75 \text{ м}; \quad b_3 = 5 \text{ м}; \quad b_2 = 7,5 \text{ м}; \quad b_1 = 15 \text{ м}.$$

Найбільш світла пляма буде, коли диск закрий першу зону Френеля, $m = 1$ за $b_1 = 15 \text{ м}$. Таким чином, якщо знехтувати втратами світла, то можна стверджувати, що точку спостереження треба відсунути від диска – була відстань $b_5 = 1,0 \text{ м}$, нова відстань $b_1 = 15 \text{ м}$.

Приклад 7.2. Монохроматична плоска хвиля з інтенсивністю I_0 падає нормально на непрозорий диск, який для точки спостереження P закриває першу зону Френеля. Якою стане інтенсивність світла I_P у точці P після того, як у диска видалили:

а) половину (по діаметру);

б) половину зовнішньої половини першої зони Френеля (по діаметру)?

Розв'язання. При розв'язуванні задач про дифракцію Френеля на перешкодах з круговою симетрією зручно фронт падаючої хвилі розбити на окремі частини, які виділяються згідно з умовою конкретної задачі. Наприклад, у даній задачі предста-

вимо амплітуду світлового поля в точці спостереження P у вигляді двох векторів: вектора \vec{A}_1 , який відповідає амплітуді світлового поля, створеного першою зоною Френеля, і вектора \vec{A}_∞ , який представляє сумарний внесок усіх відкритих зон (у даному випадку – інших зон, починаючи з другої) (рис. 7.33).

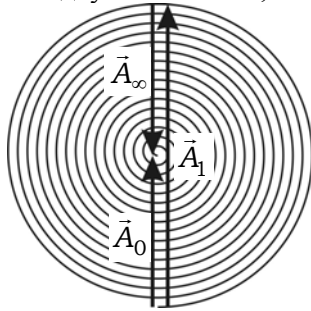


Рис. 7.33. Спіраль Френеля, яка описує дифракцію хвиль на диску

Зверніть увагу, що сума векторів відповідає вектору \vec{A}_0 – амплітуді повністю відкритого хвильового фронту $\vec{A}_1 + \vec{A}_\infty = \vec{A}_0$. Вочевидь наявність перешкоди ніяк не вплине на вектор \vec{A}_∞ . Розглянемо, що відбуватиметься з вектором \vec{A}_1 . Для цього згадаємо, як формується виток спіралі Френеля, який представляє внесок першої зони у збурення в точці P .

Перша зона Френеля розбивається на N вузьких кільцевих підзон однакової площі. Усі вони на векторній діаграмі представляються однаковими за модулем векторами \vec{a}_i (їх величина пропорційна площі окремої підзони), повернутими один відносно одного на кут $\Delta\varphi = \frac{\pi}{N}$ (відповідно до різниці фаз між ними). Зрозуміло, що сума цих векторів дорівнює \vec{A}_1 , а кут повороту останнього вектора відносно першого становить π (рис. 7.34):

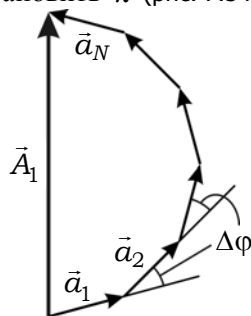


Рис. 7.34. До пояснення дії першої зони Френеля

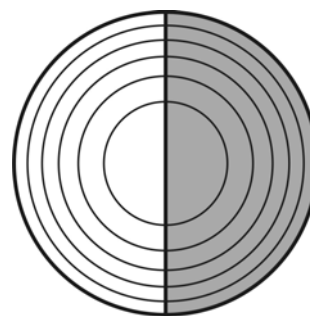


Рис. 7.35. До умови прикладу 7.2 (варіант (а))

а) за умовою задачі половина першої зони (по діаметру) перекривається непрозорою перешкодою (рис. 7.35). Це призводить до зменшення ефективної площі кож-

ної підзони вдвічі. Оскільки довжини векторів \vec{a}_i пропорційні площам відповідних підзон, то вони також зменшуються вдвічі. Зсув фаз $\Delta\phi$ між окремими підзонами залишається незмінним. У результаті вектор \vec{A}_1 також зменшиться вдвічі

$$\vec{A}'_1 = \frac{\vec{a}_1}{2} + \frac{\vec{a}_2}{2} + \dots + \frac{\vec{a}_N}{2} = \frac{\vec{A}_1}{2}.$$

Таким чином, амплітуду світлового поля в точці P будуть визначати два вектори $\vec{A}_p = \vec{A}_\infty + \vec{A}'_1$. Ці вектори приблизно однакові за модулем і направлені в протилежні боки, тому $\vec{A}_p \approx 0$. Відповідна інтенсивність також дорівнює нулю $I_p \approx 0$;

б) для цієї частини задачі (рис. 7.36) вектор \vec{A}_0 представимо як суму трьох векторів: \vec{A}_{11} – внесок внутрішньої половини першої зони Френеля; \vec{A}_{12} – внесок зовнішньої половини першої зони Френеля; \vec{A}_∞ – внесок усіх інших зон, починаючи з другої. На спіралі Френеля ці вектори розмістяться так, як показано на рис. 7.36. Знову ж таки $\vec{A}_{11} + \vec{A}_{12} + \vec{A}_\infty = \vec{A}_0$.

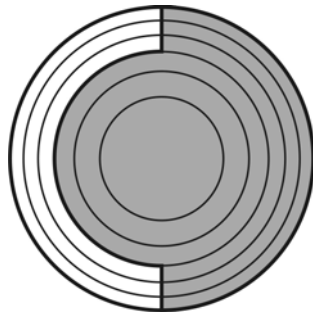


Рис. 7.36. До умови прикладу 7.2 (варіант (б)): частина диска, яка дає внесок в утворення плями Пуассона, затінена

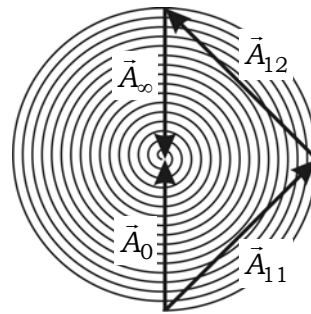


Рис. 7.37. Розташування векторів, що відповідають амплітудам хвиль, які беруть участь в утворенні плями Пуассона у випадку застосування перешкоди, зображений на рис. 7.36 (варіант (б) прикладу 7.2)

Проведемо аналіз того, як наявність перешкоди (рис. 7.37) вплине на кожний із цих векторів: \vec{A}_∞ не зміниться; внутрішня половина першої зони повністю перекривається, тому вектор \vec{A}_{11} внесок у збурення в точці P не внесе; \vec{A}_{12} подібно до пункту (а), зазнає втрат через зменшення вдвічі площ підзон, які його формують. Отже, $\vec{A}_p = \vec{A}_\infty + \frac{\vec{A}_{12}}{2}$. Складові вектори протилежні за напрямком.

Виразимо модулі обох векторів через амплітуду повністю відкритого хвильового фронту

$$A_{\infty} \approx A_0; \quad \frac{A_{12}}{2} = \frac{\sqrt{2}A_0}{2}.$$

Модуль результуючого вектора $A_p \approx \sqrt{A_{\infty}^2 - \left(\frac{A_{12}}{2}\right)^2} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$. Оскільки інтенсивність світла в точці спостереження пропорційна квадрату амплітуди світлового поля, то $I_p \approx \frac{I_0}{2}$.

Приклад 7.3. Плоска світлова хвиля з $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$ падає нормально на досить велику скляну пластинку, на протилежному боці якої зроблена кругла виїмка (рис. 7.38). Для точки спостереження P вона представляє собою перші півтори зони Френеля. Знайдіть глибину h виїмки, за якої інтенсивність світла в точці P буде: а) максимальною; б) мінімальною; в) рівною інтенсивності падаючого світла.

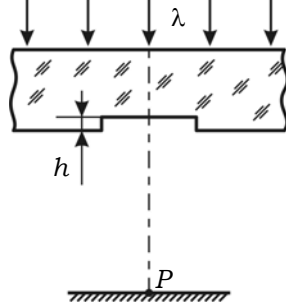


Рис. 7.38. До умови прикладу 7.3

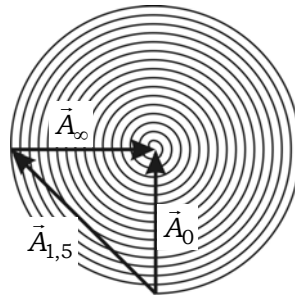


Рис. 7.39. Спіраль Френеля, коли відкрито 1,5 зони Френеля

Розв'язання. Відповідно до рекомендацій, наведених у прикладі 7.2, представимо амплітуду повністю відкритого фронту \vec{A}_0 у вигляді двох векторів: $\vec{A}_{1,5}$ – внесок у збурення в точці спостереження, який вносять перші півтори зони Френеля; \vec{A}_{∞} – внесок усіх інших зон. При цьому $\vec{A}_{1,5} + \vec{A}_{\infty} = \vec{A}_0$ (рис. 7.39). Поява виїмки призводить до того, що частина хвильового фронту, яка проходить за її межами, буде відставати за фазою на величину $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1)$ від частини хвильового фронту, яка поширюється в межах виїмки. На фазовій діаграмі це відставання можна зобразити поворотом вектора \vec{A}_{∞} проти годинникової стрілки на кут δ ;

а) для отримання максимальної інтенсивності (амплітуди) у точці P потрібно, щоб вектор $\vec{A}_{1,5}$ був направлений в один бік з вектором \vec{A}_{∞} . Тоді світлові поля, які пройшли крізь виїмку та поза нею, будуть складатись з максимально можливою сумарною амплітудою. Для виконання цієї умови необхідно, щоб вектор \vec{A}_{∞} повер-

нувся (рис. 7.40, а) на кут $\delta = \frac{3}{4}\pi + 2\pi m$, де $m = 0, 1, 2, 3 \dots$. Це буде можливо, якщо глибина виїмки h буде задовольняти умову

$$\frac{3}{4}\pi + 2\pi m = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1). \text{ Звідси } h = \frac{\lambda}{n-1} \left(m + \frac{3}{8} \right) = 1,2 \left(m + \frac{3}{8} \right) \text{ мкм.}$$

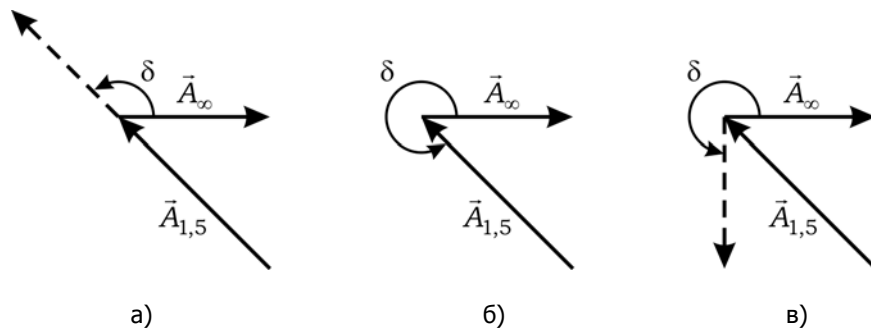


Рис. 7.40. До прикладу 7.3

Отже, щоб у точці P спостерігалась максимальна інтенсивність, виїмка повинна мати глибину, яка відповідає одному із таких значень $h(\text{мкм}) = 0,45; 1,65; 2,85 \dots$

б) щоб отримати в точці P мінімум інтенсивності, потрібно, щоб вектор \vec{A}_∞ був напрямлений у протилежний щодо вектора $\vec{A}_{1,5}$ бік (рис. 7.40, б). Тобто йому потрібно повернутись на кут $\delta = \frac{7}{4}\pi + 2\pi m$. Відповідна глибина виїмки дорівнює

$$h = \frac{\lambda}{n-1} \left(m + \frac{7}{8} \right) = 1,2 \left(m + \frac{7}{8} \right) \text{ мкм.}$$

Таким чином, щоб у точці P спостерігалась мінімальна інтенсивність, виїмка повинна мати глибину, яка відповідає одному із таких значень $h(\text{мкм}) = 1,05; 2,25; 3,45 \dots$

в) випадок, коли в точці P інтенсивність буде такою самою, як і інтенсивність падаючого світла ($A_P = A_0$), можлива у двох випадках. Перший відповідає глибині виїмки, за якої відставання за фазою набуває значень $\delta = 2\pi m$. Тобто вектор \vec{A}_∞ робить повний оберт (чи кілька повних обертів) і повертається у своє положення. Відповідна глибина виїмки $h = \frac{m\lambda}{n-1} = 1,2m \text{ мкм}$. Підставляючи числові значення, отримаємо $h(\text{мкм}) = 0; 1,2; 2,4; 3,6 \dots$. Існування другого випадку показано на

рис. 7.40, в. Вектор \vec{A}_∞ повертається на кут $\delta = \frac{3}{2}\pi + 2\pi m$. Глибина виїмки в цьому випадку дорівнює $h = \frac{\lambda}{n-1} \left(m + \frac{3}{4} \right) = 1,2 \left(m + \frac{3}{4} \right)$ мкм.

Таким чином, щоб у точці P інтенсивність світла дорівнювала інтенсивності падаючого світла, виїмка повинна мати глибину, що відповідає одному із таких значень $h(\text{мкм}) = 0,9; 2,1; 3,3 \dots$

Приклад 7.4. Монохроматична плоска хвиля з інтенсивністю I_0 падає на непрозору перешкоду у вигляді кільця. Внутрішній радіус кільця становить $R_1 = r_1 \frac{1}{\sqrt{2}}$, зовнішній – $R_2 = r_1 \sqrt{\frac{2}{3}}$. Знайдіть інтенсивність світла I в точці спостереження P , для якої r_1 – радіус першої зони Френеля.

Розв'язання. Скористатись формулою (7.2) не можна, оскільки не виконується умова, за якою вона введена – велика кількість відкритих зон Френеля. Внесок в інтенсивність у точці спостереження буде визначатись усім фронтом світлової хвилі, за винятком частини у вигляді кільця, крізь яке світло не проходить.

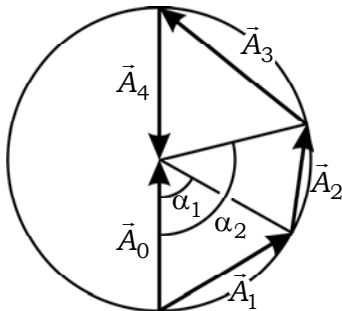


Рис. 7.41. До прикладу 7.4
(вибір кутів α_1 і α_2 довільний)

Розіб'ємо хвильовий фронт на чотири частини і представимо їх на спіралі Френеля (рис. 7.41). (Так само, як у попередніх прикладах знехтуємо зменшенням радіуса витка спіралі Френеля на одному оберті та апроксимуємо перший виток спіралі колом): \vec{A}_1 – амплітуда хвилі в точці спостереження від збурень, створених внутрішньою частиною першої зони Френеля, обмеженої радіусом $R_1 = \frac{r_1}{\sqrt{2}}$; \vec{A}_2 – амплітуда хвилі від збурень, створених кільцем, яке не пропускає світло (радіуси кільця – R_1 і R_2); \vec{A}_3 – амплітуда хвилі в точці спостереження від збурень, створених зовнішньою частиною першої зони Френеля; \vec{A}_4 – амплітуда хвилі в точці спостереження від збурень, створених усіма іншими, окрім першої, зонами Френеля; \vec{A}_0 – ампліту-

да падаючої на перешкоду хвилі. Результиуюча амплітуда \vec{A} у точці спостереження $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4$.

Розбиваючи окрему зону Френеля на кільцеві підзони, ми, фактично, розбиваємо відповідну гілку спіралі на окремі частини (дуги), довжини кожної з яких за Френелем пропорційні площі відповідної підзони. З іншого боку, довжину кожної такої дуги можна характеризувати центральним кутом α (рис. 7.41). Для всієї першої зони Френеля він, наприклад, дорівнює π . Таким чином, існує пропорційність між площею окремої підзони і відповідним центральним кутом.

Кути α_i , пропорційні відповідним площам хвильового фронту, можна визначити із пропорцій. Для першої зони Френеля $\pi r_1^2 \sim \alpha = \pi$, тоді $\alpha_1 = \frac{\pi R_1^2}{r_1^2} = \frac{\pi r_1^2}{2r_1^2} = \frac{\pi}{2}$;

$$\alpha_2 = \frac{\pi R_2^2}{r_1^2} = \frac{2\pi r_1^2}{3r_1^2} = \frac{2\pi}{3}.$$

У зв'язку з тим, що з рис. 7.41 знайдені значення α_1 та α_2 , проведемо модифікацію рис. 7.41, у якому величини обирались довільними, на рис. 7.42. Із рис. 7.42 можна зробити висновок про те, що $A_1 = \sqrt{2}A_0$; $A_3 = A_0$; $A_4 = A_0$.

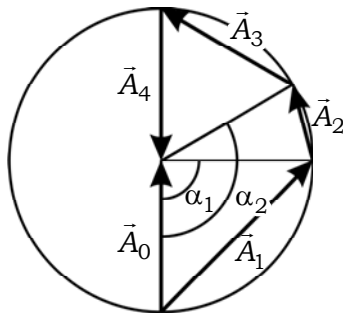


Рис. 7.42. До прикладу 7.4
(вибір кутів α_1 і α_2 уточнений)

Результиуючий вектор $\vec{A}(P)$ визначимо через його проекції на дві взаємно перпендикулярні осі – Ox та Oy :

$$\text{на вісь } Ox: A_x = A_1 \cos 45^\circ - A_3 \cos 30^\circ = A_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} A_0 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) A_0;$$

$$\text{на вісь } Oy: A_y = A_1 \sin 45^\circ + A_3 \sin 30^\circ - A_4 = A_0 + \frac{1}{2} A_0 - A_0 = \frac{A_0}{2}.$$

Інтенсивність у точці спостереження буде

$$I(P) \sim A^2(P) = A_x^2 + A_y^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 A_0^2 + \frac{A_0^2}{4} \approx 0,27 I_0.$$

Приклад 7.5. Плоска світлова хвиля з $\lambda = 0,65 \text{ мкм}$ падає нормально на велику скляну пластинку, на протилежному боці якої є виступ і непрозора смужка шириною $a = 0,3 \text{ мм}$ (рис. 7.43). Висоту виступу підібрано так, що в точці 2 на екрані інтенсивність світла максимально можлива. Знайдіть за допомогою спіралі Корню відношення інтенсивностей у точках 1 та 2.

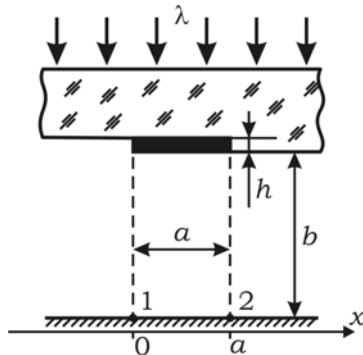


Рис. 7.43. До умови прикладу 7.5

Розв'язання. Для графічного визначення інтенсивності світла в точках 1 та 2 використаємо спіраль Корню (рис. 7.10). Представимо амплітуду світлового поля в точці 1 як результат складання двох векторів: вектора $\vec{A}_{1л}$, який характеризує внесок лівих (щодо точки спостереження 1) зон Шустера, і вектора $\vec{A}_{1п}$ – внесок правих зон. Як видно з рис. 7.43, для точки 1 частина правих зон перекрита непрозорою смужкою. Для того, щоб врахувати це при відшукуванні результуючої амплітуди, визначимо величину параметра α на спіралі Корню (рис. 7.10) за формулою (7.9):

$$\alpha = a \sqrt{\frac{2}{b\lambda}} = 0,3 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{2}{1,1 \cdot 0,65 \cdot 10^{-6}}} \approx 0,5.$$

Тепер вектори $\vec{A}_{1л}$ і $\vec{A}_{1п}$ можна зобразити на спіралі Корню (рис. 7.44, а).

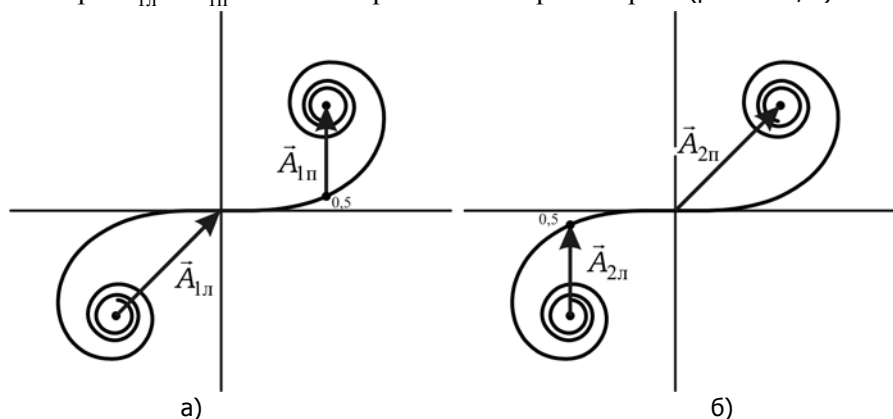


Рис. 7.44. Використання спіралі Корню для визначення амплітуд хвиль у точках 1 (а) і 2 (б) без урахування виступу (до прикладу 7.5)

Графічність методу спіралі Корню полягає в тому, що амплітуда світлового поля вважається пропорційною довжині вектора, зображеного на рисунку. Наприклад, амплітуда повністю відкритого хвильового фронту буде пропорційна довжині вектора, проведеного з лівого фокуса спіралі у правий фокус (для рис. 7.10 ця величина становить 70 мм). Вимірявши довжини векторів на рис. 7.44, а, отримаємо $A_{1л} \sim 20 \text{ мм}$, $A_{1п} \sim 12 \text{ мм}$.

Подібним чином можна представити й амплітуду світлового поля в точці 2, ураховуючи, що для неї будуть закриті частина лівих зон Шустера (рис. 7.43, б). Відповідні величини векторів $A_{2л} \sim 12 \text{ мм}$, $A_{2п} \sim 20 \text{ мм}$.

Наявність виступу призводить до того, що права частина хвильового фронту відставатиме за фазою від лівої частини на величину кута $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1)$. На векторній діаграмі це відповідатиме повороту векторів $\vec{A}_{1п}$ і $\vec{A}_{2п}$ на відповідний кут проти годинникової стрілки. За умовою прикладу в точці 2 спостерігається максимум. Це можливо, якщо відставання за фазою становитиме кут $\delta = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$ (рис. 7.45, а). У цьому разі напрямки векторів $\vec{A}_{2л}$ і $\vec{A}_{2п}$ збігаються, і це дає в точці 2 максимум інтенсивності світла. Таке саме відставання на кут $\delta = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$ для правих зон спостерігатиметься і для точки 1. У результаті вектори $\vec{A}_{1п}$ і $\vec{A}_{1л}$ будуть розташовані взаємно перпендикулярно (рис. 7.45, б).

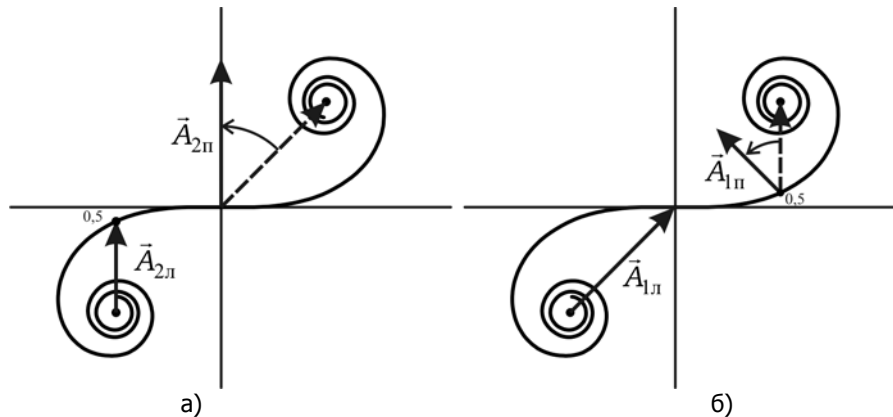


Рис. 7.45. Використання спіралі Корню для визначення амплітуд хвиль у точках 2 (а) та 1 (б) з урахуванням виступу (до прикладу 7.5)

Таким чином, амплітуда світлового поля в точці 2 пропорційна модулю вектора \vec{A}_2 : $A_2 = A_{2л} + A_{2п} = 12 + 20 = 32 \text{ мм}$. У точці 1:

$$A_1 = \sqrt{(A_{1л})^2 + (A_{1п})^2} = \sqrt{(20)^2 + (12)^2} = \sqrt{544} \text{ мм} \approx 23 \text{ мм}.$$

$$\text{Відношення інтенсивностей } \frac{I_2}{I_1} = \frac{(32)^2}{(23)^2} \approx 1,9.$$

Приклад 7.6. Світло з довжиною хвилі λ падає нормально на довгу прямокутну щілину шириною b . Знайдіть кутовий розподіл інтенсивності світла за умови фраунгоферової дифракції, а також кутове положення мінімумів.

Розв'язання. Розіб'ємо щілину на велику кількість вузьких паралельних смужок однакової ширини. Кожну з цих смужок можна розглядати як джерело хвиль однакової амплітуди. Окрім того, оскільки світло падає на щілину нормально, то і початкова фаза цих хвиль також буде однаковою.

Залежно від напрямку спостереження різниця фаз між крайніми елементами хвильового фронту в межах щілини становитиме $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \varphi$ (рис. 7.46).

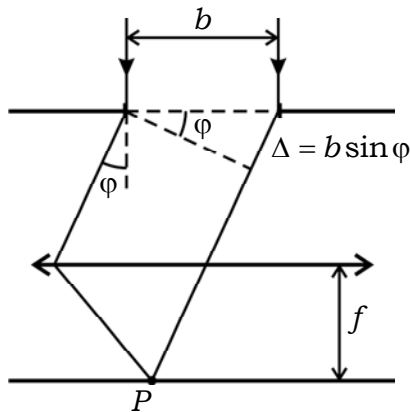


Рис. 7.46. До умови прикладу 7.6

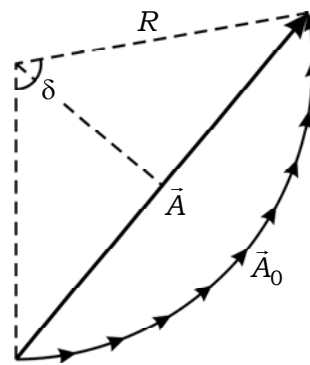


Рис. 7.47. Векторна діаграма, яка відповідає амплітудам падаючої (A_0) і дифрагрованої (A) хвиль: до прикладу 7.6

На векторній діаграмі (рис. 7.47) ланцюжок елементарних векторів, кожний із яких відповідає амплітуді світлового поля, створеного в точці спостереження P окремою смужкою, представляє собою дугу певного радіуса R із центральним кутом δ . Довжина цієї дуги \vec{A}_0 дорівнює амплітуді хвилі, що падає, і може бути записана як $A_0 = R\delta$. Вектор \vec{A} відповідає амплітуді дифрагрованої хвилі і, як видно з рис. 7.47, дорівнює $A = 2R \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$.

Таким чином, $A = A_0 \frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2}$. Ураховуючи зв'язок між амплітудою та інтенсив-

ністю світла, отримаємо кутовий розподіл дифрагованого світла $I = I_0 \frac{\sin^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2}$.

Зі збільшенням кута дифракції φ ланцюжок векторів буде закручуватись дедалі більше. За $\delta = 2\pi, 4\pi, \dots, 2\pi m$ ланцюжок буде перетворюватись на коло, а результуючий вектор обертатиметься на нуль. Звідси отримуємо умову дифракційних мінімумів $b \sin \varphi = m\lambda$.

Приклад 7.7. При нормальному падінні світла на дифракційну ґратку шириною 10мм виявилось, що компоненти жовтої лінії натрію (589,0 і 589,6нм) спостерігаються роздільно, починаючи з п'ятого порядку спектра. Знайдіть:

а) період цієї дифракційної ґратки;

б) за якої ширини дифракційної ґратки з таким самим періодом можна роздільно спостерігати в третьому порядку дублет спектральної лінії з $\lambda = 460,0\text{нм}$, компоненти якої відрізняються на 0,13нм?

Розв'язання: а) роздільна здатність дифракційної ґратки визначається (7.21) як $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = m \frac{L}{d}$, де m – порядок дифракції, у якому проводяться спектральні дослідження; L – ширина дифракційної ґратки; d – її період. Звідси величина періоду ґратки дорівнює

$$d = \frac{m \cdot L \cdot \delta\lambda}{\lambda} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,6 \cdot 10^{-9}}{589,3 \cdot 10^{-9}} \approx 50\text{мкм}.$$

Звертаємо увагу на те, що через близькість значень довжин хвиль для спектральних компонентів значення λ , яке підставлялось у формулу для визначення d , було взяте як середнє арифметичне;

б) для іншої дифракційної ґратки, яка має такий самий період d , але іншу ширину L_2 , і яка використовується для дослідження інших спектральних ліній, роздільна здатність буде іншою, і визначатиметься як $R_2 = \frac{\lambda_2}{\delta\lambda_2} = m_2 \frac{L_2}{d}$. Звідси

$$L_2 = \frac{\lambda_2 \cdot d}{\delta\lambda_2 \cdot m_2} = \frac{460,0 \cdot 10^{-9} \cdot 50 \cdot 10^{-6}}{0,13 \cdot 10^{-9} \cdot 3} \approx 60\text{мм}.$$

Приклад 7.8. Дифракційна ґратка освітлюється нормально падаючим паралельним пучком світла з довжиною хвилі $\lambda = 500\text{нм}$. Відстань між максимумами першого порядку, які проєктуються на екран лінзою із фокусною відстанню

$f' = 1$ м, дорівнює $l = 20,2$ см. Довжина ґратки $L = 10$ см. Визначте: а) період ґратки; б) кількість штрихів на 1 мм; в) кутову та лінійну ширини нульового максимуму; г) кутову та лінійну дисперсії ґратки у спектрі першого порядку; д) роздільну здатність ґратки у спектрі першого порядку.

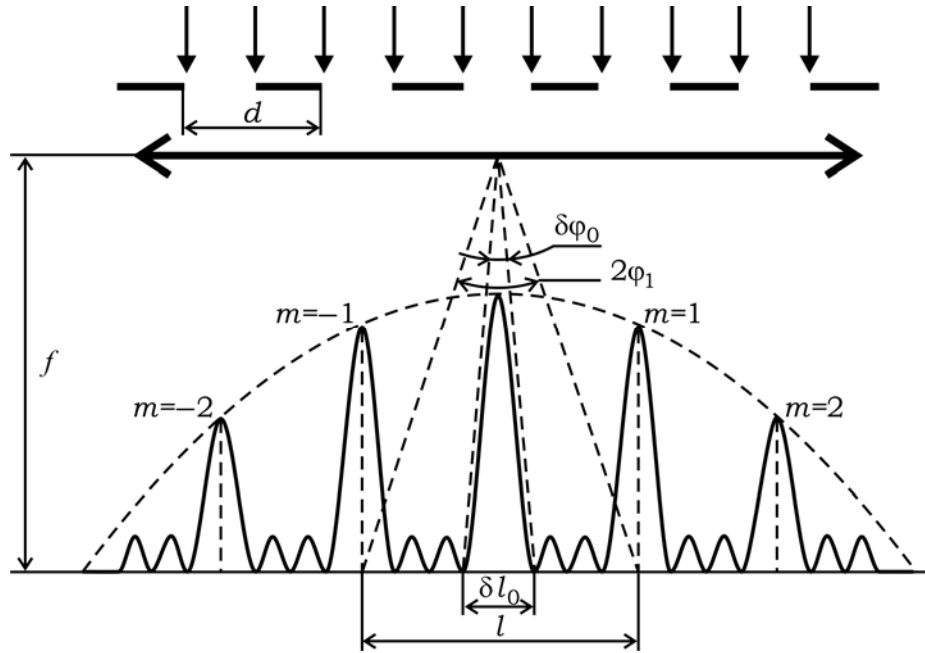


Рис. 7.48. До прикладу 7.8

Розв'язання: а) із умови головних максимумів (7.17) за $m = 1$ маємо $d = \frac{\lambda}{\sin \varphi_1^{\max}}$. Із рис. 7.48 маємо, що для φ_1^{\max} , як для малого кута, $\sin \varphi_1^{\max} \approx \tan \varphi_1^{\max} = \frac{l}{2f'}$. (Додаткове завдання: переконайтесь, що припущення про мализну кута φ_1^{\max} справедливе), тоді

$$d \approx \frac{2\lambda f'}{l} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^6}{20,2 \cdot 10^4} = 4,95 \text{ мкм};$$

б) кількість штрихів на 1 мм ґратки становить

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{4,95 \cdot 10^{-3}} \approx 200 \frac{\text{штрих}}{\text{мм}};$$

в) кутова ширина нульового максимуму – це кут між найближчими до нульового максимуму мінімумами $\delta\varphi_0 = 2\varphi_1^{\min}$ (рис. 7.47). Із умови мінімумів (7.18), якщо кут φ_1^{\min} – малий, маємо $\sin \varphi_1^{\min} \approx \varphi_1^{\min} = \frac{\lambda}{dN}$. Тоді

$$\delta\varphi_0 = 2\frac{\lambda}{dN} = 2\frac{\lambda}{L} = 2\frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{100} = 10^{-5} \text{ рад} = 2,06''.$$

Лінійна ширина нульового головного максимуму $\delta l_0 = f' \cdot \delta\varphi_0 = 10^6 \cdot 10^{-5} = 10 \text{ мкм}$;

г) кутову дисперсію визначаємо за формулою (7.19) за $m = 1$:

$$D_\varphi = \frac{1}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4,95^2 - 0,5^2}} = 0,2 \frac{\text{рад}}{\text{мкм}}.$$

Лінійну дисперсію визначаємо за формулою (7.20):

$$D_l = f' \cdot D_\varphi = 10^3 \cdot 0,2 = 200 \frac{\text{мм}}{\text{мкм}};$$

д) роздільну здатність визначаємо за формулою (7.21):

$$R = mN = m \frac{L}{d} = 1 \frac{10^5}{4,95} \approx 2,0 \cdot 10^4.$$

Приклад 7.9. Плоска світлова хвиля падає на плоску відбиваючу дифракційну ґратку з періодом $d = 2 \text{ мкм}$ під кутом $\theta = 80^\circ$. Знайдіть кут φ_{\max} , що відповідає максимуму найбільшого порядку, якщо на ґратку падає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 546 \text{ нм}$.

Розв'язання. Якщо плоска світлова хвиля падає на дифракційну ґратку під кутом θ , то положення головних максимумів визначається рівнянням (7.23):

$$d(\sin \theta - \sin \varphi_m) = m\lambda.$$

Визначимо максимальний порядок спектра, виходячи з того, що максимальний кут відхилення променів ґраткою не може перевищувати $\pm 90^\circ$, тобто $\sin \varphi_{\max} \leq \pm 1$. Тоді з рівняння (7.23) можна записати

$$m_{\max} \leq \frac{d}{\lambda}(1 + \sin \theta) = \frac{2}{0,546}(1 + \sin 80^\circ) = 7,27.$$

Число m_{\max} має бути цілим, тобто $m_{\max} = 7$.

Максимальний кут φ_{\max} відхилення променів, який відповідає останньому дифракційному максимуму, визначимо зі співвідношення (7.21):

$$d(\sin \theta - \sin \varphi_{\max}) = m_{\max} \lambda.$$

Звідки

$$\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{\lambda}{d} m_{\max} - \sin \theta\right) = \arcsin\left(\frac{0,546}{2} \cdot 7 - \sin 80^\circ\right) = 67^\circ 51'.$$

Приклад 7.10. Якою має бути ширина основи тригранної призми з дисперсією $\left| \frac{dn}{d\lambda} \right| = 0,10 \text{ мкм}^{-1}$, щоб вона мала таку саму роздільну здатність, як і дифракційна ґратка, яка складається з 10^4 штрихів, у другому порядку спектра?

Розв'язання. Згідно з (7.21) роздільна здатність будь-якого спектрального приладу (в оптичному діапазоні – це переважно дифракційні ґратки, інтерферометри та призми) кількісно визначається відношенням довжини хвилі λ , біля якої виконується вимірювання, до мінімальної ділянки $\delta\lambda$, яка відповідає критерію Релея $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$.

Для дифракційної ґратки $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN = m \frac{L}{d}$, де m – порядок дифракції, у якому проводяться спектральні дослідження; L – ширина дифракційної ґратки; d – період дифракційної ґратки. Для умови нашого прикладу $R_{\text{ДГ}} = 2 \cdot 10^4$.

Для тригранної призми, яка використовується як спектральний прилад, роздільна здатність визначається за формулою

$$R_{\text{пр}} = b \cdot \frac{dn}{d\lambda}, \quad (7.36)$$

де b – ширина основи призми; $\left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$ – дисперсія показника заломлення матеріалу, з

якого зроблена призма. Із (7.36) $b = \frac{R}{\frac{dn}{d\lambda}}$. Для нашого прикладу

$$b = \frac{2 \cdot 10^4}{0,1} \text{ мкм} = 20 \text{ см}.$$

Приклад 7.11. У телескоп, діаметр об'єктива якого $D = 1000 \text{ мм}$, спостерігають зірки. Знайдіть найменшу кутову відстань $\delta\varphi$ між зірками, за якої їх дифракційні зображення спостерігаються роздільно для довжини хвилі світла $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$.

Розв'язання. Розглянемо рис. 7.23. Згідно з критерієм Релея зображення двох точкових джерел випромінювання буде видно роздільно, якщо дифракційний максимум зображення однієї зірки збігається з першим дифракційним мінімумом зображення другої зірки. Математично це виглядає так:

$$\delta\varphi = \varphi_E = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \frac{0,55 \cdot 10^{-3}}{1000} = 0,67 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 0,14''.$$

Приклад 7.12. На якій найбільшій відстані (ℓ_{max}) до групи предметів, відстань між якими $d = 1 \text{ м}$, їх видно роздільно:

- а) неозброєним оком, діаметр зіниці якого 3 мм ;
 б) за допомогою зорової труби, яка має об'єктив діаметром 38 мм ?
 в) Розрахуйте кутовий діаметр дифракційного зображення точки, яке формується оком і об'єктивом зорової труби.

Розв'язання. Два точкові джерела світла (предмети) будуть спостерігатися роздільно, якщо кут $\delta\psi = \frac{d}{\ell}$, під яким вони спостерігаються, буде більшим за граничне кутове розділення оптичної системи (14.3), тобто $\frac{d}{\ell} \geq 1,22 \frac{\lambda}{D}$. Звідси

$$\ell_{\max} = \frac{d \cdot D}{1,22\lambda}.$$

Будемо вважати, що $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$. Тоді:

а) для ока $\ell_{\max} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{1,22 \cdot 0,55 \cdot 10^{-6}} \approx 4,5 \text{ км};$

б) для зорової труби $\ell_{\max} = \frac{1 \cdot 38 \cdot 10^{-3}}{1,22 \cdot 0,55 \cdot 10^{-6}} \approx 56,5 \text{ км};$

в) кутовий діаметр дифракційного зображення дорівнює кутовому діаметру кружка Ері $\delta\psi_0 = 2\varphi_E = 2,44 \frac{\lambda}{D}$.

Для ока $\delta\psi_0 = 2,44 \frac{0,55 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-3}} \approx 0,45 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 1,5'.$

Для зорової труби $\delta\psi_0 = 2,44 \frac{0,55 \cdot 10^{-6}}{38 \cdot 10^{-3}} \approx 0,35 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 7''.$

Приклад 7.13. Визначте роздільну здатність мікроскопа для "сухого" об'єктива з числовою апертурою $A = 0,09$ і роздільну здатність для того самого об'єктива, але з масляною імерсією ($n = 1,6$). Довжина хвилі світла $\lambda = 546 \text{ нм}$.

Розв'язання. Роздільна здатність – це обернена величина до мінімально роздільного розміру об'єкта спостереження, що визначається формулами (7.29) та (7.31):

$$R = \frac{1}{a_{\min}} = \frac{2n \sin \sigma_A}{\lambda},$$

де $\sin \sigma_A = 0,09$. Тоді для "сухого" об'єктива маємо

$$R_1 = \frac{2 \cdot 0,09}{546 \cdot 10^{-6}} = 330 \text{ мм}^{-1},$$

а для імерсійного об'єктива

$$R_2 = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 0,09}{546 \cdot 10^{-6}} = 528 \text{ мм}^{-1}.$$

ФОРМУЛИ ФРЕНЕЛЯ ЗАДАЧІ

5.4. Приклади розв'язування задач

Приклад 5.1. Переконайтесь, що формули Френеля відповідають закону збереження енергії.

Розв'язання. Розглянемо проходження світла через елементарну площадку $d\sigma$ на межі двох прозорих діелектриків з показниками заломлення $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$ та $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ (рис. 5.10).

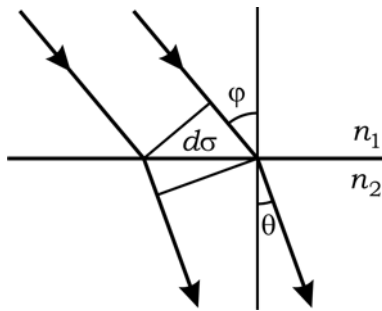


Рис. 5.10. До прикладу 5.1

За законом збереження енергії падаючої на таку межу хвилі дорівнює сумі енергій відбитої та заломленої хвиль $W_0 = W_1 + W_2$. Енергію, яка переноситься світловою хвилею, можна характеризувати за допомогою вектора Умова–Пойнтінга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$. Модуль цієї величини кількісно дорівнює енергії, яка за одиницю часу переноситься через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку поширення. Ураховуючи зв'язок $\sqrt{\mu}H = \sqrt{\epsilon}E$ і те, що для оптичного діапазону $\mu \approx 1$,

отримаємо, що модуль вектора Умова–Пойнтінга $S = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon} E^2$.

Запишемо закон збереження енергії для межі двох діелектриків:

$$\frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon_1} (E_0)^2 \cdot dS \cos \varphi = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon_1} (E_1)^2 \cdot dS \cos \varphi + \frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon_2} (E_2)^2 \cdot dS \cos \theta,$$

де E_0, E_1, E_2 – амплітуди падаючої, відбитої та заломленої хвиль, відповідно. Перепишемо цей вираз у вигляді

$$1 = \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^2 + \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{E_2}{E_0} \right)^2 \frac{\cos \theta}{\cos \varphi}.$$

Неполяризоване світло можна представити у вигляді двох складових: s - та p -компонентів. Формули Френеля встановлюють зв'язок між амплітудами падаючої (E_0), відбитої (E_1) і заломленої (E_2) хвиль. Для s -компонента закон збереження

енергії запишеться у вигляді $1 = r_s^2 + d_s^2 \frac{n_2 \cos \theta}{n_1 \cos \varphi}$, де $r_s \equiv \frac{E_{1s}}{E_{0s}}$ і $d_s \equiv \frac{E_{2s}}{E_{0s}}$ – коефіцієнти Френеля для s -компонентів відбитої та заломленої хвиль, відповідно.

За формулами Френеля $r_s = \frac{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \theta}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \theta}$, а $d_s = \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \theta}$. Не важко пересвідчитись, що підстановка цих виразів у закон збереження енергії перетворює його на тотожність.

Аналогічно можна показати, що і для p -компонента світлової хвилі закон збереження енергії також виконується.

Виконання закону збереження енергії окремо для s - і p -компонентів свідчить про незалежність s - та p -поляризацій (s -компонент не переходить у p -компонент, і навпаки).

Через коефіцієнти Френеля визначаються коефіцієнт відбиття $R = r^2$ і коефіцієнт пропускання $T = \frac{n_2 \cos \theta}{n_1 \cos \varphi} d^2$. Тоді закон збереження енергії записується у вигляді $R + T = 1$.

Доведення закону збереження енергії значно спрощується для випадку нормального падіння ($\varphi = \theta = 0$). У цьому випадку коефіцієнти відбиття та пропускання не залежать від стану поляризації падаючого випромінювання й визначаються як

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \text{ та } T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}, \text{ відповідно. При цьому } R \text{ інколи називають відби-}$$

ваючою здатністю, а T – поверхневою прозорістю. Підставивши вирази для R і T у вираз $R + T = 1$, не важко переконатись у його справедливості.

Приклад 5.2. На поверхню води під кутом Брюстера падає промінь плоскополяризованого світла. Площина коливань світлового вектора становить кут 45° з площиною падіння. Знайдіть коефіцієнт відбиття.

Розв'язання. У загальному випадку коефіцієнт відбиття R визначається за формулою $R = \frac{I_R}{I_0}$. Для випадку, який відповідає умові прикладу (кут падіння дорівнює куту Брюстера), коли p -компонент відбитого світла відсутній, величина

$$R = \frac{I_{Rs}}{I_0}.$$

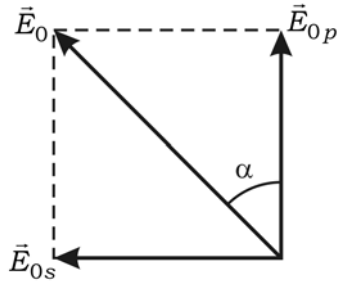


Рис. 5.11. До прикладу 5.2

Щоб скористатись формулами Френеля, з урахуванням кута α – азимута поляризації падаючого світла, який пов'язує амплітуди падаючої хвилі (E_0) та її s -компонента (E_{0s}) (рис. 5.11) через співвідношення $E_{0s} = E_0 \cdot \sin \alpha$, запишемо робочу формулу для коефіцієнта відбиття у вигляді

$$R = \frac{I_{Rs}}{I_{0s}} \cdot \sin^2 \alpha. \quad (5.29)$$

Скористаємось (5.10):

$$\begin{aligned} R &= \frac{I_{Rs}}{I_{0s}} \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2(\varphi - \theta)}{\sin^2(\varphi + \theta)} \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha (\sin \varphi \cdot \cos \theta - \cos \varphi \cdot \sin \theta)^2}{(\sin \varphi \cdot \cos \theta + \cos \varphi \cdot \sin \theta)^2} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta)^2}{(\sin^2 \varphi + \sin^2 \theta)^2} = \sin^2 \alpha \left[\frac{\sin^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \theta} - 1 \right)}{\sin^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \theta} + 1 \right)} \right]^2 = \sin^2 \alpha \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2. \end{aligned}$$

Для значень величин, наведених в умові цього прикладу,

$$R = \left[\frac{(1,33)^2 - 1}{(1,33)^2 + 1} \right]^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 0,038.$$

Приклад 5.3. Вузкий пучок природного світла інтенсивністю I_0 падає під кутом Брюстера на поверхню товстої плоско-паралельної прозорої пластинки. При цьому від верхньої поверхні відбивається $\rho = 0,080$ світлового променя. Знайдіть інтенсивності променів 1, 2, 3, 4 (рис. 5.12).

Розв'язання. Насамперед покажемо, якщо умова Брюстера виконується для променя 0, що падає на першу грань пластинки, то вона виконується й для променя 2, який падає на другу грань пластинки.

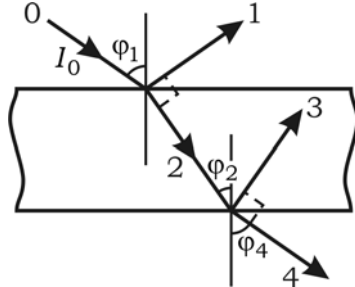


Рис. 5.12. До умови прикладу 5.3

За умовою прикладу: $\operatorname{tg} \varphi_{1Б} = \frac{n_2}{n_1}$, де n_1 і n_2 – показники заломлення середовища, з якого промінь падає на пластинку, і самої пластинки, відповідно. Якщо скористатись законом Снеліуса $n_1 \sin \varphi_{1Б} = n_2 \sin \varphi_2$ та об'єднати його із законом Брюстера для першої межі поділу:

$$\operatorname{tg} \varphi_{1Б} = \frac{\sin \varphi_{1Б}}{\cos \varphi_{1Б}} = \frac{\frac{n_2}{n_1} \sin \varphi_2}{\cos \varphi_{1Б}} = \frac{n_2}{n_1},$$

то можна дійти висновку, що $\frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_{1Б}} = 1 \Rightarrow \sin \varphi_2 = \cos \varphi_{1Б}$. Із цього та з рівності

кутів φ_4 і $\varphi_{1Б}$ випливає, що $\sin \varphi_2 = \cos \varphi_4$. Останнє свідчить про те, що $\varphi_2 + \varphi_4 = \pi/2$, тобто падаючий на другу межу промінь і заломлений на ній промінь становлять прямий кут, а це й є необхідною та достатньою умовою закону Брюстера $\varphi_2 = \varphi_{2Б}$, що й необхідно було довести.

Падаючий промінь природного світла можна замінити його енергетичним еквівалентом – двома лінійно поляризованими у взаємно перпендикулярних площинах променями з інтенсивностями $I_{\parallel} \equiv I_p$ та $I_{\perp} \equiv I_s$. Інтенсивності обох променів однакові й дорівнюють половині інтенсивності падаючого променя природного світла $I_p = I_s = I_0/2$. Таким чином будемо розв'язувати приклад, розбивши його на дві частини: для p - та s -компонентів окремо (рис. 5.13).

1. Для p -компонента (рис. 5.13, а). Оскільки промінь падає на поверхню пластинки під кутом Брюстера, p -компонента променя не відбивається (коефіцієнт відбиття для p -компонента $R_p = 0$), а тільки заломлюється: інтенсивність p -компонента променя 1 дорівнює $I_{1p} = 0$.

За умовою прикладу пластинка прозора, світло при поширенні в ній не поглинається. Якщо немає відбиття і поглинання, то інтенсивність променя не буде змінюватись $I_{2p} = \frac{I_0}{2}$. Але попереднє доведення того, що кут φ_2 є кутом Брюстера, при-

водить до того, що і промінь 2 у цьому випадку не відбивається від другої межі поділу, а лише заломлюється, тобто $I_{4p} = I_0 / 2$. Отже, інтенсивність p -компонента променя не змінюється на всьому шляху поширення променя.

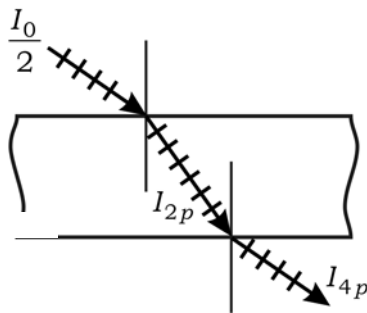
2. Для s -компонента (рис. 5.13, б). Інтенсивність s -компонента променя 1: $I_{1s} = \frac{I_0}{2} \cdot R_s$, де R_s – коефіцієнт відбиття від першої межі поділу для s -компонента.

Скористаємось тим, що при виконанні умови Брюстера коефіцієнт відбиття для s -компонента $R_s = 2R$, де R – коефіцієнт відбиття для природного світла. Тоді

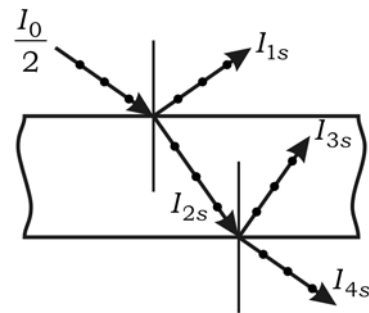
$$I_{1s} = \frac{I_0}{2} \cdot 2R = I_0 \cdot R.$$

Інтенсивність s -компонента променя 2: $I_{2s} = \frac{I_0}{2} \cdot T_s$. Коефіцієнт пропускання T_s розраховують через R_s за формулою (5.4): $T_s = 1 - R_s$. Тоді

$$I_{2s} = \frac{I_0}{2} \cdot (1 - R_s) = \frac{I_0}{2} \cdot (1 - 2R).$$



а)



б)

Рис. 5.13. Хід променів p (а) і s (б) складових поляризації: до прикладу 5.3

Інтенсивність s -компонента променя 3:

$$I_{3s} = I_{2s} \cdot 2R = \frac{I_0}{2} \cdot (1 - 2R) \cdot 2R = I_0 \cdot R(1 - 2R)$$

Інтенсивність s -компонента променя 4:

$$\begin{aligned} I_{4s} &= I_{2s} - I_{3s} = \frac{I_0}{2} \cdot (1 - 2R) - I_0 \cdot R(1 - 2R) = \\ &= \frac{I_0}{2} \cdot (1 - 2R)(1 - 2R) = \frac{I_0}{2} \cdot (1 - 2R)^2. \end{aligned}$$

Розглянувши поведінку окремих частин (s - і p - компонентів) променів 1, 2, 3, 4, повернемося до розгляду "синтезованих" променів 1, 2, 3, 4.

Інтенсивність променя 1: $I_1 = I_{1s} + I_{1p} = I_0 \cdot R = 0,080 I_0$.

Інтенсивність променя 2: $I_2 = I_{2s} + I_{2p} = I_0(1 - R) = 0,920 I_0$.

Інтенсивність променя 3: $I_3 = I_{3s} + I_{3p} = I_0(1 - 2R)R = 0,067 \cdot I_0$.

Інтенсивність променя 4: $I_4 = I_{4s} + I_{4p} = I_0(1 + 2R^2 - 2R) = 0,827 \cdot I_0$.

Приклад 5.4. Об'єктив складається з двоопуклої ($n_1 = 1,52$) і вгнуто-плоскої ($n_2 = 1,60$) лінз з однаковими радіусами сферичних поверхонь, які розділені повітряним проміжком. Визначте коефіцієнт пропускання об'єктива. Як зміняться втрати на відбиття об'єктива, якщо між лінзами відсутній повітряний проміжок (має місце оптичний контакт)?

Розв'язання. Об'єктив має чотири заломлюючі поверхні. Його коефіцієнт пропускання згідно із формулою (5.13) визначається таким співвідношенням:

$T_\Sigma = (1 - R_1)^2 (1 - R_2)^2$, де коефіцієнт відбиття на одній поверхні першої лінзи

$$R_1 = \left(\frac{1 - n_1}{1 + n_1} \right)^2 = \left(\frac{1 - 1,52}{1 + 1,52} \right)^2 = 0,0426,$$

а коефіцієнт відбиття на одній поверхні другої лінзи

$$R_2 = \left(\frac{1 - n_2}{1 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - 1,6}{1 + 1,6} \right)^2 = 0,0532.$$

Тоді $T_\Sigma = (1 - 0,0426)^2 (1 - 0,0532)^2 = 0,8217$. Втрати на відбиття в об'єктиві $R_\Sigma = 1 - T_\Sigma = 0,1783$.

Якщо між лінзами існує оптичний контакт, то такий об'єктив має три заломлюючі поверхні, і коефіцієнт пропускання на межі двох лінз дорівнює

$$R_{12} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{1,52 - 1,6}{1,52 + 1,6} \right)^2 = 0,0006.$$

Сумарний коефіцієнт пропускання об'єктива визначається за формулою

$$T'_\Sigma = (1 - R_1)(1 - R_{12})(1 - R_2).$$

Тоді $T'_\Sigma = (1 - 0,0426)(1 - 0,0006)(1 - 0,0532) = 0,9059$.

Отже, втрати на відбиття в такого об'єктива будуть меншими на величину $\Delta T_\Sigma = T'_\Sigma - T_\Sigma = 0,9059 - 0,8217 = 0,0842$, тобто $\approx 8,4\%$.